الرياضيات

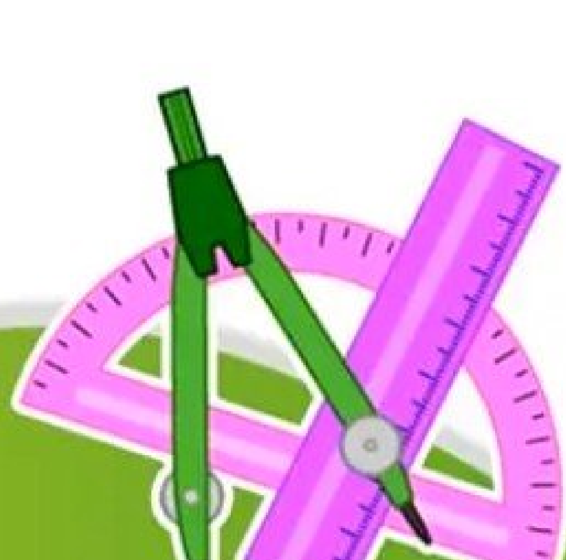
Bac
2024

الأشعة

القسم التحليلي

أ.ماهر برير

2- العمليات التحليلية على الأشعة



- فائدة: نستطيع كتابة مركبات أي شعاع مثل $\vec{u}(x,y,z)$ بشكل عمودي كما يلي:

$$\vec{u}\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}$$

وهنا أسهل لنا عند وجود عمليات حسابية على الأشعة.

- العمليات التحليلية على الأشعة

ليكن لدينا الشعاعين: $\vec{u}(x,y,z)$ ، $\vec{v}(x',y',z')$

1) الجمع والطرح شعاعين.

$$\vec{u}\mp\vec{v}=\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}\mp\begin{bmatrix}x'\\y'\\z'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x\mp x'\\y\mp y'\\z\mp z'\end{bmatrix}$$

2) ضرب عدد حقيقي في شعاع

$k\in\mathbb{R}$

$$k.\vec{u}=\begin{bmatrix}kx\\ky\\kz\end{bmatrix}$$

وكأنها عملية نشر

3) تساوي الشعاعين $\vec{u}$ ، $\vec{v}$ عندما:

$$\vec{u}=\vec{v}\Leftrightarrow\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x'\\y'\\z'\end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow x=x' , y=y' , z=z'$$

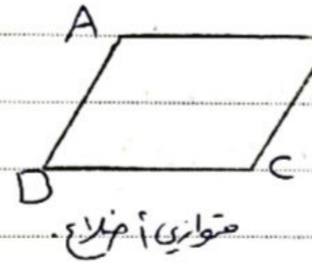
4) إذا كان ABCD متوازي أضلاع:

بوجود متوازي أضلاع سيعطي أشعة متساوية.

ABCD متوازي أضلاع $\Leftrightarrow$ وجود أشعة متساوية والعكس صحيح، وجود شعاعين متساويين لا يوجد بينهما حرف مشترك سيكونون معاً متوازي أضلاع.

ولكن كيف نحدد الأشعة المتساوية ؟؟

- في حال تحديد تحديدها عن طريق الرسم: نرسم متوازي أضلاع (بأحرف متتابعة (مع عقارب الساعة أو عكسها)



متوازي أضلاع.

$\vec{AB}=\vec{DC}$ $\Leftrightarrow$ (لهما نفس الحامل ونفس الجهة والطويلة ذاتها)

وكذلك: $\vec{AD}=\vec{BC}$

- نستطيع تحديد الأشعة المتساوية بدون رسم كما يلي:

ABCD متوازي أضلاع $\qquad \vec{AB}=\vec{DC}$

أو:

ABCD متوازي أضلاع $\qquad \vec{AD}=\vec{BC}$

ولا ننسى الاستفادة من العكس: وجود شعاعين متساويين لا يوجد بينهما حرف مشترك سيشكلان متوازي أضلاع (سيأتي طلب في مسألة)

مسألة: في معلم متجانس $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ في الفراغ لدينا النقاط:

$A(3,-1,0)$ ، $B(2,1,-1)$ ، $C(3,2,-3)$

1) احسب مركبات الشعاعين $\overrightarrow{AB}$ ، $\overrightarrow{BC}$

$\overrightarrow{AB}\ (x_B-x_A, y_B-y_A, z_B-z_A)$

$\overrightarrow{AB}\ (-1,2,-1)$

$\overrightarrow{BC}\ (x_C-x_B, y_C-y_B, z_C-z_B)$

$\overrightarrow{BC}\ (1,1,-2)$

2) احسب مركبات الشعاع $\vec{U}$ حيث:
$\vec{U}=3\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{BC}$

$$=3\begin{bmatrix}-1\\2\\-1\end{bmatrix}+2\begin{bmatrix}1\\1\\-2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-3\\6\\-3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2\\2\\-4\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}-1\\8\\-7\end{bmatrix}\Leftrightarrow \vec{U}(-1,8,-7)$$

3) احسب إحداثيات النقطة M التي تجعل $ABCM$ متوازياً أضلاع.

حتى يكون $ABCM$ متوازي أضلاع يجب أن يتحقق: $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{MC}$

$$\begin{bmatrix}-1\\2\\-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_C-x_M\\y_C-y_M\\z_C-z_M\end{bmatrix}\Rightarrow$$

مساواة بين شعاعين
$$\begin{bmatrix}-1\\2\\-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3-x_M\\2-y_M\\-3-z_M\end{bmatrix}$$

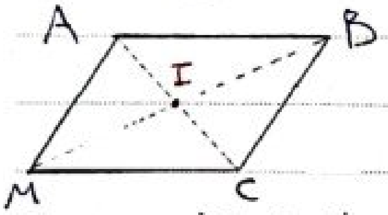
ومنه: (كل سطر يشكل معادلة).

$$\left.\begin{array}{l}-1=3-x_M\Rightarrow x_M=4\\ 2=2-y_M\Rightarrow y_M=0\\ -1=-3-z_M\Rightarrow z_M=-2\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$M(4,0,-2)$

4) احسب إحداثيات النقطة I مركز متوازي الأضلاع $ABCM$.

(نقطة تلاقي القطرين هي مركز متوازي الأضلاع - وقطرا متوازي الأضلاع متناصفان)



(لذلك:
I منتصف $[MB]$
I منتصف $[AC]$
نطبق قانون إحداثيات منتصف قطعة مستقيمة مرة واحدة (ونستطيع أن نتأكد بالثانية).

I منتصف $[AC]$ ومنه:

$$I\left(\frac{x_A+x_C}{2},\frac{y_A+y_C}{2},\frac{z_A+z_C}{2}\right)$$

$$I\left(3,\frac{1}{2},\frac{-3}{2}\right)$$

ملاحظة: إن تم حساب إحداثيات النقطة I على أساس أنها منتصف MB يجب أن نحصل على نفس النتيجة السابقة ليس ذلك فقط بل ونكون قد تأكدنا أيضاً من سلامة النقطة M)

لنتأكد من ذلك: I منتصف MB ومنه:

$$I\left(\frac{x_M+x_B}{2},\frac{y_M+y_B}{2},\frac{z_M+z_B}{2}\right)$$

$I\left(3,\frac{1}{2},\frac{-3}{2}\right)$ فالحل صحيح.

③ حتى يكون الرباعي $ABCK$ متوازي أضلاع يجب أن يتحقق: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{KC} \Rightarrow$

$$\begin{bmatrix} -1 \\ -6 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 - x_K \\ -2 - y_K \\ 2 - z_K \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} x_K = 1 \\ y_K = +4 \\ z_K = 1 \end{matrix}$$

ومنه $K(1, +4, 1)$

④ * $\vec{U} = 3\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{CD}$

$$= 3\begin{bmatrix} -1 \\ -6 \\ 1 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} -2 \\ 7 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 \\ -4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow \vec{U}(-7, -4, 1)$

* $\vec{V} = 2\overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{CD} + 3\overrightarrow{EF}$

$$= 2\begin{bmatrix} -1 \\ -6 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -2 \\ 7 \\ -1 \end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix} 5 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

بعد الحساب نجد: $\vec{V}\left(14, -\frac{7}{2}, \frac{11}{2}\right)$

-5) احسب إحداثيات النقطة N التي تحقق: $\overrightarrow{CN} = -2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$

$$\begin{bmatrix} x_N - x_C \\ y_N - y_C \\ z_N - z_C \end{bmatrix} = -2\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} x_N - 3 \\ y_N - 2 \\ z_N + 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} +2 \\ -4 \\ +2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} x_N - 3 \\ y_N - 2 \\ z_N + 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

(مساواة بين شعاعين: كل مركبة تساوي مثيلتها)

- $x_N - 3 = 3 \Rightarrow x_N = 6$
- $y_N - 2 = -3 \Rightarrow y_N = -1$
- $z_N + 3 = 0 \Rightarrow z_N = -3$

$\Rightarrow N(6, -1, -3)$

مثال محلول صفحة 22 في الكتاب

/ مشابه للمثال السابق / حله بيدك

* تدرب 1 صفحة 24 / الحل مباشرةً /

① نطبق قانون منتصف قطعة مستقيمة

- منتصف $[AB]$ هي: $\left(\frac{5}{2}, 2, \frac{5}{2}\right)$
- منتصف $[CD]$ هي: $\left(-1, \frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$
- منتصف $[EF]$ هي: $\left(\frac{11}{2}, 11, \frac{5}{2}\right)$

② $\overrightarrow{AB}(-1, -6, 1)$

$\overrightarrow{CD}(-2, 7, -1)$

$\overrightarrow{EF}(5, 4, 1)$

* تدرب 2 صفحة 24

كل وجه من أوجه متوازي السطوح هو متوازي أضلاع وبالتالي:

* ABCD متوازي أضلاع ومنه:

$$\vec{AB}=\vec{DC} \Rightarrow \begin{bmatrix}-1\\2\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-3-x_D\\2-y_D\\0-z_D\end{bmatrix}$$

وبالتالي: $D(-2,0,0)$

* ABFE متوازي أضلاع ومنه:

$$\vec{AB}=\vec{EF} \Rightarrow \begin{bmatrix}-1\\2\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_F-3\\y_F+1\\z_F-3\end{bmatrix}$$

وبالتالي: $F(2,1,3)$

* بالمطابقة بالأسلوب السابق ذاته أو مباشرة من الشكل نجد:

$$\vec{AE}=\vec{CG} \Rightarrow \begin{bmatrix}1\\-2\\4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_G+3\\y_G-2\\z_G-0\end{bmatrix}$$

وبالتالي: $G(-2,0,4)$

* كذلك نجد:

$$\vec{DH}=\vec{CG} \Rightarrow \begin{bmatrix}x_H+2\\y_H-0\\z_H-0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\-2\\4\end{bmatrix}$$

وبالتالي $H(-1,-2,4)$

* تدرب 3 صفحة 24

$A(3,0,-1)$ ، $B(-2,3,2)$ ، $C(1,2,-2)$

① تطبيق مباشر لقانون إحداثيات منتصف قطعة مستقيمة نجد: $I\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$

② $I \quad C \quad D$

$D(2x_C - x_I, 2y_C - y_I, 2z_C - z_I)$

$D\left(2-\frac{1}{2}, 4-\frac{3}{2}, -4-\frac{1}{2}\right)$

$D\left(\frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \frac{-9}{2}\right)$

طريقة ثانية

/ إذا نسيت القانون تستطيع اتباع هذه الطريقة ونكتب أولاً:

$\vec{IC}=\vec{CD} \Rightarrow$ لاحظ أن:

$$\begin{bmatrix}\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\\-\frac{5}{2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_D-1\\y_D-2\\z_D+2\end{bmatrix}$$

بالمطابقة نجد:

$D\left(\frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \frac{-9}{2}\right)$

③ $M(x_M, y_M, z_M)$; $\vec{BM}=\vec{AB}+3\vec{AC}$

$$\begin{bmatrix}x_M+2\\y_M-3\\z_M-2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-5\\3\\3\end{bmatrix}+3\begin{bmatrix}-2\\2\\-1\end{bmatrix}$$

ومنه $M(-13,12,2)$

④ $N(x_N, y_N, z_N)$; $\vec{NA}=2\vec{NC}$

$$\begin{bmatrix} 3-x_N \\ 0-y_N \\ -1-z_N \end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix} 1-x_N \\ 2-y_N \\ -2-z_N \end{bmatrix}$$

ومنه:

* $3-x_N = 2-2x_N$
$\Rightarrow x_N = -1$
* $0-y_N = 4-2y_N$
$\Rightarrow y_N = 4$
* $-1-z_N = -4-2z_N$
$\Rightarrow z_N = -3$

ومنه $N(-1, 4, -3)$

*تدريب 4 صفحة 24.

$B(5,-1,0)$ ، $A(2,3,-2)$

$M(x_M, y_M, z_M)$

(1) $\overrightarrow{MA} = 2\overrightarrow{AB}$

$$\begin{bmatrix} 2-x_M \\ 3-y_M \\ -2-z_M \end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix} 3 \\ -4 \\ +2 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$M(-4, 11, -6)$

(2) $\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{MB}$

$$\begin{bmatrix} 2-x_M \\ 3-y_M \\ -2-z_M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5-x_M \\ -1-y_M \\ 0-z_M \end{bmatrix}$$

ومنه:

$2-x_M = 5-x_M \Rightarrow 2 = 5$ مرفوضة

$3-y_M = -1-y_M \Rightarrow 3 = -1$ مرفوضة

$-2-z_M = -z_M \Rightarrow -2 = 0$ مرفوضة

فلا يمكن تعيين النقطة M في هذه الحالة.

/ تحل شفاهيًا بطريقة أبسط /

(3) $3\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{MB} = \vec{0}$

$$3\begin{bmatrix} -3 \\ 4 \\ -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5-x_M \\ -1-y_M \\ 0-z_M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} -9 \\ 12 \\ -6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5-x_M \\ -1-y_M \\ -z_M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$M(-4, 11, -6)$

(4) $\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{AB}$

$$\begin{bmatrix} 2-x_M \\ 3-y_M \\ -2-z_M \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 5-x_M \\ -1-y_M \\ 0-z_M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \\ -2 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 2-x_M \\ 3-y_M \\ -2-z_M \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_M-5 \\ y_M+1 \\ z_M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \\ -2 \end{bmatrix}$$

ومنه:

* $2-x_M+x_M-5 = 3 \Rightarrow -3 = 3$ مرفوضة
* $3-y_M+y_M+1 = -4 \Rightarrow 4 = -4$ مرفوضة
* $-2-z_M+z_M = -2 \Rightarrow -2 = -2$ محققة

فلا يمكن تعيين النقطة M في هذه الحالة.

/ تحل بطريقة شفاهية بشكل أبسط /