كتاب الجزء الأول

المتتاليات والإثبات بالتدريج

الرياضيات

للثالث الثانوي العلمي

600 →

إعداد

أ. رامز عنيزان

مقدمة

يسعدني وأنا أضع بين أيديكم أوراق العمل التي تشمل الوحدة الأولى كاملة من كتاب الجزء الأول لمادة الرياضيات وحدة « **تذكرة بالمتتاليات والإثبات بالتدريج** » والتي تُعد رديف للكتاب المدرسي المُقرر الذي يبقى هو المرجع الأساسي للطالب بهدف توفير الجهد والوقت للوصول إلى أعلى مستوى في فهم مادة الرياضيات.

شملت أوراق العمل جميع أفكار المقرر المدرسي بالإضافة إلى إلى أفكار سبق ذكرها في المراحل الدراسية السابقة لا سيما مرحلة التعليم الثانوي بحيث تكون هذه الأوراق شاملة للبحث المذكور بإذن الله عز وجل.

تم ضمن أوراق العمل أنجاز حل جميع التمارين والمسائل الواردة ضمن المقرر المدرسي بالإضافة إلى ذكر بعض أسئلة الدورات وتمارين من تأليفي داعمة للأفكار المذكورة وحلّها بطريقة أرجو من الله عز وجل و بعد توفيقه أن تصل إلى الطالب بطريقة مبسّطة وكاملة بحيث يجد الطالب سهولة بفهم التمرين و ينال من خلالها العلامة الكاملة لدرجة السؤال بالامتحان النهائي.

في الختام:

يقول الإمام الشافعي:

فإنْ أصبتُ فلا عُجْبٌ ولاغَرَرُ
وإنْ نقصتُ فإنَّ الناسَ ما كملوا
والكامل الله في ذاتٍ وفي صفةٍ
وناقص الذاتِ لم يمل له عملُ

الكتاب الوحيد الذي خلا من الأغلاط هو القرآن الكريم أيّ قد يوجد بعض الأغلاط والسهوات التي قد ترد ضمن هذه الأوراق وبعد التدقيق والتعديل تجاوزت بعضها آملاً من الله تعالى أنّ لا يتبقى غيرها، فإن نجحت فهذا رضى من الله، وإنْ أخطأت فخطأي أرده على نفسي فليس هناك عمل كامل فالكامل هو الله.

والحمدُ لله ربِّ العالمين

للتواصل معي عبر تطبيق التلجرام عبر المُعرّف:
@RAMEZHAMA

قناتي على تطبيق التلجرام عبر المُعرّف:
@baklorea24

إنجاز : أ. رامز عنيزان

تعريف المتتالية: هي تابع مجموعة تعريفه هي مجموعة تعريف الأعداد الطبيعية $\mathbb{N}$. أو أية مجموعة جزئية غير منتهية منها من النمط $\{n_0, n_0+1 n_0+2, ...\}$ حيث $n_0 \in \mathbb{N}$. نرمز إلى المتتالية بالرمز $(u_n)_{n\geq 0}$ أو $(u_n)_{n\geq 0}$. ونسمّي u_n حد المتتالية ذا الدليل n أو نسمّيه بالحد العام.

طرق تعريف المتتالية:

1) تعريف صحيح للحد u_n.

اي تكتب u_n بدلالة n تفيد في حسابه، ويكتب : $u_n = f(n)$ حيث f تابع معرف على $[n_0, +\infty[$

مثال:

نعرف المتتاليات $(u_n)_{n\geq 0}$ و $(v_n)_{n\geq 0}$ و $(w_n)_{n\geq 1}$ وفق: $u_n = \frac{1}{n+1}$ و $v_n = (-1)^n$ و $w_n = \sqrt{n-1}$. احسب أول أربع حدود من كل متتالية.

الحل:

$$u_0 = \frac{1}{0+1} = 1\,, u_1 = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}\,, u_2 = \frac{1}{2+1} = \frac{1}{3}\,, u_3 = \frac{1}{3+1} = \frac{1}{4}$$

$$v_0 = (-1)^0 = 1\,, v_1 = (-1)^1 = -1\,, v_2 = (-1)^2 = 1\,, v_3 = (-1)^3 = -1$$

ملاحظة: للمتتالية عدد لا نهائي من الحدود بقطع النظر عن قيم هذه الحدود كما رأينا في المتتالية السابقة حدود تلك المتتالية لا تأخذ إلا القيمتين $+1$ و -1.

$$w_1 = \sqrt{1-1} = 0\,, w_2 = \sqrt{2-1} = 1\,, w_3 = \sqrt{3-1} = \sqrt{2}\,, w_4 = \sqrt{4-1} = \sqrt{3}$$

ملاحظة: ليس من الضروري دليل البداية n يساوي القيمة 0 كما رأينا في المتتالية السابقة بدأت بالحد ذي الدليل 1.

2) تعريف المتتالية بالتدريج.

أي أن يحسب الحد ذو الدليل n بدلالة الحدود التي سبقته، أي نُعطى قيمة الحد الأول في المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ ليكن u_0 ونعطى علاقة تسمى بالعلاقة التدريجية $u_{n+1} = f(u_n)$ تفيد في حساب كلّ حد من حدود المتتالية بدلالة الحد أو الحدود التي سبقته.

مثال:

تأمل المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرفة وفق: $\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = u_n - 1 \end{cases}$ احسب أول ثلاثة حدود منها.

الحل:

العلاقة المُعطاة تسمح بحساب حدود المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ واحداً إثر الآخر.

$$u_1 = u_0 - 1 = 2$$
$$u_2 = u_1 - 1 = 1$$
$$u_3 = u_2 - 1 = 0$$

جهة اطراد متتالية.

بفرض لدينا المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ عندئذ:

نوع الاطراد للمتتالية u_n	متزايدة	متزايدة تماماً	متناقصة	متناقصة تماماً	ثابتة
الشرط الواجب توفره.	$u_{n+1} \geq u_n$	$u_{n+1} > u_n$	$u_{n+1} \leq u_n$	$u_{n+1} < u_n$	$u_{n+1} = u_n$

نطلق على المتتاليات التي تحقق أحد الشروط السابقة اسم متتالية **مطردة**، ويبين لنا مثال المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرفة وفق $u_n = (-1)^n$ أنّهُ توجد متتاليات **غير مطردة** لأن حدودها ... $1, -1, 1, -1,$ ونطلق على اسم المتتالية السابقة متتالية متناوبة.

دراسة اطراد متتالية: لدينا ثلاثة طرق لدراسة الاطراد:

1) دراسة إشارة الفرق $(u_{n+1}-u_n)$.

ندرس إشارة المقدار $u_{n+1}-u_n$ ونميز الحالات التالية:

$u_{n+1}-u_n>0$	$u_{n+1}-u_n\geq 0$	$u_{n+1}-u_n<0$	$u_{n+1}-u_n\leq 0$	$u_{n+1}-u_n=0$
المتتالية متزايدة تماماً	المتتالية متزايدة	المتتالية متناقصة تماماً	المتتالية متناقصة	المتتالية ثابتة

مثال:

نعرف المتتاليات $(u_n)_{n\geq 0}$ و $(v_n)_{n\geq 0}$ و $(w_n)_{n\geq 1}$ وفق: $u_n=3-n$ و $v_n=n^2-n$ و $w_n=\frac{n^2+1}{2n}$. ادرس اطراد كل من المتتاليات التالية السابقة.

الحل:

$$u_{n+1}=3-(n+1)=2-n \Longrightarrow u_{n+1}-u_n=2-n-(3-n)=-1<0$$

إذاً $(u_n)_{n\geq 0}$ متتالية متناقصة تماماً.

$$v_{n+1}=(n+1)^2-(n+1)=n^2+2n+1-n-1=n^2+n$$

$$v_{n+1}-v_n=n^2+n-(n^2-n)=2n\geq 0$$

إذاً $(v_n)_{n\geq 0}$ متتالية متزايدة.

$$w_{n+1}=\frac{(n+1)^2+1}{2(n+1)}=\frac{n^2+2n+2}{2(n+1)} \Longrightarrow w_{n+1}-w_n=\frac{n^2+2n+2}{2(n+1)}-\frac{n^2+1}{2n}$$

$$w_{n+1}-w_n=\frac{n^3+2n^2+2n-(n^3+n+n^2+1)}{2n(n+1)}=\frac{n^2+n-1}{2n(n+1)}$$

لأن المقدار $2n(n+1)$ موجب فإنّ إشارة $w_{n+1}-w_n$ تماثل إشارة n^2+n-1. بما أنّ $n\geq 1$ فإنّ $n-1\geq 0$ و $n^2>0$ إذاً n^2+n-1 موجب تماماً في حالة $n\geq 1$. إذاً $(w_n)_{n\geq 1}$ متتالية متزايدة تماماً.

2) مقارنة النسبة $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ مع العدد $\{1\}$ عندما تكون حدود المتتالية موجبة تماماً.

$\frac{u_{n+1}}{u_n}>1$	$\frac{u_{n+1}}{u_n}\geq 1$	$\frac{u_{n+1}}{u_n}<1$	$\frac{u_{n+1}}{u_n}\leq 1$
المتتالية متزايدة تماماً	المتتالية متزايدة	المتتالية متناقصة تماماً	المتتالية متناقصة

مثال:

نعرف المتتاليات $(u_n)_{n\geq 0}$ و $(v_n)_{n\geq 0}$ و $(w_n)_{n\geq 1}$ وفق: $u_n=\left(\frac{2}{3}\right)^n$ و $v_n=\sqrt{3n+1}$ و $w_n=\frac{1}{n^3}$. ادرس اطراد كل من المتتاليات السابقة.

الحل:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}}{\left(\frac{2}{3}\right)^n}=\frac{\left(\frac{2}{3}\right)\times\left(\frac{2}{3}\right)^n}{\left(\frac{2}{3}\right)^n}=\frac{2}{3}<1$$

إذاً $(u_n)_{n\geq 0}$ متتالية متناقصة تماماً.

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{\sqrt{3(n+1)+1}}{\sqrt{3n-1}} = \frac{\sqrt{3n+4}}{\sqrt{3n-1}} > 1$$

إذاً $(v_n)_{n\geq 0}$ متتالية متزايدة تماماً.

$$\frac{w_{n+1}}{w_n} = \frac{\frac{1}{(n+1)^3}}{\frac{1}{n^3}} = \frac{n^3}{(n+1)^3} < 1$$

إذاً $(w_n)_{n\geq 0}$ متتالية متناقصة تماماً.

3) كتابة $u_n = f(n)$، <u>إن أمكن</u>، ثمّ دراسة اطراد التابع f.

فإذا كان التابع f مطرداً على المجال $]n_0, +\infty[$ كانت جهة اطراد $(u_n)_{n\geq n_0}$ هي نفسها جهة اطراد f أي:

- إذا كان f متزايد تماماً أو متزايد أي $(f'(x) \geq 0)$ كانت المتتالية $(u_n)_{n\geq n_0}$ متزايدة تماماً.
- إذا كان f متناقص تماماً أو متناقص أي $(f'(x) \leq 0)$ كانت المتتالية $(u_n)_{n\geq n_0}$ متناقصة تماماً.

<u>تذكرة</u>: أهم قواعد الاشتقاق الذي ستحتاجها ضمن دراستك هذا الفصل حيث a و b و n أعداد حقيقية وأيضاً g و h توابع أخرى:

المشتق $f'(x)$	التابع $f(x)$
$f'(x) = ng^{n-1}.g^n$	$f(x) = g^n$
$f'(x) = a$	$f(x) = ax + b$
$f'(x) = g' + h'$	$f(x) = g + h$
$f'(x) = \frac{g'.h - g.h'}{h^2}$	$f(x) = \frac{g}{h}$
$f'(x) = \frac{a}{2\sqrt{ax+b}}$	$f(x) = \sqrt{ax+b}$

مثال:

نعرف المتتاليات $(u_n)_{n\geq 1}$ و $(v_n)_{n\geq 0}$ وفق: $u_n = (n-1)^2$ و $v_n = \frac{3n-1}{n+2}$. ادرس اطراد كل المتتاليتان السابقتان.

الحل:

من أجل المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ ونتأمل التابع $f(x) = (x-1)^2$ المعرف على $\mathbb{R}$. عندها $f'(x) = 2(x-1)$، ومنه نجد في حالة $x \geq 1$ يكون $f'(x) \geq 0$ أيّ أنّ التابع f متزايد تماماً على المجال $]1, +\infty[$ فالمتتالية $(u_n)_{n\geq 1}$ متزايدة تماماً بدءاً من الحد ذي الدليل $n_0 = 1$.

من أجل المتتالية $(v_n)_{n\geq 0}$ ونتأمل التابع $f(x) = \frac{3x-1}{x+2}$ المعرف على $\mathbb{R}\backslash\{-2\}$. فهو معرف على $[0, +\infty[$ بوجه خاص عندها :

$$f'(x) = \frac{3(x+2) - 1(3x-1)}{(x+2)^2} = \frac{3x+6-3x+1}{(x+2)^2} = \frac{7}{(x+2)^2} > 0$$

ومنه نجد في حالة $x \geq 0$ يكون $f'(x) > 0$ أيّ أنّ التابع f متزايد تماماً على المجال $]0, +\infty[$ فالمتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ متزايدة تماماً على هذا المجال.

<u>المتتالية الحسابية.</u>

نقول إنّ المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ **<u>متتالية حسابية</u>** إذا وجد عدد حقيقي r وتحققت العلاقة التدريجية $\boxed{u_{n+1} = u_n + r}$ أياً كان العدد الطبيعي n.

ويسمى العدد r أساس المتتالية الحسابية $(u_n)_{n\geq 0}$.

$$0 \xrightarrow{+3} 3 \xrightarrow{+3} 6 \xrightarrow{+3} 9 \xrightarrow{+3} \dots \xrightarrow{+3} u_n \xrightarrow{+3} u_{n+1} \Rightarrow \boxed{3-0=6-3=9-6=\cdots=u_{n+1}-u_n=3} \Rightarrow \boxed{r=3}$$

- لبرهان أنّ متتالية معطاة هي متتالية حسابية يمكن أن نبرهن أن الفرق بين أي حدين متتاليين هو عدد ثابت أيّ $\boxed{u_{n+1}-u_n=r}$.
- العلاقة بين أي حدين أياً كان العددان الطبيعيان m و p حيث $m \geq p$ فإنّ $\boxed{u_m = u_p + (m-p)r}$.
- عبارة $(u_n)_{n\geq n_0}$ بدلالة n تعطى وفق: $\boxed{u_n = u_{n_0} + (n-n_0)r}$ حيث n_0 هو دليل البدء.

مثال: أثبت أنّ المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرفة وفق: $u_n = 3n - 14$ متتالية حسابية ثمّ عين اساسها.

الحل:

$$u_{n+1} - u_n = 3(n+1) - 14 - (3n-14) = 3n + 3 - 14 - 3n + 14 = 3$$

إذا $(u_n)_{n\geq 0}$ متتالية حسابية أساسها $r = 3$.

مثال: لتكن $(u_n)_{n\geq 0}$ متتالية حسابية فيها $u_5 = 20$ و $u_8 = 29$ عيّن r، ثمّ اكتب عبارة $(u_n)_{n\geq 0}$ بدلالة n.

الحل:

$$u_m = u_p + (m-p)r \Rightarrow u_8 = u_5 + (8-5)r \Rightarrow 29 = 20 + 3r \Rightarrow \boxed{r=3}$$

لكتابة عبارة $(u_n)_{n\geq 0}$ بدلالة n علينا ايجاد u_0 بالإستفادة من العلاقة السابقة:

$$u_0 = u_5 + (0-5)(3) = 20 - 15 \Rightarrow u_0 = 5$$

ومنه عبارة $(u_n)_{n\geq 0}$ بدلالة n تكتب وفق:

$$u_n = u_0 + nr \Rightarrow \boxed{u_n = 5 + 3n}$$

<u>مجموع حدود متوالية من متتالية حسابية:</u>

إذا كان S مجموع n حداً متتالياً أولها a وآخرها ℓ من حدود متتالية حسابية كان:

$$\boxed{S = \frac{n(a+\ell)}{2}}$$

كيف نحسب عدد الحدود n ؟

- القفزة بين دليل كل حدين متتالين من المجموع يساوي الواحد $S = u_m + u_{m+1} + \cdots + u_p$: عندها $\boxed{n = p - m + 1}$.
- القفزة بين دليل كل حدين متتالين تكون متساوية $S = u_m + u_{m+k} + u_{m+2k} + \cdots u_p$: عندها $\boxed{n = \frac{p-m}{k} + 1}$.

مثال: ما هو عدد حدود المجموع $S = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots u_n$.

الحل: دليل الحد الأول: $m = 0$ و دليل الحد الأخير $p = n$ بالتالي : $n = n - 0 + 1 = n + 1$.

مثال: ما هو عدد حدود المجموع $S = u_1 + u_3 + u_5 + \cdots u_9$.

الحل: دليل الحد الأول $m = 1$ و دليل الحد الأخير $p = n$ و مقدار القفزة $k = 2$ بالتالي : $n = \frac{9-1}{2} + 1 = 5$.

مثال: احسب بدلالة n المجموع في المتتالية الحسابية $S_n = 1 + 2 + 3 + \cdots n$ أياً كانت $n \geq 1$.

الحل: عدد الحدود $n = n - 1 + 1 = n$ قيمة الحد الأول $a = 1$ قيمة الحد الأخير $\ell = n$ ومنه:

$$S_n = \frac{n(a+\ell)}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$$

مثال: نتأمل المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرفة بالعلاقة: $u_n = 3n + 5$. المطلوب:

1) أثبت أنّ $(u_n)_{n\geq 0}$ متتالية حسابية، ثمّ عيّن أساسها وحدها الأول.
2) احسب المجموع $S_1 = u_0 + u_1 + \cdots u_9$
3) احسب بدلالة n المجموع $S_2 = u_0 + u_1 + \cdots u_n$.

الحل:

(1

$$u_{n+1} - u_n = 3(n+1) + 5 - (3n+5) = 3n + 3 + 5 - 3n - 5 = 3$$

إذاً $(u_n)_{n\geq 0}$ متتالية حسابية أساسها $r = 3$ وحدها الأول $u_0 = 5$.

(2 عدد الحدود $n_1 = 9 - 0 + 1 = 10$، قيمة الحد الأول $a_1 = u_0 = 5$، قيمة الحد الأخير $\ell_1 = u_9 = 32$ ومنه:

$$S = \frac{n_1(a_1 + \ell_1)}{2} = \frac{10(5+32)}{2} = 185$$

(3 عدد الحدود $n_2 = n - 0 + 1 = n + 1$، قيمة الحد الأول $a_2 = u_0 = 5$، قيمة الحد الأخير $\ell_2 = u_n = 3n + 5$ ومنه:

$$S = \frac{n_2(a_2 + \ell_2)}{2} = \frac{(n+1)(5+3n+5)}{2} = \frac{3n^2 + 10n + 3n + 10}{2} = \frac{1}{2}(3n^2 + 13n + 10)$$

مثال: لتكن المتتالية الحسابية $(u_n)_{n\geq 0}$ علماً أنّ $u_0 = -3$ و $u_{14} = 25$. المطلوب:

1) احسب r، ثمّ اكتب عبارة u_n بدلالة n.
2) احسب المجموع $S = u_0 + u_1 + \cdots u_{14}$.

الحل:

(1

$$u_m = u_p + (m-p)r \Rightarrow u_{14} = u_0 + (14 - 0)r \Rightarrow 25 = -3 + 14r \Rightarrow \boxed{r = 2}$$

عبارة u_n تكتب وفق القانون $u_n = u_0 + nr$ أيّ: $u_n = 2n - 3$.

(2 عدد الحدود $n = 15$ وقيمة أول حد $a = u_0 = -3$ وقيمة آخر حد $\ell = u_{14} = 25$ ومنه:

$$S = \frac{n(a+\ell)}{2} = \frac{15(-3+25)}{2} = 165$$

ملاحظة هامة جداً:

إذا كان لدينا a و b و c ثلاث حدود متعاقبة من متتالية حسابية فهذه الحدود الثلاث تحقق العلاقات:

$$\boxed{2b = a + c} \Leftrightarrow \boxed{b = \frac{a+c}{2}}$$

مثال: ليكن a و b و c ثلاث حدود متعاقبة لمتتالية حسابية تحقق: $a + b + c = 36$ و $a \times b \times c = 1428$. عين a و b و c.

الحل: بما أنّ a و b و c ثلاث حدود متعاقبة من متتالية حسابية فهي تحقق $2b = a + c$ بإضافة العدد b لكلا الطرفين $3b = a + b + c$ وفرضاً $a + b + c = 36$ فنجد أنّ $3b = 36$ ومنه: $\boxed{b = 12}$. نعوض قيمة b في المعادلات المفروضة:

$$a + c = 24 \Rightarrow a = 24 - c \dots\dots (1)$$

$$a \times c = 119 \dots\dots (2)$$

بتعويض العلاقة (1) في العلاقة (2):

$$c(24 - c) = 119 \Rightarrow c^2 - 24c + 119 = 0 \Rightarrow (c - 7)(c - 17) = 0$$

ومنه: إما $\boxed{c = 7}$ نعوض في العلاقة (1) لنجد أنّ $\boxed{a = 17}$.
أو $\boxed{c = 17}$ نعوض في العلاقة (1) لنجد أنّ $\boxed{a = 7}$.

مثال: لتكن المتتالية الحسابية $(u_n)_{n\geq1}$ فيها: $u_1 + u_2 + u_3 = 9$ و $u_1 \times u_2 \times u_3 = 15$. علماً أنّ $u_1 < u_2$ المطلوب:

1) عيّن الحدود الثلاث السابقة.
2) عيّن أساس المتتالية $(u_n)_{n\geq1}$، ثمّ اكتب عبارة $(u_n)_{n\geq1}$ بدلالة n. (((انتبه أنّ دليل البدء $n_0 = 1$)))
3) احسب المجموع $S = u_1 + u_5 + u_9 + \dots + u_{33}$.

الحل:

1) نلاحظ أنّ u_1 و u_2 و u_3 ثلاث حدود متعاقبة من متتالية حسابية فهي تحقق $2u_2 = u_1 + u_3$ بإضافة العدد u_2 لكلا الطرفين $3u_2 = u_1 + u_2 + u_3$ وفرضاً $u_1 + u_2 + u_3 = 9$ فنجد أنّ $3u_2 = 9$ ومنه: $\boxed{u_2 = 3}$. نعوض قيمة u_2 في المعادلات المفروضة:

$$u_1 + u_3 = 6 \Rightarrow u_1 = 6 - u_3 \dots\dots (1)$$

$$u_1 \times u_3 = 5 \dots\dots (2)$$

بتعويض العلاقة (1) في العلاقة (2):

$$u_3(6 - u_3) = 5 \Rightarrow (u_3)^2 - 6u_3 + 5 = 0 \Rightarrow (u_3 - 1)(u_3 - 5) = 0$$

ومنه: إما $u_3 = 1$ نعوض في العلاقة (1) لنجد أنّ $u_1 = 5$ وهذا مرفوض حسب الفرض لأنّ $u_1 > u_2$.
أو $\boxed{u_3 = 5}$ نعوض في العلاقة (1) لنجد أنّ $\boxed{u_1 = 1}$ وهذا مقبول حسب الفرض لأنّ $u_1 < u_2$.

2)

$$u_m = u_p + (m - p)r \Rightarrow u_2 = u_1 + (2 - 1)r \Rightarrow 3 = 1 + r \Rightarrow \boxed{r = 2}$$

عبارة u_n تكتب وفق القانون $u_n = u_1 + (n - 1)r$ أيّ: $u_n = 1 + 2(n - 1) = 2n - 1$.

3) دليل الحد الأول $m = 1$ و دليل الحد الأخير $p = 33$ و مقدار القفزة $k = 4$ بالتالي : $n = \frac{33-1}{2} + 1 = 9$.

قيمة الحد الأول $a = u_1 = 1$ وقيمة الحد الأخير $\ell = u_{33} = 65$ وعدد الحدود مما سبق $n = 9$ ومنه:

$$S = \frac{n(a + \ell)}{2} = \frac{9(1 + 65)}{2} = 297$$

المتتالية الهندسية.

نقول إنّ المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ **متتالية هندسية** إذا وجد عدد حقيقي q وتحقق العلاقة التدريجية $\boxed{u_{n+1} = q.u_n}$ أياً كان العدد الطبيعي n.

ويسمى العدد q أساس المتتالية الهندسية $(u_n)_{n\geq 0}$.

$$1 \xrightarrow{\times 3} 3 \xrightarrow{\times 3} 9 \xrightarrow{\times 3} 27 \xrightarrow{\times 3} \dots \xrightarrow{\times 3} u_n \xrightarrow{\times 3} u_{n+1} \Rightarrow \boxed{\frac{3}{1} = \frac{9}{3} = \frac{27}{9} \dots = \frac{u_{n+1}}{u_n} = 3} \Rightarrow \boxed{q = 3}$$

- لبرهان أنّ متتالية معطاة هي متتالية هندسية يمكن أن نبرهن أن ناتج قسمة أي حدين متتاليين هو عدد ثابت أيّ $\boxed{\frac{u_{n+1}}{u_n} = q}$.
- العلاقة بين أي حدين أياً كان العددان الطبيعيان m و p حيث $m \geq p$ فإنّ $\boxed{u_m = u_p.q^{m-p}}$.
- عبارة $(u_n)_{n\geq n_0}$ بدلالة n تعطى وفق: $\boxed{u_n = u_{n_0}.q^{n-n_0}}$ حيث n_0 هو دليل البدء.

مثال: أثبت أنّ المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرفة وفق: $u_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$ متتالية هندسية ثمّ عين اساسها.

الحل:

$$u_{n+1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} = \left(\frac{1}{2}\right)^n \times \left(\frac{1}{2}\right)^1 = \frac{1}{2}u_n \Rightarrow \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{2}$$

إذا $(u_n)_{n\geq 0}$ متتالية هندسية أساسها $q = \frac{1}{2}$.

مثال: لتكن $(u_n)_{n\geq 0}$ متتالية هندسية فيها $u_1 = 6$ و $u_5 = 96$ عيّن q، ثمّ اكتب عبارة $(u_n)_{n\geq 0}$ بدلالة n.

الحل:

$$u_m = u_p.q^{m-p} \Rightarrow u_5 = u_1.q^{5-1} \Rightarrow 96 = 6 \times q^4 \Rightarrow q^4 = 16 \Rightarrow \boxed{q = 2}$$

لكتابة عبارة $(u_n)_{n\geq 0}$ بدلالة n علينا ايجاد u_0 بالإستفادة من العلاقة السابقة:

$$u_0 = u_1(2)^{0-1} = 6 \times 2^{-1} \Rightarrow u_0 = 3$$

ومنه عبارة $(u_n)_{n\geq 0}$ بدلالة n تكتب وفق:

$$u_n = u_0 q^n \Rightarrow \boxed{u_n = 3(2)^n}$$

مجموع حدود متوالية من متتالية هندسية:

إذا كان S مجموع n حداً متتالياً أولها a وآخرها من حدود متتالية هندسية أساسها q علماً أنّ $q \neq 1$ كان:

$$\boxed{S = a \times \frac{1 - q^n}{1 - q}}$$

✓ في ما سبق تعلمنا طريقة حساب عدد الحدود n.

ملاحظة هامة جداً:

القفزة بين دليل كل حدين متتالين تكون متساوية عندها أيّ k عندها عندما نعوض قيمة الأساس نعوضه بالشكل q^k ويصبح القانون بالشكل:

$$\boxed{S = a \times \frac{1 - (q^k)^n}{1 - q^k}}$$

حيث n عدد الحدود وتعلمنا كيف نحسبه عند وجود قفزة معينة بين دليل كل حدين وفي ما يلي أمثلة توضح ما تكلمنا عنه:

مثال: $(u_n)_{n\geq 0}$ **متتالية هندسية أساسها** $q=2$ **فيها** $u_0=1$**. المطلوب:** (دورة عام 2018 الثانية)

احسب u_3 **ثمّ احسب المجموع** $S=u_3+u_4+u_5+u_6+u_7$.

الحل:

$$u_m=u_p.q^{m-p}\Longrightarrow u_3=u_0.(2)^{3-0}\Longrightarrow u_3=1\times 8\Longrightarrow \boxed{u_3=8}$$

قيمة الحد الأول $a=u_3=8$ والأساس $q=2$ وعدد الحدود $n=7-3+1=5$ ومنه:

$$S=a\times\frac{1-q^n}{1-q}=S=8\times\frac{1-(2)^5}{1-2}=284$$

مثال: $(u_n)_{n\geq 0}$ **متتالية هندسية أساسها** $q=2$ **فيها** $u_0=\frac{1}{2}$**. المطلوب:**

1- **احسب المجموع** $S_1=u_0+u_2+u_4+\cdots+u_{10}$.

2- **احسب** u_1 **ثمّ احسب المجموع** $S_2=u_1+u_3+u_5+\cdots+u_9$.

3- **احسب المجموع** $S=u_0+u_1+u_2+\cdots+u_{10}$ **بطريقتين.**

الحل:

1- المجموع S_1 فيه $k_1=2$ ومنه عدد الحدود $n_1=\frac{10-0}{2}+1=6$ وقيمة أول حد $a_1=u_0=\frac{1}{2}$ ومنه :

$$S_1=a_1\times\frac{1-(q^{k_1})^n}{1-q^{k_1}}=\frac{1}{2}\times\frac{1-(2^2)^6}{1-2^2}=\frac{1365}{2}$$

2- بما أنّ المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ متتالية هندسية فهي تحقق $u_m=u_pq^{m-p}$ ومنه لحساب u_1 نضع:

$$u_1=u_0q^{1-0}=\frac{1}{2}\times 2=1$$

إذاً المجموع S_2 فيه $k_2=2$ ومنه عدد الحدود $n_2=\frac{9-1}{2}+1=5$ وقيمة أول حد $a_2=u_1=1$ ومنه :

$$S_2=a_2\times\frac{1-(q^{k_2})^{n_2}}{1-q^{k_2}}=1\times\frac{1-(2^2)^5}{1-2^2}=341$$

3- **الطريقة الأولى:**

المجموع S فيه عدد الحدود $n=10-0+1=11$ وقيمة أول حد $a=u_0=\frac{1}{2}$ ومنه :

$$S=a\times\frac{1-q^n}{1-q}=\frac{1}{2}\times\frac{1-(2)^{11}}{1-2}=\frac{2047}{2}$$

الطريقة الثانية:

نلاحظ أنّ المجموع S هو ناتج جمع المجموعين S_1 و S_2 أيّ

$$S=S_1+S_2=\frac{1365}{2}+341=\frac{1365+682}{2}=\frac{2047}{2}$$

ملاحظة هامة جداً:

إذا كان لدينا a و b و c ثلاث حدود متعاقبة من متتالية هندسية فهذه الحدود الثلاث تحقق العلاقات:

$$\boxed{b^2 = a \times c}$$

مثال: ليكن a و b و c ثلاث حدود متعاقبة لمتتالية هندسية تحقق: $a + b + c = 63$ و $a \times b \times c = 1728$. عين a و b و c.

الحل: بما أنّ a و b و c ثلاث حدود متعاقبة من متتالية هندسية فهي تحقق $b^2 = a \times c$ نضرب بالعدد b كلا الطرفين $b^3 = a \times b \times c$ وفرضاً $a \times b \times c = 1728$ فنجد أنّ $b^3 = (12)^3$ ومنه: $\boxed{b = 12}$. نعوض قيمة b في المعادلات المفروضة:

$$a + c = 51 \Longrightarrow a = 51 - c \ldots\ldots (1)$$

$$a \times c = 144 \ldots\ldots (2)$$

بتعويض العلاقة (1) في العلاقة (2):

$$c(51 - c) = 144 \Longrightarrow c^2 - 51c + 144 = 0 \Longrightarrow (c - 3)(c - 48) = 0$$

ومنه: إما $\boxed{c = 3}$ نعوض في العلاقة (1) لنجد أنّ $\boxed{a = 48}$.

أو $\boxed{c = 48}$ نعوض في العلاقة (1) لنجد أنّ $\boxed{a = 3}$.

تذكرة بسيطة للإثبات بالتدريج:

مبدأ الأثبات بالتدريج : نكتب الخاصة $E(n)$ التي تتعلق بالعدد الطبيعي n والتي نرغب بإثبات صحتها أياً كان $n \geq n_0$ ولإثبات صحة $E(n)$ نتبع الخطوات:

1- نثبت صحة الخاصة من أجل $n = n_0$، أي (نعوض بدل كل n العدد n_0 ونثبت أنه القضية صحيحة من أجل n_0)
2- نفرض صحة القضية $E(n)$ من أجل $n \geq n_0$
3- نبرهن صحة القضية $E(n+1)$ من أجل $n \geq n_0$

ب

تدرب صفحة 18

السؤال الأول:

ليكن $u_n = \frac{2^n}{3^{n+1}}$ في حالة $n \in \mathbb{N}$. أثبت أنّ المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ متتالية هندسية وجد أساسها .

الحل: نوجد $u_{n+1} = \frac{2^{n+1}}{3^{n+2}} = \frac{2\times 2^n}{3\times 3^{n+1}} = \frac{2}{3} \times \frac{2^n}{3^{n+1}} = \frac{2}{3}u_n$

ومنه المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ متتالية هندسية أساسها $q = \frac{2}{3}$

السؤال الثاني:

الأسئلة الآتية تتعلق بمتتاليات حسابية أو هندسية:

-1 $(u_n)_{n\geq 0}$ متتالية حسابية فيها $u_2 = 41$ و $u_5 = -13$ احسب u_{20}.

الحل: المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ حسابية فهي تحقق:

$$u_m = u_p(m - p)r \Leftrightarrow u_5 = u_2 + (5 - 2)r$$

$$-13 = 41 + 3r \Longrightarrow \boxed{r = -18}$$

ولحساب u_{20} نعوض بنفس العلاقة السابقة:

$$u_{20} = u_2 + (20 - 2)r = 41 + (18)(-18) = -283$$

2- $(u_n)_{n\geq 0}$ متتالية هندسية فيها $u_7 = \frac{1}{1080}$ و $u_{10} = \frac{25}{2197}$ احسب u_{30}.

الحل: المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ هندسية فهي تحقق:

$$u_m = u_p q^{m-p} \Leftrightarrow u_{10} = u_7 q^{10-7}$$

$$\frac{25}{2197} = \frac{1}{1080} q^3 \Rightarrow q^3 = \left(\frac{30}{13}\right)^3 \Rightarrow \boxed{q = \frac{30}{13}}$$

ولحساب u_{30} نعوض بنفس العلاقة السابقة:

$$u_{30} = u_{10} q^{30-10} = \frac{25}{2197}\left(\frac{30}{13}\right)^{20}$$

♥ يقبل دون حساب في هذه الحالة.

3- $(u_n)_{n\geq 0}$ متتالية حسابية أساسها 3 وفيها $u_1 = -2$ احسب u_n بدلالة n، واستنتج قيمة المجموعين $u_{30} + u_{31} + u_{32}$ و $u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_{20}$.

الحل: المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ حسابية لكتابة عبارة u_n بدلالة n نطبق:

$$u_n = u_m + (n-m)r \Rightarrow u_n = u_1 + (n-1)3 = -2 + 3n - 3 \Rightarrow \boxed{u_n = 3n - 5}$$

- حساب المجموع $u_{30} + u_{31} + u_{32}$:

عدد الحدود $n_1 = 3$ و قيمة الحد الأول $a_1 = u_{30} = 3(30) - 5 = 85$ وقيمة الحد الأخير $\ell_1 = u_{32} = 3(32) - 5 = 91$ ومنه:

$$S_1 = \frac{n_1(a_1 + \ell_1)}{2} = \frac{3(85+91)}{2} = 264$$

- حساب المجموع $u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_{20}$:

عدد الحدود $n = 20 - 1 + 1 = 20$ و قيمة الحد الأول $a_2 = u_1 = -2$ وقيمة الحد الأخير $\ell_1 = u_{20} = 3(20) - 5 = 55$ ومنه:

$$S_2 = \frac{n_2(a_2 + \ell_2)}{2} = \frac{20(-2+55)}{2} = 530$$

4- $(u_n)_{n\geq 0}$ متتالية هندسية أساسها 3 وفيها $u_1 = -2$ احسب u_n بدلالة n، واستنتج قيمة المجموعين $u_1 + u_2 + \cdots + u_7$ و $u_2 + u_4 + u_6 + \cdots + u_{2n}$.

الحل: المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ هندسية لكتابة عبارة u_n بدلالة n نطبق:

$$u_n = u_m \times q^{n-m} \Rightarrow u_n = u_1 \times (-2)^{n-1} = -2(3)^{n-1}$$

- حساب المجموع $u_1 + u_2 + \cdots + u_7$:

عدد الحدود $n_1 = 7 - 1 + 1 = 7$ و الاساس $q = 3$ وقيمة أول حد: $a_1 = u_1 = -2$ ومنه:

$$S = a_1 \times \frac{1 - q^{n_1}}{1 - q} = -2 \times \frac{1 - (3)^7}{1 - 3} = -2186$$

- حساب المجموع $u_2 + u_4 + u_6 + \cdots + u_{2n}$:

عدد الحدود $n_2 = \frac{2n-2}{2} + 1 = n$ و الاساس $q' = 3^2 = 9$ وقيمة أول حد: $a_2 = u_2 = -6$ ومنه:

$$S = a_1 \times \frac{1-(q')^{n_1}}{1-q'} = -6 \times \frac{1-(9)^n}{1-9} = \frac{3}{2}(1-9^n)$$

5- $(u_n)_{n\geq 0}$ متتالية حسابية أساسها -2 وفيها $u_0 = -3$ احسب $u_{25} + u_{26} + \cdots + u_{125}$.

الحل: لأنّ $(u_n)_{n\geq 0}$ متتالية حسابية لحساب المجموع يجب حساب أولاً u_{25} و u_{125} بالأستفادة من $u_m = u_p + (m-p)r$ ومنه:

$$u_{25} = u_0 + (25-0)(-2) = -3 - 50 = -53$$

$$u_{125} = u_0 + (125-0)(-2) = -3 - 250 = -253$$

عدد الحدود $n = 125 - 25 + 1 = 101$ وقيمة أول حد $a = u_{25} = -53$ وقيمة آخر حد $\ell = u_{125} = -253$ ومنه:

$$S = \frac{n(a+\ell)}{2} = \frac{101(-53-253)}{2} = -15453$$

6- $(u_n)_{n\geq 0}$ متتالية هندسية أساسها 2 وفيها $u_0 = 1$ احسب $u_3 + u_4 + \cdots + u_{10}$.

الحل: لأنّ $(u_n)_{n\geq 0}$ متتالية هندسية لحساب المجموع يجب حساب أولاً u_3 بالأستفادة من $u_m = u_p q^{m-p}$ ومنه:

$$u_3 = u_0(2)^{3-0} = 1(8) = 8$$

عدد الحدود $n = 10 - 3 + 1 = 8$ وقيمة أول حد $a = u_3 = -8$ ومنه:

$$S = a \times \frac{1-q^n}{1-q} = -8 \times \frac{1-(2)^8}{1-2} = 2040$$

7- احسب المجموع $S = \frac{1}{2} + 1 + \frac{3}{2} + 2 + \frac{5}{2} + 3 + \cdots + 10$.

الحل: قد لا يتبين عند البعض نوع المتتالية السابقة لذلك نحاول كتابتها بصيغة أخرى وذلك بالشكل:

$$S = \frac{1}{2} + 1 + \frac{3}{2} + 2 + \frac{5}{2} + 3 + \cdots + 10 \Leftrightarrow S = \frac{1}{2} + \frac{2}{2} + \frac{3}{2} + \frac{4}{2} + \frac{5}{2} + \frac{6}{2} + \cdots + \frac{20}{2}$$

ومنه المجموع هو مجموع حدود متتالية حسابية لتكن $(u_n)_{n\geq 0}$ أساسها $r = \frac{1}{2}$ حدها الأول $u_0 = \frac{1}{2}$، فتعطى عبارة u_n بدلالة n وفق:

$$u_n = u_0 + nr \Longrightarrow \boxed{u_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}n}$$

ولحساب عدد حدود السلسلة يجب حساب يجب حساب دليل الحد الذي قيمته 10 فنجعل:

$$u_n = 10 \Longrightarrow \frac{1}{2} + \frac{1}{2}n = 10 \Longrightarrow 1 + n = 20 \Longrightarrow n = 19$$

أيّ $u_{19} = 10$.

عدد الحدود $n = 19 - 0 + 1 = 20$ وقيمة أول حد $\ell = u_0 = \frac{1}{2}$ وقيمة آخر حد $a = u_{19} = 10$ ومنه:

$$S = \frac{n(a+\ell)}{2} = \frac{20\left(\frac{1}{2}+10\right)}{2} = 105$$

8- a و b و c ثلاث حدود متوالية من متتالية حسابية احسبها علماً أنّ $a + b + c = 36.75$ و $abc = 343$.

الحل: بما أنّ a و b و c ثلاث حدود متعاقبة من متتالية هندسية فهي تحقق $b^2 = a \times c$ نضرب بالعدد b كلا الطرفين $b^3 = a \times b \times c$ وفرضاً $a \times b \times c = 343$ فنجد أنّ $b^3 = (7)^3$ ومنه: $\boxed{b = 7}$. نعوض قيمة b في المعادلات المفروضة:

$$a + c = 29.75 \Longrightarrow a = 29.75 - c \ldots\ldots(1)$$

$$a \times c = 49 \dots \dots (2)$$

بتعويض العلاقة (1) في العلاقة (2):

$$c(29.75 - c) = 144 \Longrightarrow c^2 - 29.75c + 49 = 0$$

$$c^2 - 29.75c + 49 = 0 \Longrightarrow c^2 - \frac{2975}{100}c + 49 = 0 \Longrightarrow c^2 - \frac{119}{4}c + 49 = 0 \Longrightarrow 4c^2 - 119c + 196 = 0$$

وباستخدام الدستور $\Delta = b^2 - 4ac$ حيث $a = 4$ و $b = -119$ و $c = 196$ ومنه:

$$b^2 - 4ac = (-119)^2 - 4(4)(196) = 11025 \Longrightarrow \sqrt{\Delta} = 105$$

ومنه إما :

$$c = \frac{b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{119 + 105}{8} = 28$$

أو:

$$c = \frac{b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{119 - 105}{8} = \frac{14}{8} = 1.75$$

ومنه: عندما $\boxed{c = 28}$ نعوض في العلاقة (1) لنجد أنّ $\boxed{a = 1.75}$.

أو $\boxed{c = 1.75}$ نعوض في العلاقة (1) لنجد أنّ $\boxed{a = 28}$.

السؤال الثالث:

$(v_n)_{n\geq 0}$ متتالية معرفة تدريجياً وفق $v_0 = 1$ و $v_{n+1} = \frac{v_n}{1+v_n}$.

1) **تحقق أنّ $v_n > 0$ أياً كان العدد الطبيعي n.**

2) **أثبت أنّ المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرفة بالعلاقة $u_n = \frac{1}{v_n}$ متتالية حسابية.**

3) **استنتج عبارة v_n.**

الحل:

1) لنثبت صحة الخاصة بالتدريج:

- نفترض $E(n)$ هي الخاصة $(v_n > 0)$.
- الخاصة $E(0)$ صحيحة لأنّ: $(v_0 = 1 > 0)$.
- نفترض صحة الخاصة $E(n)$ أيّ: $v_n > 0 \dots \dots (*)$.
- ولنبرهن صحة الخاصة $E(n+1)$ أي لنبرهن $v_{n+1} > 0$.

من العلاقة $(*)$ وجدنا $v_n > 0$ وأيضاً بإضافة العدد (1) لكلا طرفي المتراجحة نجد $v_n + 1 > 1$ ومنه $\frac{v_n}{1+v_n} > 0$ لأنه ناتج قسمة عددين موجبين تماماً بالتالي $v_{n+1} > 0$ أي أنّ $E(n+1)$ صحيحة. وبالتالي $E(n)$ صحيحة أياً كان العدد الطبيعي n.

2) لإثبات أنّ المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ هي متتالية حسابية نثبت أنّ ناتج الفرق $(u_{n+1} - u_n)$ هو عدد ثابت، بالتالي:

$$u_{n+1}-u_n=\frac{1}{v_{n+1}}-\frac{1}{v_n}=\frac{1}{\frac{v_n}{1+v_n}}-\frac{1}{v_n}=\frac{1+v_n}{v_n}-\frac{1}{v_n}=\frac{v_n}{v_n}=1$$

إذاً المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ هي متتالية حسابية أساسها $r=1$ وحدها الأول $u_0=\frac{1}{v_0}=1$ ومنه $u_n=u_0+nr$ أيّ $u_n=n+1$.

3) لدينا $u_n=\frac{1}{v_n}$ ومنه $v_n=\frac{1}{u_n}$ بتعويض عبارة u_n بالعلاقة السابقة نجد $v_n=\frac{1}{n+1}$ وهي عبارة v_n.

السؤال الرابع: ادرس جهة اطراد كل من المتتاليات الآتية:

1) $u_n=\frac{3}{n^2}$　　2) $u_n=\sqrt{3n+1}$　　3) $u_n=\frac{2n-1}{n+4}$

4) $u_n=\frac{1}{n^2+1}$　　5) $u_n=\frac{3n+1}{n-2}$　　6) $u_n=\frac{n}{10^n}$

7) $\begin{cases}u_0=2\\u_{n+1}=u_n-3\end{cases}$　　8) $\begin{cases}u_0=1\\u_{n+1}=\frac{1}{2}u_n\end{cases}$　　9) $\begin{cases}u_0=1\\u_{n+1}=2u_n\end{cases}$

الحل:

1) $u_{n+1}=\frac{3}{(n+1)^2}$ عندما يكبر مقام كسر يصغر بالتالي $\frac{3}{(n+1)^2}<\frac{3}{n^2}$ أيّ $\boxed{u_{n+1}<u_n}$ فالمتتالية $(u_n)_{n\geq 1}$ متناقصة تماماً.

أو نحسب الفرق $u_{n+1}-u_n=\frac{3}{(n+1)^2}-\frac{3}{n^2}=3\frac{n^2-(n+1)^2}{n^2(n+1)^2}=\frac{3(-2n-1)}{n^2(n+1)^2}=-\frac{3(2n+1)}{n^2(n+1)^2}$ ولأنّ $n\geq 1$ بالتالي $\frac{3(2n+1)}{n^2(n+1)^2}>0$ ومنه $-\frac{3(2n+1)}{n^2(n+1)^2}<0$ أيّ $\boxed{u_{n+1}-u_n<0}$ فالمتتالية $(u_n)_{n\geq 1}$ متناقصة تماماً.

أو بما أنّ حدود المتتالية موجبة تماماً بحساب النسبة $\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{\frac{3}{(n+1)^2}}{\frac{3}{n^2}}=\frac{n^2}{(n+1)^2}$ ولأنّ $n^2<(n+1)^2$ بالتالي $\frac{n^2}{(n+1)^2}<1$ أيّ $\boxed{\frac{u_{n+1}}{u_n}<1}$ فالمتتالية $(u_n)_{n\geq 1}$ متناقصة تماماً.

أو من أجل المتتالية $(u_n)_{n\geq 1}$ ونتأمل التابع $f(x)=\frac{3}{x^2}$ المعرف واشتقاقي على $\mathbb{R}\backslash\{0\}$. عندها $f'(x)=\frac{-3(2x)}{x^4}=-\frac{6}{x^3}$، ومنه في حالة $x\geq 1$ يكون $f'(x)<0$ أيّ أنّ $\boxed{\text{التابع } f \text{ متناقص تماماً}}$ على المجال $[1,+\infty[$ فالمتتالية $(u_n)_{n\geq 1}$ متناقصة تماماً.

2) $u_{n+1}=\sqrt{3(n+1)+1}=\sqrt{3n+4}$ وبحساب الفرق:

$$u_{n+1}-u_n=\sqrt{3n+4}-\sqrt{3n+1}=\frac{\left(\sqrt{3n+4}-\sqrt{3n+1}\right)\left(\sqrt{3n+4}+\sqrt{3n+1}\right)}{\sqrt{3n+4}+\sqrt{3n+1}}=\frac{3n+4-(3n+1)}{\sqrt{3n+4}+\sqrt{3n+1}}$$

$$u_{n+1}-u_n=\frac{3}{\sqrt{3n+4}+\sqrt{3n+1}}>$$

إذاً المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ متزايد تماماً.

أو بما أنّ حدود المتتالية موجبة تماماً بحساب النسبة $\sqrt{1+\frac{3}{3n+1}}=\sqrt{\frac{(3n+1)+3}{3n+1}}=\sqrt{\frac{3n+4}{3n+1}}=\frac{\sqrt{3n+4}}{\sqrt{3n+1}}=\frac{u_{n+1}}{u_n}$ ولأنّ بالتالي $\sqrt{1+\frac{3}{3n+1}}>1$ أيّ $\boxed{\frac{u_{n+1}}{u_n}>1}$ فالمتتالية $(u_n)_{n\geq 1}$ متزايدة تماماً.

أو من أجل المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ ونتأمل التابع $f(x)=\sqrt{3x+1}$ المعرف على $\left[-\frac{1}{3},+\infty\right[$ واشتقاقي على $\left]-\frac{1}{3},+\infty\right[$. عندها $f'(x)=\frac{3}{2\sqrt{3x+1}}$، ومنه في حالة $x\geq 0$ يكون $f'(x)>0$ أيّ أنّ $\boxed{\text{التابع } f \text{ متزايد تماماً}}$ على المجال $[0,+\infty[$ فالمتتالية $(u_n)_{n\geq 1}$ متزايدة تماماً.

سنكتفي بالأمثلة الباقية بذكر طريقة واحدة فقط.

3) نوجد $u_{n+1}=\frac{2(n+1)-1}{(n+1)+4}=\frac{2n+1}{n+5}$ نحسب الفرق:

$$u_{n+1}-u_n=\frac{2n+1}{n+5}-\frac{2n-1}{n+4}=\frac{(n+4)(2n+1)-(n+5)(2n-1)}{(n+5)(n+4)}=\frac{2n^2+n+8n+4-(2n^2-n+10n-5)}{(n+5)(n+4)}$$

$$u_{n+1}-u_n=\frac{9}{(n+5)(n+4)}$$

ولأنّ $n\geq 0$ بالتالي $\frac{9}{(n+5)(n+4)}>0$ أي $\boxed{u_{n+1}-u_n>0}$ فالمتتالية $(u_n)_{n\geq 1}$ متزايدة تماماً.

4) من أجل المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ ونتأمل التابع $f(x)=\frac{1}{x^2+1}$ المعرف واشتقاقي على $\mathbb{R}$. عندها $f'(x)=\frac{-2x}{(x^2+1)^2}$، ومنه في حالة $x\geq 0$ يكون $f'(x)\leq 0$ أيّ أنّ $\boxed{\text{التابع } f \text{ متناقص}}$ على $[0,+\infty[$ فالمتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ متناقصة أياً كان العدد الطبيعي n.

5) نوجد $u_{n+1}=\frac{3(n+1)+1}{(n+1)-2}=\frac{3n+4}{n-1}$، وبحساب الفرق:

$$u_{n+1}-u_n=\frac{3n+4}{n-1}-\frac{3n+1}{n-2}=\frac{(n-2)(3n+4)-(n-1)(3n+1)}{(n-1)(n-2)}=\frac{3n^2+4n-6n-8-(3n^2+n-2n-1)}{(n-1)(n-2)}$$

$$u_{n+1}-u_n=-\frac{7}{(n-1)(n-2)}$$

من أجل $n\geq 2$ فإنّ $(n-1)(n-2)>0$ بالتالي $\left(-\frac{7}{(n-1)(n-2)}\right)<0$ أي $\boxed{u_{n+1}-u_n<0}$ فالمتتالية $(u_n)_{n\geq 2}$ متناقصة تماماً.

6) نوجد $u_{n+1}=\frac{n+1}{10^{n+1}}=\frac{n+1}{10^n\times 10}$، وبحساب النسبة:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{\frac{n+1}{10^n\times 10}}{\frac{n}{10^n}}=\frac{(n+1)10^n}{10n\times 10^n}=\frac{n+1}{10n}$$

من أجل $n\geq 1$ فإنّ $n+1<10n$ بالتالي $\frac{n+1}{10n}<1$ أي $\boxed{\frac{u_{n+1}}{u_n}<1}$ فالمتتالية $(u_n)_{n\geq 1}$ متناقصة تماماً.

7) لدينا $u_{n+1}=u_n-3$ بالتالي $u_{n+1}-u_n=-3$ أي $\boxed{u_{n+1}-u_n<0}$ فالمتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ متناقصة تماماً.

أو نلاحظ أنّ $(u_n)_{n\geq 0}$ متتالية حسابية أساسها سالب في متتالية متناقصة تماماً.

8) لدينا $u_{n+1}=\frac{1}{2}u_n$ بالتالي $\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{1}{2}$ أي $\boxed{\frac{u_{n+1}}{u_n}<1}$ فالمتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ متناقصة تماماً.

أو نلاحظ أنّ $(u_n)_{n\geq 0}$ متتالية هندسية حدودها موجبة وأساسها أصغر من الواحد في متتالية متناقصة تماماً.

9) لدينا $u_{n+1}=2u_n$ بالتالي $\frac{u_{n+1}}{u_n}=2$ أي $\boxed{\frac{u_{n+1}}{u_n}>1}$ فالمتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ متزايدة تماماً.

أو نلاحظ أنّ $(u_n)_{n\geq 0}$ متتالية هندسية حدودها موجبة وأساسها أكبر من الواحد في متتالية متزايدة تماماً.

البرهان بالتدريج، أو بالاستقراء الرياضي

ذكرنا في ما سبق خطوات استعمال الإثبات بالتدريج ونعيد ذكرها الآن، ومن ثمّ شرح مفصل لهذه الفقرة:

1- يجب أنّ نُعرّف وبوضوح الخاصة $E(n)$ التي تتعلق بالعدد الطبيعي n والتي نرغب بإثبات صحتها في حالة $n \geq n_0$.

2- نثبت صحة الخاصة السابقة في الحالة القاعدية $n = n_0$، أيّ نعوض بدل كل العدد n بـ n_0 ونثبت أنّهُ من أجل n_0 الخاصة صحيحة.

3- نفرض أنّ الخاصة $E(n)$ صحيحة، ونبرهن صحة الخاصة $E(n+1)$، فإذا كانت الخاصة $E(n+1)$ صحيحة كانت الخاصة $E(n)$ صحيحة.

❖ **متى نستعمل البرهان بالتدريج؟**

- الحالة الأولى :إثبات صحة مساواة أو متراجحة.

مثال: **أياً كان $n \geq 1$ أثبت صحة العلاقة:** $\mathbf{1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}}$.

الحل:

نفرض $E(n)$ هي الخاصة $\left[1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}\right]$.

الخاصة $E(1)$ صحيحة لأنّ $1^3 = \frac{1^2(1+1)^2}{4}$.

نفترض صحة الخاصة $E(n)$ أي $\left[1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}\right] \ldots\ldots (*)$.

ولنبرهن صحة الخاصة $E(n+1)$ أي لنبرهن $1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 + (n+1)^3 = \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}$.

انطلاقاً من $(*)$ $\left[1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}\right]$ بإضافة المقدار $(n+1)^3$ للطرفين عندها:

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 + (n+1)^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} + (n+1)^3$$

$$= \frac{n^2(n+1)^2 + 4(n+1)^3}{4}$$

$$= \frac{(n+1)^2[n^2 + 4(n+1)]}{4}$$

$$= \frac{(n+1)^2 \overbrace{[n^2 + 4n + 4]}^{\boxed{a^2+2ab+b^2=(a+b)^2}}}{4}$$

$$= \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}$$

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 + (n+1)^3 = \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}$$

أي أنّ $E(n+1)$ صحيحة. بالتالي $E(n)$ صحيحة أياً كان $n \geq 1$.

مثال: نتأمل المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرفة وفق: $\begin{cases} u_0 = \frac{5}{2} \\ u_{n+1} = (u_n - 2)^2 + 2 \end{cases}$. أثبت مستعملا الإثبات بالتدريج أنّ $2 \leq u_n \leq 3$ أياً كان العدد الطبيعي n.(دورة 2021 الثانية)

الحل:

نفرض $E(n)$ هي الخاصة $(2 \leq u_n \leq 3)$.

الخاصة $E(0)$ صحيحة لأنّ $2 \leq u_0 = \frac{5}{2} \leq 3$.

نفترض صحة الخاصة $E(n)$ أي $(2 \leq u_n \leq 3) \ldots\ldots (*)$.

ولنبرهن صحة الخاصة $E(n+1)$ أي لنبرهن $(2 \leq u_{n+1} \leq 3)$.

انطلاقاً من $(*)$ $(2 \leq u_n \leq 3)$ بطرح المقدار (2) من الأطراف:

$$0 \leq u_n - 2 \leq 1$$

بتربيع الأطراف نجد $0 \leq (u_n - 2)^2 \leq 1$ ومن ثمّ إضافة المقدار (2) للأطراف لنجد $2 \leq (u_n - 2)^2 + 2 \leq 3$ أي:

$$2 \leq u_{n+1} \leq 3$$

ومنه $E(n+1)$ صحيحة. بالتالي $E(n)$ صحيحة أياً كان العدد الطبيعي n.

- الحالة الثانية: بالاستفادة من اطراد تابع f معرف وفق $u_{n+1} = f(u_n)$.

مثال: نتأمل المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرفة بالعلاقة التدريجية: $u_0 = 3$, $u_{n+1} = \frac{u_n}{2} + \frac{2}{u_n}$ عند كل $n \geq 0$. والمطلوب: (دورة 2020 الأولى)

1) أثبت أنّ التابع $f(x) = \frac{x}{2} + \frac{2}{x}$ متزايد تماماً على المجال $[2, +\infty[$.

2) أثبت بالتدريج أنّ $2 \leq u_{n+1} < u_n$ أياً كان العدد الطبيعي n.

الحل:

1) f اشتقاقي على المجال $[2, +\infty[$ ومنه $f'(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2-4}{2x^2} = \frac{(x-2)(x+2)}{2x^2}$ وعندما $x = 2$ يكون $f'(x) = 0$ ونلاحظ أنّ $f'(x) \geq 0$ على المجال $[2, +\infty[$ ولا ينعدم إلّا عند العدد $\{2\}$ فالتابع f متزايد تماماً على المجال $[2, +\infty[$.

2) نفرض $E(n)$ هي الخاصة $(2 \leq u_{n+1} < u_n) \ldots\ldots (*)$.

لدينا $u_1 = \frac{3}{2} + \frac{2}{3} = \frac{13}{6}$ فتكون الخاصة $E(0)$ صحيحة لأنّ $2 \leq u_1 = \frac{13}{6} < 3 = u_0$.

نفترض صحة الخاصة $E(n)$ أي $(2 \leq u_{n+1} < u_n)$.

ولنبرهن صحة الخاصة $E(n+1)$ أي لنبرهن صحة $2 \leq u_{n+2} < u_{n+1}$.

انطلاقاً من الخاصة $(*)$ حيث $2 \leq u_{n+1} < u_n$ ولأنّ f متزايد تماماً على المجال $[2, +\infty[$ فإنّ:

$$f(2) \leq f(u_{n+1}) < f(u_n)$$

لدينا $f(u_n) = u_{n+1}$ و $f(u_{n+1}) = u_{n+2}$ وأيضاً $f(2) = \frac{2}{2} + \frac{2}{2} = 2$، ومنهُ:

$$2 \leq u_{n+2} < u_{n+1}$$

أي أنّ $E(n+1)$ صحيحة. بالتالي $E(n)$ صحيحة أياً كان العدد الطبيعي n.

- الحالة الثالثة: إثبات أنّ عدد بدلالة n يكون مضاعف لعدد معلوم.

مثال: **أثبت بالتدريج أنّه مهما كان العدد الطبيعي n كان $4^n + 2$ مضاعف للعدد 3.**

الحل:

نفرض $E(n)$ هي الخاصة $(4^n + 2 = 3k)$ أياً كان $k \in \mathbb{N}$ وهي تكافئ العبارة (أنّ العدد $4^n + 2$ مضاعف للعدد 3).

الخاصة $E(0)$ صحيحة لأنّ $4^0 + 2 = 1 + 2 = 3$ والعدد 3 من مضاعفات العدد 3.

نفترض صحة الخاصة $E(n)$ أي $(4^n + 2 = 3k)$.

ولنبرهن صحة الخاصة $E(n+1)$ أي لنبرهن أنّ العدد $(4^{n+1} + 2)$ من مضاعفات العدد 3.

انطلاقاً من الخاصة $E(n+1)$ نجد $4^{n+1} + 2 = 4^n \times 4 + 2$، ومنه:

$$4^{n+1} + 2 = (4^n + 2 - 2) \times 4 + 2 = 4\underbrace{(4^n + 2)}_{3k} - 8 + 2 = 4 \times 3k - 6 = 3(4k - 2)$$

وبفرض أنّ $k_1 = 4k - 2$ فنجد أنّ $4^{n+1} + 2 = 3k_1$ وهو عدد من مضاعفات العدد 3.

أي أنّ $E(n+1)$ صحيحة. بالتالي $E(n)$ صحيحة أياً كان العدد الطبيعي n.

مثال: **أثبت بالتدريج أنّ العدد $n^3 - n$ مضاعف للعدد 3 أياً كان العدد الطبيعي n.**

الحل:

نفرض $E(n)$ هي الخاصة $(n^3 - n = 3k)$ أياً كان $k \in \mathbb{N}$ وهي تكافئ العبارة (أنّ العدد $n^3 - n$ مضاعف للعدد 3).

الخاصة $E(0)$ صحيحة لأنّ $0^3 - 0 = 0$ والعدد 0 من مضاعفات العدد 3.

نفترض صحة الخاصة $E(n)$ أي $(n^3 - n = 3k)$.

ولنبرهن صحة الخاصة $E(n+1)$ أي لنبرهن أنّ العدد $[(n+1)^3 - (n+1)]$ من مضاعفات العدد 3.

انطلاقاً من الخاصة $E(n+1)$ نجد $(n+1)^3 - (n+1) = n^3 + 3n^2 + 3n + 1 - n - 1$، بالإصلاح نجد $(n+1)^3 - (n+1) = n^3 + 3n^2 + 3n - n$، ومنه:

$$(n+1)^3 - (n+1) = \underbrace{n^3 - n}_{3k} + 3(n^2 + n) = 3k + 3(n^2 + n) = 3(n^2 + n + k)$$

وبفرض أنّ $k_1 = n^2 + n + k$ فنجد أنّ $(n+1)^3 - (n+1) = 3k_1$ وهو عدد من مضاعفات العدد 3.

أي أنّ $E(n+1)$ صحيحة. بالتالي $E(n)$ صحيحة أياً كان $n \geq 0$.

- الحالة الرابعة: إثبات إطراد متتالية بالتدريج.

مثال: **نتأمل المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرفة وفق: $\begin{cases} u_0 = \frac{5}{2} \\ u_{n+1} = (u_n - 2)^2 + 2 \end{cases}$. أثبت مستعملا الإثبات بالتدريج أنّ المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ متناقصة.** (دورة 2021 الثانية ولكن دون حصر طريقة الإثبات بالتدريج فهي تُحل بطريقة أسهل حسب الطلب الذي سبقه بالتمرين)

نفرض $E(n)$ هي الخاصة $(u_{n+1} \leq u_n)$ أياً كان العدد الطبيعي n.

الخاصة $E(0)$ صحيحة لأنّ $u_1 = \frac{9}{4} \leq \frac{5}{2} = u_0$.

نفترض صحة الخاصة $E(n)$ أي $(u_{n+1} \leq u_n)$......$(*)$.

ولنبرهن صحة الخاصة $E(n+1)$ أي لنبرهن أنّ $u_{n+2} \leq u_{n+1}$.

انطلاقاً من $(*)$ $(u_{n+1} \leq u_n)$ بطرح المقدار (2) من الأطراف:

$$u_{n+1} - 2 \leq u_n - 2$$

بتربيع الأطراف نجد $(u_{n+1}-2)^2 \le (u_n-2)^2$ ومن ثمّ إضافة المقدار (2) للأطراف لنجد $(u_{n+1}-2)^2+2 \le (u_n-2)^2+2$ أي:

$$u_{n+2} \le u_{n+1}$$

ومنه $E(n+1)$ صحيحة. بالتالي $E(n)$ صحيحة أياً كان العدد الطبيعي n.

- الحالة الخامسة: إثبات علاقة الاشتقاق من مرتبة n.

مثال: أثبت مستعملاً الإثبات بالتدريج أنّ المشتق من المرتبة n للتابع $f(x)=cosx$ يعطى بالشكل: $f^{(n)}=(-1)^n cos\left(\frac{n\pi}{2}-x\right)$ أياً كان $n \ge 1$.

نفرض $E(n)$ هي الخاصة $\left[f^{(n)}(x)=(-1)^n cos\left(\frac{n\pi}{2}-x\right)\right]$ أيا $n \ge 1$.

الخاصة $E(1)$ صحيحة لأنّ $f^{(1)}(x)=(-1)^1 cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=-sinx=f'(x)$.

نفترض صحة الخاصة $E(n)$ أي $\left(f^{(n)}(x)=(-1)^n cos\left(\frac{n\pi}{2}-x\right)\right)$......(*).

ولنبرهن صحة الخاصة $E(n+1)$ أي لنبرهن أنّ:

$$f^{(n+1)}(x)=(-1)^{n+1}cos\left(\frac{(n+1)\pi}{2}-x\right)=(-1)^{n+1}cos\left[\frac{\pi}{2}+\left(\frac{n\pi}{2}-x\right)\right]=(-1)^{n+1}\left(-\sin\left(\frac{n\pi}{2}-x\right)\right)$$

أي لنثبت:

$$f^{(n+1)}(x)=(-1)^{n+2}\sin\left(\frac{n\pi}{2}-x\right)$$

انطلاقاً من العلاقة $(*)$ $\left(f^{(n)}(x)=(-1)^n cos\left(\frac{n\pi}{2}-x\right)\right)$ ونشتقها:

$$\left[f^{(n)}(x)\right]'=f^{(n+1)}(x)=0\times cos\left(\frac{n\pi}{2}-x\right)+\left[-sin\left(\frac{n\pi}{2}-x\right)(-1)\right](-1)^n=(-1)^{n+2}sin\left(\frac{n\pi}{2}-x\right)$$

ومنه $E(n+1)$ صحيحة. بالتالي $E(n)$ صحيحة أياً كان العدد الطبيعي n.

تدرب صفحة 21

السؤال الأول: نعرف في حالة عدد طبيعي $n \ge 1$ المقدار $S_n=1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2$.

1) احسب S_1 و S_2 و S_3 و S_4. ثمّ عبر عن S_{n+1} بدلالة S_n و n.

2) أثبت بالتدريج أنه في حالة أية عدد طبيعي $n \ge 1$ لدينا: $S_n=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

الحل:

1) لدينا $S_1=1^2=1$، ثمّ $S_2=1^2+2^2=5$، كذلك $S_3=1^2+2^2+3^2=14$، أخيراً $S_4=1^2+2^2+3^2+4^2=30$.

وتعطى S_{n+1} بالشكل:

$$S_{n+1}=\underbrace{1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2}_{S_n}+(n+1)^2=S_n+(n+1)^2$$

2) نفرض $E(n)$ هي الخاصة $\left[S_n=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right]$.

الخاصة $E(1)$ صحيحة لأنّ $S_1=\frac{1(1+1)(2+1)}{6}=1$.

نفترض صحة الخاصة $E(n)$ أي $\left[S_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right] \ldots\ldots(*)$.

ولنبرهن صحة الخاصة $E(n+1)$ أي لنبرهن $S_{n+1} = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$

من الطلب الأول وجدنا أنّ $S_{n+1} = S_n + (n+1)^2$ وبالإستفادة من العلاقة $(*)$ نجد $S_{n+1} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2$، ومنه:

$$S_{n+1} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 = \frac{n(n+1)(2n+1) + 6(n+1)^2}{6} = \frac{(n+1)(2n^2 + n + 6n + 6)}{6}$$

$$= \frac{(n+1)(2n^2 + 7n + 6)}{6} = \frac{(n+1)(2n^2 + 4n + 3n + 6)}{6} = \frac{(n+1)[2n(n+2) + 3(n+2)]}{6}$$

$$= \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$$

ملاحظة: نستطيع تحليل المقدار $(2n^2 + 7n + 6)$ عن طريق القسمة الأقليدية بتقسيمه على $(n+2)$.

أي أنّ $E(n+1)$ صحيحة. بالتالي $E(n)$ صحيحة أياً كان $n \geq 1$.

السؤال الثاني: ليكن $x > -1$. في حالة عدد طبيعي n نرمز $E(n)$ إلى المتراجحة $(1+x)^n \geq 1 + nx$. أثبت أنّ المتراجحة $E(n)$ محقّقة أياً كان العدد الطبيعي n.

ملاحظتان هامتان تخص السؤال السابق:

الملاحظة	نستطيع حذف مقدار موجب من الطرف الصغير للمتراجحة	نستطيع حذف مقدار سالب من الطرف الكبير للمتراجحة
مثال بسيط	$7 > \underbrace{-5 \overbrace{+8}^{\text{مقدار موجب}}}_{\text{الطرف الصغير}}$ بالتالي لأنّ $8 > 0$ نستطيع كتابة المتراجحة على الشكل: $7 > -5$ ونلاحظ أنّه لا يمكن دائماً حذف المقدار السالب لأنّ المتراجحة قد تصبح خاطئة	$\underbrace{7 \overbrace{-3}^{\text{مقدار سالب}}}_{\text{الطرف الكبير}} > 3$ بالتالي لأنّ $-3 < 0$ نستطيع كتابة المتراجحة على الشكل: $7 > 3$ ونلاحظ أنّه لا يمكن دائماً حذف المقدار الموجب لأنّ المتراجحة قد تصبح خاطئة.

الحل:

الخاصة $E(0)$ صحيحة لأنّ $[(1+x)^0 = 1] \geq [1 + 0x = 1]$.

نفترض صحة الخاصة $E(n)$ أي $((1+x)^n \geq 1 + nx) \ldots\ldots(*)$.

ولنبرهن صحة الخاصة $E(n+1)$ أي لنبرهن أنّ العدد $(1+x)^{n+1} \geq 1 + x(n+1)$.

انطلاقاً من $(*)$ $((1+x)^n \geq 1 + nx)$ بضرب الطرفين بالمقدار $(1+x)$ علماً أنهُ مقدار موجب لأنّ $x > -1$ نجد:

$$(1+x)^{n+1} \geq (1+nx)(1+x)$$
$$\geq 1 + x + nx + nx^2$$
$$\geq 1 + x(1+n) + \underbrace{nx^2}_{\text{مقدار موجب}}$$

ولأنّ $nx^2 > 0$ وهي واقعة بالطرف الصغير للمتراجحة إذاً نستطيع إزالتها من المتراجحة دون التأثير على جهة التراجح أي نكتب:

$$(1+x)^{n+1} \geq 1 + x(1+n) + nx^2 \geq 1 + x(1+n)$$

بالتالي:

$$(1+x)^{n+1} \geq 1 + x(1+n)$$

ومنه $E(n+1)$ صحيحة. بالتالي $E(n)$ صحيحة أياً كان العدد الطبيعي n.

ملخص الإثبات بالتدريج

نرمز للخاصّة المطلوب إثباتها بالرمز $E(n)$، ثمّ نثبت صحة الخاصة $E(n_0)$ حيث n_0 هو حد البدء أي نعوض بدل كل العدد n العدد n_0 ونثبت أنّ القضية صحيحة من أجله (غالباً $n_0 = 0$ أو $n_0 = 1$)، أخيراً نفرض صحة الخاصة $E(n)$ ونبرهن صحة الخاصة $E(n+1)$.

حالات الإثبات بالتدريج وكيف نثبت صحة الخاصة $E(n+1)$

معادلة أو متراجحة	مقدار مضاعف لعدد	إثبات إطراد متتالية	الاشتقاق من المرتبة n
نرمز للخاصة $E(n)$ من نص السؤال وفق المعادلة أو المتراجحة المطلوب إثباتها. الإثبات يكون انطلاقاً من الخاصة $E(n)$ ومن ثمّ بإجراء العمليات الحسابية لكلا طرفي المعادلة أو المتراجحة كالضرب بعدد أو إضافة عدد ...الخ وبالاستفادة من أنه يمكننا حذف مقدار سالب من طرف المتراجحة الكبير، و أيضاً يمكننا حذف مقدار موجب من طرف المتراجحة الصغير للوصول إلى الخاصة $E(n+1)$ عندها نكون قد أثبتنا صحتها.	نرمز للخاصة $E(n)$ بأنها طرفي معادلة الطرف الأول المقدار المطلوب إثباته أنّه مضاعف لعدد والطرف الثاني ذاك العدد مضروب بالعدد k حيثُ $k \in \mathbb{N}$ الإثبات يكون انطلاقاً من الخاصة $E(n+1)$ ومحاولة إظهار الخاصة $E(n)$ والاستفادة منها ومن ثمّ سيتحقق أنّ $E(n+1)$ هي عبارة عن مجموعين غالباً (أو أكثر) احداها يكون الخاصة $E(n)$ والباقي منها يكون مضاعف للعدد المفروض بإخراج العدد عامل مشترك نكون قد أثبتنا صحة الخاصة $E(n+1)$.	نرمز للخاصة $E(n)$ وفق شرط الإطراد أي على سبيل المثال (المتتالية متناقصة بالتالي الخاصة $E(n)$ هي تحقق $u_{n+1} \le u_n$ وهكذا...) الإثبات يكون انطلاقاً من الخاصة $E(n)$ ومن ثمّ التركيز بالعمل يكون على الطرف الذي يحوي u_n للوصول فيه إلى عبارة u_{n+1} بإجراء العمليات الحسابية لكلا طرفي المتراجحة كالضرب بعدد أو إضافة عدد ...الخ وعند إظهار u_{n+1} يكون قد أظهرنا بالطرف المقابل u_{n+2} عندها نكون قد أثبتنا صحة الخاصة $E(n+1)$.	نرمز للخاصة $E(n)$ من نص السؤال وفق المعادلة المطلوب إثباتها، الإثبات يكون انطلاقاً من الخاصة $E(n)$ نقوم باشتقاقها وفق القواعد التي نعرفها لنصل إلى الخاصة $E(n+1)$ فنكون قد أثبتنا صحتها.

بالاستفادة من اطراد تابع f معرف وفق $u_{n+1} = f(u_n)$

تُعرّف متتالية $(u_n)_{n \ge n_0}$ بالعلاقة التدريجية وعلى أساسها نعرف التابع $f(x)$ ونثبت أنّهُ مطرد تماماً على المجال المدروسة فيه المتتالية.

نرمز للخاصة $E(n)$ من نص السؤال وفق المتراجحة المطلوب إثباتها. الإثبات يكون انطلاقاً من الخاصة $E(n)$ ومن ثمّ بأخذ صور الأطراف (إذا كان التابع f متزايد تماماً عندها تبقى إشارات التراجح كما هي، أمّا إذا كان f متناقص تماماً عندها تُقلب إشارات التراجح) وعلماً أنّ $f(u_n) = u_{n+1}$، ثمّ بالاستفادة من أنّه يمكننا حذف مقدار سالب من طرف المتراجحة الكبير، و أيضاً يمكننا حذف مقدار موجب من طرف المتراجحة الصغير للوصول إلى الخاصة $E(n+1)$ عندها نكون قد أثبتنا صحتها.

انتهى

تمرينات ومسائل الوحدة الأولى الصفحة 22

التمرين الأول: بيّن أي المتتاليات $(u_n)_{n\geq 0}$ مطّردة (ربما بدءاً من حدّ معيّن n_0).

1) $u_n = -3n+1$ 　2) $u_n = \frac{n+1}{n+2}$ 　3) $u_n = 2^n$

4) $u_n = \left(-\frac{1}{n}\right)^n$ 　5) $u_n = 1+\frac{1}{n^2}$ 　6) $u_n = \frac{n^2}{n!}$

7) $u_n = 1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2^n}$ 　8) $\begin{cases} u_0 = 8 \\ u_{n+1} = \frac{3}{4}u_n + 2 \end{cases}$ 　9) $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \frac{3}{4}u_n + 2 \end{cases}$

الحل:

1) بحساب الفرق $u_{n+1}-u_n = -3(n+1)+1-(-3n+1) = -3n-2+3n-1 = -3$، ومنه نجد أنّ $u_{n+1}-u_n = 3 < 0$، إذاً المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ متناقصة تماما أياً كان العدد الطبيعي n.

2) من أجل المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ ونتأمل التابع $f(x) = \frac{x+1}{x+2}$ المعرف واشتقاقي على $\mathbb{R}\backslash\{-2\}$. عندها $f'(x) = \frac{1(x+2)-1(x+1)}{(x+2)^2}$، ومنه $f'(x) = \frac{1}{(x+2)^2}$. في حالة $x \geq 0$ يكون $f'(x) > 0$ أيّ أنّ $\boxed{\text{التابع } f \text{ متزايد تماماً}}$ على المجال $[0,+\infty[$ فالمتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ متزايدة تماماً أياً كان العدد الطبيعي n.

3) بما أنّ حدود المتتالية موجبة تماماً نطبق $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2^{n+1}}{2^n} = \frac{2\times 2^n}{2^n} = 2$ وبما أنّ $\frac{u_{n+1}}{u_n} = 2 > 1$ فالمتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ متزايدة تماماً.

4) بحساب الحدود الثلاثة الأولى $u_0 = 1$ و $u_1 = -1$ و $u_2 = \frac{1}{4}$ و $u_3 = -\frac{1}{27}$. نلاحظ أنّ $(u_0 > u_1 \,, u_1 < u_2 \,, u_2 > u_3)$ إذاً المتتالية ليست متزايدة ولا متناقصة بالتالي المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ غير مطّردة.

5) من أجل المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ ونتأمل التابع $f(x) = 1+\frac{1}{x^2}$ المعرف واشتقاقي على $\mathbb{R}\backslash\{0\}$. عندها $f'(x) = -\frac{1}{x^4}$، ومنه في حالة $x \geq 1$ يكون $f'(x) < 0$ أيّ أنّ $\boxed{\text{التابع } f \text{ متناقص تماماً}}$ على المجال $[1,+\infty[$ فالمتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ متناقصة تماماً أياً كان $n \geq 1$.

6) بما أنّ حدود المتتالية موجبة تماماً نطبق $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\frac{(n+1)^2}{(n+1)!}}{\frac{n^2}{n!}} = \frac{(n+1)^2.n!}{(n+1)!.n^2} = \frac{(n+1)^2.n!}{(n+1)n!.n^2} = \frac{n+1}{n^2}$ وفقط عندما $n \geq 2$ يتحقق $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n+1}{n^2} < 1$ بالتالي المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ متناقصة أياً كان $n \geq 2$.

7) نلاحظ أنّ $\begin{cases} u_{n+1} = 1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2^n}+\frac{1}{2^{n+1}} \\ u_n = 1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2^n} \end{cases}$ ومنه $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{2^{n+1}}$ أي $u_{n+1}-u_n = \frac{1}{2^{n+1}} > 0$ إذاً المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ متزايدة تماماً أياً كان العدد الطبيعي n.

8) بحساب الحدود الأولى $u_0 = 8$ و $u_1 = \frac{3}{4}(8)+2 = 8$ نلاحظ أنّ $(u_0 = u_1 = u_2 = \cdots)$ إذاً المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ ثابتة أياً كان $n \geq 0$.

9) بحساب الحدود الثلاثة الأولى $u_0 = 2$ و $u_1 = \frac{3}{4}(2)+2 = \frac{7}{2}$ و $u_2 = \frac{3}{4}\left(\frac{7}{2}\right)+2 = \frac{37}{8}$ ومنه $(u_0 < u_1 < u_2)$ إذا نلاحظ أنّ المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ متزايدة تماماً من أجل الحدود ولنثبت ذلك بالتدريج:

نفرض $E(n)$ هي الخاصة $(u_{n+1} > u_n)$ والتي تكافئ (المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ متزايدة تماماً) أياً كان العدد الطبيعي n.

الخاصة $E(0)$ صحيحة لأنّ $u_0 = 2 \leq \frac{7}{2} = u_1$.

نفترض صحة الخاصة $E(n)$ أي $(u_{n+1} > u_n)$......$(*)$.

ولنبرهن صحة الخاصة $E(n+1)$ أي لنبرهن أنّ $u_{n+2} > u_{n+1}$.

انطلاقاً من $(*)$ $(u_{n+1} > u_n)$ بضرب طرفي المتراجحة بالعدد $\frac{3}{4}$ علماً أنّ مقدار موجب نجد:

$$\frac{3}{4}u_{n+1} > \frac{3}{4}u_n$$

بإضافة العدد 2 لطرفي المتراجحة نجد $\frac{3}{4}u_{n+1} + 2 > \frac{3}{4}u_n + 2$ بالتالي نجد:

$$u_{n+2} > u_{n+1}$$

ومنه $E(n+1)$ صحيحة. بالتالي $E(n)$ صحيحة أياً كان العدد الطبيعي n.

أيّ أنّ المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ متزايدة تماماً أياً كان العدد الطبيعي n.

التمرين الثاني: المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ معرفة وفق $u_0 = 2$ و $u_{n+1} = 2u_n - 3$ في حالة أي عدد طبيعي غير معدوم n.

1) احسب u_1 و u_2 و u_3 و u_4 و u_5 ثمّ خمِّنْ عبارة u_n بدلالة n.

2) بحساب عبارة $u_n - 3$ عند كل $n \geq 0$، عبِّرْ عن u_n بدلالة n.

الحل:

(1

$$u_0 = 2$$
$$u_1 = 2u_0 - 3 = 4 - 3 = 1$$
$$u_2 = 2u_1 - 3 = 2 - 3 = -1$$
$$u_3 = 2u_2 - 3 = -2 - 3 = -5$$
$$u_4 = 2u_3 - 3 = -10 - 3 = -13$$
$$u_5 = 2u_4 - 3 = -3 = -29$$

طريقة أولى:

(تخمين):

$u_0 = 2 = 3 - 2^0$ و $u_1 = 1 = 3 - 2^1$ و $u_2 = -1 = 3 - 2^2$ و $u_3 = -5 = 3 - 2^3$ ومنه نخمّن أنّ عبارة u_n بدلالة n هي:

$$\boxed{u_n = 3 - 2^n}$$

طريقة ثانية: نتبع الخطوات التالية علماً أنّ $\begin{cases} u_0 = \lambda \\ u_{n+1} = au_n + b \end{cases}$:

- نعرف متتالية $(v_n)_{n\geq 0}$ بالصيغة : $v_n = u_n - \ell$.
- نحسب العدد ℓ وفق: $\ell = \frac{b}{1-a}$.
- نثبت أنّ المتتالية $(v_n)_{n\geq 0}$ هي متتالية هندسية أساسها $\boxed{q = a}$، ثمّ نكتب عبارة $(v_n)_{n\geq 0}$ بدلالة n.
- نستنتج عبارة $(u_n)_{n\geq 0}$ من عبارة $(v_n)_{n\geq 0}$ حيث:

$$v_n = u_n - \ell \Rightarrow u_n = v_n + \ell \Rightarrow \boxed{u_n = v_0(a^n) + \frac{b}{1-a}}$$

2) $v_n = u_n - 3$. ولنثبت أنّ المتتالية $(v_n)_{n\geq 0}$ هندسية :

$$v_{n+1} = u_{n+1} - 3 = (2u_n - 3) - 3 = 2u_n - 6 = 2(u_n - 3) = 2v_n$$

إذاً المتتالية $(v_n)_{n\geq 0}$ هندسية أساسها $q = a = 2$ وحدها الأول $v_0 = u_0 - 3 = -1$ ومنه عبارة $(v_n)_{n\geq 0}$ بدلالة n تعطى وفق:

$$v_n = v_0 q^n \Longrightarrow v_n = -2^n$$

ومنه عبارة $(u_n)_{n\geq 0}$ بدلالة n تكتب وفق:

$$v_n = u_n - 3 \Longrightarrow u_n = 3 + v_n \Longrightarrow \boxed{u_n = 3 - 2^n}$$

التمرين الثالث: المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ معرفة وفق $u_0 = 3$ و $u_{n+1} = -u_n + 4$ في حالة عدد طبيعي غير معدوم n. احسب u_1 و u_2 و u_3 و u_4 و u_5 وخمّن عبارة u_n بدلالة n ثمّ حدد u_n بدلالة n.

الحل:

$$u_1 = -u_0 + 4 = -3 + 4 = 1$$
$$u_2 = -u_1 + 4 = -1 + 4 = 3$$
$$u_3 = -u_2 + 4 = -3 + 4 = 1$$
$$u_4 = -u_3 + 4 = -1 + 4 = 3$$
$$u_5 = -u_4 + 4 = -3 + 4 = 1$$

(تخمين):

$u_1 = 1 = (-1)^1 + 2$ و $u_2 = 3 = (-1)^2 + 2$ و $u_3 = 1 = (-1)^3 + 2$ ومنه نخمّن أنّ عبارة u_n بدلالة n هي:

$$u_n = (-1)^n + 2$$

نثبت صحة علاقة التخمين u_n بالتدريج:

نفرض $E(n)$ هي الخاصة $(u_n = (-1)^n + 2)$ أياً كان العدد الطبيعي n.

الخاصة $E(0)$ صحيحة لأنّ $u_0 = (-1)^0 + 2 = 3$ وهذا محقق لأنّ $u_0 = 3$ من فرض المسألة.

نفترض صحة الخاصة $E(n)$ أي $(u_n = (-1)^n + 2)$......$(*)$.

ولنبرهن صحة الخاصة $E(n+1)$ أي لنبرهن أنّ $u_{n+1} = (-1)^{n+1} + 2$.

لدينا $u_{n+1} = -u_n + 4$ ومنه:

$$u_{n+1} = -((-1)^n + 2) + 4 = (-1)^{n+1} - 2 + 4 = (-1)^{n+1} + 2$$

ومنه $E(n+1)$ صحيحة. بالتالي $E(n)$ صحيحة أياً كان العدد الطبيعي n.

التمرين الرابع: أثبت بالتدريج صحة الخاصتين الآتيتين:

1) $\mathbf{1 + 2 \times 2! + 3 \times 3! + \cdots + n \times n! = (n+1)! - 1}$

2) $\mathbf{n! \geq 2^{n-1}}$

الحل:

1) نفرض $E(n)$ هي الخاصة $(1 + 2 \times 2! + 3 \times 3! + \cdots + n \times n! = (n+1)! - 1)$ أياً كان العدد الطبيعي n.

الخاصة $E(1)$ صحيحة لأنّ $E(1) : \begin{cases} L_1 = 1 \\ L_2 = (1+1)! - 1 = 1 \end{cases}$ وهذا محقق لأنّ $L_1 = L_2$.

نفترض صحة الخاصة $E(n)$ أي $(1 + 2 \times 2! + 3 \times 3! + \cdots + n \times n! = (n+1)! - 1)$......$(*)$.

ولنبرهن صحة الخاصة $E(n+1)$ أي لنبرهن أنّ $1 + 2 \times 2! + 3 \times 3! + \cdots + n \times n! + (n+1)(n+1)! = (n+2)! - 1$.

لدينا:

$$1 + 2 \times 2! + 3 \times 3! + \cdots + n \times n! + (n+1)(n+1)! = (n+1)! - 1 + (n+1) \times (n+1)!$$
$$= (n+1)!\,(n+1+1) - 1 = (n+2)! - 1$$

ومنه $E(n+1)$ صحيحة. بالتالي $E(n)$ صحيحة أياً كان العدد الطبيعي n.

الخاصة $E(1)$ صحيحة لأنّ $\begin{cases} L_1 = 1! = 1 \\ L_2 = 2^{1-1} = 1 \end{cases}$: $E(1)$ وهذا محقق لأنّ $L_1 = L_2$.

نفترض صحة الخاصة $E(n)$ أي $(n! \geq 2^{n-1})$ ......(*).

ولنبرهن صحة الخاصة $E(n+1)$ أي لنبرهن أنّ $(n+1)! \geq 2^n$.

لدينا انطلاقاً من العلاقة $(*)$:

$$n! \geq 2^{n-1}$$

نضرب الأطراف بالمقدار $(n+1)$ علماً أنّ $(n+1) > 0$:

$$(n+1)n! \geq 2^{n-1} > (n+1)$$

نضيف ونطرح 2^n:

$$(n+1)! \geq 2^n \underbrace{-2^n + 2^{n-1}.(n+1)}_{\text{مقدار موجب}} \geq 2^n$$

أي:

$$(n+1)! \geq 2^n$$

ومنه $E(n+1)$ صحيحة. بالتالي $E(n)$ صحيحة من أجل n.

التمرين الخامس: في حالة عدد طبيعي $n \geq 1$، ليكن $u_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$ و $v_n = u_{2n} - u_n$. أثبت أنّ المتتالية (v_n) متزايدة تماماً.

الحل:

لنحسب أولاً v_n علينا إيجاد u_{2n} ومنه:

$$u_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$$

$$u_{2n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots \frac{1}{2n} = u_n + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots \frac{1}{2n}$$

ومنه:

$$v_n = u_{2n} - u_n = u_n + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots \frac{1}{2n} - u_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots \frac{1}{2n}$$

وبحساب $v_n + 1$:

$$v_{n+1} = \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \cdots \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2}$$

$$v_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots \frac{1}{2n}$$

ومنه:

$$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{2n+1} + \frac{1-2}{2n+2} = \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} = \frac{2n+2-(2n+1)}{(2n+1)(2n+2)}$$

$$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{(2n+1)(2n+2)} > 0$$

إذاً المتتالية v_n متزايدة تماماً أياً كان $n \geq 1$.

التمرين السادس: a و b و c ثلاثة أعداد حقيقية و $a \neq 0$. نعلم أنّ a و b و c هي ثلاثة حدود متعاقبة من متتالية هندسية، نرمز إلى أساسها بالرمز q. كما نعلم أنّ $3a$ و $2b$ و c هي ثلاثة حدود متوالية من متتالية حسابية. احسب q.

الحل:

بما أنّ a و b و c ثلاثة حدود متعاقبة من متتالية هندسية، فهي تحقق:

$$\{a = a, b = aq\ , c = aq^2\}$$

وأيضاً $3a$ و $2b$ و c ثلاثة حدود متوالية من متتالية حسابية، فهي تحقق:

$$2b = \frac{3a + c}{2} \Longrightarrow 4b = 3a + c$$

نعوض $\{a = a, b = aq\ , c = aq^2\}$ في العلاقة السابقة لنجد:

$$4(aq) = 3a + aq^2$$

ولأنّ $a \neq 0$، نقسّم الأطراف على العدد a:

$$4q = 3 + q^2 \Longrightarrow q^2 - 4q + 3 = 0 \Longrightarrow (q-3)(q-1) = 0$$

ومنه إما $\boxed{q = 1}$ أو $\boxed{q = 3}$.

التمرين السابع: صُغ افتراضاً ثمّ تحقق من صحته.

الحل:

نتأمّل المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرفة تدريجياً وفق $u_0 = 7$ و $u_{n+1} = 10u_n - 18$ عند كل عدد طبيعي n. نهدف في هذا التمرين إلى التعبير عن u_n بدلالة n.

$$u_1 = 10u_0 - 18 = 70 - 18 = 52$$
$$u_2 = 10u_1 - 18 = 520 - 18 = 502$$
$$u_3 = 10u_2 - 18 = 5020 - 18 = 5002$$
$$u_4 = 10u_3 - 18 = 50020 - 18 = 50002$$

(تخمين):

$u_1 = 52 = 50 + 2 = 5 \times 10^1 + 2$ و $u_2 = 502 = 500 + 2 = 5 \times 10^2 + 2$ و $u_3 = 5002 = 5 \times 10^3 + 2$ ومنه

نخمّن أنّ عبارة u_n بدلالة n هي:

$$u_n = 5 \times 10^n + 2$$

نثبت صحة علاقة التخمين u_n بالتدريج:

نفرض $E(n)$ هي الخاصة $(u_n = 5 \times 10^n + 2)$ أياً كان العدد الطبيعي n.

الخاصة $E(0)$ صحيحة لأنّ $u_0 = 5 \times 10^0 + 2 = 7$ وهذا محقق لأنّ $u_0 = 7$ من فرض المسألة.

نفترض صحة الخاصة $E(n)$ أي $(u_n = 5 \times 10^n + 2)\ldots\ldots(*)$.

ولنبرهن صحة الخاصة $E(n+1)$ أي لنبرهن أنّ $u_{n+1} = 5 \times 10^{n+1} + 2$.

لدينا $u_{n+1} = 10u_n - 18$ ومنه:

$$u_{n+1} = 10(5 \times 10^n + 2) - 18 = 5 \times 10^{n+1} + 20 - 18 = 5 \times 10^{n+1} + 2$$

ومنه $E(n+1)$ صحيحة. بالتالي $E(n)$ صحيحة أياً كان العدد الطبيعي n.

التمرين الثامن: متتالية هندسية متخفيّة.

نتأمّل المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرفة تدريجياً وفق $u_0 = s$ و $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + n^2 + n$.

1) عيّن كثير الحدود من الدرجة الثانية P بحيث تحقق المتتالية $(t_n)_{n\geq 0}$ التي حدّها العام $t_n = P(n)$ العلاقة التدريجية نفسها أي $t_{n+1} = \frac{1}{2}t_n + n^2 + n$ أياً كانت n.

2) أثبت أنّ المتتالية $(v_n)_{n\geq 0}$ التي حدها العام $v_n = u_n - t_n$ هي متتالية هندسية.

3) اكتب عبارة v_n ثمّ u_n بدلالة n و s.

الحل:

1) نعلم أنّ كثير الحدود من الدرجة الثانية يُعطى بالصيغة $P(n) = an^2 + bn + c$ وفرضاً لدينا $t_n = P(n)$ بالتالي $t_{n+1} =$ $P(n+1)$ أي:

$$\frac{1}{2}t_n + n^2 + n = a(n+1)^2 + b(n+1) + c$$

ولكن $t_n = P(n) = an^2 + bn + c$، نعوض بالعلاقة السابقة:

$$\frac{1}{2}(an^2 + bn + c) + n^2 + n = a(n^2 + 2n + 1) + b(n+1) + c$$

$$\frac{1}{2}an^2 + \frac{1}{2}bn + \frac{1}{2}c + n^2 + n = an^2 + 2an + a + bn + b + c$$

$$\frac{1}{2}an^2 + n^2 - an^2 + \frac{1}{2}bn + n - 2an - bn + \frac{1}{2}c - a - b - c = 0$$

$$\left(\frac{1}{2}a + 1 - a\right)n^2 + \left(\frac{1}{2}b + 1 - 2a - b\right)n - \frac{1}{2}c - a - b = 0$$

$$\left(1 - \frac{1}{2}a\right)n^2 + \left(1 - 2a - \frac{1}{2}b\right)n - \frac{1}{2}c - a - b = 0$$

المعادلة السابقة صحيحة، نطابق أمثال الطرفين، أيّ نكتب الصفر بالشكل $0 = 0n^2 + 0n + 0$، ومنه:

$$\left(1 - \frac{1}{2}a\right)n^2 + \left(1 - 2a - \frac{1}{2}b\right)n - \frac{1}{2}c - a - b = 0n^2 + 0n + 0$$

ومنه:

$$1 - \frac{1}{2}a = 0 \Rightarrow \boxed{a = 2}$$

$$1 - 2a - \frac{1}{2}b = 0 \Rightarrow 1 - 2(2) - \frac{1}{2}b = 0 \Rightarrow \boxed{b = -6}$$

$$-\frac{1}{2}c - a - b = 0 \Rightarrow -\frac{1}{2}c - (2) - (-6) = 0 \Rightarrow \boxed{c = 8}$$

ومنه كثير الحدود P يعطى بالعلاقة:

$$\boxed{P(n) = 2n^2 - 6n + 8}$$

2) لدينا:

$$v_{n+1} = u_{n+1} - t_{n+1}$$

ولكن $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + n^2 + n$ وأيضاً $t_{n+1} = \frac{1}{2}t_n + n^2 + n$ بالتالي $u_{n+1} - t_{n+1} = \frac{1}{2}u_n - \frac{1}{2}t_n = \frac{1}{2}(u_n - t_n)$ ومنه:

$$v_{n+1} = u_{n+1} - t_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n - t_n) = \frac{1}{2}v_n$$

إذاً المتتالية $(v_n)_{n\geq 0}$ هي متتالية هندسية أساسها $q = \frac{1}{2}$.

3) لدينا $q = \frac{1}{2}$ و $v_0 = u_0 - t_0$ ونعلم أنّ $u_0 = s$ و $t_0 = P(0) = 2(0) - 6(0) + 8 = 8$ أيّ $v_0 = a - 8$ ومنه تُعطى عبارة $(v_n)_{n\geq 0}$ بدلالة n بالشكل:

$$v_n = v_0 q^n = (s-8)\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

بما أنّ $v_n = u_n - t_n$ فإنّ $u_n = v_n + t_n$ ونعلم أنّ $v_n = (s-8)\left(\frac{1}{2}\right)^n$ و $t_n = P(n) = 2n^2 - 6n + 8$ ومنه عبارة $(u_n)_{n\geq 0}$ بدلالة n:

$$u_n = (s-8)\left(\frac{1}{2}\right)^n + 2n^2 - 6n + 8$$

التمرين التاسع:

نُعطى عددين حقيقين a و b ونفترض أنّ $a \neq 1$. نتأمل المتتالية $(v_n)_{n\geq 0}$ التي تحقق $v_{n+1} = av_n + b$، أياً كان العدد الطبيعي n.

1) عيّن تابعاً f يحقق $v_{n+1} = f(v_n)$ أياً كانت قيمة $n \geq 0$.

2) احسب ℓ حلّ المعادلة $f(x) = x$.

3) نعرف المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ حيث $u_n = v_n - \ell$. أثبت أنّ $(u_n)_{n\geq 0}$ متتالية هندسية، واستنتج u_n بدلالة n و a و b. ثمّ استنتج v_n بدلالة هذه المُعاملات.

الحل:

1) بفرض $v_n = x$ فيكون $f(x) = v_{n+1}$ ولأنّ $v_{n+1} = av_n + b$ فإنّ التابع f يعطى بالعلاقة: $f(x) = ax + b$.

2) حل المعادلة :

$$f(x) = x \Leftrightarrow ax + b = x$$

$$ax - x = -b \Longrightarrow x(a-1) = -b \Longrightarrow \boxed{x = \frac{-b}{a-1} = \ell}$$

3) نعلم أنّ $u_n = v_n - \ell$ ومنه $u_{n+1} = v_{n+1} - \ell = av_n + b - \ell$ ومنه:

$$u_{n+1} = av_n + b - \ell$$

بما أنّ $u_n = v_n - \ell$ فإنّ $v_n = u_n + \ell$ نعوض بالعبارة السابقة:

$$u_{n+1} = a(u_n + \ell) + b - \ell = au_n + a\ell + b - \ell = au_n + (a-1)\ell + b$$

من الطلب السابق علمنا أنّ $\ell = \frac{-b}{a-1}$ نعوض بالعبارة السابقة:

$$u_{n+1} = au_n + (a-1)\left(\frac{-b}{a-1}\right) + b = au_n - b + b = au_n$$

المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ متتالية هندسية أساسها $q = a$ وحدّها الأول $u_0 = v_0 - \ell = v_0 + \frac{b}{a-1}$ ومنه عبارة $(u_n)_{n\geq 0}$ بدلالة n تُعطى وفق:

$$u_n = u_0 q^n = \left(v_0 + \frac{b}{a-1}\right)a^n$$

ومما سبق وجدنا أنّ $v_n = u_n + \ell$ نعوض $u_n = \left(v_0 + \frac{b}{a-1}\right)a^n$ و $\ell = \frac{-b}{a-1}$ فالعلاقة السابقة لنجد:

$$v_n = \left(v_0 + \frac{b}{a-1}\right)a^n - \frac{b}{a-1} = v_0 . a^n + \frac{b . a^n}{a-1} - \frac{b}{a-1}$$

التمرين العاشر:

نتأمل متتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ مُعرّفة بالتدريج وفق: $\begin{cases} u_0 = 1, u_1 = 4 \\ u_{n+1} = 5u_n - 6u_{n-1} \quad (n \geq 1) \end{cases}$

1) عيّن عددين حقيقين a و b يحققان $a + b = 5$ و $ab = 6$.
2) لتكن $(v_n)_{n\geq 0}$ المتتالية $v_n = u_{n+1} - au_n$. أثبت أنّ $(v_n)_{n\geq 0}$ متتالية هندسية أساسها b.
3) لتكن $(w_n)_{n\geq 0}$ المتتالية $w_n = u_{n+1} - bu_n$. أثبت أنّ $(w_n)_{n\geq 0}$ متتالية هندسية أساسها a.
4) عبّر عن v_n و w_n بدلالة n. ثمّ استنتج عبارة u_n بدلالة n.

الحل:

1) عددان مجموعهما 5 وجداء ضربهما 6 هما 2 و 3 ليكن مثلاً $a = 2$ و $b = 3$ (يجوز أخذ العكس).

2) بما أنّ $a = 2$ فإنّ $v_n = u_{n+1} - 2u_n$ ومنه:

$$v_{n+1} = u_{n+2} - 2u_{n+1} = 5u_{n+1} - 6u_n - 2u_{n+1} = 3(u_{n+1} - 2u_n) = 3v_n$$

المتتالية $(v_n)_{n\geq 0}$ متتالية هندسية أساسها $q = 3$.

3) بما أنّ $b = 3$ فإنّ $w_n = u_{n+1} - 3u_n$ ومنه:

$$w_{n+1} = u_{n+2} - 3u_{n+1} = 5u_{n+1} - 6u_n - 3u_{n+1} = 2(u_{n+1} - 3u_n) = 2w_n$$

المتتالية $(w_n)_{n\geq 0}$ متتالية هندسية أساسها $q = 2$.

4) $v_n = u_{n+1} - 2u_n$ ومنه $v_0 = u_1 - 2u_0 = 4 - 2 = 2$ ولدينا $q = 3$، أي عبارة v_n بدلالة n تعطى وفق:

$$v_n = v_0 q^n \Longrightarrow \boxed{v_n = 2 \times 3^n}$$

$w_n = u_{n+1} - 3u_n$ ومنه $w_0 = u_1 - 3u_0 = 4 - 3 = 1$ ولدينا $q = 2$، أي عبارة w_n بدلالة n تعطى وفق:

$$w_n = w_0 q^n \Longrightarrow \boxed{w_n = 2^n}$$

لدينا $\begin{cases} v_n = u_{n+1} - 2u_n \\ w_n = u_{(n+1)} - 3u_n \end{cases}$ ومنه $\begin{cases} 2 \times 3^n = u_{n+1} - 2u_n \\ 2^n = u_{n+1} - 3u_n \end{cases}$، ثمّ بطرح العلاقة الأولى من الثانية:

$$\boxed{2 \times 3^n - 2^n = u_n}$$

وهي عبارة u_n بدلالة n.

✓ **عند اختيار $a = 3$ و $b = 2$ يكون $\{v_n = -2 \times 3^n, w_n = 0, u_n = 2 \times 3^n\}$.**

ملاحظة: بالنسبة للطلب الأول إذا ورد بالامتحان النهائي سيكون الطلب ضمن شرط معين يوضح قيمة الأعداد a و b.

مثلا الشرط $(a > b)$ عندها نستنتج أنّ $a = 3$ و $b = 2$ لأنّ $a = 3 > 2 = b$

أو مثلاً يذكر أنّ العدد a هو عدد زوجي عندها نستنتج أنّ $a = 2$ و $b = 3$ لأنّ 2 هو العدد الزوجي ضمن الخيارات المتاحة.

التمرين الحادي عشر: متراجحة تدريجية

1) أثبت، أيّاً كان العدد الطبيعي n، $n \geq 2$، أنّ: $3 \times n^2 \geq (n+1)^2$
2) نرمز بالرمز $E(n)$ إلى القضية $<< 3^n \geq 2^n + 5 \times n^2 >>$.

-1 ما أصغر عدد طبيعي غير معدوم n، تكون $E(n)$ صحيحة عنده؟

-2 أثبت أنّ $E(n)$ صحيحة، أيّاً كان العدد الطبيعي n الذي يحقق الشرط $n \geq 5$.

الحل:

1) الخاصة $3n^2 \geq (n+1)^2$ صحيحة من أجل $n = 2$ لأنّ $3 \times 2^2 = 12 \geq 9 = (2+1)^2$ صحيحة.

نفترض صحة الخاصة من أجل n أي أنّ الخاصة $(3n^2 \geq (n+1)^2)$......$(*)$ صحيحة.

ولنبرهن صحة الخاصة من أجل $n+1$ أي لنبرهن أنّ $3(n+1)^2 \geq (n+2)^2$.

لدينا:

$$3(n+1)^2 = 3n^2 + 6n + 3$$

ولأنّ $3n^2 \geq (n+1)^2$ فإنّ $3(n+1)^2 = 3n^2 + 6n + 3 \geq (n+1)^2 + 6n + 3$، ومنه:

$$3(n+1)^2 \geq (n+1)^2 + 6n + 3$$
$$\geq n^2 + 2n + 1 + 6n + 3$$
$$\geq n^2 + 8n + 4$$
$$\geq n^2 + 4n + 4 + 4n$$
$$\geq (n+2)^2 + 4n \geq (n+2)^2$$

لأن المقدار $4n$ مقدار موجب يجوز حذفه من طرف المتراجحة الصغير

ومنه:

$$3(n+1)^2 \geq (n+2)^2$$

إذاً الخاصة $3(n+1)^2 \geq (n+2)^2$ صحيحة بالتالي الخاصة $3n^2 \geq (n+1)^2$ من أجل $n \geq 2$.

2) -1

$$n = 1 \Rightarrow E(1):\ \ 3^1 \geq 2^1 + 5 \times 1^2 \Rightarrow 3 \geq 7$$ غير محققة

$$n = 2 \Rightarrow E(2):\ \ 3^2 \geq 2^2 + 5 \times 3^2 \Rightarrow 9 \geq 24$$ غير محققة

$$n = 3 \Rightarrow E(3):\ \ 3^3 \geq 2^3 + 5 \times 3^3 \Rightarrow 27 \geq 53$$ غير محققة

$$n = 4 \Rightarrow E(4):\ \ 3^4 \geq 2^4 + 5 \times 4^2 \Rightarrow 81 \geq 96$$ غير محققة

$$n = 5 \Rightarrow E(5):\ \ 3^5 \geq 2^5 + 5 \times 5^2 \Rightarrow 243 \geq 157$$ محققة

إذاً $n = 5$ هو أول عدد طبيعي موجب تماماً تكون عنده $E(n)$ محققة.

2) 2-لأنّ الخاصة $E(5)$ صحيحة، نفرض صحة الخاصة $E(n)$ أيّ $(3^n \geq 2^n + 5 \times n^2)$ صحيحة.

ولنبرهن صحة الخاصة $E(n+1)$ أي لنبرهن أنّ $3^{n+1} \geq 2^{n+1} + 5 \times (n+1)^2$.

لدينا:

$$3^{n+1} = 3 \times 3^n$$

ولأنّ $3^n \geq 2^n + 5 \times n^2$ فإنّ $3^{n+1} = 3 \times 3^n \geq 3(2^n + 5n^2)$، ومنه:

$$3^{n+1} \geq 3(2^n + 5n^2)$$
$$\geq 3 \times 2^n + 15n^2$$

نضيف ونطرح المقدار $2^{n+1} + 5(n+1)^2$:

$$3^{n+1} \geq 2^{n+1} + 5(n+1)^2 - 2^{n+1} - 5(n+1)^2 + 3 \times 2^n + 15n^2$$
$$\geq 2^{n+1} + 5(n+1)^2 - 2 \times 2^n - 5(n^2 + 2n + 1) + 3 \times 2^n + 15n^2$$

$$\geq 2^{n+1}+5(n+1)^2+2^n-5n^2-10n-5+15n^2$$

$$\geq 2^{n+1}+5(n+1)^2+2^n+10n^2-10n-5$$

والمقدار $2^n+10n^2-10n-5>0$ من أجل $n\geq 5$، بالتالي:

$$3^{n+1}\geq 2^{n+1}+5(n+1)^2+2^n+10n^2-10n-5\geq 2^{n+1}+5(n+1)^2$$

توضيح

المقدار $2^n>0$

والمقدار $10n^2-10n-5>0$ عندما $n\geq 5$، لأنّ:

$10n^2-10n-5=0$

بالتالي $n_1=\frac{1-\sqrt{3}}{2}$ و $n_2=\frac{1+\sqrt{3}}{2}$ ومنه:

n	$-\infty$		n_1		n_2		$+\infty$
$10n^2-10n-1$		+	0	−	0	+	

أيّ أنّ:

$$3^{n+1}\geq 2^{n+1}+5(n+1)^2$$

ومنه الخاصة $E(n+1)$ صحيحة. بالتالي الخاصة $E(n)$ صحيحة أياً كان العدد الطبيعي $n\geq 5$.

التمرين الثاني عشر:

نرمز بالرمز $E(n)$ إلى القضية >> $3^n\geq (n+2)^2$ <<.

1) أتكون القضايا $E(0)$ و $E(1)$ و $E(3)$ و $E(4)$.

2) أثبت بالتدريج أنّ القضية $E(n)$ صحيحة عند كل عدد طبيعي n يحقق الشرط $n\geq 3$.

الحل:

(1

$n=0\Longrightarrow E(0):\ \ 3^0\geq (0+2)^2\Longrightarrow 1\geq 4$ غير صحيحة

$n=1\Longrightarrow E(1):\ \ 3^1\geq (1+2)^2\Longrightarrow 3\geq 9$ غير صحيحة

$n=3\Longrightarrow E(3):\ \ 3^3\geq (3+2)^2\Longrightarrow 27\geq 25$ صحيحة

$n=4\Longrightarrow E(4):\ \ 3^4\geq (4+2)^2\Longrightarrow 81\geq 36$ صحيحة

2) لأنّ الخاصة $E(3)$ صحيحة، نفرض صحة الخاصة $E(n)$ أيّ $(3^n\geq (n+2)^2)$ صحيحة.

ولنبرهن صحة الخاصة $E(n+1)$ أي لنبرهن أنّ $3^{n+1}\geq (n+3)^2$.

لدينا:

$$3^{n+1}=3\times 3^n$$

ولأنّ $3^n\geq (n+2)^2$ فإنّ $3^{n+1}=3\times 3^n\geq 3(n+2)^2$، ومنه:

$$3^{n+1}\geq 3(n+2)^2$$

$$\geq 3n^2+12n+12$$

$$\geq \underbrace{n^2+6n+9}_{(n+3)^2}+2n^2+6n+3$$

توضيح

والمقدار $2n^2+6n+3>0$ عندما $n\geq 3$، لأنّ:

$2n^2+6n+3=0$

بالتالي $n_1=\frac{-3-\sqrt{3}}{2}$ و $n_2=\frac{-3+\sqrt{3}}{2}$ ومنه:

n	$-\infty$		n_1		n_2		$+\infty$
$2n^2+6n+3$		+	0	−	0	+	

والمقدار $2n^2+6n+3>0$ من أجل $n\geq 3$، بالتالي:

$$3^{n+1}\geq (n+3)^2+2n^2+6n+3\geq (n+3)^2$$

أيّ أنّ:

$$3^{n+1}\geq (n+3)^2$$

ومنه الخاصة $E(n+1)$ صحيحة. بالتالي الخاصة $E(n)$ صحيحة أياً كان العدد الطبيعي $n\geq 3$.

التمرين الثالث عشر: أثبت بالتدريج، صحة كل من الخواص الآتية أياً كان العدد الطبيعي n.

1) >> 4^n+5 >>مضاعف للعدد 3<<.

2) >> $2^{3n}-1$ >>مضاعف للعدد 7<<.

3) >> n^3+2n >>مضاعف للعدد 3<<.

4) >> $3^{2n+1}+2^{n+2}$ >>مضاعف للعدد 7<<.

الحل:

1) نفرض $E(n)$ هي الخاصة $(4^n+5 \ = 3k)$ وهي تكافئ العبارة (أنّ العدد 4^n+5 مضاعف للعدد 3).

الخاصة $E(0)$ صحيحة لأنّ $4^0+5=1+5=6$ والعدد 6 من مضاعفات العدد 3.

نفترض صحة الخاصة $E(n)$ أي $(4^n+5=3k)$.

ولنبرهن صحة الخاصة $E(n+1)$ أي لنبرهن أنّ العدد $(4^{n+1}+5)$ من مضاعفات العدد 3.

انطلاقاً من الخاصة $E(n+1)$ نجد $4^{n+1}+5=4^n\times 4+5$، ومنه:

$$4\times 4^n+5=4(3k-5)+5=12k-20+5=12k-15=3(4k-5)$$

وبفرض أنّ $k_1=4k-5$ فنجد أنّ $4^{n+1}+5=3k_1$ وهو عدد من مضاعفات العدد 3.

أي أنّ $E(n+1)$ صحيحة. بالتالي $E(n)$ صحيحة أياً كان العدد الطبيعي n.

---

2) نفرض $E(n)$ هي الخاصة $(2^{3n}-1=7k)$ وهي تكافئ العبارة (أنّ العدد $2^{3n}-1$ مضاعف للعدد 7).

الخاصة $E(0)$ صحيحة لأنّ $2^0-1=1-1=0$ والعدد 0 من مضاعفات العدد 7.

نفترض صحة الخاصة $E(n)$ أي $(2^{3n}-1=7k)$.

ولنبرهن صحة الخاصة $E(n+1)$ أي لنبرهن أنّ العدد $\left(2^{3(n+1)}-1\right)$ من مضاعفات العدد 3.

انطلاقاً من الخاصة $E(n+1)$ نجد $2^{3(n+1)}-1=2^{3n}\times 2^3-1$، ومنه:

$$2^3\times 2^{3n}-1=8(7k+1)-1=56k+8-1=56k+7=7(8k+1)$$

وبفرض أنّ $k_1=8k+1$ فنجد أنّ $2^{3(n+1)}-1=7k_1$ وهو عدد من مضاعفات العدد 7.

أي أنّ $E(n+1)$ صحيحة. بالتالي $E(n)$ صحيحة أياً كان العدد الطبيعي n.

---

3) نفرض $E(n)$ هي الخاصة $(n^3+2n=3k)$ وهي تكافئ العبارة (أنّ العدد n^3+2n مضاعف للعدد 3).

الخاصة $E(0)$ صحيحة لأنّ $0^3+2(0)=0-0=0$ والعدد 0 من مضاعفات العدد 3.

نفترض صحة الخاصة $E(n)$ أي $(n^3+2n=3k)$.

متطابقة هامة

$(a\pm b)^3=a^2\pm 3a^2b+3ab^2\pm b^3$

ولنبرهن صحة الخاصة $E(n+1)$ أي لنبرهن أنّ العدد $\left((n+1)^3+2(n+1)\right)$ من مضاعفات العدد 3.

انطلاقاً من الخاصة $E(n+1)$ نجد $(n+1)^3+2(n+1)=n^3+3n^2+3n+1+2n+2$، ومنه:

$$n^3+3n^2+3n+1+2n+2=3k-2n+3n^2+5n+3=3k+3n^2+3n+3=3(k+n^2+n+1)$$

وبفرض أنّ $k_1=k+n^2+n+1$ فنجد أنّ $(n+1)^3+2(n+1)=3k_1$ وهو عدد من مضاعفات العدد 7.

أي أنّ $E(n+1)$ صحيحة. بالتالي $E(n)$ صحيحة أياً كان العدد الطبيعي n.

---

4) نفرض $E(n)$ هي الخاصة $(3^{2n+1}+2^{n+2}=7k)$ وهي تكافئ العبارة (أنّ العدد $2^{3n}-1$ مضاعف للعدد 7).

الخاصة $E(0)$ صحيحة لأنّ $3^{0+1}+2^{0+2}=3+4=7$ والعدد 7 من مضاعفات العدد 7.

نفترض صحة الخاصة $E(n)$ أي $(3^{2n+1}+2^{n+2}=7k)$.

ولنبرهن صحة الخاصة $E(n+1)$ أي لنبرهن أنّ العدد $\left(3^{2(n+1)+1}+2^{n+3}=7k\right)$ من مضاعفات العدد 3.

انطلاقاً من الخاصة $E(n+1)$ نجد $3^{2(n+1)+1}+2^{n+3}=3^{2n+3}+2^{n+3}=3^2\times 3^{2n+1}+2\times 2^{n+2}$، ومنه:

$$3^2\times 3^{2n+1}+2\times 2^{n+2}=9(7k-2^{n+2})+2\times 2^{n+2}=63k-9\times 2^{n+2}+2\times 2^{n+2}=63k-7\times 2^{n+2}$$

ومنه: $3^{2(n+1)+1}+2^{n+3}=7(9k-2^{n+2})$.

وبفرض أنّ $k_1=9k-2^{n+2}$ فنجد أنّ $3^{2(n+1)+1}+2^{n+3}=7k_1$ وهو عدد من مضاعفات العدد 7.

أي أنّ $E(n+1)$ صحيحة. بالتالي $E(n)$ صحيحة أياً كان العدد الطبيعي n.

التمرين الرابع عشر: نرمز إلى القضية << يقسُم العدد 9 العدد $10^n + 1$>> بالرمز $E(n)$، في حالة $n \in \mathbb{N}$.

1) أثبت أنّه إذا كانت القضية $E(n)$ صحيحة عند قيمة للعدد n، كانت عندئذ $E(n+1)$ صحيحة.

2) أتكون القضية $E(n)$ صحيحة على $\mathbb{N}$؟ برّر إجابتك.

الحل:

1) نفترض صحة الخاصة $E(n)$ من أجل $n \in \mathbb{N}$ أي $(10^n + 1 = 9k)$.

ولنبرهن صحة الخاصة $E(n+1)$ أي لنبرهن أنّ العدد $(10^{n+1} + 1)$ من مضاعفات العدد 9.

انطلاقاً من الخاصة $E(n+1)$ نجد $10^{n+1} + 1 = 10 \times 10^n + 1$، ومنه:

$$10 \times 10^n + 1 = 10(9k - 1) + 1 = 90k - 10 + 1 = 90k - 9 = 9(10k - 1)$$

وبفرض أنّ $k_1 = 10k - 1$ فنجد أنّ $10^{n+1} + 1 = 9k_1$ وهو عدد من مضاعفات العدد 9.

أي أنّ $E(n+1)$ صحيحة.

2) الخاصة $E(0)$ غير صحيحة لأنّ $10^0 + 1 = 1 + 1 = 2$ والعدد 2 ليس من مضاعفات العدد 9.

بالتالي الخاصة $E(n)$ ليست صحيحة على $\mathbb{N}$.

التمرين الخامس عشر: $(u_n)_{n\geq 0}$ متتالية معرفة وفق $u_0 = 1$ و $u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n}$ عند كل $n \geq 0$.

1) أثبت أنّ $0 \leq u_n \leq 2$، أياً كان العدد الطبيعي n.

2) أثبت أنّ المتتالية متزايدة تماماً.

الحل:

1) نفرض $E(n)$ هي الخاصة $(0 \leq u_n \leq 2)$.

الخاصة $E(0)$ صحيحة لأنّ $0 \leq u_0 = 1 \leq 2$.

نفترض صحة الخاصة $E(n)$ أي $(0 \leq u_n \leq 2) \ldots\ldots (*)$.

ولنبرهن صحة الخاصة $E(n+1)$ أي لنبرهن $(0 \leq u_{n+1} \leq 2)$.

انطلاقاً من $(*)$ $(0 \leq u_n \leq 2)$ بإضافة المقدار (2) إلى الأطراف:

$$2 \leq 2 + u_n \leq 4$$

$$\sqrt{2} \leq \sqrt{2 + u_n} \leq 2$$

ولأنّ $0 \leq \sqrt{2}$ بالتالي يتحقق $0 \leq \sqrt{2} \leq \sqrt{2 + u_n}$، ومنه $0 \leq \sqrt{2 + u_n}$، أيّ:

$$0 \leq \sqrt{2 + u_n} \leq 2$$

$$\boxed{0 \leq u_{n+1} \leq 2}$$

ومنه الخاصة $E(n+1)$ صحيحة. بالتالي الخاصة $E(n)$ صحيحة أياً كان العدد الطبيعي n.

2) لدينا:

$$u_{n+1} - u_n = \sqrt{2 + u_n} - u_n = \frac{(\sqrt{2 + u_n} - u_n)(\sqrt{2 + u_n} + u_n)}{\sqrt{2 + u_n} + u_n} = \frac{2 + u_n - u_n^2}{\sqrt{2 + u_n} + u_n} = \frac{-u_n^2 + u_n + 2}{\sqrt{2 + u_n} + u_n}$$

$$= \frac{-(u_n - 2)(u_n + 2)}{\sqrt{2 + u_n} + u_n}$$

لدينا $\sqrt{2 + u_n} + u_n > 0$

ولدينا $u_n + 2 \ge 0$ لأن $u_n \ge 0$، وأيضاً $u_n - 2 \le 0$ لأنّ $u_n < 2$، بالتالي $(u_n - 2)(u_n + 2) < 0$ ومنه $\dfrac{\overbrace{-}^{-}\overbrace{(u_n-2)}^{-}\overbrace{(u_n+2)}^{+}}{\underbrace{\sqrt{2+u_n}+u_n}_{+}} \ge 0$

أيّ أنّ:

$$u_{n+1} - u_n \ge 0$$

ومنه المتتالية u_n متزايدة تماماً.

ملاحظة: تستطيع حل الطلب السابق عن طريق الإثبات بالتدريج، وذلك بفرض القضية $E(n)$ التي تنص على أنّ $\ll u_{n+1} > u_n \gg$

التمرين السادس عشر: **$(u_n)_{n\ge 0}$ متتالية معرفة وفق $u_0 = 1$ و $u_{n+1} = \frac{3u_n+2}{2u_n+6}$ عند كل $n \ge 0$.**

1) أثبت أنّ التابع $x \mapsto \frac{3x+2}{2x+6}$ متزايد تماماً واستنتج أنّ $\frac{1}{2} < u_n \le 1$، أياً كان العدد n.

2) أثبت أنّ المتتالية متناقصة تماماً.

الحل:

لنضع التابع $f(x) = \frac{3x+2}{2x+6}$ في حالة $x \ge 0$. f تابع معرف واشتقاقي على المجال $[0, +\infty[$، ومنه مشتق التابع f يعطى وفق:

$$f'(x) = \frac{3(2x+6) - 2(3x+2)}{(2x+6)^2} = \frac{14}{(2x+6)^2} > 0$$

إذاً التابع f متزايد تماماً على المجال $[0, +\infty[$.

نفرض $E(n)$ هي الخاصة $\left(\frac{1}{2} < u_n \le 1\right)$ .... $(*)$.

الخاصة $E(0)$ صحيحة لأنّ $\frac{1}{2} \le u_0 = 1 \le 1$.

نفترض صحة الخاصة $E(n)$ أي $\left(\frac{1}{2} < u_n \le 1\right)$.

ولنبرهن صحة الخاصة $E(n+1)$ أي لنبرهن صحة $\frac{1}{2} < u_{n+1} \le 1$.

انطلاقاً من الخاصة $(*)$ حيث $\frac{1}{2} < u_n \le 1$ ولأنّ f متزايد تماماً على المجال $[0, +\infty[$ فإنّ:

$$f\left(\frac{1}{2}\right) \le f(u_n) < f(1)$$

لدينا $f(1) = \frac{3(1)+2}{2(1)+6} = \frac{5}{8}$ و $f(u_n) = u_{n+1}$ وأيضاً $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3\left(\frac{1}{2}\right)+2}{2\left(\frac{1}{2}\right)+6} = \frac{\frac{3}{2}+\frac{4}{2}}{1+6} = \frac{\frac{7}{2}}{7} = \frac{1}{2}$، ومنه:

$$\frac{1}{2} < u_{n+1} \le \frac{5}{8}$$

ولأنّ $\frac{5}{8} \le 1$ بالتالي $\frac{1}{2} \le u_{n+1} \le \frac{5}{8} \le 1$، أيّ أنّ:

$$\frac{1}{2} < u_{n+1} \le 1$$

أي أنّ $E(n+1)$ صحيحة. بالتالي $E(n)$ صحيحة أياً كان العدد الطبيعي n.

2)

نفرض $E(n)$ هي الخاصة $(u_{n+1} < u_n)$ .... $(*)$.

الخاصة $E(0)$ صحيحة لأنّ $u_1 = \frac{5}{8} < 1 = u_0$.

نفترض صحة الخاصة $E(n)$ أي $(u_{n+1} < u_n)$.

ولنبرهن صحة الخاصة $E(n+1)$ أي لنبرهن صحة $u_{n+2} < u_{n+1}$.

انطلاقاً من الخاصة $(*)$ حيث $u_{n+1} < u_n$ ولأنّ f متزايد تماماً على المجال $[0,+\infty[$ فإنّ:

$$f(u_{n+1}) \leq f(u_n)$$

لدينا $f(u_{n+1}) = u_{n+2}$ و $f(u_n) = u_{n+1}$ وأيضاً، ومنهُ:

$$u_{n+2} < u_{n+1}$$

أي أنّ $E(n+1)$ صحيحة. بالتالي $E(n)$ صحيحة أياً كان العدد الطبيعي n، ومنه المتتالية u_n متناقصة تماماً.

ملاحظة: تستطيع حل الطلب السابق عن طريق معيار الفرق أو النسبة.

التمرين السابع عشر:

ليكن θ عدد حقيقي من المجال $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$. ثمّ نعرف المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ معرفة وفق $u_0 = 2cos\theta$ و $u_{n+1} = \sqrt{2+u_n}$ في حالة $n \in \mathbb{N}$.

1) احسب u_1 و u_2.

2) أثبت بالتدريج، أنّ $u_n = 2\cos\left(\frac{\theta}{2^n}\right)$.

تذكر أنّ:
$1+cos2\theta = 2cos^2\theta$

الحل:

(1

$$u_1 = \sqrt{2+u_0} = \sqrt{2+2cos\theta} = \sqrt{2(1+cos\theta)} = \sqrt{2\times 2\cos^2\frac{\theta}{2}} = 2cos\frac{\theta}{2}$$

$$u_1 = \sqrt{2+u_1} = \sqrt{2+2cos\frac{\theta}{2}} = \sqrt{2(1+cos\frac{\theta}{2})} = \sqrt{2\times 2\cos^2\frac{\theta}{4}} = 2cos\frac{\theta}{4}$$

(2

نفرض $E(n)$ هي الخاصة $\left(u_n = 2\cos\left(\frac{\theta}{2^n}\right)\right)$.

الخاصة $E(0)$ صحيحة لأنّ $u_0 = 2\cos\left(\frac{\theta}{2^0}\right) = 2cos\theta$ وأيضاً من نص المسألة لدينا $u_0 = 2cos\theta$.

نفترض صحة الخاصة $E(n)$ أي $\left(u_n = 2\cos\left(\frac{\theta}{2^n}\right)\right)$ ..... $(*)$.

ولنبرهن صحة الخاصة $E(n+1)$ أي لنبرهن $u_{n+1} = 2\cos\left(\frac{\theta}{2^{n+1}}\right)$.

لدينا:

$$u_{n+1} = \sqrt{2+u_n} = \sqrt{2+2cos\frac{\theta}{2^n}} = \sqrt{2\left(1+cos\frac{\theta}{2^n}\right)} = \sqrt{2\times 2\cos^2\frac{\frac{\theta}{2^n}}{2}} = \sqrt{4\cos^2\frac{\theta}{2^{n+1}}} = 2\cos\left(\frac{\theta}{2^{n+1}}\right)$$

أي أنّ $E(n+1)$ صحيحة. بالتالي $E(n)$ صحيحة أياً كان العدد الطبيعي n.

التمرين الثامن عشر:

في مستوٍ $\mathcal{P}$، محدّث بمعلم متجانس، $\mathcal{H}$ هي مجموعة النقاط $M(x,y)$ التي تحقق احداثياتها المعادلة $x^2 - 5y^2 = 1$. ليكن التابع f الذي يقرن بكل نقطة $M(x,y)$ من المستوي $\mathcal{P}$ النقطة $M'(9x+20y, 4x+9y)$، أيّ $f(M) = M'$. لتكن النقطة S_0 التي احداثياتها $(1,0)$، ثمّ لنتأمل المستوي $\mathcal{P}$ متتالية النقاط $(S_n)_{n\geq 0}$ المعرفة وفق: $S_{n+1} = f(S_n)$. أثبت أنّ S_n نقطة من المجموعة $\mathcal{H}$ وأنّ إحداثياتها أعداد صحيحة.

الحل:

نعلم أنّ:

$$M(x,y) \in \mathcal{H} \ : x^2 - 5y^2 = 1$$
$$f(M) = M' \Longrightarrow f(x,y) = (9x + 20y, 4x + 9y)$$

نفرض $E(n)$ هي الخاصة "النقطة S_n تنتمي إلى $\mathcal{H}$ ومركّبتا S_n أعداد صحيحة".

الخاصة $E(0)$ صحيحة لأنّ $S_0 = (1,0)$ فمركّبتاها عددان صحيحان و $S_0 \in \mathcal{H}$ لأنّ $(1)^2 - 5(0)^2 = 1$.

نفترض صحة الخاصة $E(n)$ أي "النقطة S_n تنتمي إلى $\mathcal{H}$ ومركّبتا S_n أعداد صحيحة".

ولنبرهن صحة الخاصة $E(n+1)$ أي لنبرهن "النقطة S_{n+1} تنتمي إلى $\mathcal{H}$ ومركّبتا S_{n+1} أعداد صحيحة".

لدينا:

$$S_{n+1} = f(S_n) = f(x,y) = (9x + 20y, 4x + 9y)$$

نعوض في $x^2 - 5y^2$ ونثبت أنها صحيحة أي الناتج $\{1\}$

$$\begin{aligned}(9x+20y)^2 - 5(4x+9y)^2 &= 81x^2 + 360xy + 400y^2 - 5(16x^2 + 72xy + 81y^2)\\ &= 81x^2 + 360xy + 400y^2 - 80x^2 - 360xy - 405y^2\\ &= x^2 - 5y^2 = 1\end{aligned}$$

أي أنّ النقطة S_{n+1} تنتمي إلى $\mathcal{H}$.

ولأنّ (x,y) أعداد صحيحة(حسب الخاصة $E(n)$) فإنّ:

- $9x + 20y$ عدد صحيح لأنّ مجموع عددين صحيحين هو عدد صحيح.
- $4x + 9y$ عدد صحيح لأنّ مجموع عددين صحيحين هو عدد صحيح.

فتكون مركّبتا $S_{n+1} = (9x + 20,9x + 20)$ أعداد صحيحة.

أي أنّ النقطة S_{n+1} تنتمي إلى $\mathcal{H}$ ومركّبتا S_{n+1} أعداد صحيح، فنجد $E(n+1)$ صحيحة. بالتالي $E(n)$ صحيحة أياً كان العدد الطبيعي n.

التمرين التاسع عشر: يرمز x إلى عدد حقيقي ويرمز n إلى عدد طبيعي غير معدوم. نضع

$$S_n = \cos x + \cos 3x + \cos 5x + \cdots + \cos((2n-1)x)$$

1) باستعمال دساتير مثلثاتية تعرفها، أثبت أنّ:

$$\sin a \ .\cos b = \frac{1}{2}(\sin(a+b) + \sin(a-b)) \qquad \text{و} \qquad \sin 2a = 2\sin a \cos a$$

2) حوّل كلاً من العبارتين الآتيتين من جداء نسبتين مثلثيتين إلى مجموع نسبتين مثلثيتين.

$$\sin x \,.\cos((2n+1)x) \qquad \text{و} \qquad \sin nx \,.\cos nx$$

3) أثبت أنّ $S_n = \cos nx \times \frac{\sin nx}{\sin x}$، أياً كان $n \geq 1$ و $x \neq k\pi (k \in \mathbb{Z})$.

تذكر:
$\sin(a \pm b) = \sin a \cos b \pm \cos a \sin b$
$\cos(a \pm b) = \cos a \cos b \mp \sin a \sin b$

الحل:

1) نعلم أنّ $\boxed{\sin(a+b) = \sin a \,.\cos b + \cos a \,.\sin b}$. بالتالي:

$$\sin 2a = \sin(a+a) = \sin a \cos a + \cos a \sin a = 2\sin a \cos a$$

نعلم أنّ $\boxed{\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b}$ وأيضاً $\boxed{\sin(a-b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b}$ بجمع العلاقتين السابقتين

طرفاً إلى طرف نجد:

$$\sin(a+b)+\sin(a-b)=\sin a\cos b\cancel{+\cos a\sin b}+\sin a\cos b\cancel{-\cos a\sin b}=2\sin a\cos b$$

وبقسمة طرفي المعادلة على $\{2\}$ ينتج المطلوب:

$$\sin a\ .\cos b=\frac{1}{2}(\sin(a+b)+\sin(a-b))$$

2) من العلاقة السابقة باختيار $a=b=nx$ نجد:

$$\sin nx\ .\cos nx=\frac{1}{2}(\sin(nx+nx)+\sin(nx-nx))=\frac{1}{2}(\sin 2nx+\sin 0)=\frac{1}{2}\sin 2nx$$

لتحويل العلاقة الثانية نختار $a=x\ ,b=(2n+1)x=2nx+x$ ونعوض في نفس العلاقة:

$$\sin x\ .\cos(2nx+x)=\frac{1}{2}\big(\sin(x+2nx+x)+\sin\big(x-(2nx+x)\big)\big)=\frac{1}{2}(\sin(2x+2nx)+\sin(-2nx))$$

ومنه:

$$\sin x\ .\cos(2nx+x)=\frac{1}{2}(\sin(2x+2nx)-\sin(2nx))$$

3) نعلم أنّ $\big(\cos((2n-1)x\big)+\cdots+cos5x+cos3x+cosx=S_n$.

نفرض $E(n)$ هي الخاصة $\left(S_n=\cos nx\times\frac{\sin nx}{\sin x}\right)$ أياً كان $n\geq 1$.

الخاصة $E(1)$ صحيحة لأنّ $\cos x=\frac{\sin x}{\sin x}\times\cos x=S_0$ ومن علاقة S_n نجد أنّ $S_0=\cos x$.

نفترض صحة الخاصة $E(n)$ أي $\left(S_n=\cos nx\times\frac{\sin nx}{\sin x}\right)$ .....$(*)$.

ولنبرهن صحة الخاصة $E(n+1)$ أي لنبرهن أنّ : $S_{n+1}=\cos(n+1)x\times\frac{\sin(n+1)x}{\sin x}$.

لدينا:

$$S_{n+1}=cosx+cos3x+cos5x+\cdots+\cos\big((2n-1)x\big)+\cos\big((2(n+1)-1)x\big)=S_n+\cos\big((2n+1)x\big)$$

$$=\cos nx\times\frac{\sin nx}{\sin x}+\cos\big((2n+1)x\big)=\frac{\sin nx\ .\cos nx+\sin x\cos\big((2n+1)x\big)}{\sin x}$$

ومما سبق وجدنا $\sin nx\ .\sin nx=\frac{1}{2}\sin 2nx$ وأيضاً $\sin x\cos\big((2n+1)x\big)=\frac{1}{2}(\sin(2x+2nx)-\sin(2nx))$، ومنه:

$$S_{n+1}=\frac{\frac{1}{2}\sin 2nx+\frac{1}{2}(\sin(2x+2nx)-\sin(2nx))}{\sin x}=\frac{\sin(2x+2nx)}{2\sin x}=\frac{\sin(2(n+1)x)}{2\sin x}$$

ولأنّ $\sin 2a=2\sin a\cos a$ فإنّ $\sin(2(n+1)x)=2\sin\big((n+1)x\big).\cos\big((n+1)x\big)$، ومنه:

$$S_{n+1}=\frac{2\sin\big((n+1)x\big).\cos\big((n+1)x\big)}{2\sin x}=\cos\big((n+1)x\big)\times\frac{\sin(n+1)x}{\sin x}$$

أي أنّ $E(n+1)$ صحيحة. بالتالي $E(n)$ صحيحة أياً كان $n\geq 1$.

انتهت الوحدة