تمهيد : f تابع معرف على R وفق العلاقة $f(x) = 2x + 1$

ولنبدل $f(x)$ بالرمز U_n و لنبدل x بالرمز n نحصل على

العبارة $U_n = 2n + 1$ وهي عبارة الحد العام للمتتالية $(U_n)_{n\geq n_0}$

المعرفة على مجموعة الأعداد الطبيعية N

$$N = \{0 , 1 , 3 , 4 , 5 , 6 , \dots \dots \dots \dots\}$$

تعريف المتتالية : هي تابع معرف على مجموعة الأعداد الطبيعية N

أو مجموعة جزئية منها ونرمز للمتتالية بالرمز $(U_n)_{n\geq n_0}$

مثال 1 المتتالية $(U_n)_{n\geq 0}$ المعرفة وفق $U_n = 2n$

يمكن أن نعوض فيها القيم $\{0,1,2,3,4,5,6, \dots\}$ حدها الأول U_0

$$U_0 = 0 \ , \ U_1 = 2 \ , \ U_2 = 4, \dots$$

مثال 2 المتتالية $(U_n)_{n\geq 1}$ المعرفة وفق $U_n = \frac{1}{n}$

يمكن أن نعوض فيها القيم $\{1,2,3,4,5,6, \dots\}$ حدها الأول U_1

$$U_1 = 1 \ , \ U_2 = \frac{1}{2}, \ U_3 = \frac{1}{3} \dots$$

مثال 3 المتتالية $(U_n)_{n\geq 2}$ المعرفة وفق $U_n = \frac{1}{n-1}$

يمكن أن نعوض فيها القيم $\{2,3,4,5,6, \dots\}$ حدها الأول U_2

$$U_2 = 1 \ , U_3 = \frac{1}{2} \ , U_4 = \frac{1}{3} \ , \dots$$

ملاحظة هامة

1. نسمي U_n الحد ذو الدليل n (الحد العام للمتتالية $(U_n)_{n\geq n_0}$)
2. يجب أن نفرق بين رمزي العبارة U_n و المتتالية $(U_n)_{n\geq n_0}$
3. للمتتالية عدد لانهائي من الحدود بغض النظر عن قيمة هذه الحدود

المتتالية المتناوبة :

المتتالية $(U_n)_{n\geq 0}$ المعرفة بالعلاقة $U_n = (-1)^n$ لها عدد لا نهائي من الحدود

$$U_0 = (-1)^0 = 1 \quad , \quad U_1 = (-1)^1 = -1$$

$$U_2 = (-1)^2 = 1 \quad , \quad U_3 = (-1)^3 = -1$$

$$U_4 = 1 \ , \ U_5 = -1 \ , \ U_6 = 1 \ , \dots , \dots$$

لكن حدودها تأخذ قيمتين فقط $\{1 , -1\}$ ونسميها متتالية متناوبة

طرق تعريف متتالية:

أولاً : تعريف صريح للحد العام U_n بدلالة n :

تعطى عبارة الحد العام بالشكل

$$U_n = f(n) \quad (\text{عبارة تحوي } n)$$

مثال : لتكن لدينا المتتالية $(U_n)_{n\geq 0}$ معرفة بالعلاقة

$$U_n = 2n + 1$$

$$n = 0 \implies U_0 = 2(0) + 1 = 1$$
$$n = 1 \implies U_1 = 2(1) + 1 = 3$$
$$n = 2 \implies U_2 = 2(2) + 1 = 5$$
$$n = 3 \implies U_3 = 2(3) + 1 = 7$$
$$n = 4 \implies U_4 = 2(4) + 1 = 9$$

ثانياً : تعريف المتتالية بالتدريج :

يعطينا عبارتين الأولى حد بدء والثانية علاقة تدريجية لحد بدلالة الحد الذي يسبقه بالشكل

$$\begin{cases} U_0 = \text{عدد} \\ U_{n+1} = f(U_n) \end{cases} \quad (\text{عبارة تحوي } U_n)$$

أو بالشكل

$$\begin{cases} U_0 = \text{عدد} \\ U_{n+2} = f(U_{n+1}) \end{cases} \quad (\text{عبارة تحوي } U_{n+1})$$

أو بالشكل

$$\begin{cases} U_0 = \text{عدد} \\ U_n = f(U_{n-1}) \end{cases} \quad (\text{عبارة تحوي } U_{n-1})$$

مثال 1 لتكن لدينا المتتالية $(U_n)_{n\geq 0}$ المعرفة بالعلاقة التدريجية

$$\begin{cases} U_0 = 2 \\ U_{n+1} = 3U_n + 4 \end{cases}$$

$$n = 0 \implies U_1 = 3(U_0) + 4 = 3(2) + 4 = 10$$
$$n = 1 \implies U_2 = 3(U_1) + 4 = 3(10) + 4 = 34$$
$$n = 2 \implies U_3 = 3(U_2) + 4 = 3(34) + 4 = 106$$

مثال 2 لتكن لدينا المتتالية $(U_n)_{n\geq 0}$ المعرفة بالعلاقة التدريجية

$$\begin{cases} U_0 = 2 \\ U_{n+1} = \dfrac{U_n - 1}{U_n} \end{cases}$$

$$n = 0 \implies U_1 = \frac{U_0 - 1}{U_0} = \frac{2-1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$n = 1 \Rightarrow U_2 = \frac{U_1 - 1}{U_1} = \frac{\frac{1}{2} - 1}{\frac{1}{2}} = \frac{-\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = -1$$

$$n = 2 \Rightarrow U_3 = \frac{U_2 - 1}{U_2} = \frac{-1-1}{-1} = \frac{-2}{-1} = 2$$

اطّراد متتالية : لتكن لدينا المتتالية $(U_n)_{n\geq 0}$ ونميّز الحالات :

1	$U_{n+1} > U_n$	$\Leftrightarrow$	المتتالية متزايدة تماماً
2	$U_{n+1} \geq U_n$	$\Leftrightarrow$	المتتالية متزايدة
3	$U_{n+1} < U_n$	$\Leftrightarrow$	المتتالية متناقصة تماماً
4	$U_{n+1} \leq U_n$	$\Leftrightarrow$	المتتالية متناقصة
5	$U_{n+1} = U_n$	$\Leftrightarrow$	المتتالية ثابتة

ملاحظة هامة

1. كل متتالية تحقق إحدى الحالات الأربعة الأولى من الحالات السابقة تسمى متتالية مطّردة
2. المتتالية الثابتة : هي متتالية جميع حدودها تأخذ نفس القيمة وهي متتالية غير مطّردة
3. المتتالية المتناوبة غير مطّردة

كيف ندرس اطراد متتالية ؟ يوجد ثلاثة طرق لدراسة اطراد متتالية:

	طريقة دراسة الاطّراد	الشرط
1	دراسة إشارة الفرق $U_{n+1} - U_n$	لا يوجد شرط
2	مقارنة النسبة $\frac{U_{n+1}}{U_n}$ بالعدد 1	بشرط جميع حدود المتتالية موجبة
3	دراسة اطراد التابع f	بشرط المتتالية من الشكل $U_n = f(n)$

ملاحظة هامة

1. في حالة المتتالية معرفة بالتدريج بالشكل $U_{n+1} = f(U_n)$ عندها جهة إطراد المتتالية $(U_n)_{n\geq 0}$ لاعلاقة لها بتزايد أو تناقص التابع f
2. لإثبات تزايد أو تناقص متتالية معرفة بالتدريج يمكن استخدام أول طريقتين أو بالإثبات بالتدريج (بالاستقراء الرياضي) حسب كل حالة

أولاً : دراسة إشارة الفرق $U_{n+1} - U_n$: نميّز الحالات :

1	$U_{n+1} - U_n > 0$	$\Leftrightarrow$	المتتالية متزايدة تماماً
2	$U_{n+1} - U_n \geq 0$	$\Leftrightarrow$	المتتالية متزايدة
3	$U_{n+1} - U_n < 0$	$\Leftrightarrow$	المتتالية متناقصة تماماً
4	$U_{n+1} - U_n \leq 0$	$\Leftrightarrow$	المتتالية متناقصة
5	$U_{n+1} - U_n = 0$	$\Leftrightarrow$	المتتالية ثابتة

تمرين : ادرس اطراد كل من المتتاليات التالية :

① $U_n = -3n + 1$

$$U_{n+1} = -3(n+1) + 1 = -3n - 3 + 1 = -3n - 2$$
$$U_{n+1} - U_n = -3n - 2 - (-3n + 1)$$
$$= -3n - 2 + 3n - 1 = -3 < 0$$

إذاً المتتالية متناقصة تماماً

② $U_n = n^2 - n$

$$U_{n+1} = (n+1)^2 - (n+1)$$
$$U_{n+1} - U_n = (n+1)^2 - (n+1) - (n^2 - n)$$
$$= n^2 + 2n + 1 - n - 1 - n^2 + n = 2n > 0$$

إذاً المتتالية متزايدة تماماً

③ $U_n = (n-1)^2$

$$U_{n+1} = (n + 1 - 1)^2 = n^2$$
$$U_{n+1} - U_n = n^2 - (n-1)^2 = n^2 - (n^2 - 2n + 1)$$
$$= n^2 - n^2 + 2n - 1 = 2n - 1 > 0$$

إذاً المتتالية متزايدة تماماً بدءاً من الحد ذو الدليل $n = 1$

④ $U_n = \frac{n+1}{n+2}$

$$U_{n+1} = \frac{n+2}{n+3}$$
$$U_{n+1} - U_n = \frac{n+2}{n+3} - \frac{n+1}{n+2}$$
$$= \frac{(n+2)^2 - (n+1)(n+3)}{(n+2)(n+3)}$$
$$= \frac{n^2 + 4n + 4 - (n^2 + 3n + n + 3)}{(n+2)(n+3)}$$

$$= \frac{1}{(n+2)(n+3)} > 0$$

إذاً المتتالية متزايدة تماماً

$$⑤ \quad U_n = \sqrt{4n+1}$$

$$U_{n+1} = \sqrt{4(n+1)+1} = \sqrt{4n+5}$$

$$U_{n+1} - U_n = \sqrt{4n+5} - \sqrt{4n+1}$$

$$= \frac{\left(\sqrt{4n+5} - \sqrt{4n+1}\right)\left(\sqrt{4n+5} + \sqrt{4n+1}\right)}{\sqrt{4n+5} + \sqrt{4n+1}}$$

$$= \frac{4n+5-(4n+1)}{\sqrt{4n+5} + \sqrt{4n+1}} = \frac{4}{\sqrt{4n+5} + \sqrt{4n+1}} > 0$$

إذاً المتتالية متزايدة تماماً

ثانياً : مقارنة النسبة $\frac{U_{n+1}}{U_n}$ بالعدد واحد (جميع الحدود موجبة)

ونميّز الحالات :

1	$\frac{U_{n+1}}{U_n} > 1$	$\Leftrightarrow$	المتتالية متزايدة تماماً
2	$\frac{U_{n+1}}{U_n} \geq 1$	$\Leftrightarrow$	المتتالية متزايدة
3	$\frac{U_{n+1}}{U_n} < 1$	$\Leftrightarrow$	المتتالية متناقصة تماماً
4	$\frac{U_{n+1}}{U_n} \leq 1$	$\Leftrightarrow$	المتتالية متناقصة
5	$\frac{U_{n+1}}{U_n} = 1$	$\Leftrightarrow$	المتتالية ثابتة

تمرين : ادرس اطراد كل من المتتاليات التالية :

$$① \quad U_n = \frac{2^n}{3^n}$$

$$U_{n+1} = \frac{2^{n+1}}{3^{n+1}}$$

$$\frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{\frac{2^{n+1}}{3^{n+1}}}{\frac{2^n}{3^n}} = \frac{2^{n+1}}{3^{n+1}} \times \frac{3^n}{2^n} = \frac{2^n .2}{3^n .3} \times \frac{3^n}{2^n} = \frac{2}{3} < 1$$

المتتالية متناقصة تماماً

$$② \quad U_n = 3^{n-1}$$

$$U_{n+1} = 3^{n+1-1} = 3^n$$

$$\frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{3^n}{3^{n-1}} = \frac{3^n}{3^n .3^{-1}} = 3 > 1$$

المتتالية متزايدة تماماً

$$③ \quad U_n = \frac{2^n}{4^{n-1}}$$

$$U_{n+1} = \frac{2^{n+1}}{4^{n+1-1}} = \frac{2^{n+1}}{4^n}$$

$$\frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{\frac{2^{n+1}}{4^n}}{\frac{2^n}{4^{n-1}}} = \frac{2^{n+1}}{4^n} \times \frac{4^{n-1}}{2^n}$$

$$= \frac{2^n .2}{4^n} \times \frac{4^n .4^{-1}}{2^n} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} < 1$$

المتتالية متناقصة تماماً

$$④ \quad U_n = \frac{2^{3n}}{3^{2n}}$$

$$U_{n+1} = \frac{2^{3n+3}}{3^{2n+2}}$$

$$\frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{\frac{2^{3n+3}}{3^{2n+2}}}{\frac{2^{3n}}{3^{2n}}} = \frac{2^{3n+3}}{3^{2n+2}} \times \frac{3^{2n}}{2^{3n}} = \frac{2^{3n}.2^3}{3^{2n}.3^2} \times \frac{3^{2n}}{2^{3n}}$$

البسط أصغر من المقام $= \frac{2^3}{3^2} = \frac{8}{9} < 1$

المتتالية متناقصة تماماً

ثالثاً : دراسة اطراد التابع f في حالة المتتالية معرفة تعرفاً صريحاً بالشكل $U_n = f(n)$:

ندرس اطراد التابع f ويجب أن يكون معرفاً على المجال $[0, +\infty[$ أو مجال جزئي منه عندئذ :

① إذا كان $\acute{f} > 0$ عندها التابع f متزايد تماماً على المجال $[0, +\infty[$ وتكون المتتالية $(U_n)_{n\geq 0}$ متزايدة تماماً

② إذا كان $\acute{f} < 0$ عندها التابع f متناقص تماماً على المجال $[0, +\infty[$ وتكون المتتالية $(U_n)_{n\geq 0}$ متناقصة تماماً

تذكّر الملاحظة : لا يمكن استخدام هذه الطريقة في حالة المتتالية معرفة بالتدريج

تمرين ①: ادرس اطّراد المتتالية $(U_n)_{n\geq 0}$ المعرفة بالعلاقة $U_n = \sqrt{4n+1}$

المتتالية من الشكل $U_n = f(n)$ لنأخذ التابع $f(x) = \sqrt{4x+1}$ المعرف على المجال $[-\frac{1}{4}, +\infty[$ ومعرف بوجه خاص على المجال $[0, +\infty[$ واشتقاقي عليه

$$\acute{f}(x) = \frac{4}{2\sqrt{4x+1}} = \frac{2}{\sqrt{4x+1}} > 0$$

التابع f متزايد تماماً على المجال $]0,+\infty[$

إذاً المتتالية $(U_n)_{n\geq0}$ متزايدة تماماً

تمرين ②: ادرس اطراد المتتالية $(U_n)_{n\geq3}$ المعرفة بالعلاقة

$$U_n=\frac{n+1}{n-2}$$

لنأخذ التابع $f(x)=\frac{x+1}{x-2}$ المعرف على المجال $R\setminus\{2\}$ ومعرف بوجه خاص على المجال $]3,+\infty[$ واشتقاقي عليه

$$f'(x)=\frac{(1)(x-2)-(1)(x+1)}{(x-2)^2}=\frac{-3}{(x-2)^2}<0$$

التابع f متناقص تماماً على المجال $]3,+\infty[$

إذاً المتتالية $(U_n)_{n\geq3}$ متناقصة تماماً بدءاً من الحد ذو الدليل $n=3$

أنواع المتتاليات : متتالية حسابية أو متتالية هندسية

	المتتالية الحسابية
التعريف	هي متتالية ينتج فيها كل حد عن سابقه بإضافة عدد حقيقي ثابت نسميه أساس المتتالية الحسابية (r) $U_{n+1}=U_n+r$
الإثبات	لإثبات أن متتالية حسابية يجب أن يتحقق $U_{n+1}-U_n=r$(ثابت)
عبارة الحد العام U_n	$U_n=U_0+nr$
العلاقة بين حدين في المتتالية	$U_n=U_m+(n-m)r$
حساب أساس المتتالية	$r=\frac{U_n-U_m}{n-m}$
مجموع حدود متوالية من المتتالية	$S=(\text{عدد الحدود})\left[\frac{\text{الحد الأول}+\text{الحد الأخير}}{2}\right]$
ملاحظة	عدد الحدود $=j-i+1$ (j) دليل آخر حد (i) دليل أول حد
لحساب a,b,c ثلاثة حدود متوالية من متتالية	$b=\frac{a+b}{2}$ $b=a+r$ $c=b+r=a+2r$

مثال على مجموع حدود متوالية من متتالية حسابية

$$1+2+3+4+5+\cdots+\cdots+n=n.\frac{(1+n)}{2}$$

تمرين ①: بين إن كانت المتتاليات المعطاة حسابية :

$$\boxed{①\quad U_n=-3n+1}$$

$$U_{n+1}=-3(n+1)+1=-3n-3+1=-3n-2$$

$$U_{n+1}-U_n=-3n-2-(-3n+1)$$

$$=-3n-2+3n-1=-3=r$$

المتتالية حسابية أساسها $r=-3$

$$\boxed{②\quad U_n=n^2+1}$$

$$U_{n+1}=(n+1)^2+1=n^2+2n+2$$

$$U_{n+1}-U_n=n^2+2n+2-(n^2+1)$$

$$=n^2+2n+2-n^2-1=2n+1\ (\text{غير ثابت})$$

المتتالية ليست حسابية

تمرين ②: لتكن لدينا المتتالية الحسابية $5,7,9,11,\ldots,\ldots$

أوجد الحد العاشر ثم احسب مجموع الحدود العشرة الأولى

الحـــــــــــــــل

المتتالية حسابية أساسها $r=U_2-U_1=7-5=2$

حدها الأول $U_1=5$

حدها العاشر $U_{10}=U_1+(10-1)r$

$$U_{10}=5+9(2)=23$$

عدد الحدود $=10-1+1=10$

مجموع الحدود العشرة الأولى

$$S=10\left(\frac{U_1+U_{10}}{2}\right)=10\left(\frac{5+23}{2}\right)=10\left(\frac{28}{2}\right)=140$$

تمرين ③: $(U_n)_{n\geq0}$ متتالية حسابية أساسها r :

وفيها $U_{17}=24$ و $U_{40}=70$ احسب r و U_0 و U_n

الحـــــــــــــــل

$$r=\frac{U_{40}-U_{17}}{40-17}=\frac{70-24}{23}=\frac{46}{23}=2\quad\Rightarrow\quad\boxed{r=2}$$

$$U_{17}=U_0+(17-0)(2)\ \Rightarrow\ 24=U_0+34$$

$$\Rightarrow\ U_0=-34+24=-10$$

$$\Rightarrow\ U_n=U_0+nr\Rightarrow U_n=-10+2n$$

تمرين ④: $(U_n)_{n\geq 0}$ متتالية معرفة بالعلاقة

$$U_n = -3n + 2$$

والمطلوب :

① أوجد U_0 و U_1 وعين نوع المتتالية وأوجد أساسها

② احسب المجموع $S = U_0 + U_1 + \dots\dots\dots + U_n$

الحـــــــــــــل

$$U_0 = -3(0) + 2 = 2$$

$$U_1 = -3(1) + 2 = -3 + 2 = -1$$

$$U_{n+1} - U_n = -3(n+1) + 2 - (-3n + 2)$$

$$= -3n - 3 + 2 + 3n - 2 = -3 = r$$

المتتالية حسابية أساسها $r = -3$

حساب المجموع S : $\text{عدد الحدود} = n - 0 + 1 = n + 1$

$$S = (\text{عدد الحدود})\left[\frac{\text{الحد الأخير} + \text{الحد الأول}}{2}\right]$$

$$= (n+1)\left[\frac{U_0 + U_n}{2}\right]$$

$$= (n+1)\left[\frac{2 - 3n + 2}{2}\right] = (n+1)\left(\frac{-3n+4}{2}\right)$$

تمرين ⑤: $(U_n)_{n\geq 0}$ متتالية حسابية فيها

$$U_{10} = -12 \quad , \quad U_{20} = -32$$

المطلوب :

① أوجد U_0 و r ؟

② احسب المجموع $S = U_{10} + U_{20} + \dots\dots\dots + U_{100}$ ؟

الحـــــــــــــل

① $U_n = U_m + (n+m)r$

$$\Rightarrow U_{20} = U_{10} + (20 - 10)r$$

$$\Rightarrow -32 = -12 + 10\,r$$

$$\Rightarrow 10\,r = -20 \quad \Rightarrow \boxed{r = -2}$$

$$U_n = U_0 + nr$$

$$\Rightarrow U_{10} = U_0 + 10r$$

$$\Rightarrow -12 = U_0 + (10)(-2) \quad \Rightarrow \boxed{U_0 = 8}$$

② المجموع $S = U_{10} + U_{20} + \dots\dots\dots + U_{100}$

هو مجموع حدود غير متوالية من متتالية حسابية لنحوله لمجموع حدود متوالية من متتالية حسابية

والمجموع السابق يكافئ المجموع $S = V_1 + V_2 + \dots\dots\dots + V_{10}$

فيه $\text{عدد الحدود} = 10 - 1 + 1 = 10$

الحد الأول $V_1 = U_{10} = -12$

الحد الأخير

$$V_{10} = U_{100} = U_0 + 100\,r = 8 + 100\,(-2) = -192$$

المجموع

$$S = (\text{عدد الحدود})\left[\frac{\text{الحد الأخير} + \text{الحد الأول}}{2}\right]$$

$$= (10)\left[\frac{V_1 + V_{10}}{2}\right] = (10)\left[\frac{-12 - 192}{2}\right]$$

$$= (10)(-102) = -1020$$

طريقة ثانية لحساب المجموع $S = U_{10} + U_{20} + \dots\dots\dots + U_{100}$

هو مجموع حدود غير متوالية من متتالية حسابية

نحسب عدد الحدود من القانون

$$\boxed{\text{عدد الحدود} = \frac{\text{دليل آخر حد} - \text{دليل أول حد}}{\text{مقدار القفزة}} + 1}$$

$$\text{مقدار القفزة} = 20 - 10 = 10$$

$$\text{عدد الحدود} = \frac{100 - 10}{10} + 1 = 10$$

$$U_{10} = -12$$

$$U_{100} = U_{10} + (100 - 10)r$$

$$= U_{10} + (100 - 10)(-2) = -12 - 180 = -192$$

$$S = (\text{عدد الحدود})\left[\frac{\text{الحد الأخير} + \text{الحد الأول}}{2}\right]$$

$$= (10)\left[\frac{U_{10} + U_{100}}{2}\right]$$

$$= (10)\left[\frac{-12 - 192}{2}\right] = (10)(-102) = -1020$$

تمرين ⑥ : $(U_n)_{n\geq 0}$ متتالية معرفة وفق $\begin{cases} U_0 = \frac{1}{5} \\ U_{n+1} = \frac{U_n}{1 - 2U_n} \end{cases}$

ولتكن لدينا المتتالية $(V_n)_{n\geq 0}$ معرفة وفق $V_n = \frac{1}{U_n}$ ،

أثبت أن المتتالية $(V_n)_{n\geq 0}$ حسابية ثم عين U_n بدلالة n

الحـــــــــــــل

$$V_{n+1}-V_n=\frac{1}{U_{n+1}}-\frac{1}{U_n}=\frac{1}{\frac{U_n}{1-2U_n}}-\frac{1}{U_n}$$

$$=\frac{1-2U_n}{U_n}-\frac{1}{U_n}=\frac{-2U_n}{U_n}=-2=r \quad (\text{ثابت})$$

إذاً المتتالية $(V_n)_{n\geq 0}$ حسابية وأساسها $\boxed{r=-2}$ وعبارة V_n

$$V_n=V_0+nr=\left(\frac{1}{U_0}\right)+nr=\left(\frac{1}{\frac{1}{5}}\right)+n(-2)$$

$$\Longrightarrow \quad V_n=5-2n$$

ولدينا : $V_n=\frac{1}{U_n}$

$$\Longrightarrow \quad \frac{1}{U_n}=5-2n \quad \Longrightarrow \quad \boxed{U_n=\frac{1}{5-2n}}$$

المتتالية الهندسية	
التعريف	نقول عن متتالية إنها هندسة إذا نتج فيها كل حد عن سابقه بضربه بعدد حقيقي ثابت نسميه أساس المتتالية الهندسية (q) $U_{n+1}=q.U_n$
الإثبات	لإثبات أن متتالية هندسية يجب أن يتحقق $\frac{U_{n+1}}{U_n}=q(\text{ثابت})$
عبارة الحد العام U_n	$U_n=U_0\,.\,q^n$
العلاقة بين حدين في المتتالية	$U_n=U_m\,.\,q^{n-m}$
حساب أساس المتتالية	$\Longrightarrow\ q^{n-m}=\frac{U_n}{U_m}$
مجموع حدود متوالية من متتالية	$S=(\text{الحد الأول})\left[\frac{1-q^{\text{عدد الحدود}}}{1-q}\right]$
ملاحظة	عدد الحدود $=j-i+1$ (j) دليل آخر حد (i) دليل أول حد
لحساب a,b,c ثلاثة حدود متوالية من متتالية	$b^2=ac$ $b=a.q$ $c=b.q=a.q^2$

مثال ① على مجموع حدود متوالية من متتالية هندسية

$$1+q+q^2+q^3+q^4+\cdots+\cdots+q^n=\frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

مثال ② على مجموع حدود متوالية من متتالية هندسية

$$q+q^2+q^3+q^4+\cdots+\cdots+q^n=q\times\frac{1-q^n}{1-q}$$

تمرين ① : بين إن كانت المتتاليات المعطاة هندسية :

$$\boxed{① \quad U_n=3^{n-1}}$$

$$U_{n+1}=3^{n+1-1}=3^n$$

$$\frac{U_{n+1}}{U_n}=\frac{3^n}{3^{n-1}}=\frac{3^n}{3^n\,.\,3^{-1}}=3=q$$

المتتالية هندسية أساسها $q=3$

$$\boxed{② \quad U_n=n^2}$$

$$U_{n+1}=(n+1)^2$$

$$\frac{U_{n+1}}{U_n}=\frac{(n+1)^2}{n^2}=\left(\frac{n+1}{n}\right)^2 \quad (\text{غير ثابت})$$

المتتالية ليست هندسية

تمرين ② : $(U_n)_{n\geq 0}$ متتالية معرفة بالعلاقة $U_n=\frac{3^n}{2^{n+1}}$

والمطلوب :

① احسب U_0 , U_1 , U_2 ؟

② أثبت أن $(U_n)_{n\geq 0}$ متتالية هندسية أوجد أساسها q ؟

③ احسب بدلالة n المجموع

$$S=U_0+U_1+U_2+\ldots\ldots\ldots+U_n$$

الحـــــــل

①

$U_0=\frac{3^0}{2^1}=\frac{1}{2}$	$U_1=\frac{3^1}{2^2}=\frac{3}{4}$	$U_2=\frac{3^2}{2^3}=\frac{9}{8}$

②

$$U_{n+1}=\frac{3^{n+1}}{2^{n+2}}$$

$$\frac{U_{n+1}}{U_n}=\frac{\frac{3^{n+1}}{2^{n+2}}}{\frac{3^n}{2^{n+1}}}=\frac{3^{n+1}}{2^{n+2}}\times\frac{2^{n+1}}{3^n}=\frac{3^n\,.3\,.2^{n+1}}{2^{n+1}\,.2\,.3^n}=\frac{3}{2}=q$$

المتتالية هندسية وأساسها $q=\frac{3}{2}$

③ حساب المجموع $S = U_0 + U_1 + U_2 \dots\dots\dots + U_n$

وهو مجموع حدود متوالية من متتالية هندسية أساسها $q = \frac{3}{2}$

وحدها الأول $U_0 = \frac{1}{2}$

$$\text{عدد الحدود} = n - 0 + 1 = n + 1$$

$$S = (\text{الحد الأول})\left[\frac{1 - q^{\text{عدد الحدود}}}{1 - q}\right] = \left(\frac{1}{2}\right)\left[\frac{1 - \left(\frac{3}{2}\right)^{n+1}}{1 - \frac{3}{2}}\right]$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)\left[\frac{1 - \left(\frac{3}{2}\right)^{n+1}}{-\frac{1}{2}}\right] = -\left[1 - \left(\frac{3}{2}\right)^{n+1}\right]$$

تمرين ③: $(U_n)_{n\geq 0}$ متتالية هندسية فيها

$U_5 = 64$ و $U_7 = 256$ احسب U_{10}

الحـــــــل

$$q^{n-m} = \frac{U_n}{U_m} \Rightarrow q^{7-5} = \frac{U_7}{U_5} \Rightarrow q^2 = \frac{256}{64}$$

$$\Rightarrow q^2 = 4 \Rightarrow q = \pm 2$$

في حالة $q = 2$:

$$U_n = U_m \cdot q^{n-m} \Rightarrow U_{10} = U_7 . q^{10-7} = U_7 . q^3$$

$$= (256)(2)^3 = (256)(8) = 2048$$

في حالة $q = -2$:

$$U_n = U_m \cdot q^{n-m} \Rightarrow U_{10} = U_7 . q^{10-7} = U_7 . q^3$$

$$= (256)(-2)^3 = (256)(-8) = -2048$$

تدرب صفحة 18

1 ليكن $U_n = \frac{2^n}{3^{n+1}}$ في حالة $n \in N$ ،

أثبت أن المتتالية $(U_n)_{n\geq 0}$ متتالية هندسية و أوجد أساسها ؟

الحـــــــل

$$U_{n+1} = \frac{2^{n+1}}{3^{n+2}}$$

$$\frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{\frac{2^{n+1}}{3^{n+2}}}{\frac{2^n}{3^{n+1}}} = \frac{2^{n+1}}{3^{n+2}} \times \frac{3^{n+1}}{2^n} = \frac{2^n .2}{3^{n+1} .3} \times \frac{3^{n+1}}{2^n} = \frac{2}{3}$$

المتتالية هندسية أساسها $q = \frac{2}{3}$

2 الأسئلة الآتية تتعلق بمتتاليات حسابية أو هندسية:

① $(U_n)_{n\geq 0}$ متتالية حسابية فيها $U_2 = 41$ و $U_5 = -13$ ،

احسب U_{20}

الحـــــــل

لنحسب أساس المتتالية الحسابية r :

$$U_n = U_m + (n-m)r \Rightarrow U_5 = U_2 + (5-2)r$$

$$\Rightarrow -13 = 41 + 3r \Rightarrow -13 - 41 = 3r$$

$$\Rightarrow -54 = 3r \Rightarrow \boxed{r = -18}$$

لنحسب الحد U_{20} :

$$\Rightarrow U_{20} = U_5 + (20-5)(-18)$$

$$\Rightarrow U_{20} = -13 + (15)(-18)$$

$$\Rightarrow U_{20} = -13 - 270 = -283 \Rightarrow \boxed{U_{20} = -283}$$

② $(U_n)_{n\geq 0}$ متتالية هندسية فيها $U_7 = \frac{1}{1080}$ و $U_{10} = \frac{25}{2197}$ ،

احسب U_{30}

الحـــــــل

لنحسب أساس المتتالية الهندسية q :

$$U_n = U_m \cdot q^{n-m} \Rightarrow U_{10} = U_7 \cdot q^{10-7}$$

$$\Rightarrow \frac{25}{2197} = \frac{1}{1080} \cdot q^3$$

$$q^3 = \frac{(25)(1080)}{2197} = \frac{(5^2)(5 \times 6^3)}{(13^3)} = \frac{(5^3)(6^3)}{(13^3)}$$

$$= \left(\frac{5 \times 6}{13}\right)^3 = \left(\frac{30}{13}\right)^3$$

$$q^3 = \left(\frac{30}{13}\right)^3 \Rightarrow \boxed{q = \frac{30}{13}}$$

لنحسب الحد U_{30}

$$U_{30} = U_{10} \cdot q^{30-10} \Rightarrow \boxed{U_{30} = \left(\frac{25}{2197}\right)\left(\frac{30}{13}\right)^{20}}$$

③ $(U_n)_{n\geq 0}$ متتالية حسابية أساسها $r = 3$ فيها $U_1 = -2$ ،

احسب U_n بدلالة n ، ثم استنتج قيم كل من المجموعين

$U_{30} + U_{31} + U_{32}$ و $U_1 + U_2 + U_3 + \dots + U_{20}$

الحـــــــل

لنوجد عبارة U_n بدلالة n

$$U_n = U_m + (n-m)r \Rightarrow U_n = U_1 + (n-1)(3)$$

$$\Rightarrow U_n = -2 + 3n - 3 \Rightarrow \boxed{U_n = 3n - 5}$$

حساب المجموع $U_{30} + U_{31} + U_{32}$: عدد الحدود 3

$$U_{30} = 3(30) - 5 = 90 - 5 = 85$$

$$U_{32} = 3(32) - 5 = 96 - 5 = 91$$

$$S = (\text{عدد الحدود})\left[\frac{\text{الحد الأخير} + \text{الحد الأول}}{2}\right]$$

$$= (3)\left(\frac{U_{30} + U_{31}}{2}\right) = (3)\left(\frac{85 + 91}{2}\right) = 264$$

حساب المجموع $U_1 + U_2 + U_3 + \cdots + U_{20}$

$$\text{عدد الحدود} = 20 - 1 + 1 = 20$$

$U_1 = -2$	$U_{20} = 3(20) - 5 = 55$

$$S = (\text{عدد الحدود})\left[\frac{\text{الحد الأخير} + \text{الحد الأول}}{2}\right]$$

$$= (20)\left(\frac{U_1 + U_{20}}{2}\right)$$

$$= (20)\left(\frac{-2 + 55}{2}\right) = (20)\left(\frac{53}{2}\right) = 530$$

④ $(U_n)_{n\geq 0}$ متتالية هندسية أساسها $q = 3$ فيها $U_1 = -2$ ،

احسب U_n بدلالة n ، ثم استنتج قيم كل من المجموعين

$$U_1 + U_2 + U_3 + \cdots + U_7$$

$$U_2 + U_4 + U_6 + \cdots + U_{2n}$$

الحـــــــل

لنوجد عبارة U_n بدلالة n

$$U_n = U_m \,.\, q^{n-m} \Rightarrow U_n = U_1 \,.\, q^{n-1}$$

$$\Rightarrow \boxed{U_n = -2.(3)^{n-1}}$$

حساب المجموع $U_1 + U_2 + U_3 + \cdots + U_7$

$$\text{عدد الحدود} = 7 - 1 + 1 = 7$$

$$S = (\text{الحد الأول})\left[\frac{1 - q^{\text{عدد الحدود}}}{1 - q}\right]$$

$$= U_1\left[\frac{1 - q^7}{1 - q}\right] = -2\left[\frac{1 - 3^7}{1 - 3}\right] = [1 - 3^7] = -2186$$

حساب المجموع $U_2 + U_4 + U_6 + \cdots + U_{2n}$

نلاحظ أن المجموع $U_2 + U_4 + U_6 + \cdots + U_{2n}$ ليس مجموع حدود متوالية من متتالية هندسية لذلك نحوله لمجموع حدود متوالية من متتالية هندسية

إن المجموع $U_2 + U_4 + U_6 + \cdots + U_{2n}$

يكافئ المجموع $V_1 + V_2 + V_3 + \cdots + V_n$ عدد حدوده n

لنستنتج نوع المتتالية $(V)_{n\geq 0}$ ونوجد حدها الأول V_1 و أساسها q

$$V_1 = U_2 = -2\,.\,(3)^{2-1} = (-2)(3) = -6$$

$$V_2 = U_4 = -2\,.\,(3)^{4-1} = (-2)(3)^3 = -54$$

$$\Rightarrow \frac{V_2}{V_1} = \frac{-54}{-6} = 9 = q$$

المتتالية $(V)_{n\geq 0}$ هندسية وأساسها $q = 9$

ولنحسب المجموع $V_1 + V_2 + V_3 + \cdots + V_n$

$$S = (\text{الحد الأول})\left[\frac{1 - q^{\text{عدد الحدود}}}{1 - q}\right] = V_1\left[\frac{1 - 9^n}{1 - 9}\right]$$

$$= (-6)\left[\frac{1 - 9^n}{-8}\right] = \left(\frac{-6}{-8}\right)(1 - 9^n) = \left(\frac{3}{4}\right)(1 - 9^n)$$

طريقة ثانية لحساب المجموع $U_2 + U_4 + U_6 + \cdots + U_{2n}$

$$\text{عدد الحدود} = \frac{\text{دليل آخر حد} - \text{دليل أول حد}}{\text{مقدار القفزة}} + 1$$

$$\text{مقدار القفزة} = 4 - 2 = 2$$

$$\text{عدد الحدود} = \frac{2n - 2}{2} + 1 = \frac{2(n-1)}{2} + 1 = n - 1 + 1$$

$$\text{عدد الحدود} = n$$

$$S = (\text{الحد الأول})\left[\frac{1 - \left(q^{\text{القفزة}}\right)^{\text{عدد الحدود}}}{1 - q^{\text{القفزة}}}\right]$$

$$S = (U_2)\left[\frac{1 - (3^2)^n}{1 - 3^2}\right] = -6\left[\frac{1 - 9^n}{1 - 9}\right]$$

$$= \frac{-6}{-8}(1 - 9^n) = \frac{3}{4}(1 - 9^n)$$

⑤ $(U_n)_{n\geq 0}$ متتالية حسابية أساسها $r = -2$ فيها $U_0 = -3$

احسب $U_{25} + U_{26} + \cdots + U_{125}$

الحـــــــل

عدد الحدود $= 125 - 25 + 1 = 101$ والحد الأول U_{25} والحد الأخير U_{125}

$$U_{25} = U_0 + (25)r \implies U_{25} = -3 + (25) = -53$$

$$U_{125} = U_0 + (125)r \implies U_{125} = -3 + (125)(-2)$$

$$= -3 - 250 = -253$$

$$S = (\text{عدد الحدود})\left(\frac{U_{25} + U_{125}}{2}\right) = (101)\left(\frac{-53 - 253}{2}\right)$$

$$= (101)(-153) = -15453$$

⑥ $(U_n)_{n\geq 0}$ متتالية هندسية أساسها $q = 2$ فيها $U_0 = 1$ ،
احسب $U_3 + U_4 + \cdots + U_{10}$

الحـــــــــل

عدد الحدود $= 10 - 3 + 1 = 8$ ، والحد الأول U_3

$$U_3 = U_0 \, . \, q^3 = (1)(2)^3 = 8$$

$$S = (\text{الحد الأول})\left[\frac{1 - q^{\text{عدد الحدود}}}{1 - q}\right] = U_3\left[\frac{1 - 2^8}{1 - 2}\right]$$

$$= (8)\left[\frac{1 - 2^8}{-1}\right] = -8(1 - 2^8) = -8(-255) = 2040$$

⑦ احسب المجموع

$$S = \frac{1}{2} + 1 + \frac{3}{2} + 2 + \frac{5}{2} + 3 + \cdots + 10$$

المجموع السابق يمثل مجموع حدود متوالية من متتالية حسابية حدها الأول $U_0 = \frac{1}{2}$ وأساسها $r = \frac{1}{2}$,
وعدد حدودها ؟

لنوجد عبارة الحد العام :

$$U_n = U_0 + nr \implies U_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}n$$

$$\implies \boxed{U_n = \frac{1}{2}(1 + n)}$$

لحساب عدد الحدود :

لنحسب دليل الحد الأخير في المجموع ، لنأخذ $U_n = 10$ ولنعوض بعبارة الحد العام

$$U_n = \frac{1}{2}(1 + n) \implies 10 = \frac{1}{2}(1 + n) \implies 20 = 1 + n$$

$$\implies n = 19 \implies U_{19} = 10$$

أصبح لدينا الحد الأول $U_0 = \frac{1}{2}$ و الحد الأخير $U_{19} = 10$ إذاً

عدد الحدود $= 19 - 0 + 1 = 20$

حساب المجموع S :

$$S = (\text{عدد الحدود})\left[\frac{\text{الحد الأول} + \text{الحد الأخير}}{2}\right] = (20)\left[\frac{\frac{1}{2} + 10}{2}\right]$$

$$= (20)\left[\frac{\frac{21}{2}}{2}\right] = (20)\left(\frac{21}{4}\right) = 105$$

⑧ a و b و c ثلاثة حدود متوالية من متتالية هندسية ، احسبها علماً أن $a + b + c = 36.75$ و $abc = 343$ ؟

الحـــــــــل

a و b و c ثلاثة حدود متوالية من متتالية هندسية إذاً تحقق $b^2 = ac$

$$\left.\begin{matrix} b^2 = ac \\ abc = 343 \end{matrix}\right\} \implies b^3 = 343 \implies b^3 = (7)^3 \implies \boxed{b = 7}$$

$$\left.\begin{matrix} a + b + c = 36.75 \\ abc = 343 \end{matrix}\right\} \xRightarrow{\text{نعوض}\, b=7} \left.\begin{matrix} a + 7 + c = 36.75 \\ a7c = 343 \end{matrix}\right\}$$

$$\implies \begin{matrix} a + c = 29.75 & \ldots ① \\ ac = 49 & \ldots ② \end{matrix}$$

من ② $a = \frac{49}{c}$ نعوض في المعادلة ①

$$\frac{49}{c} + c = 29.75 \implies c^2 - 29.75c + 49 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-29.75)^2 - 4(1)(49)$$

$$= 885.06 - 196 = 689.06 \implies \sqrt{\Delta} \approx 26.24$$

$$c = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{29.75 + 26.24}{2} = 28 \implies \boxed{a = 1.75}$$

$$c = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{29.75 - 26.24}{2} = 1.75 \implies \boxed{a = 28}$$

تمرين إضافي : a و b و c ثلاثة حدود متوالية من متتالية هندسية احسبها علماً أن $a + b + c = 28$ و $abc = 512$

الحـــــــــل

a و b و c ثلاثة حدود متوالية من متتالية هندسية إذاً تحقق $b^2 = ac$

$$\left.\begin{matrix} b^2 = ac \\ abc = 512 \end{matrix}\right\} \implies b^3 = 512 \implies b^3 = (8)^3 \implies \boxed{b = 8}$$

$$\left.\begin{matrix} a + b + c = 28 \\ abc = 512 \end{matrix}\right\} \implies \left.\begin{matrix} a + 8 + c = 28 \\ a8c = 512 \end{matrix}\right\}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{matrix} a + c = 20 & \ldots ① \\ ac = 64 & \ldots ② \end{matrix}$$

من ② $a = \frac{64}{c}$ نعوض في المعادلة ① :

$$\frac{64}{c} + c = 20 \quad \Rightarrow \quad c^2 - 20c + 64 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-20)^2 - 4(1)(64)$$

$$= 400 - 256 = 144$$

$$c = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{20 + 12}{2} = 16 \quad \Rightarrow \quad \boxed{a = 4}$$

$$c = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{20 - 12}{2} = 4 \quad \Rightarrow \quad \boxed{a = 16}$$

تمرين إضافي : a و b و c ثلاثة حدود متوالية من متتالية حسابية نفترض أن مجموع هذه الأعداد يساوي 21 وأن مجموع مربعاتها يساوي 197 ، عين هذه الأعداد

الحل

a و b و c ثلاثة حدود متوالية من متتالية حسابية

$$a + b + c = 21 \quad \ldots ①$$

و مجموع مربعاتها يساوي 197

$$a^2 + b^2 + c^2 = 197 \quad \ldots ②$$

ولدينا :

$$b = \frac{a + c}{2} \quad \Rightarrow \quad 2b = a + c$$

نعوض في ① نجد :

$$2b + b = 21 \quad \Rightarrow \quad 3b = 21 \quad \Rightarrow \boxed{b = 7}$$

نفرض أساس المتتالية الحسابية r فيكون

$$a = b - r = 7 - r$$

$$c = b + r = 7 + r$$

نعوض في ②

$$(7 - r)^2 + (4)^2 + (7 + r)^2 = 197$$

$$\Rightarrow \quad 49 - 14r + r^2 + 49 + 49 + 14r + r^2 = 197$$

$$\Rightarrow \quad 2r^2 + 147 = 197 \quad \Rightarrow \quad 2r^2 = 197 - 147$$

$$\Rightarrow \quad 2r^2 = 50 \quad \Rightarrow \quad r^2 = 25 \quad \Rightarrow r = \mp 5$$

في حالة $r = 5$ نجد

$$a = 2 \ , \ b = 7 \ , \ c = 12$$

في حالة $r = -5$ نجد

$$a = 12 \ , \ b = 7 \ , \ c = 2$$

$\boxed{3}$ $(V)_{n \geq 0}$ متتالية معرفة تدريجياً وفق $\begin{cases} V_0 = 1 \\ V_{n+1} = \frac{V_n}{1 + V_n} \end{cases}$

① تحقق أن $V_n > 0$ أياً كان العدد الطبيعي n ؟

② أثبت أن المتتالية $(U_n)_{n \geq 0}$ المعرفة بالعلاقة $U_n = \frac{1}{V_n}$ متتالية حسابية ؟

③ استنتج عبارة V_n بدلالة n ؟

الحل

① الخاصة المطلوب إثباتها $E(n): \quad V_n > 0$

لنثبت صحة الخاصة $E(n)$ من أجل $n = 0$

$$n = 0 \quad \Rightarrow \quad V_0 = 1 > 0$$

إذا الخاصة $E(n)$ محققة من أجل $n = 0$

لنفرض صحة الخاصة $E(n)$ من أجل n أي

$E(n) \ : \quad V_n > 0$ محققة

ولنثبت صحة الخاصة $E(n+1)$ أي لنثبت أن

$$E(n+1) \ : \quad V_{n+1} > 0$$

لدينا $V_n > 0$ فرضاً ، ومنه $V_n + 1 > 0$

إذاً $\frac{V_n}{1 + V_n} > 0$ إذاً $V_{n+1} \geq 0$

الخاصة $E(n+1)$ صحيحة والخاصة $E(n)$ صحيحة أياً كان العدد الطبيعي n

②

$$U_{n+1} = \frac{1}{V_{n+1}}$$

$$U_{n+1} - U_n = \frac{1}{V_{n+1}} - \frac{1}{V_n}$$

$$= \frac{1}{\frac{V_n}{1 + V_n}} - \frac{1}{V_n} = \frac{1 + V_n - 1}{V_n} = \frac{V_n}{V_n} = 1$$

إذاً المتتالية $(U_n)_{n \geq 0}$ حسابية و أساسها $r = 1$

③

$$U_n = \frac{1}{V_n} \quad \Rightarrow \quad U_0 = \frac{1}{V_0} = \frac{1}{1} = 1$$

$$U_n = U_0 + nr \quad \Rightarrow \quad \boxed{U_n = 1 + n}$$

$$\Rightarrow U_n = \frac{1}{V_n} \quad \Rightarrow \quad V_n = \frac{1}{U_n} \quad \Rightarrow \quad \boxed{V_n = \frac{1}{n + 1}}$$

4 ادرس اطراد كل من المتتاليات التالية :

① $U_n = \dfrac{3}{n^2}$

$$\frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{\dfrac{3}{(n+1)^2}}{\dfrac{3}{n^2}} = \frac{3}{(n+1)^2} \times \frac{n^2}{3}$$

$$= \frac{n^2}{(n+1)^2} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^2 < 1$$

البسط أصغر من المقام إذا الكسر أصغر من الواحد

إذا المتتالية متناقصة تماماً

② $U_n = \sqrt{3n+1}$

$$U_{n+1} = \sqrt{3(n+1)+1} = \sqrt{3n+4}$$

$$U_{n+1} - U_n = \sqrt{3n+4} - \sqrt{3n+1}$$

$$= \frac{\left(\sqrt{3n+4} - \sqrt{3n+1}\right)\left(\sqrt{3n+4} + \sqrt{3n+1}\right)}{\sqrt{4n+5} + \sqrt{3n+1}}$$

$$\frac{(3n+4) - (3n+1)}{\sqrt{4n+5} + \sqrt{3n+1}} = \frac{3}{\sqrt{4n+5} + \sqrt{3n+1}} > 0$$

إذا المتتالية متزايدة تماماً

③ $U_n = \dfrac{2n-1}{n+4}$

$$U_{n+1} = \frac{2(n+1)-1}{n+5} = \frac{2n+1}{n+5}$$

$$U_{n+1} - U_n = \frac{2n+1}{n+5} - \frac{2n-1}{n+4}$$

$$= \frac{(2n+1)(n+4) - (2n-1)(n+5)}{(n+5)(n+4)}$$

$$= \frac{(2n^2 + 8n + n + 4) - (2n^2 + 10n - n - 5)}{(n+5)(n+4)}$$

$$= \frac{2n^2 + 9n + 4 - 2n^2 - 9n + 5}{(n+5)(n+4)}$$

$$= \frac{9}{(n+5)(n+4)} > 0$$

إذا المتتالية متزايدة تماماً

④ $U_n = \dfrac{1}{n^2+1}$

$$U_{n+1} = \frac{1}{(n+1)^2+1} = \frac{1}{n^2+2n+2}$$

$$U_{n+1} - U_n = \frac{1}{n^2+2n+2} - \frac{1}{n^2+1}$$

$$= \frac{(n^2+1) - (n^2+2n+2)}{(n^2+2n+2)(n^2+1)}$$

$$= \frac{-(2n+1)}{(n^2+2n+2)(n^2+1)} < 0$$

المتتالية متناقصة تماماً البسط سالب و المقام موجب لذلك الكسر سالب

⑤ $U_n = \dfrac{3n+1}{n-2}$

$$U_{n+1} = \frac{3(n+1)+1}{n+1-2} = \frac{3n+3+1}{n+1-2} = \frac{3n+4}{n-1}$$

$$U_{n+1} - U_n = \frac{3n+4}{n-1} - \frac{3n+1}{n-2}$$

$$= \frac{(3n+4)(n-2) - (3n+1)(n-1)}{(n-1)(n-2)}$$

$$= \frac{3n^2 - 6n + 4n - 8 - (3n^2 - 3n + n - 1)}{(n-1)(n-2)}$$

$$= \frac{-7}{(n-1)(n-2)} < 0$$

إذا المتتالية متناقصة تماماً بدءاً من الحد ذو الدليل $n = 3$

⑥ $U_n = \dfrac{n}{10^n}$

$$U_{n+1} = \frac{n+1}{10^{n+1}}$$

$$\frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{\dfrac{n+1}{10^{n+1}}}{\dfrac{n}{10^n}} = \frac{n+1}{10^{n+1}} \times \frac{10^n}{n} = \frac{(n+1)}{10n} < 1$$

البسط أصغر من المقام

إذا المتتالية متناقصة تماماً بدءاً من الحد ذو الدليل$n = 1$

⑦ $U_n = \begin{cases} U_0 = 2 \\ U_{n+1} = U_n - 3 \end{cases}$

$$U_{n+1} - U_n = -3 < 0$$

إذا المتتالية متناقصة تماماً

$$⑧ \quad U_n = \begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = \dfrac{1}{2}U_n \end{cases}$$

$$U_0 = 1 \;\Rightarrow U_1 = \frac{1}{2} \;\Rightarrow U_2 = \frac{1}{4} \;\Rightarrow U_3 = \frac{1}{8}$$

بما أن جميع حدود المتتالية موجبة يمكن استخدام معيار المقارنة مع العدد 1

$$\frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{1}{2} < 1$$

إذا المتتالية متناقصة تماماً

$$⑨ \quad U_n = \begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = 2U_n \end{cases}$$

$$U_0 = 1 \;\Rightarrow U_1 = 2 \;\Rightarrow U_2 = 4 \;\Rightarrow U_3 = 8$$

بما أن جميع حدود المتتالية موجبة يمكن استخدام معيار المقارنة مع العدد 1

$$\frac{U_{n+1}}{U_n} = 2 > 1$$

إذا المتتالية متزايدة تماماً

الإثبات بالتدريج (الإستقراء الرياضي)

لإثبات صحة علاقة بالتدريج (الاستقراء الرياضي)

نتبع المبدأ (نثبت ← نفرض ← نثبت) وفق الخطوات :

1. نرمّز الخاصة المطلوب إثباتها $E(n)$ (في حالة لم يفرضها بالسؤال)
2. نثبت صحة الخاصة $E(n)$ من أجل $n = n_0$
3. نفرض الخاصة $E(n)$ صحيحة من أجل كل $n \geq n_0$
4. نثبت صحة الخاصة $E(n+1)$
5. ننهي الحل بالكتابة الخاصة $E(n+1)$ صحيحة إذاً

الخاصة $E(n)$ صحيحة أياً كان العدد الطبيعي $n \geq n_0$

تمرين ① : أثبت أنه مهما كان العدد الطبيعي الموجب تماماً n كان

$$1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

الحـــــــــل

نفرض الخاصة المطلوب إثباتها

$$E(n): \quad 1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

لنثبت صحة الخاصة $E(n)$ من أجل $n = 1$

لاحظ $n_0 = 1$ (الحد الأول)

$$\left.\begin{aligned} L_1 &= 1^3 = 1 \\ L_2 &= \frac{1^2(1+1)^2}{4} = \frac{4}{4} = 1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow L_1 = L_2$$

الخاصة $E(n)$ محققة من أجل $n = 1$

لنفرض صحة الخاصة $E(n)$ من أجل $n \geq 1$ أي

$$E(n): \; 1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} \quad \text{صحيحة}$$

ولنثبت صحة الخاصة $E(n+1)$ أي لنثبت أن

$$E(n+1): 1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 + (n+1)^3 = \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}$$

$$L_1 = \underbrace{1^3 + 2^3 + \cdots + n^3}_{\frac{n^2(n+1)^2}{4}} + (n+1)^3$$

$$= \frac{n^2(n+1)^2}{4} + (n+1)^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} + \frac{4(n+1)^3}{4}$$

$$= \frac{(n+1)^2[n^2 + 4(n+1)]}{4} = \frac{(n+1)^2\overbrace{(n^2+4n+4)}^{\text{مطابقة}}}{4}$$

$$= \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4} = L_2$$

الخاصة $E(n+1)$ صحيحة والخاصة $E(n)$ صحيحة من أي عدد طبيعي يحقق $n \geq 1$

تمرين ② :

أثبت أنه مهما كان العدد الطبيعي n كان $4^n + 2$ مضاعفاً للعدد 3

الحـــــــــل

نفرض الخاصة المطلوب إثباتها $\quad 4^n + 2 = 3k \quad :E(n)$

$$\Rightarrow 4^n = 3k - 2$$

لنثبت صحة الخاصة $E(n)$ من أجل $n = 0$

$$n = 0 \quad \Rightarrow \quad 4^0 + 2 = 1 + 2 = 3$$

العدد 3 مضاعف للعدد 3

إذا الخاصة $E(n)$ صحيحة من أجل $n = 0$

لنفرض صحة الخاصة $E(n)$ أي

$$E(n) \; : \; 4^n + 2 = 3k \quad \text{صحيحة}$$

ولنثبت صحة الخاصة $E(n+1)$ أي لنثبت أن

$$E(n+1): \quad 4^{n+1} + 2 = 3k$$

$$L_1 = 4^{n+1} + 2 = 4^n.4 + 2 = (3k-2)4 + 2$$

$$= 12k - 8 + 2 = 12k - 6 = 3\overbrace{(4k-2)}^{k`} = 3k` = L_2$$

الخاصة $E(n+1)$ صحيحة والخاصة $E(n)$ صحيحة أياً كان العدد الطبيعي n إذاً العدد $4^n + 2$ مضاعفاً للعدد 3

تمرين 3 : أثبت أن $2^n \geq n^2$ أياً كان العدد الطبيعي $n \geq 4$

الحل

الخاصة المطلوب إثباتها $\quad 2^n \geq n^2 \quad : \quad E(n)$

لنثبت صحة الخاصة $E(n)$ من أجل $n = 4$:

$$\left.\begin{array}{l} L_1 = 2^4 = 16 \\ L_2 = 4^2 = 16 \end{array}\right\} \Rightarrow L_1 = L_2$$

إذا الخاصة $E(n)$ محققة من أجل $n = 4$

لنفرض صحة الخاصة $E(n)$ من أجل $n \geq 4$ أي

$$E(n) \; : \; 2^n \geq n^2 \quad \text{صحيحة}$$

ولنثبت صحة الخاصة $E(n+1)$ أي لنثبت أن

$$E(n+1) \; : \; 2^{n+1} \geq (n+1)^2$$

لدينا من الفرض

$$2^n \geq n^2$$

لنضرب طرفي المتراجحة بالعدد 2

$$\Rightarrow 2.2^n \geq 2n^2 \quad \Rightarrow \quad 2^{n+1} \geq n^2 + n^2$$

نضيف ونطرح $(2n+1)$ و في الطرف الأيمن

$$\Rightarrow 2^{n+1} \geq \underbrace{n^2 + 2n + 1}_{\text{نحلل مطابقة أولى}} + n^2 - 2n - 1$$

$$\Rightarrow 2^{n+1} \geq (n+1)^2 + \underbrace{n^2 - 2n - 1}_{\text{موجب تماماً من أجل } n\geq 4}$$

إذاً الخاصة $E(n+1)$ صحيحة والخاصة $E(n)$ صحيحة أياً كان العدد الطبيعي n

ملاحظة هامة

إذا كان $A > B + C + D$ وكان B و C و D حدود موجبة فإنه

$$A > B \quad \text{و} \quad A > C \quad \text{و} \quad A > D$$

أي إذا كان مقدار A أكبر من مجموع حدود موجبة فإن A أكبر من كل حد من هذه الحدود

على قدرِ حلمكَ تتسعُ الأرضُ

تدرب صفحة 21

1 نعرف في حالة العدد الطبيعي $n \geq 1$ المقدار

$$S_n = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2$$

1 احسب S_1, S_2, S_3, S_4 ، ثم عبر عن S_{n+1} بدلالة S_n و n ؟

2 أثبت بالتدريج أنه في حالة أية عدد طبيعي $n \geq 1$ لدينا:

$$S_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

الحل

1

$$S_1 = 1^2 = 1$$

$$S_2 = 1^2 + 2^2 = 1 + 4 = 5$$

$$S_3 = 1^2 + 2^2 + 3^2 = 1 + 4 + 9 = 14$$

$$S_4 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 = 1 + 4 + 9 + 16 = 30$$

التعبير عن S_{n+1} بدلالة S_n و n :

$$S_{n+1} = \underbrace{1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2}_{S_n} + (n+1)^2$$

$$\Rightarrow \quad S_{n+1} = S_n + (n+1)^2$$

2 الخاصة المطلوب إثباتها

$$E(n) \; : \; S_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

لنثبت صحة الخاصة $E(n)$ من أجل $n = 1$:

$$\left.\begin{array}{l} L_1 = S_1 = 1^2 = 1 \\ L_2 = \dfrac{1.(1+1)(2(1)+1)}{6} = \dfrac{2.3}{6} = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow L_1 = L_2$$

إذا الخاصة $E(n)$ محققة من أجل $n = 1$

لنفرض صحة الخاصة $E(n)$ من أجل n أي أن

$$E(n): 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \quad \text{صحيحة}$$

ولنثبت صحة الخاصة $E(n+1)$ أي لنثبت أن

$$E(n+1) \; : \; S_{n+1} = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{3}$$

$$L_1 = S_{n+1} = S_n + (n+1)^2$$

$$= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2$$

$$= \frac{n(n+1)(2n+1) + 6(n+1)^2}{6}$$

$$= \frac{(n+1)[n(2n+1)+6(n+1)]}{6}$$

$$= \frac{(n+1)(2n^2+n+6n+6)}{6}$$

$$= \frac{(n+1)\overbrace{(2n^2+7n+6)}^{\text{نحلل باستخدام المميز}}}{6}$$

$$= \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6} = L_2$$

الخاصة $E(n+1)$ صحيحة والخاصة $E(n)$ صحيحة أياً كان العدد الطبيعي $n \geq 1$

ملاحظة هامة

لتحليل ثلاثي حدود من الدرجة الثانية من الشكل ax^2+bx+c

يكتب كثير الحدود بالشكل :

$$ax^2+bx+c = a(x-x_1)(x-x_2)$$

حيث x_1 و x_2 حلول المعادلة $ax^2+bx+c=0$

كيف قمنا بتحليل ثلاثي الحدود $(2n^2+7n+6)$

$$2n^2+7n+6=0$$

$$\Delta = b^2-4ac = (7)^2-4(2)(6) = 49-48 = 1$$

$$n_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-7-1}{4} = \frac{-8}{4} = -2$$

$$n_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-7+1}{4} = \frac{-6}{4} = \frac{-3}{2}$$

$$\Longrightarrow\ 2n^2+7n+6 = 2(n+2)\left(n+\frac{3}{2}\right)$$

$$= (n+2)(2n+3)$$

2 ليكن $x \geq -1$ في حالة كل عدد طبيعي n

نرمز $E(n)$ إلى المتراجحة $(1+x)^n \geq 1+nx$

أثبت أن المتراجحة $E(n)$ محققة أياً كان العدد الطبيعي n

الحل

الخاصة المطلوب إثباتها $E(n)\ :(1+x)^n \geq 1+nx$

لنثبت صحة الخاصة $E(n)$ من أجل $n=0$:

$$\left.\begin{array}{l} L_1 = (1+x)^0 = 1 \\ L_2 = 1+(0) = 1 \end{array}\right\} \Longrightarrow L_1 = L_2$$

إذا الخاصة $E(n)$ محققة من أجل $n=0$

لنفرض صحة الخاصة $E(n)$ من أجل أي n

$E(n)\ :(1+x)^n \geq 1+nx$ صحيحة

ولنثبت صحة الخاصة $E(n+1)$ أي لنثبت أن

$$E(n+1):\quad (1+x)^{n+1} \geq 1+(n+1)x$$

لدينا من الفرض

$$(1+x)^n \geq 1+nx$$

ولدينا فرضاً $x \geq -1$ إذاً $1+x \geq 0$

لنضرب طرفي المتراجحة بالمقدار الموجب $(1+x)$

$$\Longrightarrow\ (1+x)^n.(1+x) \geq (1+nx)(1+x)$$

$$\Longrightarrow\ (1+x)^{n+1} \geq 1+\underbrace{x+nx}+nx^2$$

$$\Longrightarrow\ (1+x)^{n+1} \geq 1+(1+n)x+\underbrace{nx^2}_{\text{مقدار موجب}}$$

$$\Longrightarrow\ (1+x)^{n+1} \geq 1+(n+1)x$$

إذاً الخاصة $E(n+1)$ صحيحة والخاصة $E(n)$ صحيحة أياً كان العدد الطبيعي n

تمرينات و مسائل الوحدة الأولى صفحة (22)

1 بين أي المتتاليات $(U_n)_{n\geq 0}$ الآتية مطّردة :

① $U_n = -3n+1$

$$U_{n+1} = -3(n+1)+1 = -3n-2$$

$$U_{n+1}-U_n = -3n-2-(-3n+1) = -3 < 0$$

إذا المتتالية متناقصة تماماً

② $U_n = \dfrac{n+1}{n+2}$

$$U_{n+1} = \frac{n+2}{n+3}$$

$$U_{n+1}-U_n = \frac{n+2}{n+3}-\frac{n+1}{n+2}$$

$$= \frac{(n+2)^2-(n+1)(n+3)}{(n+3)(n+2)}$$

$$= \frac{(n^2+4n+4)-(n^2+4n+3)}{(n+3)(n+2)}$$

$$= \frac{1}{(n+3)(n+2)} > 0$$

إذا المتتالية متزايدة تماماً

③ $U_n = 2^n$

$$\frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{2^{n+1}}{2^n} = 2 > 1$$

إذا المتتالية متزايدة تماماً

④ $U_n = \left(\frac{-1}{n}\right)^n$

$U_1 = \left(\frac{-1}{1}\right)^1 = -1$	$U_2 = \left(\frac{-1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$
$U_3 = \left(\frac{-1}{3}\right)^3 = -\frac{1}{27}$	$U_4 = \left(\frac{-1}{4}\right)^4 = \frac{1}{256}$

عندما n زوجي تكون حدود المتتالية موجبة وعندما n فردي تكون حدود المتتالية سالبة

إذاً المتتالية ليست متزايدة وليست متناقصة إذاً ليست مطردة

⑤ $U_n = 1 + \frac{1}{n^2}$

$$U_{n+1} = 1 + \frac{1}{(n+1)^2}$$

$$U_{n+1} - U_n = 1 + \frac{1}{(n+1)^2} - \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)$$

$$= \frac{1}{(n+1)^2} - \frac{1}{n^2} = \frac{n^2 - (n+1)^2}{(n+1)^2 . n^2}$$

$$= \frac{n^2 - (n^2 + 2n + 1)}{(n+1)^2 . n^2} = \frac{-(2n+1)}{(n+1)^2 . n^2} < 0$$

إذا المتتالية متناقصة تماماً بدءاً من الحد ذو الدليل $n \geq 1$

⑥ $U_n = \frac{n^2}{n!}$

$$U_{n+1} = \frac{(n+1)^2}{(n+1)!}$$

$$\frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{\frac{(n+1)^2}{(n+1)!}}{\frac{n^2}{n!}} = \frac{(n+1)^2}{(n+1)!} \times \frac{n!}{n^2}$$

$$= \frac{(n+1)^2}{(n+1) \times n!} \times \frac{n!}{n^2} = \frac{n+1}{n^2} < 1$$

إذا المتتالية متناقصة تماماً بدءاً من الحد ذو الدليل $n = 2$

⑦ $U_n = 1 + \frac{1}{2} + \ldots\ldots\ldots + \frac{1}{2^n}$

$$U_{n+1} = 1 + \frac{1}{2} + \ldots\ldots\ldots + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{n+1}}$$

$$U_{n+1} - U_n = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{n+1}} - \left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{2^n}\right)$$

$$= \frac{1}{2^{n+1}} > 0$$

إذا المتتالية متزايدة تماماً

⑧ $U_n = \begin{cases} U_0 = 8 \\ U_{n+1} = \frac{3}{4}U_n + 2 \end{cases}$

$$U_1 = \frac{3}{4}U_0 + 2 = \frac{3}{4}(8) + 2 = 8$$

$$U_2 = \frac{3}{4}U_1 + 2 = \frac{3}{4}(8) + 2 = 8$$

$$U_3 = \frac{3}{4}U_2 + 2 = \frac{3}{4}(8) + 2 = 8$$

جميع حدود المتتالية لها نفس القيمة إذاً المتتالية ثابتة

⑨ $U_n = \begin{cases} U_0 = 2 \\ U_{n+1} = \frac{3}{4}U_n + 2 \end{cases}$

$$U_0 = 2$$

$$U_1 = \frac{3}{4}U_0 + 2 = \frac{3}{4}(2) + 2 = \frac{7}{2}$$

$$U_2 = \frac{3}{4}U_1 + 2 = \frac{3}{4}\left(\frac{7}{2}\right) + 2 = \frac{37}{8}$$

المتتالية متزايدة تماماً من أجل الحدود الأولى ولإثبات ذلك

لنثبت أن $U_{n+1} - U_n > 0$ بالتدريج

الخاصة المطلوب إثباتها $E(n): \quad U_{n+1} - U_n > 0$

لنثبت صحة الخاصة $E(n)$ من أجل $n = 0$

$$n = 0 \implies U_1 - U_0 = \frac{7}{2} - 2 = \frac{3}{2} > 0$$

إذا الخاصة $E(n)$ محققة من أجل $n = 0$

لنفرض صحة الخاصة $E(n)$ من أجل n أي

$E(n): \quad U_{n+1} - U_n > 0$ صحيحة

ولنثبت صحة الخاصة $E(n+1)$ أي لنثبت أن

$$E(n+1): \quad U_{n+2} - U_{n+1} > 0$$

$$L_1 = U_{n+2} - U_{n+1} = \left(\frac{3}{4}U_{n+1} + 2\right) - \left(\frac{3}{4}U_n + 2\right)$$

$$= \frac{3}{4}U_{n+1} - \frac{3}{4}U_n = \frac{3}{4}\underbrace{(U_{n+1} - U_n)}_{\text{موجب فرضاً}} > 0$$

الخاصة $E(n+1)$ صحيحة و الخاصة $E(n)$ محققة من أجل أي عدد طبيعي n والمتتالية المعطاة متزايدة تماماً

2 المتتالية $(U_n)_{n\geq 0}$ وفق :

$U_0 = 2$ و $U_{n+1} = 2U_n - 3$ في حالة أي عدد طبيعي n

① احسب $U_1 , U_2 , U_3 , U_4 , U_5$ ثم خمن عبارة U_n بدلالة n ؟

② بحساب $U_n - 3$ عند كل $n \geq 0$ ، عبر عن U_n بدلالة n ؟

الحـــــــــل

$$U_0 = 2$$

$$U_1 = 2U_0 - 3 = 2(2) - 3 = 4 - 3 = 1$$

$$U_2 = 2U_1 - 3 = 2(1) - 3 = 2 - 3 = -1$$

$$U_3 = 2U_2 - 3 = 2(-1) - 3 = -2 - 3 = -5$$

$$U_4 = 2U_3 - 3 = 2(-5) - 3 = -10 - 3 = -13$$

$$U_5 = 2U_4 - 3 = 2(-13) - 3 = -26 - 3 = -29$$

لنحسب $U_n - U_{n+1}$

$$U_0 - U_1 = 2 - 1 = 1 = 2^0$$

$$U_1 - U_2 = 1 + 1 = 2 = 2^1$$

$$U_2 - U_3 = -1 + 5 = 4 = 2^2$$

$$U_3 - U_4 = -5 + 13 = 8 = 2^3$$

$$U_4 - U_5 = -13 + 29 = 16 = 2^4$$

$$\Rightarrow \quad U_n - U_{n+1} = 2^n \quad \Rightarrow \quad U_n - (2U_n - 3) = 2^n$$

$$\Rightarrow \quad U_n - 2U_n + 3 = 2^n \quad \Rightarrow -U_n = 2^n - 3$$

$$\Rightarrow \qquad \boxed{U_n = -(2^n) + 3} \qquad ; n \geq 0$$

ولنثبت أن $U_n = -2^n + 3$ بالتدريج

نفرض الخاصة المطلوب إثباتها $U_n = -(2^n) + 3 \quad : \quad E(n)$

لنثبت صحة الخاصة $E(n)$ من أجل $n = 0$:

$$n = 0 \quad \Rightarrow \quad U_0 = -(2^0) + 3 = -1 + 3 = 2$$

إذا الخاصة $E(n)$ صحيحة من أجل $n = 0$

لنفرض صحة الخاصة $E(n)$ أي

$E(n) \; : \quad U_n = -(2^n) + 3$ صحيحة

ولنثبت صحة الخاصة $E(n+1)$ أي لنثبت أن

$$E(n+1) \quad : \quad U_{n+1} = -(2^{n+1}) + 3$$

$$L_1 = U_{n+1} = 2U_n - 3 = 2(-(2^n) + 3) - 3$$

$$= -2(2^n) + 6 - 3 = -(2^{n+1}) + 3 = L_2$$

الخاصة $E(n+1)$ صحيحة و الخاصة $E(n)$ محققة من أجل أي عدد طبيعي n

② لنفرض أن $V_n = U_n - 3$ ولنثبت أن المتتالية $(V_n)_{n\geq 0}$

$$\frac{V_{n+1}}{V_n} = \frac{U_{n+1} - 3}{U_n - 3} = \frac{-2^{n+1} + 3 - 3}{-2^n + 3 - 3}$$

$$= \frac{-2^{n+1}}{-2^n} = \frac{2^n . 2}{2^n} = 2 \quad (\text{ثابت})$$

إذاً المتتالية $(V_n)_{n\geq 0}$ هندسية وأساسها $q = 2$

$$V_0 = U_0 - 3 = 2 - 3 = -1$$

$$\Rightarrow \quad V_n = V_0 . q^n = -(2)^n$$

$$\Rightarrow \quad V_n = -(2)^n$$

$$\Rightarrow \quad U_n - 3 = -(2)^n$$

$$\Rightarrow \quad U_n = -(2)^n + 3$$

3 المتتالية $(U_n)_{n\geq 0}$ معرفة وفق

$U_0 = 3$ و $U_{n+1} = -U_n + 4$ في حالة عدد طبيعي

احسب $U_1 , U_2 , U_3 , U_4 , U_5$ ثم خمن عبارة U_n بدلالة n

الحـــــــــل

$$U_0 = 3$$

$$U_1 = -U_0 + 4 = -3 + 4 = 1$$

$$U_2 = -U_1 + 4 = -1 + 4 = 3$$

$$U_3 = -U_2 + 4 = -3 + 4 = 1$$

$$U_4 = -U_3 + 4 = -1 + 4 = 3$$

$$U_5 = -U_4 + 4 = -3 + 4 = 1$$

لنحسب $U_n - U_{n+1}$

$$U_0 - U_1 = 3 - 1 = 2$$

$$U_1 - U_2 = 1 - 3 = -2$$

$$U_2 - U_3 = 3 - 1 = 2$$

$$U_3 - U_4 = 1 - 3 = -2$$

$$U_4 - U_5 = 3 - 1 = 2$$

$$\Rightarrow \quad U_n - U_{n+1} = (-1)^n.2$$
$$\Rightarrow \quad U_n - (-U_n + 4) = (-1)^n.2$$
$$\Rightarrow \quad U_n + U_n - 4 = (-1)^n.2$$
$$\Rightarrow \quad 2U_n = (-1)^n.2 + 4$$
$$\Rightarrow \quad \boxed{U_n = (-1)^n + 2} \qquad ; n \geq 0$$

لنثبت بالتدريج أن $U_n = (-1)^n + 2$

نفرض الخاصة المطلوب إثباتها $E(n) : U_n = (-1)^n + 2$

لنثبت صحة الخاصة $E(n)$ من أجل $n = 0$:

$$n = 0 \quad \Rightarrow \quad U_0 = (-1)^0 + 2 = 1 + 2 = 3$$

إذا الخاصة $E(n)$ صحيحة من أجل $n = 0$

لنفرض صحة الخاصة $E(n)$ أي

$E(n) : U_n = (-1)^n + 2$ صحيحة

ولنثبت صحة الخاصة $E(n+1)$ أي لنثبت أن

$$E(n+1) : U_{n+1} = (-1)^{n+1} + 2$$
$$L_1 = U_{n+1} = -U_n + 4 = -((-1)^n + 2) + 4$$
$$= -(-1)^n - 2 + 4 = (-1)^{n+1} + 2 = L_2$$

الخاصة $E(n+1)$ صحيحة و الخاصة $E(n)$ محققة من أجل أي عدد طبيعي n

4 أثبت بالتدريج صحة الخاصتين الآتيتين :

① $1 + 2 \times 2! + 3 \times 3! + \cdots + n \times n! = (n+1)! - 1$

الخاصة المطلوب إثباتها

$$E(n): 1 + 2 \times 2! + 3 \times 3! + \cdots + n \times n! = (n+1)! - 1$$

لنثبت صحة الخاصة $E(n)$ من أجل $n = 1$:

$$\left.\begin{array}{l} L_1 = 1 \\ L_2 = (1+1)! - 1 = 2! - 1 = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow L_1 = L_2$$

إذا الخاصة $E(n)$ محققة من أجل $n = 1$

لنفرض صحة الخاصة $E(n)$ من أجل n أي

$E(n): 1 + 2.2! + 3.3! + \cdots + n.n! = (n+1)! - 1$ صحيحة

ولنثبت صحة الخاصة $E(n+1)$ أي لنثبت أن

$E(n+1)$:

$$1 + 2.2! + 3.3! + \cdots + n.n! + (n+1)(n+1)! = (n+2)! - 1$$
$$L_1 = \underbrace{1 + 2.2! + 3.3! + \cdots + n.n!}_{(n+1)!-1} + (n+1).(n+1)!$$
$$= \overbrace{(n+1)!} - 1 + (n+1).\overbrace{(n+1)!}$$
$$= (n+1)!\,(1 + n + 1) - 1$$
$$= (n+1)!\,(n+2) - 1 = (n+2)! - 1 = L_2$$

الخاصة $E(n+1)$ صحيحة إذاً $E(n)$ صحيحة أياً كان العدد الطبيعي $n \geq 1$

② $n! \geq 2^{n-1}$

الخاصة المطلوب إثباتها $E(n): \quad n! \geq 2^{n-1}$

لنثبت صحة الخاصة $E(n)$ من أجل $n = 0$:

$$\left.\begin{array}{l} L_1 = 0! = 1 \\ L_2 = 2^{0-1} = 2^{-1} = \frac{1}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow L_1 > L_2$$

$\boxed{0! = 1}$

إذا الخاصة $E(n)$ محققة من أجل $n = 0$

لنفرض صحة الخاصة $E(n)$ أي

$E(n): \quad n! \geq 2^{n-1}$ محققة

ولنثبت صحة الخاصة $E(n+1)$ أي لنثبت أن

$$E(n+1): \quad (n+1)! \geq 2^n$$

لدينا من الفرض $n! \geq 2^{n-1}$

نضرب طرفي المتراجحة بالمقدار الموجب $(n+1)$

$$\Rightarrow \quad (n+1)n! \geq (n+1)2^{n-1}$$

نضيف ونطرح (2^n) في الطرف الأيمن من المتراجحة

$$\Rightarrow \quad (n+1)! \geq +2^n \underbrace{-2^n + (n+1)2^{n-1}}_{\text{مقدار موجب}}$$
$$\Rightarrow \quad (n+1)! \geq +2^n$$

الخاصة $E(n+1)$ صحيحة و الخاصة $E(n)$ صحيحة أياً كان العدد الطبيعي n

5 في حالة عدد طبيعي $n \geq 1$ ليكن

$$U_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} \quad \text{و} \quad V_n = U_{2n} - U_n$$

أثبت أن المتتالية $(V_n)_{n \geq 1}$ متزايدة تماماً

$$U_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$$
$$U_{2n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{n+n}$$

$$U_{2n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n}$$

$$V_n = U_{2n} - U_n$$

$$V_n = \left[1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n}\right] - \left[1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}\right]$$

$$\Rightarrow \quad V_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n}$$

$$V_{n+1} = \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \cdots + \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2}$$

$$V_{n+1} - V_n$$

$$= \left[\frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \cdots + \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2}\right] - \left[\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n}\right]$$

$$\Rightarrow V_{n+1} - V_n = -\frac{1}{n+1} + \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2}$$

$$= \frac{-(2n+1) + (n+1)}{(n+1)(2n+1)} + \frac{1}{2n+2}$$

$$= \frac{-n}{\underbrace{(n+1)(2n+1)}_{\times 2}} + \frac{1}{\underbrace{2(n+1)}_{\times(2n+1)}}$$

$$= \frac{-2n + 2n + 1}{2(n+1)(2n+1)} = \frac{1}{2(n+1)(2n+1)} > 0$$

المتتالية $(V_n)_{n\geq 1}$ متزايدة تماماً بدءاً من الحد ذو الدليل $n = 1$

$\boxed{6}$ a و b و c ثلاثة أعداد حقيقية و $a \neq 0$ و نعلم أن a و b و c هي ثلاثة حدود متعاقبة من متتالية هندسية نرمز إلى أساسها بالرمز q ، كما أن $3a$ و $2b$ و c هي ثلاثة حدود متوالية من متتالية حسابية , احسب q

a و b و c ثلاثة حدود متوالية من متتالية هندسية أساسها q

فيها الحد الأول a إذاً $b = aq$ و $c = aq^2$

ولدينا $3a$ و $2b$ و c ثلاثة حدود متوالية من متتالية حسابية

إذاً تحقق $2b = \frac{3a+c}{2}$

$$2b = \frac{3a+c}{2} \quad \Rightarrow \quad 4b = 3a + c$$

$$\overset{\text{نعوض}}{\Longrightarrow} \quad 4(aq) = 3a + (aq^2)$$

$$\Rightarrow aq^2 - 4aq + 3a = 0$$

$$\overset{\div a}{\Rightarrow} \quad q^2 - 4q + 3 = 0 \quad \Rightarrow (q-3)(q-1) = 0$$

$$\Rightarrow \quad q = 3 \quad \text{أو} \quad q = 1$$

$\boxed{7}$ نتأمل المتتالية $(U_n)_{n\geq 0}$ المعرفة تدريجياً وفق

$$\begin{cases} U_0 = 7 \\ U_{n+1} = 10U_n - 18 \end{cases}$$ عند كل عدد طبيعي n،

عبر عن U_n بدلالة n ؟

$$U_0 = 7$$

$$U_1 = 10U_0 - 18 = 10(7) - 18 = 70 - 18 = 52$$

$$U_2 = 10U_1 - 18 = 10(52) - 18 = 520 - 18 = 502$$

$$U_3 = 10U_2 - 18 = 10(502) - 18 = 5020 - 18 = 5002$$

$$U_4 = 10U_3 - 18 = 10(5002) - 18 = 50002$$

$$U_5 = 10U_4 - 18 = 10(50002) - 18 = 500002$$

لنحسب $U_n - U_{n+1}$

$$U_0 - U_1 = 7 - 52 = -45 = -45.10^0$$

$$U_1 - U_2 = 52 - 502 = -450 = -45.10^1$$

$$U_2 - U_3 = 502 - 5002 = -4500 = -45.10^2$$

$$U_3 - U_4 = 5002 - 50002 = -45000 = -45.10^3$$

$$U_4 - U_5 = 50002 - 500002 = -450000 = -45.10^4$$

$$\Rightarrow \quad U_n - U_{n+1} = -45\,.\,10^n$$

$$\Rightarrow \quad U_n - (10U_n - 18) = -45\,.\,10^n$$

$$\Rightarrow \quad -9U_n + 18 = -45\,.\,10^n$$

$$\Rightarrow \quad -9U_n = -45\,.\,10^n - 18$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{U_n = 5\,.\,10^n + 2} \quad ; n \geq 0$$

ولنثبت أن $U_n = 5\,.\,10^n + 2$ بالتدريج

نفرض الخاصة المطلوب إثباتها $E(n) \ : \ U_n = 5\,.\,10^n + 2$

لنثبت صحة الخاصة $E(n)$ من أجل $n = 0$:

$$n = 0 \quad \Rightarrow \quad U_0 = 5.10^0 + 2 = 5(1) + 2 = 7$$

إذا الخاصة $E(n)$ صحيحة من أجل $n = 0$

لنفرض صحة الخاصة $E(n)$ أي

$E(n) \ : \ U_n = 5\,.\,10^n + 2$ صحيحة

ولنثبت صحة الخاصة $E(n+1)$ أي لنثبت أن

$$E(n)\ :\ U_{n+1} = 5\,.\,10^{n+1} + 2$$

$$L_1 = U_{n+1} = 10U_n - 18 = 10(5\,.\,10^{n} + 2) - 18$$
$$= 5\,.\,10^{n+1} + 20 - 18 = 5\,.\,10^{n+1} + 2 = L_2$$

الخاصة $E(n+1)$ صحيحة و الخاصة $E(n)$ محققة من أجل أي عدد طبيعي n

$\boxed{8}$ نتأمل المتتالية $(U_n)_{n\geq 0}$ المعرفة تدريجياً وفق

$$\begin{cases} U_0 = s \\ U_{n+1} = \dfrac{1}{2}U_n + n^2 + n \end{cases}$$

① عين كثير حدود من الدرجة الثانية P بحيث تحقق المتتالية $(T_n)_{n\geq 0}$ التي حدها العام $T_n = P(n)$ العلاقة التدريجية نفسها $T_{n+1} = \frac{1}{2}T_n + n^2 + n$ أياً كانت n ؟

② أثبت أن المتتالية $(V_n)_{n\geq 0}$ التي حدها العام $V_n = U_n - T_n$ هي متتالية هندسية

③ أكتب عبارة V_n ثم U_n بدلالة n و s ؟

الحـــــــل

① لنفرض كثير الحدود هو $P(n) = an^2 + bn + c$

لدينا فرضاً $T_n = P(n)$

$$\Rightarrow T_{n+1} = P(n+1)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}T_n + n^2 + n = a(n+1)^2 + b(n+1) + c$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}(an^2 + bn + c) + n^2 + n = a(n^2 + 2n + 1) + bn + b + c$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}an^2 + \frac{1}{2}bn + \frac{1}{2}c + n^2 + n = an^2 + 2an + a + bn + b + c$$

$$\Rightarrow \overbrace{n^2 - an^2 + \frac{1}{2}an^2}^{n^2}\ \overbrace{-2an + \frac{1}{2}bn - bn + n}^{n} - a - b + \frac{1}{2}c - c = 0$$

$$\Rightarrow \left(1 - a + \frac{1}{2}a\right)n^2 + \left(-2a + \frac{1}{2}b - b + 1\right)n - a - b - \frac{1}{2}c = 0$$

$$\Rightarrow \left(1 - \frac{1}{2}a\right)n^2 + \left(-2a - \frac{1}{2}b + 1\right)n - a - b - \frac{1}{2}c = 0n^2 + 0n + 0$$

بالمطابقة نجد أن :

$$1 - \frac{1}{2}a = 0 \quad \Rightarrow \boxed{a = 2}$$

$$-2a - \frac{1}{2}b + 1 = 0 \quad \Rightarrow -2(2) - \frac{1}{2}b + 1 = 0 \quad \Rightarrow \boxed{b = -6}$$

$$-\frac{1}{2}c - a - b = 0 \quad \Rightarrow -\frac{1}{2}c - 2 + 6 = 0 \quad \Rightarrow \boxed{c = 8}$$

ومنه كثير الحدود المطلوب

$$\boxed{P(n) = 2n^2 - 6n + 8}$$

② لإثبات أن المتتالية $(V_n)_{n\geq 0}$ هندسية، يجب أن يتحقق

$$\frac{V_{n+1}}{V_n} = (\text{ثابت})$$

لدينا $V_n = U_n - T_n$

$$\Rightarrow V_{n+1} = U_{n+1} - T_{n+1}$$

$$\Rightarrow V_{n+1} = \left(\frac{1}{2}U_n + n^2 + n\right) - \left(\frac{1}{2}T_n + n^2 + n\right)$$

$$\Rightarrow V_{n+1} = \frac{1}{2}U_n - \frac{1}{2}T_n = \frac{1}{2}(U_n - T_n) = \frac{1}{2}V_n$$

$$\Rightarrow V_{n+1} = \frac{1}{2}V_n \quad \Rightarrow \frac{V_{n+1}}{V_n} = \frac{1}{2} = q$$

إذاً المتتالية $(V_n)_{n\geq 0}$ هندسية و أساسها $q = \frac{1}{2}$

③ وجدنا أن الأساس $q = \frac{1}{2}$ ولدينا $U_0 = s$

و $V_n = U_n - T_n$ أي $V_0 = U_0 - T_0$

$$T_0 = P(0) = 0 - 0 + 8 = 8 \quad \Rightarrow V_0 = s - 8$$

عبارة الحد العام للمتتالية الهندسية $V_n = V_0 . q^n$

$$V_n = V_0 . q^n \quad \Rightarrow \boxed{V_n = (s-8).\left(\frac{1}{2}\right)^n}$$

$$U_n = V_n + T_n = V_n + P(n)$$

$$\Rightarrow \boxed{U_n = (s-8).\left(\frac{1}{2}\right)^n + 2n^2 - 6n + 8}$$

9 لنتأمل العددين a و b ولنفرض أن $a \neq 1$ ، نتأمل المتتالية $(V_n)_{n\geq0}$ التي تحقق $V_{n+1} = aV_n + b$ أيا كان العدد الطبيعي n

① عين تابعاً f يحقق $V_{n+1} = f(V_n)$ أيا كانت $n \geq 0$

② احسب L حل المعادلة $f(x) = x$

③ نعرف المتتالية $(U_n)_{n\geq0}$ حيث $U_n = V_n - L$ أثبت أن $(U_n)_{n\geq0}$ متتالية هندسية ، ثم استنتج U_n بدلالة V_0 و n و a و b ، ثم استنتج V_n بدلالة هذه المُعاملات

الحـــــــــل

① نفرض $x = V_n$ عندها $V_{n+1} = f(x)$ إذاً :

$$V_{n+1} = aV_n + b \implies \boxed{f(x) = ax + b}$$

②
$$f(x) = x \implies ax + b = x$$
$$\implies ax - x = -b \implies x(a-1) = -b$$
$$\implies x = \frac{-b}{a-1} \implies \boxed{L = \frac{-b}{a-1}}$$

③
$$U_n = V_n - L$$
$$\implies U_{n+1} = V_{n+1} - L = aV_n + b - L$$
$$= a(U_n + L) + b - L = aU_n + aL + b - L$$
$$= aU_n + b + (a-1)L = aU_n + b + (a-1)\left(\frac{-b}{a-1}\right)$$
$$= aU_n + b - b = aU_n$$
$$\implies U_{n+1} = aU_n \implies \frac{U_{n+1}}{U_n} = a(\text{ثابت})$$

المتتالية هندسية $(U_n)_{n\geq0}$ وأساسها $q = a$

استنتاج U_n :

$$U_n = V_n - L$$
$$\implies U_0 = V_0 - L = V_0 - \left(\frac{-b}{a-1}\right) = V_0 + \frac{b}{a-1}$$
$$\implies U_n = U_0 \cdot q^n \implies \boxed{U_n = \left(V_0 + \frac{b}{a-1}\right)a^n}$$

استنتاج V_n :

$$U_n = V_n - L \implies V_n = U_n + L$$
$$= \left(V_0 + \frac{b}{a-1}\right)a^n + \left(\frac{-b}{a-1}\right)$$
$$\implies \boxed{V_n = \left(V_0 + \frac{b}{a-1}\right)a^n - \frac{b}{a-1}}$$

10 نتأمل المتتالية $(U_n)_{n\geq0}$ المعرفة بالتدريج وفق

$$\begin{cases} U_0 = 1 \ , \ U_1 = 4 \\ U_{n+1} = 5U_n - 6U_{n-1} \qquad (n \geq 0) \end{cases}$$

① عين عددين حقيقيين a و b يحققان $a + b = 5$ و $ab = 6$ ؟

② لتكن $(V_n)_{n\geq0}$ متتالية المعرفة بالعلاقة $V_n = U_{n+1} - aU_n$ أثبت أن $(V_n)_{n\geq0}$ متتالية هندسية أساسها b ؟

③ لتكن $(W_n)_{n\geq0}$ المتتالية $W_n = U_{n+1} - bU_n$ ، أثبت أن $(W_n)_{n\geq0}$ متتالية هندسية أساسها a ؟

④ عبر عن V_n و W_n بدلالة n ، ثم عبر عن U_n بدلالة n ؟

الحـــــــــل

①
$$ab = 6 \implies b = \frac{6}{a}$$
$$a + b = 5 \implies a + \frac{6}{a} = 5$$
$$\implies \frac{a^2+6}{a} = 5 \implies a^2 - 5a + 6 = 0$$
$$\implies (a-3)(a-2) = 0$$

$a = 3 \implies b = 2$ أو $a = 2 \implies b = 3$

②
$$V_n = U_{n+1} - aU_n = U_{n+1} - 2U_n$$
$$\implies V_{n+1} = U_{n+2} - 2U_{n+1} = 5U_{n+1} - 6U_n - 2U_{n+1}$$
$$= 3U_{n+1} - 6U_n = 3(U_{n+1} - 2U_n) = 3V_n$$
$$\implies V_{n+1} = 3V_n \implies \frac{V_{n+1}}{V_n} = 3 = b$$

المتتالية $(V_n)_{n\geq0}$ هندسية وأساسها $b = 3$

③
$$W_n = U_{n+1} - bU_n = U_{n+1} - 3U_n$$
$$\implies W_{n+1} = U_{n+2} - 3U_{n+1} = 5U_{n+1} - 6U_n - 3U_{n+1}$$
$$= 2U_{n+1} - 6U_n = 2(U_{n+1} - 3U_n) = 2W_n$$
$$\implies W_{n+1} = 2W_n \implies \frac{W_{n+1}}{W_n} = 2 = a$$

المتتالية $(W_n)_{n\geq0}$ هندسية وأساسها $a = 2$

④
$$V_n = U_{n+1} - 2U_n \implies V_0 = U_1 - 2U_0 = 4 - 2 = 2$$
$$V_n = V_0 \cdot q^n \implies V_n = 2 \cdot 3^n$$

Telegram : Basselhayek600
أ. باسل حايك 0935262337

$$W_n = U_{n+1} - 3U_n \Rightarrow W_0 = U_1 - 3U_0 = 4 - 3 = 1$$

$$W_n = W_0 \,.\, q^n \Rightarrow W_n = 2^n$$

$$\left.\begin{array}{l} V_n = U_{n+1} - 2U_n \\ W_n = U_{n+1} - 3U_n \end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow \begin{array}{ll} 2\,.3^n = U_{n+1} - 2U_n & \ldots (1) \\ 2^n = U_{n+1} - 3U_n & \ldots (2) \end{array}$$

بطرح (2) من (1) ينتج لدينا :

$$2\,.3^n - 2^n = U_n$$

$$\Rightarrow \boxed{U_n = 2\,.3^n - 2^n}$$

$\boxed{11}$ أولاً: أثبت أياً كان العدد الطبيعي $n \geq 2$ ، أن

$$3n^2 \geq (n+1)^2$$

ثانياً : نرمز $E(n)$ إلى القضية $3^n \geq 2^n + 5n^2$

(1) ما أصغر عدد طبيعي غير معدوم، تكون $E(n)$ عنده صحيحة ؟

(2) أثبت أن $E(n)$ صحيحة أيا كان العدد الطبيعي n ، الذي يحقق الشرط $n \geq 5$

الحـــــــل

أولاً : الخاصة المطلوب إثباتها

$$E(n) : \quad 3n^2 \geq (n+1)^2$$

لنثبت صحة الخاصة $E(n)$ من أجل $n = 2$:

$$\left.\begin{array}{l} L_1 = 3 \times 4 = 12 \\ L_2 = (2+1)^2 = 9 \end{array}\right\} \Rightarrow L_1 > L_2$$

إذا الخاصة $E(n)$ محققة من أجل $n = 1$

لنفرض صحة الخاصة $E(n)$ من أجل $n \geq 2$ أي

$$E(n) : \quad 3n^2 \geq (n+1)^2 \quad \text{صحيحة}$$

ولنثبت صحة الخاصة $E(n+1)$ أي لنثبت أن

$$E(n+1) : \quad 3(n+1)^2 \geq (n+2)^2$$

$$L_1 = 3(n+1)^2 = (n+2)^2 - (n+2)^2 + 3(n+1)^2$$

$$= (n+2)^2 - (n^2 + 4n + 4) + 3(n^2 + 2n + 1)$$

$$= (n+2)^2 - n^2 - 4n - 4 + 3n^2 + 6n + 3$$

$$= (n+2)^2 \underbrace{+2n^2 + 2n - 1}_{\text{موجب تماماً من أجل } n \geq 2} \geq (n+2)^2$$

$$\Rightarrow \quad 3(n+1)^2 \geq (n+2)^2$$

الخاصة $E(n+1)$ صحيحة إذاً $E(n)$ صحيحة أياً كان العدد الطبيعي $n \geq 2$

ثانياً : (1)

$$n = 1 \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} L_1 = 3^1 = 3 \\ L_2 = 2^1 + 5(1)^2 = 7 \end{array}\right| \Rightarrow L_1 \ngeq L_2$$

$$n = 2 \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} L_1 = 3^2 = 9 \\ L_2 = 2^2 + 5(2)^2 = 24 \end{array}\right| \Rightarrow L_1 \ngeq L_2$$

$$n = 3 \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} L_1 = 3^3 = 27 \\ L_2 = 2^3 + 5(3)^2 = 53 \end{array}\right| \Rightarrow L_1 \ngeq L_2$$

$$n = 4 \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} L_1 = 3^4 = 81 \\ L_2 = 2^4 + 5(4)^2 = 96 \end{array}\right| \Rightarrow L_1 \ngeq L_2$$

$$n = 5 \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} L_1 = 3^5 = 243 \\ L_2 = 2^5 + 5(5)^2 = 157 \end{array}\right| \Rightarrow L_1 > L_2$$

إذاً الخاصة $E(n)$ غير صحيحة عندما $n = \{1,2,3,4\}$

والعدد 5 هو أصغر عدد طبيعي غير الصفر تكون $E(n)$ صحيحة عنده

(2) الخاصة المطلوب إثباتها

$$E(n) : \quad 3^n \geq 2^n + 5n^2$$

لنثبت صحة الخاصة $E(n)$ من أجل $n = 5$:

$$n = 5 \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} L_1 = 3^5 = 243 \\ L_2 = 2^5 + 5(5)^2 = 157 \end{array}\right| \Rightarrow L_1 > L_2$$

إذاً الخاصة $E(n)$ صحيحة من أجل $n = 5$

لنفرض صحة الخاصة $E(n)$ من أجل $n \geq 5$ أي

$$E(n) : \quad 3^n \geq 2^n + 5n^2 \quad \text{صحيحة}$$

ولنثبت صحة الخاصة $E(n+1)$ أي لنثبت أن

$$E(n) : \quad 3^{n+1} \geq 2^{n+1} + 5(n+1)^2$$

لدينا فرضاً $3^n \geq 2^n + 5n^2$

نضرب طرفي المتراجحة بالعدد 3

$$\Rightarrow \quad 3.3^n \geq 3(2^n + 5n^2)$$

$$\Rightarrow \quad 3^{n+1} \geq 3.2^n + 15n^2$$

نضيف ونطرح المقدار $[\,2^{n+1} + 5(n+1)^2\,]$ من الطرف الأيمن من المتراجحة

$$\Rightarrow 3^{n+1} \geq 2^{n+1} + 5(n+1)^2 - 2^{n+1} - 5(n+1)^2 + 3.2^n + 15n^2$$

$$\Rightarrow 3^{n+1} \geq 2^{n+1} + 5(n+1)^2 - 2.2^n - 5n^2 - 10n - 5 + 3.2^n + 15n^2$$

$$\Rightarrow 3^{n+1} \geq 2^{n+1} + 5(n+1)^2 \underbrace{+2^n + 10n^2 - 10n - 5}_{\text{موجب تماماً من أجل } n\geq 5}$$

$$\Rightarrow 3^{n+1} \geq 2^{n+1} + 5(n+1)^2$$

الخاصة $E(n+1)$ صحيحة إذاً $E(n)$ صحيحة أياً كان العدد الطبيعي $n \geq 5$

12 نرمز بالرمز $E(n)$ إلى القضية $3^n \geq (n+2)^2$

① أتكون القضايا $E(0), E(1), E(3), E(4)$ صحيحة ؟

② أثبت بالتدريج أن القضية $E(n)$ صحيحة عند كل عدد حقيقي n يحقق $n \geq 3$

الحـــــــــل

①

$$n = 0 \Rightarrow \begin{cases} L_1 = 3^0 = 1 \\ L_2 = (0+2)^2 = 4 \end{cases} \Rightarrow L_1 \ngeq L_2$$

الخاصة $E(0)$ غير صحيحة

$$n = 1 \Rightarrow \begin{cases} L_1 = 3^1 = 3 \\ L_2 = (1+2)^2 = 9 \end{cases} \Rightarrow L_1 \ngeq L_2$$

الخاصة $E(1)$ غير صحيحة

$$n = 2 \Rightarrow \begin{cases} L_1 = 3^2 = 9 \\ L_2 = (2+2)^2 = 16 \end{cases} \Rightarrow L_1 \ngeq L_2$$

الخاصة $E(2)$ غير صحيحة

$$n = 3 \Rightarrow \begin{cases} L_1 = 3^3 = 27 \\ L_2 = (3+2)^2 = 25 \end{cases} \Rightarrow L_1 > L_2$$

الخاصة $E(3)$ صحيحة

$$n = 4 \Rightarrow \begin{cases} L_1 = 3^4 = 81 \\ L_2 = (4+2)^2 = 36 \end{cases} \Rightarrow L_1 > L_2$$

الخاصة $E(4)$ صحيحة

② الخاصة المطلوب إثباتها

$$E(n) : \quad 3^n \geq (n+2)^2$$

لنثبت صحة الخاصة $E(n)$ من أجل $n = 3$:

$$n = 3 \Rightarrow \begin{cases} L_1 = 3^3 = 27 \\ L_2 = (3+2)^2 = 25 \end{cases} \Rightarrow L_1 > L_2$$

إذاً الخاصة $E(n)$ صحيحة من أجل $n = 3$

لنفرض صحة الخاصة $E(n)$ من أجل n أي

$E(n) : \quad 3^n \geq (n+2)^2$ صحيحة

ولنثبت صحة الخاصة $E(n+1)$ أي لنثبت أن

$$E(n) : \quad 3^{n+1} \geq (n+3)^2$$

لدينا فرضاً $3^n \geq (n+2)^2$

نضر طرفي المتراجحة بالعدد 3

$$\Rightarrow \quad 3.3^n \geq 3(n+2)^2$$

$$\Rightarrow \quad 3^{n+1} \geq 3(n+2)^2$$

نضيف ونطرح المقدار $(n+3)^2$ بالطرف الأيمن من المتراجحة

$$\Rightarrow 3^{n+1} \geq (n+3)^2 - (n+3)^2 + 3(n+2)^2$$

$$\Rightarrow 3^{n+1} \geq (n+3)^2 - n^2 - 6n - 9 + 3n^2 + 12n + 12$$

$$\Rightarrow 3^{n+1} \geq (n+3)^2 \underbrace{+2n^2 + 6n + 3}_{\text{موجب تماماً من أجل } n\geq 3}$$

$$\Rightarrow 3^{n+1} \geq (n+3)^2$$

الخاصة $E(n+1)$ صحيحة إذاً $E(n)$ صحيحة أياً كان العدد الطبيعي $n \geq 3$

13 أثبت بالتدريج صحة كل من القضايا الآتية أياً كان العدد الطبيعي n :

① $4^n + 5$ مضاعف للعدد 3

نفرض الخاصة المطلوب إثباتها $E(n): \quad 4^n + 5 = 3k$

$$\Rightarrow 4^n = 3k - 5$$

لنثبت صحة الخاصة $E(n)$ من أجل $n = 0$:

$$n = 0 \quad \Rightarrow \quad 4^0 + 5 = 1 + 5 = 6$$

العدد 6 مضاعف للعدد 3

إذا الخاصة $E(n)$ صحيحة من أجل $n = 0$

لنفرض صحة الخاصة $E(n)$ أي

$E(n): \quad 4^n + 5 = 3k$ صحيحة

ولنثبت صحة الخاصة $E(n+1)$ أي لنثبت أن

$$E(n+1): \quad 4^{n+1} + 5 = 3k$$

$$L_1 = 4^{n+1} + 5 = 4^n.4 + 5 = (3k-5)4 + 5$$

$$= 12k - 20 + 5 = 12k - 15$$

$$= 3\,\underbrace{(4k-5)}_{k'} = 3k` = L_2$$

الخاصة $E(n+1)$ صحيحة والخاصة $E(n)$ صحيحة أياً كان العدد

الطبيعي n إذاً $4^n + 5$ مضاعف للعدد 3

② $2^{3n} - 1$ مضاعف للعدد 7

نفرض الخاصة المطلوب إثباتها $E(n):\quad 2^{3n} - 1 = 7k$

$$\Longrightarrow\ 2^{3n} = 7k + 1$$

لنثبت صحة الخاصة $E(n)$ من أجل $n = 0$:

$$n = 0 \ \Longrightarrow\ 2^0 - 1 = 1 - 1 = 0$$

العدد 0 مضاعف للعدد 7

إذا الخاصة $E(n)$ صحيحة من أجل $n = 0$

لنفرض صحة الخاصة $E(n)$ أي

$E(n):\quad 2^{3n} - 1 = 7k$ صحيحة

ولنثبت صحة الخاصة $E(n+1)$ أي لنثبت أن

$$E(n+1):\quad 2^{3n+3} - 1 = 7k$$

$$L_1 = 2^{3n+3} - 1 = 2^{3n}.2^3 - 1 = (7k+1).8 - 1$$

$$= 56k + 8 - 1 = 56k + 7$$

$$= 7\,\underbrace{(8k+1)}_{k'} = 7k' = L_2$$

الخاصة $E(n+1)$ صحيحة والخاصة $E(n)$ صحيحة أياً كان العدد

الطبيعي n إذاً $2^{3n} - 1$ مضاعف للعدد 7

③ $n^3 + 2n$ مضاعف للعدد 3

نفرض الخاصة المطلوب إثباتها $E(n):\ n^3 + 2n = 3k$

$$\Longrightarrow\ n^3 = 3k - 2n$$

لنثبت صحة الخاصة $E(n)$ من أجل $n = 0$:

$$n = 0 \ \Longrightarrow\ 0^3 + 2(0) = 0$$

العدد 0 مضاعف للعدد 3

إذا الخاصة $E(n)$ صحيحة من أجل $n = 0$

لنفرض صحة الخاصة $E(n)$ أي

$E(n):\quad n^3 + 2n = 3k$ صحيحة

ولنثبت صحة الخاصة $E(n+1)$ أي لنثبت أن

$$E(n+1):\quad (n+1)^3 + 2n + 2 = 3k$$

$$L_1 = (n+1)^3 + 2n + 2$$

$$= n^3 + 3n^2 + 3n + 1 + 2n + 2$$

$$= n^3 + 3n^2 + 5n + 3 = 3k - 2n + 3n^2 + 5n + 3$$

$$= 3k + 3n^2 + 3n + 3 = 3\,\underbrace{(k + n^3 + n + 1)}_{k'}$$

$$= 3k' = L_2$$

الخاصة $E(n+1)$ صحيحة والخاصة $E(n)$ صحيحة أياً كان العدد

الطبيعي n إذاً $n^3 + 2n$ مضاعف للعدد 3

④ $3^{2n+1} + 2^{n+2}$ مضاعف للعدد 7

نفرض الخاصة المطلوب إثباتها

$$E(n):\quad 3^{2n+1} + 2^{n+2} = 7k$$

$$\Longrightarrow\ 3^{2n+1} = 7k - 2^{n+2}$$

لنثبت صحة الخاصة $E(n)$ من أجل $n = 0$:

$$n = 0 \ \Longrightarrow\ 3^{2(0)+1} + 2^{0+2} = 3 + 2^2 = 3 + 4 = 7$$

العدد 7 مضاعف للعدد 7

إذا الخاصة $E(n)$ صحيحة من أجل $n = 0$

لنفرض صحة الخاصة $E(n)$ أي

$E(n):\quad 3^{2n+1} + 2^{n+2} = 7k$ صحيحة

ولنثبت صحة الخاصة $E(n+1)$ أي لنثبت أن

$$E(n+1):\quad 3^{2n+2} + 2^{n+3} = 7k$$

$$L_1 = 3^{2n+2} + 2^{n+3} = 3^{2n}.3^2 + 2^n.2^3$$

$$= (7k - 2^{n+2})9 + 2^n.8$$

$$= 63k - 9.2^{n+2} + 8.2^n$$

$$= 63k - 9.2^n.2^2 + 8.2^n$$

$$= 63k - 36.2^n + 8.2^n$$

$$= 63k - 28.2^n = 7\,\underbrace{(9k - 4.2^n)}_{k'} = 7k' = L_2$$

الخاصة $E(n+1)$ صحيحة والخاصة $E(n)$ صحيحة أياً كان العدد

الطبيعي n إذاً $3^{2n+1} + 2^{n+2}$ مضاعف للعدد 7

14 نرمز إلى القضية ((يقسم العدد 9 العدد $10^n + 1$))

بالرمز $E(n)$ في حالة $n \in N$:

① أثبت إنه إذا كانت $E(n)$ صحيحة عند قيمة العدد n عندئذ كانت $E(n+1)$ صحيحة

② أتكون القضية $E(n)$ صحيحة على N ؟ علل إجابتك ؟

الحـــل

① $E(n) : 10^n + 1 = 9k \quad \Rightarrow \quad 10^n = 9k - 1$

لنفرض صحة الخاصة $E(n)$ أي

$E(n): \quad 10^n + 1 = 9k$ صحيحة

ولثبت صحة الخاصة $E(n+1)$ أي لنثبت أن

$E(n+1) : \quad 10^{n+1} + 1 = 9k$

$L_1 = 10^{n+1} + 1 = 10^n.10 + 1$

$= (9k-1)10 + 1 = 90k - 10 + 1$

$= 90k - 9 = 9\underbrace{(10k-1)}_{k'} = 9k' = L_2$

الخاصة $E(n+1)$ صحيحة

② لنتحقق من صحة $E(n)$ من أجل $n = 0$

$n = 0 \quad \Rightarrow 10^0 + 1 = 1 + 1 = 2$

العدد 2 لا يقسم العدد 9 ومنه الخاصة $E(0)$ غير صحيحة

ومنه القضية $E(n)$ غير صحيحة على N

15 $(U_n)_{n\geq 0}$ متتالية معرفة وفق

$$\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = \sqrt{2+U_n} \end{cases}$$ عند كل $n \geq 0$

① أثبت أن $0 \leq U_n \leq 2$ أياً كان العدد الطبيعي n

② أثبت أن $(U_n)_{n\geq 0}$ متزايدة تماماً

الحـــل

① نفرض الخاصة المطلوب إثباتها

$E(n): \quad 0 \leq U_n \leq 2$

لنثبت صحة الخاصة $E(n)$ من أجل $n = 0$:

$n = 0 \quad \Rightarrow \quad 0 \leq U_0 = 1 \leq 2$

إذا الخاصة $E(n)$ صحيحة من أجل $n = 0$

لنفرض صحة الخاصة $E(n)$ أي

$E(n): \quad 0 \leq U_n \leq 2$ صحيحة

ولثبت صحة الخاصة $E(n+1)$ أي لنثبت أن

$E(n+1) : \quad 0 \leq U_{n+1} \leq 2$

لدينا فرضاً $0 \leq U_n \leq 2$

نضيف لطرفي المتراجحة العدد (2)

$2 + 0 \leq 2 + U_n \leq 2 + 2 \quad \Rightarrow \quad 2 \leq 2 + U_n \leq 4$

بجذر طرفي المتراجحة

$\Rightarrow \quad 0 < \sqrt{2} \leq \sqrt{2+U_n} \leq 2$

$\Rightarrow \quad 0 < \sqrt{2+U_n} \leq 2$

الخاصة $E(n+1)$ صحيحة والخاصة $E(n)$ صحيحة أياً كان العدد الطبيعي n

② $U_{n+1} - U_n = \sqrt{2+U_n} - U_n$

$$= \frac{\left(\sqrt{2+U_n} - U_n\right)\left(\sqrt{2+U_n} + U_n\right)}{\sqrt{2+U_n} + U_n}$$

$$= \frac{2 + U_n - U_n^2}{\sqrt{2+U_n} + U_n} = \frac{-(U_n^2 - U_n - 2)}{\sqrt{2+U_n} + U_n}$$

$$= \frac{-\overbrace{(U_n - 2)}^{\text{سالب}}\ \overbrace{(U_n + 1)}^{\text{موجب}}}{\underbrace{\sqrt{2+U_n} + U_n}_{\text{موجب}}} > 0$$

إذاً المتتالية $(U_n)_{n\geq 0}$ متزايدة تماماً

16 $(U_n)_{n\geq 0}$ متتالية معرفة وفق

$$\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = \frac{3U_n+2}{2U_n+6} \end{cases}$$ عند كل $n \geq 0$

① أثبت أن $x \longmapsto \frac{3x+2}{2x+6}$ متزايد تماماً

واستنتج $\frac{1}{2} \leq U_n \leq 1$ أياً كان العدد n

② أثبت أن $(U_n)_{n\geq 0}$ متناقصة تماماً

الحـــل

① التابع $f(x) = \frac{3x+2}{2x+6}$ معرف على المجال $R\setminus\{-3\}$

واشتقاقي عليه ومشتقه :

$$f'(x) = \frac{(3)(2x+6) - (2)(3x+2)}{(2x+6)^2}$$

$$= \frac{6x+18-6x-4}{(2x+6)^2} = \frac{14}{(2x+6)^2} > 0$$

إذاً التابع f متزايد تماماً على المجال $R\backslash\{-3\}$

استنتاج أن $\frac{1}{2} \le U_n \le 1$ أياً كان العدد n

نفرض الخاصة المطلوب إثباتها

$$E(n): \quad \frac{1}{2} \le U_n \le 1$$

لنثبت صحة الخاصة $E(n)$ من أجل $n = 0$:

$$n = 0 \implies \frac{1}{2} \le U_0 = 1 \le 1$$

إذا الخاصة $E(n)$ صحيحة من أجل $n = 0$

لنفرض صحة الخاصة $E(n)$ أي

$E(n): \quad \frac{1}{2} \le U_n \le 1$ صحيحة

ولنثبت صحة الخاصة $E(n+1)$ أي لنثبت أن

$$E(n): \quad \frac{1}{2} \le U_{n+1} \le 1$$

والمتتالية $(U_n)_{n\ge0}$ من الشكل $U_{n+1} = f(U_n)$

والتابع f متزايد تماماًعلى المجال $R\backslash\{-3\}$ إذاً f متزايد تماماً على المجال $\left[\frac{1}{2}, 2\right]$ ولدينا فرضاً $\frac{1}{2} \le U_n \le 1$

$$\implies f\left(\frac{1}{2}\right) \le f(U_n) \le f(1)$$

$$\implies \frac{3\left(\frac{1}{2}\right)+2}{2\left(\frac{1}{2}\right)+6} \le \frac{3(U_n)+2}{2(U_n)+6} \le \frac{3(1)+2}{2(1)+6}$$

$$\implies \frac{\frac{3}{2}+2}{1+6} \le U_{n+1} \le \frac{5}{8}$$

$$\implies \frac{\frac{7}{4}}{7} \le U_{n+1} \le \frac{5}{8}$$

$$\implies \frac{1}{2} < \frac{1}{4} \le U_{n+1} \le \frac{5}{8} < 1$$

$$\implies \frac{1}{2} < U_{n+1} < 1$$

الخاصة $E(n+1)$ صحيحة و الخاصة $E(n)$ صحيحة أياً كان العدد الطبيعي n

② $$U_{n+1} - U_n = \frac{3U_n+2}{2U_n+6} - U_n$$

$$= \frac{3U_2+2}{2U_n+6} - \frac{U_n(2U_n+6)}{2U_n+6}$$

$$= \frac{3U_n+2-2U_n^2-6U_n}{2U_n+6}$$

$$= \frac{-2U_n^2-3U_n+2}{2U_n+6} =$$

لنحلل كثير الحدود $(-2U_n^2-3U_n+2)$ باستخدام طريقة المميّز

$$\Delta = b^2-4ac = 9-4(-2)(2) = 9+16 = 25$$

$$U_n = \frac{3-5}{-4} = \frac{-2}{-4} = \frac{1}{2}$$

$$U_n = \frac{3+5}{-4} = \frac{8}{-4} = -2$$

$$-2U_n^2-3U_n+2 = -2\left(U_n-\frac{1}{2}\right)(U_n+2)$$

$$= \frac{-2U_n^2-3U_n+2}{2U_n+6} = \frac{-2\overbrace{\left(U_n-\frac{1}{2}\right)}^{\text{موجب}}\overbrace{(U_n+2)}^{\text{موجب}}}{\underbrace{2U_n+6}_{\text{موجب}}} < 0$$

إذاً المتتالية $(U_n)_{n\ge0}$ متناقصة تماماً

كيف حددنا الإشارات ؟؟ لأنه فرضاً $\frac{1}{2} \le U_n \le 1$ أياً كان العدد n

17 ليكن α عدد حقيقي من المجال $]0, \frac{\pi}{2}[$, ثم نعرف المتتالية $(U_n)_{n\ge0}$ وفق

$$\begin{cases} U_0 = 2\cos\theta \\ U_{n+1} = \sqrt{2+U_n} \end{cases}$$ في حالة $n \in N$

① احسب U_1 و U_2

② أثبت بالتدريج أن $U_n = 2\cos\left(\frac{\theta}{2^n}\right)$

الحـــــــل

تذكرة راجع ورقة القوانين المثلثية

$$2\cos^2 x = 1+\cos 2x \implies 2\cos^2\frac{x}{2} = 1+\cos x$$

① $$U_1 = \sqrt{2+U_0} = \sqrt{2+2\cos\theta} = \sqrt{2(1+\cos\theta)}$$

$$= \sqrt{2\left(2\cos^2\frac{\theta}{2}\right)} = \sqrt{4\cos^2\frac{\theta}{2}} = 2\cos\frac{\theta}{2} \;;\; \theta \in]0, \frac{\pi}{2}[$$

$$U_2=\sqrt{2+U_1}=\sqrt{2+2\cos\frac{\theta}{2}}=\sqrt{2\left(1+\cos\frac{\theta}{2}\right)}$$

$$=\sqrt{2\left(2\cos^2\frac{\theta}{4}\right)}=\sqrt{4\cos^2\frac{\theta}{4}}=2\cos\frac{\theta}{4}\ ;\ \theta\in]0,\frac{\pi}{2}[$$

② نفرض الخاصة المطلوب إثباتها

$$E(n):\quad U_n=2\cos\left(\frac{\theta}{2^n}\right)$$

لنثبت صحة الخاصة $E(n)$ من أجل $n=0$:

$$n=0 \Rightarrow L_1=U_0=2\cos\theta=2\cos\frac{\theta}{2^0}=L_2$$

إذا الخاصة $E(n)$ صحيحة من أجل $n=0$

لنفرض صحة الخاصة $E(n)$ أي

$E(n):\quad U_n=2\cos\left(\frac{\theta}{2^n}\right)$ صحيحة

ولنثبت صحة الخاصة $E(n+1)$ أي لنثبت أن

$$E(n+1):\quad U_{n+1}=2\cos\left(\frac{\theta}{2^{n+1}}\right)$$

$$L_1=U_{n+1}=\sqrt{2+U_n}=\sqrt{2+2\cos\left(\frac{\theta}{2^n}\right)}$$

$$=\sqrt{2\left(1+\cos\left(\frac{\theta}{2^n}\right)\right)}=\sqrt{2\left(2\cos^2\left(\frac{\frac{\theta}{2^n}}{2}\right)\right)}$$

$$=\sqrt{4\cos^2\left(\frac{\theta}{2^{n+1}}\right)}=2\cos\left(\frac{\theta}{2^{n+1}}\right)=L_2$$

الخاصة $E(n+1)$ صحيحة و الخاصة $E(n)$ صحيحة أياً كان العدد الطبيعي n

18 في مستوي P محدث بمعلم متجانس، H هي مجموعة النقاط $M(x,y)$ التي تحقق إحداثياتها المعادلة $x^2-5y^2=1$ ، ليكن التابع f الذي يقرن بكل نقطة $M(x,y)$ من المستوي P النقطة $f(M)=M`$ أي $M`(9x+20y\,,4x+9y)$ ، لتكن S_0 النقطة التي إحداثياتها $(1,0)$ لنتأمل في المستوي P متتالية النقاط $(S_n)_{n\geq 0}$ المعرفة وفق : $S_{n+1}=f(S_n)$ ، أثبت أن S_n نقطة من المجموعة H وإن إحداثياتها أعداد صحيحة

الحـــــــــــل

$$M(x,y)\in H$$

كل نقطة تنتمي إلى H يجب أن تحقق المعادلة $x^2-5y^2=1$

$$f(M)=M' \Longrightarrow f(x,y)=(9x+20y,4x+9y)$$

$$S_0(1,0)\quad ,\quad S_{n+1}=f(S_n)$$

لنبرهن بالتدريج

الخاصة المطلوب إثباتها $E(n):\ S_n(x,y)\in H$

لنثبت صحة الخاصة $E(n)$ من أجل $n=0$

$$n=0 \Longrightarrow S_0(1,0)$$

لنعوض (1.0) في المعادلة $x^2-5y^2=1$

$1^2-5(0)^2=1$ محققة

$$\Longrightarrow S_0(1.0)\in H$$

الخاصة $E(n)$ صحيحة من أجل $n=0$

لنفرض صحة الخاصة $E(n)$ أي

$E(n):\ S_n(x,y)\in H$ صحيحة

ولنثبت صحة الخاصة $E(n+1)$ أي لنثبت أن :

$$E(n+1):\ S_{n+1}\in H$$

$$S_{n+1}=f(S_n)=f(x,y)=(9x+20y,4x+9y)$$

لنعوض $(9x+20y,4x+9y)$ في المعادلة $x^2-5y^2=1$

$$=(9x+20y)^2-5(4x+9y)^2$$

$$=81x^2+360xy+400y^2-80x^2-360xy-405y^2$$

$$=x^2-5y^2=1$$

$$\Longrightarrow S_{n+1}\in H$$

الخاصة $E(n+1)$ صحيحة و الخاصة $E(n)$ صحيحة أياً كان العدد الطبيعي n ، إذاً S_n نقطة من المجموعة H

ولنثبت أن إحداثيات S_n أعداد صحيحة ونثبت ذلك بالتدريج

الخاصة المطلوب إثباتها "إحداثيات S_n أعداد صحيحة "

نلاحظ أن إحداثيات $S_0(1,0)$ أعداد صحيحة

وبفرض أن إحداثيات S_n أعداد صحيحة أي (x,y) أعداد صحيحة

فإن $9x+20y$ عدد صحيح لأنه مجموع عددين صحيحين

و $4x+9y$ عدد صحيح لأنه مجموع عددين صحيحين

أي أن إحداثيات $S_{n+1}(9x+20y,4x+9y)$ أعداد صحيحة

ومنه إحداثيات S_n أعداد صحيحة

19 يرمز x إلى عدد حقيقي ويرمز n إلى عدد طبيعي غير معدوم غير طبيعي ، نضع

$$S_n = \cos x + \cos 3x + \cos 5x + \cdots + \cos[(2n-1)x]$$

① باستعمال دساتير مثلثية ، أثبت أن

$$\sin(2a) = 2.\sin a.\cos a$$

$$\sin a.\cos b = \frac{1}{2}[\sin(a+b) + \sin(a-b)]$$

② حول كلاً من العبارتين الآتيتين من جداء نسبتين مثلثيتين إلى مجموع نسبتين مثلثيتين :

$$\sin nx.\cos nx \qquad \& \qquad \sin x.\cos[(2n+1)x]$$

③ أثبت أن $S_n = \cos nx \times \dfrac{\sin nx}{\sin x}$

أياً يكن $n \geq 1$ و $x \neq k\pi \ ;\{k \in Z\}$

الحــــل

①

$$\boxed{\sin(2a) = 2.\sin a.\cos a}$$

$$L_1 = \sin(2a) = \sin(a+a)$$

$$= \sin a.\cos a + \cos a.\sin a = 2\sin a.\cos a = L_2$$

$$\boxed{\sin a.\cos b = \frac{1}{2}[\sin(a+b) + \sin(a-b)]}$$

لدينا

$$\sin(a+b) = \sin a.\cos b + \cos a.\sin b$$

$$\sin(a-b) = \sin a.\cos b - \cos a.\sin b$$

$$L_2 = \frac{1}{2}[\sin(a+b) + \sin(a-b)]$$

$$= \frac{1}{2}[\sin a.\cos b + \cos a.\sin b + \sin a.\cos b - \cos a.\sin b]$$

$$= \frac{1}{2}[2\ \sin a.\cos b] = \sin a.\cos b = L_1$$

② $\boxed{\sin nx.\cos nx}$

$$= \frac{1}{2}[\sin(nx+nx) + \sin(nx-nx)]$$

$$= \frac{1}{2}[\sin(2nx) + \sin(0)] = \frac{1}{2}\sin(2nx)$$

$$\Longrightarrow \sin nx.\cos nx = \frac{1}{2}\sin(2nx)$$

$$\boxed{\sin x.\cos[(2n+1)x]}$$

$$= \frac{1}{2}[\sin(x + (2n+1)x) + \sin(x - (2n+1)x)]$$

$$= \frac{1}{2}[\sin(x + 2xn + x) + \sin(x - 2nx - x)]$$

$$= \frac{1}{2}[\sin(2x + 2xn) + \sin(-2nx)]$$

$$= \frac{1}{2}[\sin 2x(n+1) - \sin(2nx)]$$

$$\Longrightarrow \sin x.\cos[(2n+1)x] = \frac{1}{2}[\sin 2x(n+1) - \sin(2nx)]$$

③ لنبرهن بالتدريج

الخاصة المطلوب إثباتها $E(n):\quad S_n = \cos nx \times \dfrac{\sin nx}{\sin x}$

لنثبت صحة الخاصة $E(n)$ من أجل $n = 1$

$$n = 1 \Longrightarrow \begin{cases} L_1 = S_1 = \cos x \\ L_2 = \cos x \times \dfrac{\sin x}{\sin x} = \cos x \end{cases} \Bigg| \Longrightarrow L_1 = L_2$$

الخاصة $E(n)$ صحيحة من أجل $n = 1$

لنفرض صحة الخاصة $E(n)$ أي

$E(n):\quad S_n = \cos nx \times \dfrac{\sin nx}{\sin x}$ صحيحة

ولنثبت صحة الخاصة $E(n+1)$ أي لنثبت أن :

$$E(n+1):\quad S_{n+1} = \cos\big((n+1)x\big) \times \frac{\sin\big((n+1)x\big)}{\sin x}$$

$$L_1 = S_{n+1} =$$

$$\underbrace{\cos x + \cos 3x + \cdots + \cos[(2n-1)x]}_{S_n} + \cos[(2n+1)x]$$

$$= S_n + \cos[(2n+1)x]$$

$$= \cos nx \times \frac{\sin nx}{\sin x} + \cos[(2n+1)x]$$

$$= \frac{\cos nx.\sin nx}{\sin x} + \frac{\sin x.\cos[(2n+1)x]}{\sin x}$$

$$= \frac{\overbrace{\cos nx.\sin nx}^{\frac{1}{2}\sin(2nx)} + \overbrace{\sin x.\cos[(2n+1)x]}^{\frac{1}{2}[\sin 2x(n+1) - \sin(2nx)]}}{\sin x}$$

$$= \frac{\frac{1}{2}\sin(2nx) + \frac{1}{2}[\sin 2(n+1)x - \sin(2nx)]}{\sin x}$$

$$=\frac{\frac{1}{2}\sin(2nx)+\frac{1}{2}\sin 2(n+1)x-\frac{1}{2}\sin(2nx)}{\sin x}$$

$$=\frac{\frac{1}{2}\overbrace{\sin 2(n+1)x}^{[2.\sin((n+1)x).\cos((n+1)x)]}}{\sin x}$$

$$=\frac{\frac{1}{2}[2.\sin((n+1)x).\cos((n+1)x)]}{\sin x}$$

$$=\frac{\sin((n+1)x).\cos((n+1)x)}{\sin x}$$

$$=\ \cos((n+1)x)\times\frac{\sin((n+1)x)}{\sin x}=L_2$$

الخاصة $E(n+1)$ صحيحة و الخاصة $E(n)$ صحيحة أياً كان العدد الطبيعي $n\geq 1$

أنتهت الوحدة الأولى

اطرد الأفكار المُحبطة وركّز على أهدافك فقط . . وتذكّر أن وقتك الذي تمضيه الآن سيحدد من ستكون في المستقبل فقط استمر , ..