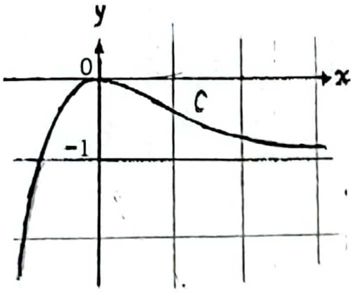
الأسئلة الوزارية لمادة الرياضيات – بكالوريا
النهايات والاشتقاق

أولاً- حل الأسئلة الآتية:

السؤال الأول- في الشكل المجاور، لدينا الخط البياني للتابع f. المطلوب:



1) ما معادلة المستقيم المقارب للخط c ؟ وما الوضع النسبي للخط C مع هذا المقارب؟
2) يقبل f قيماً حدية محلياً. عيّنها وعين نوعها.
3) في حالة عدد حقيقي k، ما عدد حلول المعادلة $f(x) = k$.

(1) $\Delta: y=-1$ مقارب أفقي في جوار $+\infty$ وإنّ C يقع فوق Δ.

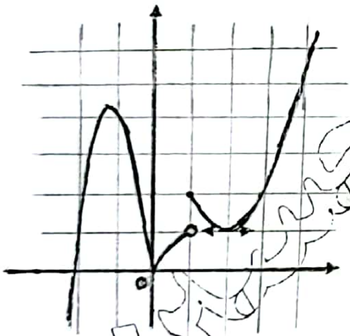
(2) نعم يقبل f قيمة حدية وهي $f(0)=0$ قيمة حدية كبرى.

(3) $k \in]-\infty,-1[$ يوجد حل وحيد، $k=0$ يوجد حل وحيد

$k=-1$ يوجد حل وحيد، $k \in]0,+\infty[$ لا يوجد حلول.

$k \in]-1,0[$ يوجد حلان

السؤال الثاني- نجد جانباً الخط البياني لتابع f معرف على R والمطلوب:



1) ما عدد حلول المعادلة $f(x) = 5$؟
2) ما مجموعة حلول المتراجحة $f(x) \geq 5$؟
3) هل $f(1)$ قيمة محلية كبرى أو صغرى للتابع. علل ذلك؟
4) ما عدد القيم الحدية للتابع f؟
5) ما قيمة المشتق في النقطة التي فاصلتها $x = 2$؟

(1) للمعادلة $f(x)=5$ حل وحيد

(2) مجموعة حلول المتراجحة $f(x)\geq 5$ هي $[4,+\infty[$

(3) باختيار مجال يحوي على القيمة الحدية $I=]0,2[$

وإنّ $D \cap I =]0,2[$.

فإنه أياً كانت x من I يكون $f(x) \leq 2$ ومنه $f(x) \leq f(1)$

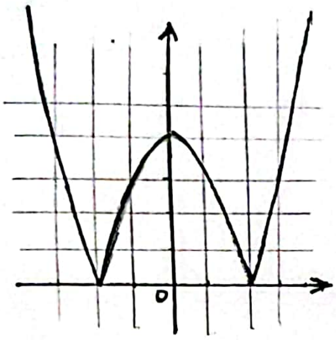
أي $f(1)=2$ قيمة محلية كبرى.

(4) عدد القيم الحدية هو (4) قيم (5) $f'(2)=0$

(6) أيكون f اشتقاقياً عند $x=1$ ؟ !

لا، لأن f غير مستمر عند $x=1$ فهو غير اشتقاقي عندها.

أ. أحمد شيخ حسين 0944787014 أ. رهف صباغ 0988914094



السؤال الثالث- نجد جانبًا الخط البياني للتابع f المعرف على R والمطلوب:

1) أوجد عدد حلول المعادلة $f(x) = 2$.
2) احسب قيمة المشتق عند الصفر.
3) احسب $f([-2,2])$.
4) كم قيمة كبرى وصغرى محليًا
5) اكتب جدول تغيرات التابع f.

① للمعادلة $f(x)=2$ أربع حلول

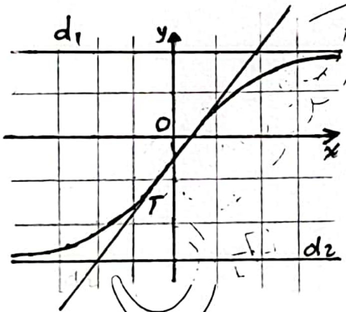
② $f'(0)=0$

③ $f([-2,2])=[0,4]$

④ ثلاث قيم هي $f(-2)=0$ ، $f(0)=4$ ، $f(2)=0$

⑤

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	‖	$+$	0	$-$	‖	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	0	↗	4	↘	0	↗	$+\infty$



السؤال الرابع- إذا كان C الخط البياني للتابع f والمستقيمين d_1 , d_2 مقاربين للخط C والمستقيم T مماس للخط C والمطلوب:

1) جد $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.
2) اكتب معادلة كل مقارب من المقاربين d_1 , d_2.
3) إذا علمت أن المستقيم المائل المرسوم في الشكل يمس المنحني في النقطة $\left(0,-\frac{1}{2}\right)$، احسب $f'(0)$ ثم اكتب معادلته.

① $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 2$ ، $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -3$

② $d_2 : y = -3$ ، $d_1 : y = 2$

③ لدينا النقطتان $A\left(0,-\frac{1}{2}\right)$ ، $B(2,2)$ من المستقيم T

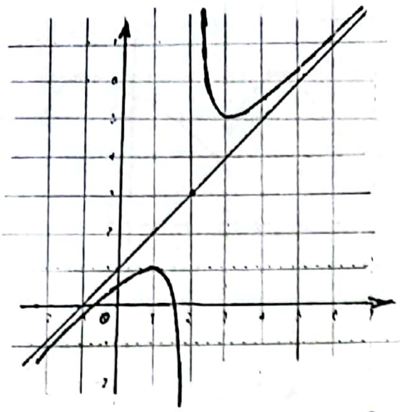
$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{2+\frac{1}{2}}{2-0} = \frac{\frac{5}{2}}{2} = \frac{5}{4}$$

$$\Rightarrow f'(0) = \frac{5}{4}$$

معادلة المماس من الشكل $y - y_A = m(x - x_A)$

$$\Rightarrow y + \frac{1}{2} = \frac{5}{4}(x-0) \Rightarrow T: y = \frac{5}{4}x - \frac{1}{2}$$

أ. أحمد شيخ حسين 0944787014 أ. رهف صباغ 0988914094



السؤال الخامس- في الشكل المرسوم جانبًا، ليكن C_f الخط البياني للتابع f المعرف على $R\backslash\{2\}$ والمطلوب:

1) جد $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.
2) دلّ على القيم الحديّة للتابع وبيّن نوعها.
3) ما عدد حلول المعادلة $f(x) = 0$.
4) اكتب معادلة المقارب المائل.
5) اذكر احداثيات النقطة I مركز تناظر الخط البياني C_f.

① $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

② $f(1)=1$ قيمة حدية كبرى
$f(3)=5$ قيمة حدية صغرى.

③ للمعادلة $f(x)=0$ حلان

④ لدينا النقطتان $A(-1,0)$, $B(0,1)$ من المقارب المائل

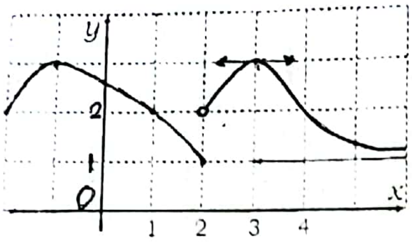
$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{1-0}{0+1} = 1$

معادلة المقارب من الشكل $y - y_B = m(x - x_B)$

$\Rightarrow y - 1 = 1(x-0) \Rightarrow y = x+1$

⑤ مركز تناظر الخط C_f هو نقطة تلاقي مقاربيه
أي $I(2,3)$

أ. أحمـد شيـخ حسين 0944787014 أ. رهـف صبـاغ 0988914094



السؤال السادس- ليكن C الخط البياني للتابع f المرسوم جانبًا

1) جد , $\lim_{x\to+\infty} f(x)$, $\lim_{x\to2^+} f(x)$, $\lim_{x\to2^-} f(x)$

$\lim_{x\to+\infty} f(f(x))$.

2) هل f اشتقاقي عند 2؟

3) جد $f'(3), f(3)$ وجد معادلة للمماس عند 3.

4) ما عدد القيم الحدية للتابع f؟

(1) $\lim_{x\to2^-} f(x)=1$, $\lim_{x\to2^+} f(x)=2$, $\lim_{x\to+\infty} f(x)=1$

$\lim_{x\to+\infty} f(f(x)) = \lim_{t\to1} f(t) = 2$

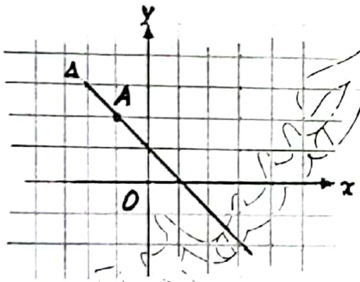
(2) f غير اشتقاقي عند $x=2$ لأنه غير مستمر عند $x=2$.

(3) $f(3)=3$, $f'(3)=0$

معادلة المماس $y=3$ (مماس أفقي عند $(3,0)$)

(4) أربع قيم حدية هي: $f(-2)=2$, $f(-1)=3$, $f(2)=1$, $f(3)=3$

السؤال السابع- ليكن C الخط البياني للتابع f معرف على $[-2,4]$ وفق:



$$f(x)=\frac{ax+b}{x^2+1}$$

عيّن b , a علمًا بأن المستقيم Δ المرسوم في الشكل المجاور مماس للخط C في النقطة A.

لدينا من الشكل $A(-1,2)$ نقطة من C أي $f(-1)=2$ نعوض في f

$\Rightarrow f(-1)=\frac{-a+b}{1+1}=2 \Rightarrow -a+b=4 \quad ...(1)$

المستقيم Δ يمر بالنقطتين $A(-1,2)$, $B(0,1)$

$f'(-1)=m_\Delta=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\frac{1-2}{0+1}=-1$

نشتق f : f اشتقاقي على $[-2,4]$ ولدينا: $f'(x)=\frac{a(x^2+1)-2x(ax+b)}{(x^2+1)^2}$

$f'(-1)=-1 \Rightarrow \frac{a((-1)^2+1)-2(-1)(-a+b)}{((-1)^2+1)^2}=-1 \Rightarrow b=-2$

نعوض $b=-2$ في (1) نجد $a=-6$

الأسئلة الوزارية لمادة الرياضيات – بكالوريا
النهايات والاشتقاق

السؤال الثامن- نجد جانبًا جدول تغيرات التابع f والمطلوب:

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$++++$	0	$----$	
$f(x)$	‖	$-\infty \nearrow$	1	$\searrow$	0

1) ما عدد حلول المعادلة $f(x) = 0$؟
2) ما عدد القيم الحدية محليًا؟
3) اكتب معادلة مماس منحن التابع عند النقطة التي فاصلتها $x = 1$.

(1) للمعادلة $f(x)=0$ حل وحيد

(2) قيمة حدية واحدة هي $f(1)=1$

(3) معادلة المماس $y=1$ مماس افقي عند النقطة $(1,1)$

السؤال التاسع- نجد فيما يأتي جدول تغيرات التابع f والذي خطه البياني C.

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	‖	$-$	‖	$+$	
$f(x)$	3	$\nearrow +\infty$	‖	$+\infty \searrow$	$-\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	3

1) اكتب معادلة كل مقارب شاقولي أو أفقي للخط البياني C.
2) هل يوجد مقاربات مائلة للخط البياني C؟
3) هل يوجد للخط C مماسات أفقية؟
4) أثبت أن للمعادلة $f(x) = 0$ حل وحيد في المجال $]-1, 1[$.

(1) $\Delta: y=3$ مقارب افقي

$x=-1$ مقارب شاقولي ، $x=1$ مقارب شاقولي

(2) لا يوجد مقاربات مائلة لان الشرط $\lim\limits_{x \to \infty} f(x)=\infty$ غير محقق.

(3) لا يوجد مماسات افقية لأن المشتق لم ينعدم.

(4) في المجال $]-1,1[$ التابع مستمر ومتناقص تماما (مطرد)

$0 \in f(]-1,1[) =]-\infty, +\infty[$

اذاً للمعادلة $f(x)=0$ حل وحيد في المجال $]-1,1[$

أ. أحمد شيخ حسين 0944787014 أ. رهف صباغ 0988914094

السؤال العاشر- تأمل جدول تغيرات التابع f المعرف على R والمطلوب:

x	$-\infty$		2		5		$+\infty$
$f'(x)$		$-\ -$	$-\ 0\ +$		$+\ 0\ +$	$+\ +$	
$f(x)$	2	$\searrow$	0	$\nearrow$	4	$\nearrow$	6

1) جد $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.
2) اذكر قيمة حدية للتابع وبيّن نوعها.
3) هل $f(5) = 4$ قيمة حدية للتابع؟
4) اكتب معادلة كل مقارب أفقي للخط البياني للتابع.
5) اكتب مجموعة تعريف التابع g حيث $g(x) = \ln\big(f(x)\big)$.

① $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 2$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 6$

② $f(2) = 0$ قيمة حدية صغرى

③ $f(5) = 4$ ليست قيمة حدية لأن المشتق انعدم ولم يغير اشارته.

④ $\Delta_1 : y = 2$ و $\Delta_2 : y = 6$

⑤ $D_g =]-\infty, 2[\cup]2, +\infty[$

السؤال الحادي عشر- نجد جانبًا جدول تغيرات التابع f والمطلوب:

x	$-\infty$		-1		2		4		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$-$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	3	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\infty \ \Vert \ +\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	2

1) أوجد D , $f(D)$.
2) هل $f(-1)$ قيمة حدية محليًا؟ علل اجابتك.
3) ما عدد حلول المعادلة $f(x) = 2$؟
4) أوجد $\lim\limits_{x\to+\infty} f\big(f(x)\big)$.
5) أوجد مجموعة تعريف التابع g حيث $g(x) = \ln\big(f(x)\big)$.

① $D_f =]-\infty, 2[\cup]2, +\infty[$

$f(D_f) =]-\infty, 3[\cup [1, +\infty[$

أ. أحمد شيخ حسين 0944787014 أ. رهف صباغ 0988914094

(2) $f(-1)=0$ ليست قيمة حدية لأن المشتق انعدم عندها ولم يغير إشارته

(3) للمعادلة $f(x)=2$ حليين مختلفين

(4) $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 2$

$\Rightarrow \lim_{x\to+\infty} f(f(x)) = \lim_{t\to 2} f(t) = -\infty$

(5)

$D_g =]-\infty,-1[\cup]2,+\infty[$

السؤال الثاني عشر- ليكن التابع f المعرف على $]1,+\infty[$ وفق: $f(x)=\frac{2x+1}{x-1}$

أوجد $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ ثم عيّن A ليكون $x>A$ ليكون $f(x)$ من المجال $]1.95, 2.05[$.

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 2$

(1b)

$1.95 < f(x) < 2.05$

$1.95 < \frac{2x+1}{x-1} < 2.05$

$\Rightarrow 1.95 < 2 + \frac{3}{x-1} < 2.05$

$\Rightarrow -0.05 < \frac{3}{x-1} < 0.05$

$\Rightarrow \frac{3}{x-1} < \frac{1}{20}$

$\Rightarrow x-1 > 60$

$\Rightarrow x > 61$

نختار $A=61$

(2b)

$|f(x)-c| < r$

$c = \frac{1.95+2.05}{2} = 2$

$r = \frac{2.05-1.95}{2} = 0.05 = \frac{1}{20}$

$\Rightarrow \left|\frac{2x+1}{x-1} - 2\right| < \frac{1}{20}$

$\Rightarrow \left|\frac{3}{x-1}\right| < \frac{1}{20}$

$\Rightarrow \frac{3}{|x-1|} < \frac{1}{20} \Rightarrow x-1 > 60$

$\Rightarrow x > 61$

نختار $A=61$

السؤال الثالث عشر- أثبت أن للمعادلة $x^3 + x + 1 = 0$ حلًا وحيدًا α في R .
ثم بيّن أن $\alpha \in]-1,0[$.

نفرض $f(x) = x^3 + x + 1$ وندرس تغيراته ونبحث عن حلول المعادلة $f(x)=0$

التابع f معرف ومستمر واشتقاقي على $]-\infty,+\infty[$

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ و $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

$f'(x) = 3x^2 + 1 > 0$

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$	+	+	+
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

التابع مستمر ومتزايد تمامًا (تمامًا) على المجال $]-\infty,+\infty[$

$0 \in f(]-\infty,+\infty[) =]-\infty,+\infty[$

إذاً المعادلة $f(x)=0$ حل وحيد α في R

" $x^3+x+1=0$ " " " " " " "

وإن $f(-1) = -1 < 0$

$f(0) = 1 > 0$

$\Rightarrow f(-1).f(0) < 0$

إذاً $\alpha \in]-1,0[$

السؤال الرابع عشر- ليكن التابع f المعرّف بالصيغة: $f(x) = \sqrt{x^2+2x+3} - |x|$

أوجد $\lim_{x\to+\infty} f(x)$, $\lim_{x\to-\infty} f(x)$.

نصلح التابع

$$f(x) = \frac{\left[\sqrt{x^2+2x+3} - |x|\right] \times \left[\sqrt{x^2+2x+3} + |x|\right]}{\sqrt{x^2+2x+3} + |x|}$$

$$= \frac{x^2+2x+3-x^2}{\sqrt{x^2+2x+3}+|x|} = \frac{2x+3}{\sqrt{x^2\left(1+\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}\right)}+|x|}$$

$$= \frac{x\left(2+\frac{3}{x}\right)}{|x|\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}}+|x|}$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{x\left(2+\frac{3}{x}\right)}{|x|\left[\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}}+1\right]}$$

تذكر: $|x|^2 = x^2$

$$|x| \begin{cases} +x & (+\infty) \\ -x & (-\infty) \end{cases}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\cancel{x}\left(2+\frac{3}{x}\right)}{\cancel{x}\left[\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}}+1\right]} = \frac{2}{1+1} = 1$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{\cancel{x}\left(2+\frac{3}{x}\right)}{-\cancel{x}\left[\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}}+1\right]} = \frac{2}{-(1+1)} = -1$$

السؤال الخامس عشر- ليكن f التابع المعرف على R وفق $f(x) = \cos x$

1) جد $f\left(\frac{\pi}{3}\right), f'(x), f'\left(\frac{\pi}{3}\right)$.

2) استنتج قيمة النهاية $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}} \frac{\cos x-\frac{1}{2}}{x-\frac{\pi}{3}}$.

① $f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$

$f'(x) = -\sin x$

$f'\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

② حسب تعريف العدد المشتق:

$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}} \frac{f(x)-f\left(\frac{\pi}{3}\right)}{x-\frac{\pi}{3}} = f'\left(\frac{\pi}{3}\right)$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}} \frac{\cos x-\frac{1}{2}}{x-\frac{\pi}{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

السؤال السادس عشر- ليكن f التابع المعرف على المجال $[0,3]$ وفق

$$f(x) = (x-3)\sqrt{x(3-x)}$$

جد $\lim\limits_{x\to3} \frac{f(x)-f(3)}{x-3}$ واستنتج أنه اشتقاقي عند الـ $x = 3$.

$\lim\limits_{x\to3} \frac{f(x)-f(3)}{x-3} = \lim\limits_{x\to3} \frac{(x-3)\sqrt{x(3-x)}-0}{x-3} = \lim\limits_{x\to3} \sqrt{x(3-x)} = 0$

بما أنّ $\lim\limits_{x\to3} \frac{f(x)-f(3)}{x-3} = 0$

إذاً f اشتقاقي عند (3)

السؤال السابع عشر- ليكن c الخط البياني للتابع f المعرف على $]0, +\infty[$ وفق:

$$f(x) = \frac{x^3 + 4 - 4\cos x}{x^2}$$

1) احسب $\lim_{x \to 0^+} f(x)$.

2) أثبت أن المستقيم $\Delta: y = x$ مقارب مائل للخط c.

(1)

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{x^3 + 4(1 - \cos x)}{x^2} = \lim_{x \to 0^+} x + \frac{4 \times 2\sin^2 \frac{x}{2}}{x^2}$$

$$= \lim_{x \to 0^+} x + 8\left(\frac{\sin \frac{x}{2}}{x}\right)^2 = \lim_{x \to 0^+} x + 8\left(\frac{\sin \frac{x}{2}}{2 \frac{x}{2}}\right)^2 = 0 + 8\left(\frac{1}{4}\right) = 2$$

حيث $\lim_{x \to 0} \frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} = 1$

(2)

$$\lim_{x \to +\infty} (f(x) - y_\Delta) = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^3 + 4 - 4\cos x}{x^2} - x = \lim_{x \to +\infty} \frac{4 - 4\cos x}{x^2}$$

احالة حصر

أياً كان $x \in \mathbb{R}$ $\quad -1 \leq \cos x \leq +1$

$\times(-4) \Rightarrow 4 \geq -4\cos x \geq -4$

$+(4) \Rightarrow 8 \geq 4 - 4\cos x \geq 0$

$\div(x^2 > 0) \Rightarrow \frac{8}{x^2} \geq \frac{4 - 4\cos x}{x^2} \geq 0$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{8}{x^2} = 0$

$\Rightarrow \lim_{x \to +\infty} \frac{4 - 4\cos x}{x^2} = 0$

اذاً $\Delta: y = x$ مقارب مائل لـ c عند $+\infty$

ثانيًا- حل التمارين الآتية:

التمرين الأول- أوجد نهاية التابع f المعيّن بالعلاقة $f(x)=\frac{3x+4}{x+1}$ عند $+\infty$ ثم أعطِ عددًا حقيقيًا α يحقق الشرط: إذا كان $x>\alpha$ كان $f(x)\in\,]2.9,3.1[$.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=3$$

ط1

$$2.9<\frac{3x+4}{x+1}<3.1$$
$$\Rightarrow 2.9<3+\frac{1}{x+1}<3.1$$
$$\Rightarrow -0.1<\frac{1}{x+1}<0.1$$
$$\Rightarrow \frac{1}{x+1}<\frac{1}{10}$$
$$\Rightarrow x+1>10 \Rightarrow x>9$$

نختار $\alpha=9$

ط2

$$|f(x)-c|<r$$
$$c=\frac{2.9+3.1}{2}=3$$
$$r=\frac{3.1-2.9}{2}=0.1=\frac{1}{10}$$
$$\Rightarrow \left|\frac{3x+4}{x+1}-3\right|<\frac{1}{10}$$
$$\Rightarrow \left|\frac{1}{x+1}\right|<\frac{1}{10} \Rightarrow \frac{1}{|x+1|}<\frac{1}{10}$$
$$\Rightarrow x+1>10 \Rightarrow x>9$$

$\alpha=9$ نختار

التمرين الثاني- عيّن مجموعة تعريف التابع $f(x)=\frac{\sin x}{\sqrt{1+x}-1}$ واحسب نهايته عند الصفر.

الشرطان: $1+x\geq 0$ و $\sqrt{1+x}-1\neq 0$

$x\geq -1$ و $\sqrt{1+x}\neq 1$

$x\geq -1$ و $x\neq 0$

$$\Rightarrow D=[-1,0[\,\cup\,]0,+\infty[$$

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{\sqrt{1+x}-1}\times\frac{\sqrt{1+x}+1}{\sqrt{1+x}+1}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{[\sqrt{1+x}+1]\cdot\sin x}{1+x-1}=\lim_{x\to 0}[\sqrt{1+x}+1]\times\frac{\sin x}{x}=2$$

حيث $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$

أ. أحمد شيخ حسين 0944787014 أ. رهف صباغ 0988914094

التمرين الثالث- ليكن f التابع المعرف على R وفق: $f(x) = \frac{x^2+|x|}{x^2+1}$

1) ما نهاية التابع f عند $-\infty$.

2) ادرس قابلية اشتقاق f عند الصفر من اليمين، ثم اكتب معادلة نصف المماس من اليمين لخطه البياني C في النقطة $A(0,0)$.

نتخلص من القيمة المطلقة بدراسة اشارة ما بداخلها

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-x}{x^2+1} & ; x<0 \\ \frac{x^2+x}{x^2+1} & ; x \geq 0 \end{cases}$$

(1) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x^2-x}{x^2+1} = 1$

(2) $\lim\limits_{x\to0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to0^+} \frac{\frac{x^2+x}{x^2+1}-0}{x} = \lim\limits_{x\to0^+} \frac{x^2+x}{x(x^2+1)}$

$= \lim\limits_{x\to0^+} \frac{x(x+1)}{x(x^2+1)} = \lim\limits_{x\to0^+} \frac{x+1}{x^2+1} = 1 \Rightarrow$ f اشتقاقي عند الصفر من اليمين

معادلة المماس نصف من الشكل

$$y - y_A = m(x - x_A)$$

$$m = f'(0) = 1$$

$\Rightarrow y - 0 = 1(x-0) \Rightarrow y = x$

التمرين الرابع- إذا كان $f(x) = \frac{\cos x - 1}{x^2} + \frac{1}{2}$ أيًا يكن x من R^*

أوجد نهاية التابع f عند الصفر.

$\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} \frac{-(1-\cos x)}{x^2} + \frac{1}{2} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{-2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2} + \frac{1}{2}$

$= \lim\limits_{x\to 0} -2\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{x}\right)^2 + \frac{1}{2} = \lim\limits_{x\to 0} -2\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{2\,\frac{x}{2}}\right)^2 + \frac{1}{2}$

$= -2\left(\frac{1}{4}\right) + \frac{1}{2} = 0$

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} = 1$ حسب

التمرين الخامس- ليكن $g(x) = \tan x$ والمطلوب:

1) احسب $g\left(\frac{\pi}{4}\right), g'(x), g'\left(\frac{\pi}{4}\right)$ ثم استنتج $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\tan x - 1}{x - \frac{\pi}{4}}$.

2) احسب مشتق التابع $f(x) = x.e^{\frac{1}{x}}$ على $R\backslash\{0\}$.

(1)

$g\left(\frac{\pi}{4}\right) = \tan\frac{\pi}{4} = 1$

$g'(x) = 1 + \tan^2 x$

$g'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1 + \tan^2\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1 + 1 = 2$

حسب تعريف العدد المشتق

$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{g(x) - g\left(\frac{\pi}{4}\right)}{x - \frac{\pi}{4}} = g'\left(\frac{\pi}{4}\right)$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\tan x - 1}{x - \frac{\pi}{4}} = 2$

(2) f اشتقاقي على $R\backslash\{0\}$

$f'(x) = 1.e^{\frac{1}{x}} + \left(-\frac{1}{x^2}\right).e^{\frac{1}{x}}(x) = e^{\frac{1}{x}} - \frac{1}{x}e^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{1}{x}}\left(1 - \frac{1}{x}\right)$

التمرين السادس- ليكن التابع f المعرف على $]-5,+\infty[$ وفق $f(x)=\frac{2x+1}{x+5}$ والمطلوب:

1) احسب $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ واستنتج $\lim_{x\to+\infty} f(f(x))$.

2) جد عددًا حقيقيًا A يحقق الشرط: إذا كان $x>A$، كان $f(x)$ في المجال $]1.99,2.01[$.

3) جد $f'(x)$ ثم استنتج $g'(x)$، حيث $g(x)=\frac{2\sin x+1}{\sin x+5}$.

(1)

$\lim_{x\to+\infty} f(x)=2$

$\lim_{x\to+\infty} f(f(x))=\lim_{t\to 2} f(t)=\frac{2(2)+1}{2+5}=\frac{5}{7}$

(2)

$1.99<f(x)<2.01$

$\Rightarrow 1.99<\frac{2x+1}{x+5}<2.01$

$\Rightarrow 1.99<2+\frac{-9}{x+5}<2.01$

$\Rightarrow -0.01<\frac{-9}{x+5}<0.01$

$\Rightarrow \frac{-1}{100}<\frac{-9}{x+5}$

$\Rightarrow \frac{9}{x+5}<\frac{1}{100} \Rightarrow x+5>900$

$\Rightarrow x>895$

نختار $A=895$

(3) f اشتقاقي على $]-5,+\infty[$

$f'(x)=\frac{2(x+5)-(2x+1)}{(x+5)^2} \Rightarrow f'(x)=\frac{9}{(x+5)^2}$

$g'(x)=f'(\sin x)\times(\sin x)'$

$=\frac{9}{(\sin x+5)^2}\times\cos x \Rightarrow g'(x)=\frac{9\cos x}{(\sin x+5)^2}$

التمرين السابع- ليكن التابع f المعرف على R وفق $f(x) = 2x - \sqrt{x^2+5}$ والمطلوب:

1) ادرس تغيرات f ونظم جدولًا بها.

2) اثبت أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلًا وحيدًا α يقع في المجال $]1,2[$، ثم جد هذا الحل جبريًا.

3) استنتج مشتق التابع $g(x)$ المعرف على R وفق $g(x) = 2\sin x - \sqrt{\sin^2 x + 5}$.

1) التابع f معرف ومستمر واشتقاقي على $]-\infty,+\infty[$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty - \infty = -\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty - \infty$ عدم تعيين

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} 2x - \sqrt{x^2\left(1+\frac{5}{x^2}\right)} = \lim\limits_{x\to+\infty} 2x - x\sqrt{1+\frac{5}{x^2}}$

$= \lim\limits_{x\to+\infty} x\left[2-\sqrt{1+\frac{5}{x^2}}\right] = +\infty(2-1) = +\infty$

$f'(x) = 2 - \frac{2x}{2\sqrt{x^2+5}} = 2 - \frac{x}{\sqrt{x^2+5}} = \frac{2\sqrt{x^2+5}-x}{\sqrt{x^2+5}}$

$f'(x) = 0$

$2\sqrt{x^2+5} - x = 0 \Rightarrow 2\sqrt{x^2+5} = x$

$x \geq 0$ بشرط نربع $\Rightarrow 4x^2 + 20 = x^2 \Rightarrow x^2 = -\frac{20}{3}$ مستحيلة

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$	+	+	+
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

2) في المجال $]-\infty,+\infty[$ التابع مستمر ومتزايد تمامًا (مطردًا)

$0 \in f(]-\infty,+\infty[) =]-\infty,+\infty[$

إذًا المعادلة $f(x)=0$ حل وحيد α في المجال $]-\infty,+\infty[$

$f(1) = 2 - \sqrt{6} < 0$

$f(2) = 1 > 0$

أ. أحمد شيخ حسين 0944787014 أ. رهف صباغ 0988914094

$\Rightarrow f(1).f(2) < 0 \Rightarrow a \in]1, 2[$

• الحل جبرياً

$f(x) = 0 \Rightarrow 2x - \sqrt{x^2+5} = 0 \Rightarrow \sqrt{x^2+5} = 2x$

نربع الطرفين شرط $2x \geq 0 \Leftarrow x \geq 0$

$\Rightarrow x^2 + 5 = 4x^2 \Rightarrow x^2 = \frac{5}{3}$

إما $x = \sqrt{\frac{5}{3}} = a$

أو $x = -\sqrt{\frac{5}{3}}$ مرفوض لا يحقق الشرط

③

$g'(x) = f'(\sin x) \times (\sin x)'$

$= \frac{2\sqrt{\sin^2 x + 5} - \sin x}{\sqrt{\sin^2 x + 5}} \times \cos x$

الأسئلة الوزارية لمادة الرياضيات – بكالوريا
النهايـات والاشتقـاق

التمرين الثامن- ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $R\setminus\{3\}$ وفق $f(x)=\frac{2x^2-7x-3}{x-3}$ والمطلوب:

1) احسب $a=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$ ثم احسب $b=\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-ax)$.

2) استنتج معادلة المقارب المائل Δ في جوار $+\infty$ ثم ادرس الوضع النسبي للمقارب Δ والخط البياني C.

1) $a=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\frac{2x^2-7x-3}{x-3}}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x^2-7x-x}{x^2-3x}=2$

$\Rightarrow a=2$

$b=\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-ax)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x^2-7x-3}{x-3}-\frac{2x(x-3)}{(x-3)}$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x^2-7x-3-2x^2+6x}{x-3}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-x-3}{x-3}=$

$\Rightarrow b=-1$

2) معادلة المقارب المائل من الشكل $\Delta: y=ax+b$

لدينا $a=2$, $b=-1$ إذاً $\Delta: y=2x-1$

لدراسة الوضع النسبي: ندرس إشارة

$f(x)-y_\Delta=\frac{2x^2-7x-3}{x-3}-(2x-1)=\frac{-6}{x-3}$

$\Rightarrow f(x)-y_\Delta=\frac{6}{-x+3}$

البسط موجب، ندرس إشارة المقام

x	$-\infty$ ... 3	3 ... $+\infty$
$f(x)-y_\Delta$	$+$	$-$
الوضع النسبي	C يقع فوق Δ	C يقع تحت Δ

أ. أحمد شيخ حسين 0944787014 أ. رهف صباغ 0988914094

ثالثًا- حل المسألة الآتية:

المسألة الأولى- ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $R\setminus\{-1\}$ وفق:

$$f(x) = \frac{x+2}{(x+1)^2}$$

1) ادرس نهايات التابع f عند أطراف مجموعة تعريفه وبيّن إذا كان له نهاية حقيقية عند $x = -1$.
2) أوجد معادلة المقارب الأفقي للخط C وادرس الوضع النسبي لهذا المقارب مع C.
3) احسب $f'(x)$ ونظم جدولاً بتغيرات f وعيّن ماله من قيم حدية محلية.
4) أوجد معادلة المماس في النقطة من C التي فاصلتها $x = -2$.
5) ارسم C واحسب مساحة السطح المحصور بين محوري الإحداثيات والمنحني C والمستقيم $x = 3$.

(1) $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$, $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$

$\lim_{x \to -1^-} f(x) = \frac{1}{+0} = +\infty$, $\lim_{x \to -1^+} f(x) = \frac{1}{+0} = +\infty$

$\Rightarrow \lim_{x \to -1} f(x) = +\infty$

(2) $\Delta: y = 0$ مقارب أفقي في جوار $\pm\infty$

لدراسة الوضع النسبي ندرس اشارة

$f(x) - y_\Delta = \frac{x+2}{(x+1)^2}$

x	$-\infty$	-2	-1	$+\infty$
$f(x) - y_\Delta$	$-$	0 $+$	$\Vert$ $+$	
الوضع النسبي	C تحت Δ	C فوق Δ	$\Vert$ C فوق Δ	

C قاطع Δ

(3) f اشتقاقي على $R\setminus\{-1\}$

$$f'(x) = \frac{1(x+1)^2 - 2(x+1)(1)(x+2)}{(x+1)^4} = \frac{(x+1)(x+1-2x-4)}{(x+1)^4}$$

أ. أحمد شيخ حسين 0944787014   أ. رهف صباغ 0988914094

$\Rightarrow f'(x) = \dfrac{-x-3}{(x+1)^3}$

$f'(x) = 0 \Rightarrow -x-3 = 0 \Rightarrow x = -3 \Rightarrow f(-3) = -\frac{1}{4}$

دراسة اشارة $f'(x)$

x	$-\infty$		-3		-1		$+\infty$
$-x-3$		$+$	0	$-$		$-$	
$(x+1)^3$		$-$		$-$	0	$+$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	$\|\|$	$-$	

ومنه يكون جدول تغيرات f

x	$-\infty$		-3		-1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	$\|\|$	$-$	
$f(x)$	0	$\searrow$	$-\frac{1}{4}$	$\nearrow$	$+\infty \;\|\|\; +\infty$	$\searrow$	0

قيمة حدية الصغرى $f(-3) = -\frac{1}{4}$

④ معادلة المماس من الشكل $y - y_0 = m(x - x_0)$

$x_0 = -2 \Rightarrow y_0 = f(-2) = 0$

$m = f'(-2) = 1$

$\Rightarrow y - 0 = 1(x+2) \Rightarrow T: y = x+2$

⑤ لدينا $\Delta: y = 0$ مقارب افقي في جوار $\pm\infty$

$x = -1$ مقارب شاقولي والخط يقع على يسار المقارب نحو oy^+

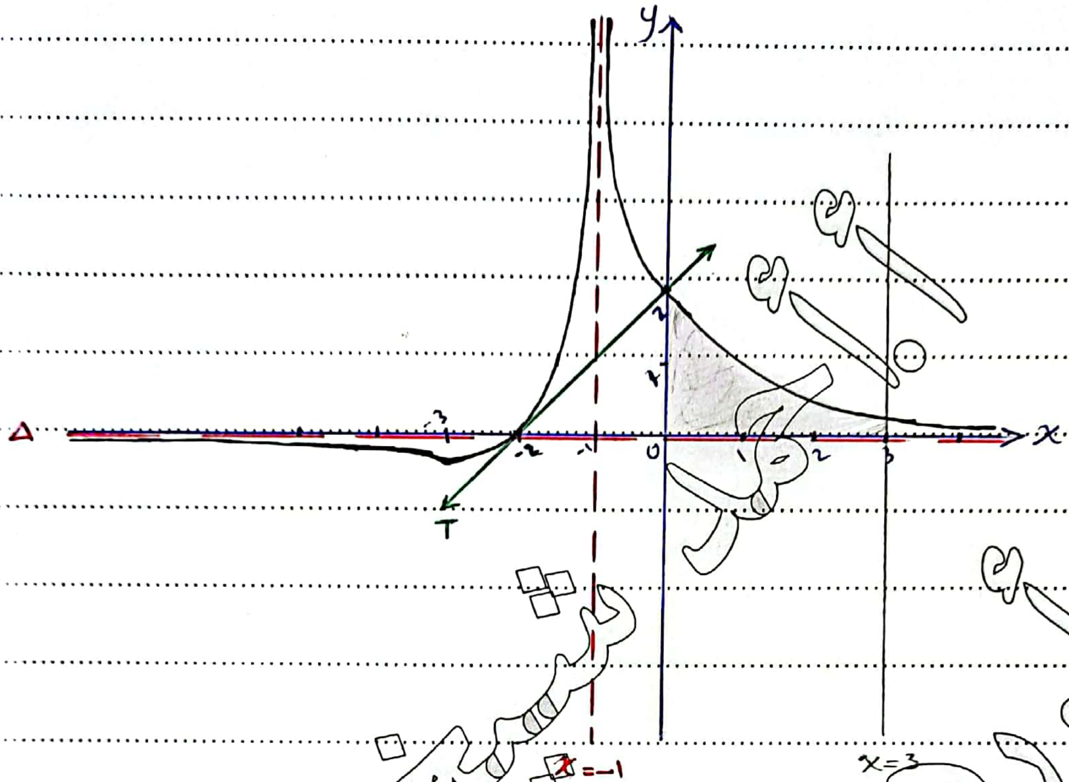
$x = -1$ " " " يمين " " " " " "

لرسم $T: y = x+2$

$x = 0 \Rightarrow y = 2 \quad (0,2)$

$y = 0 \Rightarrow x = -2 \quad (-2,0)$

أ. أحمـد شيـخ حسين 0944787014 أ. رهـف صبـاغ 0988914094



$$S = \int_0^3 f(x)\,dx = \int_0^3 \frac{x+2}{(x+1)^2}\,dx = \int_0^3 \frac{x+1+1}{(x+1)^2}\,dx$$

$$= \int_0^3 \left[\frac{x+1}{(x+1)^2} + \frac{1}{(x+1)^2}\right] dx = \int_0^3 \left[\frac{1}{x+1} + (x+1)^{-2}\right] dx$$

$$= \left[\ln|x+1| + \frac{(x+1)^{-1}}{-1}\right]_0^3 = \left[\ln|x+1| - \frac{1}{x+1}\right]_0^3$$

$$= \ln 4 - \frac{1}{4} - \left[\ln 1 - \frac{1}{1}\right] = \ln 4 - \frac{1}{4} + 1 = \frac{3}{4} + \ln 4$$