

ثانياً : دراسة إشارة مقدار :

لدراسة إشارة مقدار من الشكل $A(x) = ax + b$

الخطوة الأولى : نعدم المقدار

$$ax + b = 0 \Rightarrow x = \frac{-b}{a}$$

الخطوة الثانية : نشكل الجدول

x	$-\infty$	$\frac{-b}{a}$	$+\infty$
$ax + b$	يوافق إشارة أمثال x	0	يخالف إشارة أمثال x

تمرين : ادرس إشارة كل مما يلي :

① $A(x) = -3x + 2$

الخطوة الأولى : نعدم المقدار

$$-3x + 2 = 0 \Rightarrow -3x = -2 \Rightarrow x = \frac{2}{3}$$

الخطوة الثانية : نشكل الجدول :

x	$-\infty$	$\frac{2}{3}$	$+\infty$
$-3x + 2$	+	0	-

② $A(x) = (x - 1)(2 - 4x)$

الخطوة الأولى : نعدم المقدار

$$(x - 1)(2 - 4x) = 0$$

إما $x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$

أو $2 - 4x = 0 \Rightarrow -4x = -2 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$

الخطوة الثانية : نشكل الجدول ونضع جذور المعادلة بترتيب تصاعدي

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	1	$+\infty$	
$x - 1$	-	-	0	-	
$2 - 4x$	+	0	-	-	
$A(x)$	-	0	+	0	-

③ $A(x) = \frac{x + 4}{3 - 4x}$

الخطوة الأولى : نعدم البسط

$$x + 4 = 0 \Rightarrow x = -4$$

الخطوة الثانية : نعدم المقام

$$3 - 4x = 0 \Rightarrow -4x = -3 \Rightarrow x = \frac{3}{4}$$

الخطوة الثالثة : نشكل الجدول ونضع جذور المعادلة بترتيب تصاعدي

أولاً : مجموعات الأعداد (طبيعة الأعداد) :

① مجموعة الأعداد الطبيعية N :

$$N = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \dots, 2024, \dots, 10^9, \dots\}$$

من ضمنها مجموعة الأعداد الأولية P :

العدد الأولي : هو عدد له قاسمان فقط هما الواحد والعدد نفسه .

$$P = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, \dots\}$$

ملاحظة : العدد صفر ليس أولي لأن له عدد غير منتهي من القواسم .

العدد واحد ليس أولي لأن له قاسم وحيد هو العدد واحد .

② مجموعة الأعداد الصحيحة Z :

$$Z = \{\dots -4, -3, -2, -1, 0, +1, +2, +3, +4, \dots\}$$

③ مجموعة الأعداد العشرية D :

العدد العشري هو كل عدد يكتب بالشكل $\frac{a}{10^n}$

الكتابة العشرية للعدد العشري مؤلفة من جزء صحيح و فاصلة و جزء عشري منتهي

مثال

$$0.5, 1.5, \frac{5}{2} = 2.5, \frac{3}{4} = 0.75, \dots$$

④ مجموعة الأعداد العادية Q :

العدد العادي : هو كل عدد يكتب بالشكل $\frac{a}{b}$

الكتابة العشرية للعدد العادي هي إما عشرية منتهية أو غير منتهية دورية

مثال $\frac{7}{6}, \frac{5}{2}, \frac{1}{3}, \dots$ بالإضافة لجميع مجموعات الأعداد السابقة

العدد الغير عادي كتابته العشرية غير منتهية و غير دورية

مثال العدد π

والجذور من الشكل $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{7}, \dots$

⑤ مجموعة الأعداد الحقيقية R :

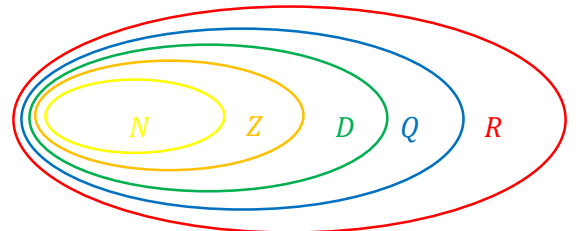
هي مجموعة تضم جميع مجموعات الأعداد السابقة ونعبر عنها بالشكل

$$R =]-\infty, +\infty[$$

$$R^* = R \setminus \{0\}$$

$$R_+^* =]0, +\infty[$$

$$R_-^* =]-\infty, 0[$$



ثالثاً : دراسة إشارة وتحليل ثلاثي الحدود من الشكل :

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad \text{نحل المعادلة}$$

نوجد Δ حيث

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

ونميز ثلاث حالات

$$\textcircled{1} \quad \Delta > 0 \quad \text{للمعادلة حلين}$$

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}, \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

تحليل ثلاثي الحدود $f(x)$

$$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$$

دراسة إشارة ثلاثي الحدود $f(x)$

ما بين الجذرين يخالف إشارة أمثال x^2

x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$
$f(x)$		0 يوافق	0 يخالف	0 يوافق

$$\textcircled{2} \quad \Delta = 0 \quad \text{للمعادلة حل وحيد ونسميه (جذر مضاعف)}$$

$$x_1 = \frac{-b}{2a}$$

تحليل ثلاثي الحدود $f(x)$

$$f(x) = a(x - x_1)^2$$

دراسة إشارة ثلاثي الحدود $f(x)$

إشارة $f(x)$ من إشارة أمثال x^2

x	$-\infty$	x_1	$+\infty$
$f(x)$		0 يوافق	0 يوافق

$$\textcircled{3} \quad \Delta < 0 \quad \text{المعادلة مستحيلة الحل ولا يمكن تحليل كثير الحدود}$$

إشارة $f(x)$ من إشارة أمثال x^2

x	$-\infty$	$+\infty$
$f(x)$		يوافق

x	$-\infty$	-4	$\frac{3}{4}$	$+\infty$
$x+4$		-	0	+
$3-4x$		+	+	0
$\frac{x+4}{3-4x}$		-	0	+

ملاحظة هامة: عند دراسة إشارة كسر إن القيم التي تعدم البسط تعدم الكسر بينما القيم التي تعدم المقام يكون الكسر عندها غير معرف

تذكر : لحل معادلة من الشكل $x^2 = a$ نميز ثلاث حالات

a عدد موجب	$a = 0$	a عدد سالب
$x = \pm\sqrt{a}$	$x = 0$	المعادلة مستحيلة الحل

$$\textcircled{4} \quad A(x) = \frac{3-x}{x^2-1}$$

الخطوة الأولى : نعدم البسط

$$3-x=0 \Rightarrow -x=-3 \Rightarrow x=3$$

الخطوة الثانية : نعدم المقام

$$x^2-1=0 \Rightarrow x^2=1 \Rightarrow x=\pm 1$$

الخطوة الثالثة : نشكل الجدول ونضع الجذور بترتيب تصاعدي :

x	$-\infty$	-1	1	3	$+\infty$
$3-x$		+	+	+	0
x^2-1		+	0	-	0
$\frac{3-x}{x^2-1}$		+	-	+	0

حالة خاصة :

التربيع والقيمة المطلقة موجب دوماً إلا إذا سبق بإشارة سالب

$$(g(x))^2 \geq 0 \Rightarrow -(g(x))^2 \leq 0$$

$$|g(x)| \geq 0 \Rightarrow -|g(x)| \leq 0$$

مثال المقدار $(x-2)^2$ موجب مهما تكن x من R

$$\text{ونكتب } (x-2)^2 \geq 0$$

إذاً المقدار $-(x-2)^2$ سالب مهما تكن x من R

$$\text{ونكتب } -(x-2)^2 \leq 0$$

مثال المقدار $|x-1|$ موجب مهما تكن x من R

$$\text{ونكتب } |x-1| \geq 0$$

إذاً المقدار $-|x-1|$ سالب مهما تكن x من R

$$\text{ونكتب } -|x-1| \leq 0$$

5 حل المتراجحة $f(x) > 0$

$$S =]-\infty, \frac{1}{2}[\cup]2, +\infty[$$

6 حل المتراجحة $f(x) \leq 0$

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	2	$+\infty$	
$f(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x) \leq 0$	غير محققة		محققة	غير محققة	

$$S = \left[\frac{1}{2}, 2 \right]$$

7 حل المتراجحة $f(x) < 0$

$$S = \left] \frac{1}{2}, 2 \right[$$

مثال على الحالة الثانية

ليكن ثلاثي الحدود $f(x) = 2x^2 - 4x + 2$ والمطلوب :

1 حل المعادلة $f(x) = 0$

2 حل كثير الحدود

3 ادرس إشارة كثير الحدود

الحل

1 حل المعادلة $f(x) = 0$

$$2x^2 - 4x + 2 = 0$$

$$a = 2 \quad b = -4 \quad c = 2$$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$\Delta = (-4)^2 - 4(2)(2) = 16 - 16 = 0$$

للمعادلة جذر مضاعف

$$x_1 = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-4)}{2(2)} = \frac{4}{4} = 1$$

2 تحليل كثير الحدود

$$f(x) = a(x - x_1)^2$$

$$f(x) = 2(x - 1)^2$$

3 دراسة إشارة كثير الحدود

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f(x)$	$+$	0	$+$

مثال على الحالة الأولى

ليكن ثلاثي الحدود $f(x) = 2x^2 - 5x + 2$ والمطلوب :

1 حل المعادلة $f(x) = 0$

2 حل كثير الحدود إلى جداء عوامل من الدرجة الأولى

3 ادرس إشارة كثير الحدود

4 حل المتراجحة $f(x) \geq 0$

5 حل المتراجحة $f(x) > 0$

6 حل المتراجحة $f(x) \leq 0$

7 حل المتراجحة $f(x) < 0$

1 حل المعادلة $f(x) = 0$

$$\Rightarrow 2x^2 - 5x + 2 = 0$$

$$a = 2 \quad b = -5 \quad c = 2$$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$\Delta = (-5)^2 - 4(2)(2) = 25 - 16 = 9 > 0$$

للمعادلة حلين

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-5) - 3}{2(2)} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-5) + 3}{2(2)} = \frac{8}{4} = 2$$

2 تحليل كثير الحدود

$$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$$

$$= 2 \left(x - \frac{1}{2} \right) (x - 2) = (2x - 1)(x - 2)$$

3 دراسة إشارة كثير الحدود

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	2	$+\infty$	
$f(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

4 حل المتراجحة $f(x) \geq 0$

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	2	$+\infty$	
$f(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x) \geq 0$	محققة		غير محققة	محققة	

$$S = \left] -\infty, \frac{1}{2} \right] \cup [2, +\infty[$$

مثال على الحالة الثالثة

ليكن ثلاثي الحدود $f(x) = -2x^2 + 3x - 3$ والمطلوب :

① حل المعادلة $f(x) = 0$

② حل كثير الحدود

③ ادرس إشارة كثير الحدود

الحل

① حل المعادلة $f(x) = 0$

$$-2x^2 + 3x - 3 = 0$$

$$a = -2 \quad b = 3 \quad c = -3$$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$\Delta = (3)^2 - 4(-2)(-3) = 9 - 24 = -15 < 0$$

المعادلة مستحيلة الحل

② لا يمكن تحليل كثير الحدود

③ دراسة إشارة كثير الحدود

x	$-\infty$		$+\infty$
$f(x)$	-	-	-

رابعاً: القيمة المطلقة:

القيمة المطلقة للمقدار x هي مقدار موجب دوماً ونرمز لها بـ $|x|$ حيث أن:

$$|x| = \begin{cases} x & ; x \geq 0 \\ -x & ; x < 0 \end{cases}$$

مثال $|5| = |-5| = 5$, $|3| = |-3| = 3$

مثال ليكن f تابع معرف وفق $f(x) = |x - 3|$

أكتب المقدار بدون استعمال قيمة مطلقة

$$x - 3 \geq 0 \Rightarrow x \geq 3 \Rightarrow |x - 3| = x - 3$$

$$x - 3 \leq 0 \Rightarrow x \leq 3 \Rightarrow |x - 3| = -(x - 3)$$

$$f(x) = |x - 3| = \begin{cases} x - 3 & ; x \geq 3 \\ -(x - 3) & ; x < 3 \end{cases}$$

خواص القيمة المطلقة:

$$\sqrt{x^2} = |x| = x \quad \text{①}$$

$$|x| = |-x| \quad \text{②}$$

$$|x + y| \leq |x| + |y| \quad \text{③}$$

④ حل المعادلة $|x| = a$ بالشكل

$$x = -a \quad \text{أو} \quad x = a$$

تمرين: حل كلاً من المعادلات التالية:

$$\text{① } |x - 3| = 2$$

$$\text{إما } x - 3 = 2 \Rightarrow x = 5$$

$$\text{أو } x - 3 = -2 \Rightarrow x = 1$$

$$\text{② } |x + 2| = 3|x - 6|$$

$$\text{إما } x + 2 = 3(x - 6) \Rightarrow x + 2 = 3x - 18$$

$$\Rightarrow -2x = -20 \Rightarrow x = 10$$

$$\text{أو } x + 2 = -3(x - 6) \Rightarrow x + 2 = -3x + 18$$

$$\Rightarrow 4x = 16 \Rightarrow x = 4$$

⑤ حل متراجحة القيمة المطلقة

○ حل المتراجحة $|x - c| \leq r$

$$\text{إما } x - c \leq r \quad \text{أو} \quad x - c \geq -r$$

$$\text{① } |x - 2| \leq 3$$

$$\text{إما } x - 2 \leq 3 \Rightarrow x \leq 5$$

$$\text{أو } x - 2 \geq -3 \Rightarrow x \geq -1$$

$$x \in [-1, 5]$$

$$\text{② } |x - 1| < 5$$

$$\text{إما } x - 1 < 5 \Rightarrow x < 6$$

$$\text{أو } x - 1 > -5 \Rightarrow x > -4$$

$$x \in] -4, 6 [$$

○ حل المتراجحة $|x - c| \geq r$

$$\text{إما } x - c \leq -r \quad \text{أو} \quad x - c \geq r$$

$$\text{① } |x - 2| \geq 3$$

$$\text{إما } x - 2 \geq 3 \Rightarrow x \geq 5$$

$$\text{أو } x - 2 \leq -3 \Rightarrow x \leq -1$$

$$x \in] -\infty, -1 [\cup [5, +\infty [$$

$$\text{② } |x - 1| > 5$$

$$\text{إما } x - 1 > 5 \Rightarrow x > 6$$

$$\text{أو } x - 1 < -5 \Rightarrow x < -4$$

$$x \in] -\infty, -4 [\cup] 6, +\infty [$$