الرياضيات

Mathmatics

2024

الأعداد العقدية

By Pixel team

تم كتابة و تنظيم و تنسيق هذا الكتاب
من قبل فريق بيكسل - Pixel التعليمي.

المحتويات

! هام جداً:

هذا الكتاب لا يُعد بديلاً عن الكتاب الرسمي المقدم من وزارة التربية السورية وإنّما هو عرض للمعلومات بشكل مبسَّط لمساعدة الطالب على فهم المنهاج بشكل أفضل. وعليه فإنَّ المصدر الأساسي للدراسة هو كتاب الرياضيات (الجزء الثاني) المقدَّم من وزارة التربية السورية ونحن غير مسؤولين عن عدم الالتزام بمصدر الدراسة الأساسي شاكرين حُسن تفهمكم.

Pixel YouTube

1 الأعداد العقدية

مجموعة الأعداد الطبيعية $N = \{0,1,2, \dots \dots \dots\}$

مجموعة الأعداد الصحيحة $Z = \{\dots \dots \dots , -2, -1,0,1,2, \dots \dots \dots\}$

مجموعة الأعداد الحقيقية R

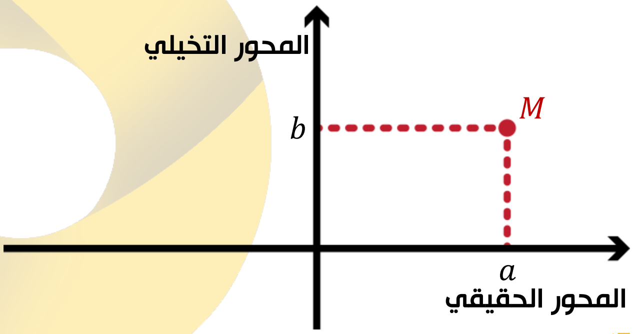
مجموعة الأعداد العقدية $C = \left\{Z; Z = a = ib \;\; ; \text{ حقيقيان } a,b\right\}$ وحدة تخيلية i اصطلاحاً $i^2 = -1$

1 أمثلة على الأعداد العقدية

1. $Z = 3 - 2i$
2. $Z = \frac{1}{2} + 2i\sqrt{3}$
3. $Z = -5i$ تخيلي بحت
4. $Z = 7$ حقيقي

2 تمثيل العدد العقدي

كل عدد عقدي يتمثل بنقطة في المستوي والعكس صحيح $Z = a + ib \iff M(a,b)$



ملاحظة

عيِّن الأعداد العقدية: Z حقيقي

Z تخيلي

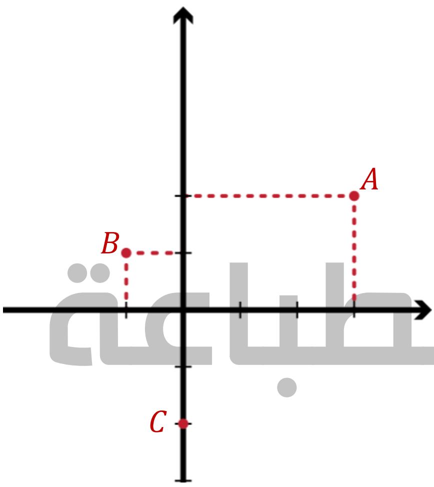
عيِّن مجموعة النقاط:

$ax + by + c = 0$ مستقيم

$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$ دائرة

مثال مثِّل (ارسم) النقاط C, B, A المقابلة للأعداد:

1. $Z_A = 3 + 2i \implies A(3,2)$
2. $Z_B = -1 + i \implies B(-1,1)$
3. $Z_C = -3i \implies C(0,-3)$



ملاحظة

1. نقول عن عدد عقدي أنه تخيلي بحت إذا كان القسم الحقيقي معدوماً.
2. نقول عن عدد عقدي انه حقيقي إذا كان القسم التخيلي معدوماً.

* مثِّل/وضِّع = ارسم   * عيِّن = لا نرسم

أمثلة

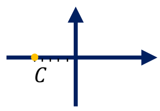
عيِّن النقطة B للعدد $z = -5$.

$z = a + bi$

$a = -5 \;, \quad b = 0$

$B(-5,0)$

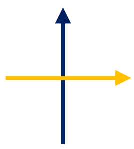
وضِّع (ارسم) النقطة C للعدد $Z = -5$.



إذا كان z عدد حقيقي، وضِّع (ارسم) مجموعة النقاط $M(z)$.

مجموعة النقاط هي مستقيم

$y = 0$ أي xx'



مثال ليكن $Z = 3 + (x+1)i$ عين مجموعة النقاط $M(Z)$ التي تجعل Z حقيقياً.

التخيلي معدوم $\Leftrightarrow$ Z حقيقي

$x + 1 = 0$

$M(Z)$ تمثل مستقيم

3 الشكل الجبري للعدد العقدي

هو $Z = a + ib$ حيث a القسم الحقيقي : $Re(Z)$

b القسم التخيلي : $Im(Z)$

4 العمليات على الشكل الجبري

ملاحظة

تناظر لـ xx' $\Longrightarrow (x,-y)\,,(x,y)$

تناظر لـ yy' $\Longrightarrow (-x,y)\,,(x,y)$

تناظر للمبدأ $\Longrightarrow (-x,-y)\,,(x,y)$

1 الجمع والطرح:

الحقيقي مع الحقيقي والتخيلي مع التخيلي.

2 الضرب:

هو نشر أقواس مع الانتباه إلى أنّ $i^2 = -1$

3 القسمة:

لإيجاد ناتج قسمة عددين عقديين نضرب البسط والمقام بمرافق المقام.

تمرين 4 صفحة 105 أعطِ الشكل الجبري للأعداد العقدية الاتية:

1. $Z = (2+i)(3-2i) = 6 - 4i + 3i - 2i^2 = 8 - i$
2. $Z = (1-i)^2 = 1 - 2i + i^2 = -2i$
3. $Z = \left(3 + i\sqrt{5}\right)\left(3 - i\sqrt{5}\right) = 9 - 5i^2 = 14$
4. $Z = \frac{4-6i}{3+2i} = \frac{(4-6i)(3-2i)}{(3+2i)(3-2i)} = \frac{12-8i-18i+12i^2}{9-4i^2} = \frac{-26i}{13} = -2i$
5. $Z = \frac{3-6i}{3+i} + \frac{4}{3-i} = \frac{(3-6i)(3-i)}{(3+i)(3-i)} + \frac{4(3+i)}{(3-i)(3+i)} = \frac{9-3i-18i+6i^2+12+4i}{9-i^2} = \frac{15-17i}{10} = \frac{15}{10} - \frac{17}{10}i$

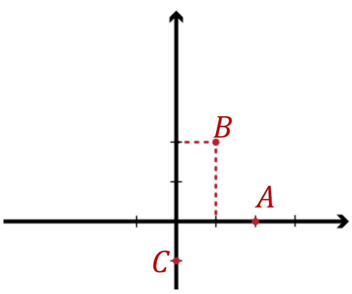
تمرين اكتب بالشكل الجبري: **قاعدة:** $(-a-b)^2 = (a+b)^2$

$$Z = 2i(-3-2i)^2 = 2i(3+2i)^2 = 2i(9+12i+4i^2) = 2i(5+12i) = 10i + 24i^2 = -24 + 10i$$

تمرين اكتب ناتج ما يلي:

1. $i^{26} = (i^2)^{13} = -1$
2. $i^8 = (i^2)^4 = (-1)^4 = 1$
3. $i^{15} = i(i)^{14} = i(i^2)^7 = i(-1)^7 = -i$
4. $i^3 = i(i)^2 = -i$

تمرين 1 صفحة 105 ليكن x عدداً عقدياً تمثله النقطة M في المستوي. وليكن $Z_1 = 2 + xi$ و $Z_2 = 3 + x + 4i$. اكتب بالشكل الجبري في حالة $M = A$ أو $M = B$ أو $M = C$، حيث A و B و C مبينة في الشكل المجاور.



قاعدة: تساوي نقطتين يكافئ تساوي العددين العقديين لهما.

① $M = A\,;A(2,0)$

نعوض العدد العقدي $x = 2$

نعوض في Z_1 و Z_2

$Z_1 = 2 + 2i$

$Z_2 = 5 + 4i$

② $M = B\,;B(1,2)$

$x = 1 + 2i$

نعوض في Z_1 و Z_2

$Z_1 = 2 + (1 + 2i)i$

$Z_1 = 2 + i - 2 = i$

$Z_2 = 3 + (1 + 2i) + 4i$

$Z_2 = 4 + 6i$

③ $M = C\,;C(0.-1)$

$x = -i$

نعوض في Z_1 و Z_2

$Z_1 = 2 + (-ii) = 3$

$Z_2 = 3 + i + 4i = 3 + 3i$

تمرين 3 صفحة 105 بسِّط العبارتين:

① $\frac{\sqrt{2}+i}{\sqrt{2}-i} + \frac{\sqrt{2}-i}{\sqrt{2}+i} = \frac{\sqrt{2}+i(\sqrt{2}+i)+\sqrt{2}-i(\sqrt{2}-i)}{(\sqrt{2}-i)(\sqrt{2}+i)} = \frac{2+2\sqrt{2}i+i^2+2-2\sqrt{2}i+i^2}{2-i^2} = \frac{4+2i^2}{3} = \frac{2}{3}$

② $w = (1+i)^8 = ((1+i)^2)^4 = (2i)^4 = 2^4.i^4 = 16(i^2)^2 = 16(1) = 16$

تكملة التمرين 4 صفحة 105

⑥ $Z = (1+i)^2 = 1 + 2i - 1 = 2i$

⑦ $Z = (1+2i)(1-2i) = 1 - 4i^2 = 1 + 4 = 5$

⑧ $Z = (4-3i)^2 = 16 - 24i + 9i^2 = 16 - 24i - 9 = 7 - 24i$

⑨ $Z = \frac{1}{2-i} = \frac{1}{2-i} \times \frac{2+i}{2+i} = \frac{2+i}{4-i^2} = \frac{2+i}{5} = \frac{2}{5} + \frac{1}{5}i$

⑩ $Z = \left[\frac{4-6i}{2-3i}\right]\left[\frac{1+3i}{3+2i}\right] = \frac{4+12i-6i-18i^2}{6+4i-9i-6i^2} = \frac{4+6i+18}{6-5i+6} = \frac{22+6i}{12-5i} \times \frac{12-5i}{12-5i} = \frac{264+110i+72i+30i^2}{144-25i^2} = \frac{234+182i}{169} = \frac{234}{169} + \frac{182}{169}i$

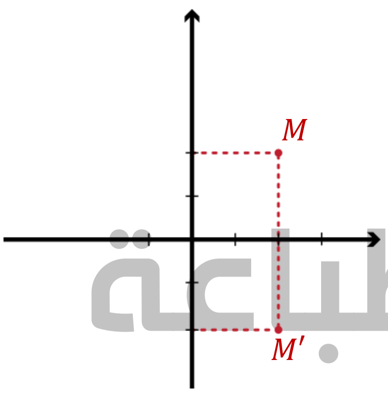
طريقة ثانية لـ10:

⑩ $Z = \left(\frac{2(2-3i)}{2-3i}\right)\left(\frac{1+3i}{3+2i}\right) = 2\left(\frac{(1+3i)(3-2i)}{(3+2i)(3-2i)}\right) = 2\,\frac{(3-2i+9i-6i^2)}{9-4i^2} = 2\,\frac{(9+7i)}{13} = \frac{18}{13} + \frac{14}{13}i$

⑪ $Z = (1+i)^9 = (1+i)(1+i)^8 = (1+i)(16) = 16 + 16i$

من التمرين السابق

5 مرافق عدد عقدي



$$Z = a + ib \Longrightarrow M(a,b)$$

$$\overline{Z} = a - ib \Longrightarrow M'(a,-b)$$

نلاحظ أنَّ النقطتين M و M' متناظرتين بالنسبة لـ xx'

خواص مرافق العدد العقدي

$\overline{\left(\frac{Z_1}{Z_2}\right)} = \frac{\overline{Z_1}}{\overline{Z_2}}$	$\overline{(Z_1 \pm Z_2)} = \overline{Z}_1 \pm \overline{Z}_2$
$\overline{(Z^n)} = \overline{Z}^n$	$\overline{(Z_1.Z_2)} = \overline{Z}_1.\overline{Z}_2$

تمرين 1 صفحة 107 اكتب بدلالة $\overline{z}$ مرافق كل من الأعداد العقدية Z الاتية:

① $Z = (z-1)(z+i) \Longrightarrow \overline{Z} = (\overline{z}-1)(\overline{z}-i)$

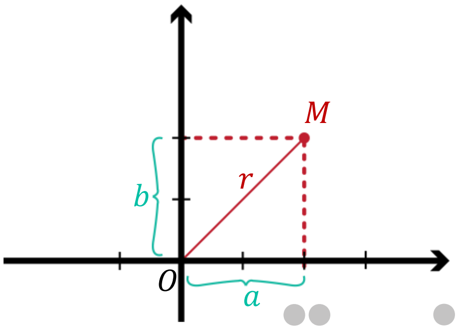
② $Z = \frac{3z^2-2iz+4}{2z-3i} \Longrightarrow \overline{Z} = \frac{3\overline{z}^2+2i\overline{z}+4}{2\overline{z}+3i}$

③ $Z = z^3 + 2iz^2 + 1 - 3i \Longrightarrow \overline{Z} = \overline{z}^3 - 2i\overline{z}^2 + 1 + 3i$

④ $Z = (1+2iz)^3 \Longrightarrow \overline{Z} = (1-2i\overline{z})^3$

6 طويلة عدد عقدي

ليكن: $Z = a + ib$



$$|z| = OM$$

$$|z|^2 = a^2 + b^2$$

قانون حساب الطويلة $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

خواص طويلة العدد العقدي

$$|z_1 . z_2| = |z_1| . |z_2| \qquad \left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|} \qquad |z^n| = |z|^n$$

تمرين احسب $|z|$

1. $z = -1 - i$
   $a = -1 \quad b = -1$
   $|z| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$

2. $z = -3$
   $a = -3 \quad b = 0$
   $|z| = \sqrt{9} = 3$

3. $z = 4i$
   $a = 0 \quad b = 4$
   $|z| = \sqrt{16} = 4$

تمرين احسب $|z|$

1. $z = \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i\right)^{500}$

$$|z| = \left(\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{-\sqrt{3}}{2}\right)^2}\right)^{500}$$

$$= \left(\sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}}\right)^{500}$$

$$1^{500} = 1$$

2. $z = \frac{3+2i}{1+i\sqrt{3}}$

$$|z| = \frac{|3+2i|}{|1+i\sqrt{3}|} = \frac{\sqrt{9+4}}{\sqrt{1+3}}$$

$$= \frac{\sqrt{13}}{2}$$

3. $z = (-1-i)^4(1+i\sqrt{3})$

$$|z = |-1-i|^4 . |1+i\sqrt{3}|$$

$$= \sqrt{2}^4 . \sqrt{4} = 4 \times 2 = 8$$

ملاحظة

إذا كان العدد العقدي قسم واحد فالطويلة هي نفس هذا العدد ولكن موجب.

$$z^2 - 2z + |-1 - i\sqrt{3}| = 0$$

$$z^2 - 2z + 2 = 0$$

$$|5| = 5 \ , \qquad |-5| = 5$$

$$|1 - \sqrt{3}| = -1 + \sqrt{3}$$

$$|\sqrt{2} - 1| = \sqrt{2} - 1$$

7 أفكار ومبرهنات

1. نقول عن عدد عقدي أنه حقيقي إذا كان يساوي مرافقه.

z حقيقي $\Leftrightarrow z = \bar{z}$

2. نقول عن عدد عقدي أنه تخيلي بحت إذا كان يساوي معاكس مرافقه.

z تخيلي بحت $\Leftrightarrow z = -\bar{z}$

3. خاصّة 1 :

$$z.\bar{z} = a^2 + b^2$$

لأنَّ: $z = a + ib \ , \ \bar{z} = a - ib$

فإنَّ: $z.z = (a+ib)(a-ib) = a^2 - i^2b^2 = a^2 + b^2$

4 خاصّة 2:

نعلم أنَّ: $z.\bar{z} = a^2 + b^2$

وإنَّ: $|z|^2 = a^2 + b^2$

فإنَّ: $\boxed{z.\bar{z} = |z|^2}$ *

ملاحظة

z تخيلي $\Longleftarrow$ مرافقه $\bar{z}$

z حقيقي $\Longleftarrow$ مرافقه z

5 مبرهنة (حالة خاصة من *): إذا كان $|z| = 1$ يكافئ $z.\bar{z} = 1 \Leftrightarrow \bar{z} = \frac{1}{z}$

تمرين 9 صفحة 123 z, w عددان عقديان $|z| = 1 \;,\; |w| = 1$ و $z.w \neq 1$ أثبت أنَّ العدد العقدي $Z = \frac{z+w}{1+zw}$ هو عدد حقيقي.

نوجد $\bar{Z}$: $\Longleftarrow \bar{Z} = \frac{\bar{z}+\bar{w}}{1+\bar{z}\bar{w}}$

نضرب البسط والمقام بـ $z.w$:

$$\bar{Z} = \frac{(\bar{z}+\bar{w})(z.w)}{(1+\bar{z}.\bar{w})(z.w)} = \frac{\bar{z}.z.w + \bar{w}.z.w}{z.w + \bar{z}.\bar{w}.z.w}$$

لكن $w.\bar{w} = 1 \;,\; z.\bar{z} = 1$

$$\bar{Z} = \frac{z+w}{1+z.w} = Z$$

ومنه Z عدد حقيقي لأنَّ $Z = \bar{Z}$

تمرين 4 صفحة 122

1 ليكن z عدداً عقدياً ما، وليكن u عدداً عقدياً طويلته تساوي الواحد وهو مختلف عن الواحد، أثبت أنَّ $\frac{z-u\bar{z}}{1-u}$ عدد حقيقي.

2 نفترض أنَّ $u \neq 1$ وأنَّ $\frac{z-u\bar{z}}{1-u}$ عدد حقيقي، أثبت أنَّه إما أن يكون z حقيقياً أو ان يكون $|u| = 1$.

الطلب الأول: $w = \frac{z-u\bar{z}}{1-u}$ $\qquad |u| = 1 \qquad u.\bar{u} = 1 \Longrightarrow \bar{u} = \frac{1}{u}$

نوجد المرافق: $\bar{w} = \frac{\bar{z}-\bar{u}z}{1-\bar{u}}$

نضرب البسط والمقام بـ u :

$$\bar{w} = \frac{\bar{z}.u - \bar{u}.z.u}{u - \bar{u}.u} = \frac{\bar{z}.u - z}{u-1} = \frac{-\bar{z}u + z}{-u+1} = \frac{z-u\bar{z}}{1-u} = w$$

ومنه w عدد حقيقي لأنَّ $w = \bar{w}$

الطلب الثاني: بما أنَّ $u \neq 1$ و $\frac{z-u\bar{z}}{1-u}$ عدد حقيقي فإنَّه يساوي مرافقه

$$\frac{z-u\bar{z}}{1-u} = \frac{\bar{z}-\bar{u}z}{1-\bar{u}}$$

$$z - u\bar{z}(1-\bar{u}) = \bar{z} - \bar{u}z(1-u)$$

$$z - z\bar{u} - u\bar{z} + \bar{u}u\bar{z} = \bar{z} - \bar{z}u + u\bar{u}z - \bar{u}z$$

$$z - \cancel{z\bar{u}} - \cancel{u\bar{z}} + \bar{u}uz - \bar{z} + \cancel{\bar{z}u} + \cancel{\bar{u}z} - u\bar{u}z = 0$$

$$z - \bar{z} + u\bar{u}\bar{z} - u\bar{u}z = 0$$

$$z - \bar{z} - u\bar{u}(z - \bar{z})$$

$(z-\bar{z})(1-u\bar{u})=0$

ومنه إمّا: $1-u\bar{u}=0 \Leftarrow u\bar{u}=1$ ومنه $|u|=1$

أو: $z-\bar{z}=0 \Leftarrow z=\bar{z}$ ومنه z حقيقي

أثبت أنّ w عدد تخيلي بحت

الحقيقي معدوم

حساب المرافق

عندما يوجد في المقدار عدد عقدي z

ملاحظة

- أثبت انَ w حقيقي، نطلق من حساب $\bar{w}$ ونصل إلى $w=\bar{w}$.
- إذا كان w حقيقي أثبت انًّ...،ننطلق من حساب $w=w$ حتى نصل للمطلوب.

تمرين 6 صفحة 122 ليكن z و z' عددين عقديين، أثبت أنًّ: $|z+z'|^2+|z-z'|^2=2|z|^2+2|z'|^2$

$$l_1=(z+z')(\bar{z}+\bar{z}')+(z-z')(\bar{z}-\bar{z}')=z\bar{z}+z\bar{z}'+z'\bar{z}+z'\bar{z}'+z\bar{z}-z\bar{z}'-z'\bar{z}+z'\bar{z}'$$
$$\Rightarrow l_1=|z|^2+|z'|^2+|z|^2+|z'|^2=2|z|^2+2|z'|^2=l_2$$

تمرين 16 صفحة 124 عيِّن في كل حالة مجموعة الأعداد العقدية z التي تحقق الشرط المعطى:

1. المقدار $(z+1)(\bar{z}-2)$ حقيقي.
2. العدد z مختلف عن $4i$ و $\frac{z+2i}{z-4i}$ عدد حقيقي.

1. بما أنًّ المقدار حقيقي فإنّه يساوي مرافقه

$$(z+1)(\bar{z}-2)=(\bar{z}+1)(z-2)\Rightarrow \cancel{z.\bar{z}}-2z+\bar{z}-\cancel{2}=\cancel{z.\bar{z}}-2\bar{z}+z-\cancel{2}$$

$$3z-3\bar{z}=0\Rightarrow 3(z-\bar{z})=0\Rightarrow z=\bar{z}\Rightarrow \text{عدد حقيقي}$$

وبما أنَّ z عدد حقيقي (مجموعة الأعداد العقدية z هي أعداد حقيقية) / مجموعة النقاط $M(z)$ تمثل المستقيم xx'.

2. بما أنًّ العدد حقيقي فإنّه يساوي مرافقه

$$\frac{z+2i}{z-4i}=\frac{\bar{z}-2i}{\bar{z}+4i}\Rightarrow (z+2i)(\bar{z}+4i)=(\bar{z}-2i)(z-4i)\Rightarrow \cancel{z.\bar{z}}+4iz+2i\bar{z}-\cancel{8}=\cancel{z.\bar{z}}-4i\bar{z}-2iz-\cancel{8}$$

$$4iz+2i\bar{z}+4i\bar{z}+2iz=0\Rightarrow 6iz+6i\bar{z}=0\Rightarrow 6i(z+\bar{z})=0\Rightarrow z=-\bar{z}\ \text{تخيلي بحت}$$

بما أنَّ z عدد تخيلي بحت (مجموعة الأعداد العقدية z هي الأعداد التخيلية عدا $4i$) / مجموعة النقاط $M(z)$ تمثل المستقيم yy' عدا النقطة $(0,4)$ (نكتبها لو كان السؤال عيِّن مجموعة النقاط..راجع الملاحظة صفحة 1 في النوطة)

8 حل معادلة درجة أولى بالمجهولين $z,\bar{z}$

الطريقة الأولى

نوجد معادلة أخرى بأخذ مرافق الطرفين ثم نحل جملة معادلتين.

نستخدمها في حال كان $z,\bar{z}$ معزولين، غير مرتبطين

الطريقة الثانية (العامة)

نفرض: $z=a+ib$ و $\bar{z}=a-ib$

ونعوض ونستفيد من تساوي عددين عقديين.

$$z=z'\Leftrightarrow \begin{pmatrix} a=a' \\ b=b' \end{pmatrix}$$

تمرين 2 صفحة 107 حل كل من المعادلات بالمجهول z.

① $2iz + \bar{z} = 3 + 3i$

$2iz + \bar{z} = 3 + 3i \;\ldots\ldots\ldots\; (1)$

مرافق الطرفين $-2i\bar{z} + z = 3 - 3i \;\ldots\ldots\; (2)$

نضرب المعادلة (1) بـ $2i$ ثم نجمع مع (2)

$-4z + 2i\bar{z} = 6i - 6$

$-2i\bar{z} + z = 3 - 3i \quad +$

$-3z = -3 + 3i \Longrightarrow z = 1 - i$

طريقة ثانية: $2iz + \bar{z} = 3 + 3i$

بفرض $z = a + ib$

$\Longrightarrow \bar{z} = a - ib$

$2i(a + ib) + a - ib = 3 + 3i$

$2ia - 2b + a - ib = 3 + 3i$

من تساوي عددين عقديين:

$-2b + a = 3 \;\ldots\ldots\; (1)$

$2a - b = 3 \;\ldots\ldots\; (2)$

نضرب المعادلة (1) بـ -2 ثم نجمع

$4b - 2a = -6$

$2a - b = 3 \quad +$

$3b = -3 \Longrightarrow b = -1$

نعوض في (2): $a = 1$

فيكون: $z = 1 - i \Longleftarrow z = a + ib$

② $z - 2\bar{z} = 2$

$a + ib - 2(a - ib) = 2 \quad \Longleftarrow \quad z = a + ib$

$a + ib - 2a + 2ib = 2 \Longrightarrow -a + 3ib = 2$

$a = -2 \;,\; b = 0 \quad \Longrightarrow \quad z = -2$

③ $\dfrac{\bar{z}-1}{\bar{z}+1} = i$

$\bar{z} - 1 = \bar{z}i + i$

$a - ib - 1 = (a - ib)i + i$

$a - 1 - ib = ai + b + i$

$a - 1 - ib = b + (a + 1)i$

$a - 1 = b \;\ldots\ldots\; (1)$

$a + 1 = -b \;\ldots\ldots\; (2)$

بالجمع: $2a = 0 \Longrightarrow a = 0 \;,\; b = -1$

ومنه $z = -i$

④ $2\bar{z} = i - 1$

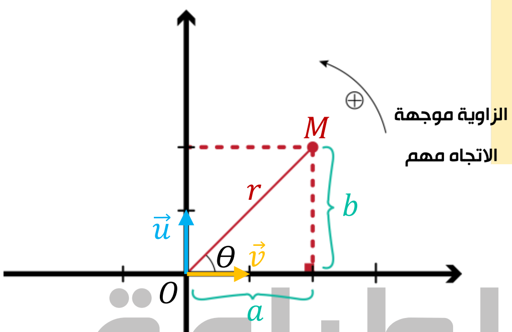
$2(a - ib) = i - 1 \Longrightarrow 2a - 2ib = i - 1$

$2a = -1 \Longrightarrow a = -\dfrac{1}{2}$

$-2b = 1 \Longrightarrow b = -\dfrac{1}{2}$

$z = -\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}i$

9 الشكل المثلثي لعدد عقدي غير معدوم



$z = a + ib \Longrightarrow M(a, b)$

لكل نقطة نوعين من الإحداثيات:

1. إحداثيات ديكارتية $M(a, b)$ أو $M(x, y)$
2. إحداثيات قطبية $M[r; \theta]$

طويلة z $r = |z| = OM$

زاوية العدد العقدي $\theta = \arg(z) = (\vec{u}, \overrightarrow{OM})$

استنتاج الشكل المثلثي

$\sin\theta = \dfrac{b}{r} \Longrightarrow b = r.\sin\theta$

$\cos\theta = \dfrac{a}{r} \Longrightarrow a = r.\cos\theta$

$z = a + ib \Longrightarrow$

$$\boxed{z = r(\cos\theta + i\sin\theta)}$$

- للتحويل من الشكل الجبري إلى المثلثي يلزم حساب θ , r

$$\cos\theta = \frac{a}{r} \qquad \sin\theta = \frac{b}{r} \qquad r = \sqrt{a^2+b^2}$$

تمرين 2 صفحة 110 اكتب بالشكل المثلثي:

1. $z = -\sqrt{2} + i\sqrt{2}$

$$r = \sqrt{2+2} = 2$$

$$\cos\theta = \frac{-\sqrt{2}}{2} \qquad \sin\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$z = 2\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$$

2. $z = 2 + 2i\sqrt{3}$

$$r = \sqrt{4+12} = 4$$

$$\cos\theta = \frac{a}{r} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \qquad \sin\theta = \frac{b}{r} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$z = 4\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$$

3. $z = 4 - 4i$

$$r = \sqrt{16+16} = 4\sqrt{2}$$

$$\left.\begin{aligned}\cos\theta &= \frac{4}{4\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\\ \sin\theta &= \frac{-4}{4\sqrt{2}} = \frac{-1}{\sqrt{2}}\end{aligned}\right\} \Rightarrow \theta = -\frac{\pi}{4}$$

$$z = 4\sqrt{2}\left(\cos -\frac{\pi}{4} + i\sin -\frac{\pi}{4}\right)$$

4. $z = -2i$

$$z = 2\left(\cos\left(\frac{-\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{-\pi}{2}\right)\right)$$

5. $z = \frac{-1}{4} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$

$$r = \sqrt{\frac{1}{16} + \frac{3}{16}} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$\left.\begin{aligned}\cos\theta &= \frac{-1}{4} \times 2 = \frac{-1}{2}\\ \sin\theta &= \frac{\sqrt{3}}{4} \times 2 = \frac{\sqrt{3}}{2}\end{aligned}\right\} \Rightarrow \theta = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$$

$$z = \frac{1}{2}\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$$

6. $z = \frac{4}{1-i}$

$$z = \frac{4}{1-i} \times \frac{1+i}{1+i} = \frac{4+4i}{2} = \frac{4}{2} + \frac{4}{2}i$$

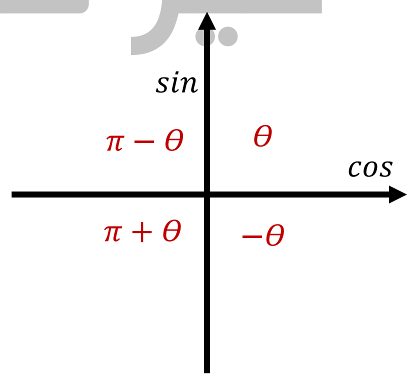
$$\Rightarrow z = 2 + 2i$$

$$r = \sqrt{8} = 2\sqrt{2} \;, \cos\theta = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\sin\theta = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\theta = \frac{\pi}{4}$$

$$z = 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

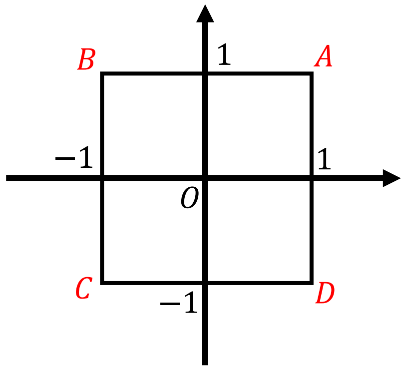


ملاحظة

العدد الحقيقي/التخيلي زاويته:

حقيقي موجب	تخيلي موجب	حقيقي سالب	تخيلي سالب
0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{-\pi}{2}$

تمرين 3 صفحة 110 في الشكل المجاور مثّلنا في معلمٍ متجانسٍ مربعاً $ABCD$ ومسدساً $ABCDEF$، أعطِ الأعداد العقدية التي تمثّل كلّاً من رؤوس كلٍ منهما.



$A(1,1) \Longrightarrow z_A = 1 + i$
$B(-1,1) \Longrightarrow z_B = -1 + i$
$C(-1,-1) \Longrightarrow z_C = -1 - i$
$D(1,-1) \Longrightarrow z_D = 1 - i$

في المسدس: المسدس المنتظم هو 6 مثلثات متساوية الأضلاع

$A[1;0] \Longrightarrow z_A = \cos 0 + i \sin 0$

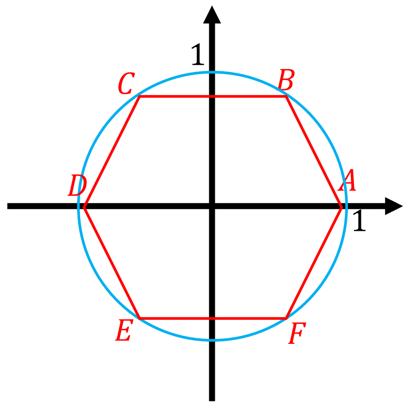
$B\left[1;\frac{\pi}{3}\right] \Longrightarrow z_B = \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}$

$C\left[1;\frac{2\pi}{3}\right] \Longrightarrow z_C = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}$

$D[1;\pi] \Longrightarrow z_D = \cos\pi + i\sin\pi$

$E\left[1;\frac{4\pi}{3}\right] \Longrightarrow z_E = \cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}$

$F\left[1;\frac{5\pi}{3}\right] \Longrightarrow z_F = \cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3}$



التحويلات السريعة

$$z = 1 + i \Longrightarrow z = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

$$z = -1 - i \Longrightarrow z = \sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4}\right)$$

$$z = 1 - i \Longrightarrow z = \sqrt{2}\left(\cos\frac{-\pi}{4} + i\sin\frac{-\pi}{4}\right)$$

$$z = -1 + i \Longrightarrow z = \sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$$

في حال كان العدد العقدي تخيلي بحت أو حقيقي يمكن مباشرةً كتابة الشكل المثلثي.

ملاحظة

التعيين الأساسي للزاوية أن تكون الزاوية $]-\pi.\pi]$

مثال

1) $\frac{7\pi}{6} = \frac{7\pi}{6} - 2\pi = \frac{-5\pi}{6}$

2) $\frac{-11\pi}{5} = \frac{-11\pi}{5} + 2\pi = \frac{-\pi}{5}$

10 العمليات على الشكل المثلثي

$$z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1) \quad , \quad z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$$

1 الضرب هو ضرب الطويلات وجمع الزوايا.

$$z_1 . z_2 = r_1 . r_2[\cos(\theta_1 + \theta_2)] + i\sin(\theta_1 + \theta_2)$$

2 القسمة هي قسمة الطويلات وطرح الزوايا.

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1 - \theta_2)] + i\sin(\theta_1 - \theta_2)$$

3 القوة

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$$
$$[r(\cos\theta + i\sin\theta)]^n = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta)$$

نتائج هامة

$$\arg(z_1 . z_2) = \arg z_1 + \arg z_2$$
$$\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \arg z_1 - \arg z_2$$
$$\arg(z^n) = n . \arg z$$

مثال جِد:

$$\arg\left(\frac{-1 + i\sqrt{3}}{2\left(\cos\frac{\pi}{5} + i\sin\frac{\pi}{5}\right)}\right)$$

$$z_1 = -1 + i\sqrt{3} \quad : \quad r = 2 \quad , \cos\theta = \frac{-1}{2} \quad , \sin\frac{\sqrt{3}}{2} \quad , \theta = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$$

$$\arg\left(\frac{-1 + i\sqrt{3}}{2\left(\cos\frac{\pi}{5} + i\sin\frac{\pi}{5}\right)}\right) = \arg(-1 + i\sqrt{3}) - \arg\left[2\left(\cos\frac{\pi}{5} + i\sin\frac{\pi}{5}\right)\right] = \frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{5} = \frac{7\pi}{15}$$

مثال إذا كان $\arg\frac{\pi}{3}$ جِد $\arg(iz)$

$$\arg(iz) = \arg i + \arg z = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{6}$$

تمرين 1 صفحة 113 اكتب بالشكل المثلثي:

1 $Z = \frac{1 - i\sqrt{3}}{1 + i}$

$$z_1 = 1 - i\sqrt{3} = 2\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2\left[\cos\left(\frac{-\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{-\pi}{3}\right)\right]$$
$$z_2 = 1 + i = \sqrt{2}\left[\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right]$$
$$Z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{2}{\sqrt{2}}\left[\cos\left(\frac{-\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{-\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right)\right] = \left[\cos\left(\frac{-7\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{-7\pi}{12}\right)\right]$$

---

2 $Z = (1 - i)^2$

$$(1 + i)^2 = \left[\sqrt{2}\left[\cos\frac{-\pi}{4} + i\sin\frac{-\pi}{4}\right]\right]^2 = 2\left[\cos\left(\frac{-\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{-\pi}{2}\right)\right]$$

أو $(1 - i)^2 = -2i = 2\left[\cos\left(\frac{-\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{-\pi}{2}\right)\right]$

③ $Z = \left[\frac{\sqrt{3}-i}{i}\right]^5$

$$z_1 = \sqrt{3} - i = 2\left(\sqrt{3} - \frac{1}{2}i\right) = 2\left[\cos\frac{-\pi}{6} + i\sin\frac{-\pi}{6}\right]$$

$$z_2 = i = 1\left[\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right]$$

$$\frac{\sqrt{3}-i}{i} = \frac{z_1}{z_2} = \frac{2\left[\cos\frac{-\pi}{6} + i\sin\frac{-\pi}{6}\right]}{1\left[\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right]} = 2\left[\cos\frac{-2\pi}{3} + i\sin\frac{-2\pi}{3}\right] \Longrightarrow Z = \left[2\left[\cos\frac{-2\pi}{3} + i\sin\frac{-2\pi}{3}\right]\right]^5$$

$$Z = 32\left[\cos\frac{-10\pi}{3} + i\sin\frac{-10\pi}{3}\right] = 32\left[\cos\frac{-4\pi}{3} + i\sin\frac{-4\pi}{3}\right]$$

الزاوية في الشكل الأسي أكثر من دورة لأنّ البسط أكبر من ضعفي المقام فنضيف $(+2\pi)$

تمرين 2 صفحة 113 نُعطى العددين العقديين $z_1 = \frac{\sqrt{6}-i\sqrt{2}}{2}$ و $z_2 = 1 - i$

① اكتب بالشكل المثلثي كلّاً من الأعداد z_1 و z_2 و $\frac{z_1}{z_2}$.

② اكتب بالشكل الجبري $\frac{z_1}{z_2}$

③ استنتج أنّ $\cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}+i\sqrt{2}}{2}$ و $\sin\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}-i\sqrt{2}}{2}$

الحل:

① $z_1 =$ البسط $= \sqrt{6} + i\sqrt{2} \Longrightarrow r = 2\sqrt{2}$

($z_1 = \frac{\sqrt{6}}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$ يمكننا أن نعتبر
وحساب الشكل المثلثي مباشرةً)

$$\left.\begin{aligned}\cos\theta &= \frac{\sqrt{3}}{2}\\ \sin\theta &= \frac{-1}{2}\end{aligned}\right) \theta = \frac{-\pi}{6} \Longrightarrow 2\sqrt{2}\left[\cos\frac{-\pi}{6} + i\sin\frac{-\pi}{6}\right]$$

المقام $= 2 = 2[\cos 0 + i\sin 0] \Longrightarrow z_1 = \sqrt{2}\left[\cos\frac{-\pi}{6} + i\sin\frac{-\pi}{6}\right]$

$$z_2 = 1 - i = \sqrt{2}\left[\cos\frac{-\pi}{4} + i\sin\frac{-\pi}{4}\right]$$

$$\frac{z_1}{z_2} = z_3 = 1\left[\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}\right]$$

② $\frac{z_1}{z_2} = \frac{\frac{\sqrt{6}-i\sqrt{2}}{2}}{1-i} = \frac{(\sqrt{6}-i\sqrt{2})(1+i)}{2(1-i)(1+i)} = \frac{\sqrt{6}+i\sqrt{6}-i\sqrt{2}-i^2\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}i$

③ نقارن بين الشكل الجبري والمثلثي

مثلثي $\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1}{z_2}$ جبري $\Longrightarrow \left[\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}\right] = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}i$

من تساوي عددين عقديين:

$\cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}+i\sqrt{2}}{2}$ و $\sin\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}-i\sqrt{2}}{2}$

تمرين 4 صفحة 113 اكتب بالشكل المثلثي:

① $z = \left(\cos\frac{\pi}{8} + i\sin\frac{\pi}{8}\right)^6$

$$= \cos\frac{6\pi}{8} + i\sin\frac{6\pi}{8}$$

$$= \cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}$$

② $z = \left(\sin\frac{\pi}{5} + i\cos\frac{\pi}{5}\right)^6$

$$z = \left[\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{5}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{5}\right)\right]^6$$

$$= \left[\cos\left(\frac{13\pi}{10}\right) + i\sin\left(\frac{13\pi}{10}\right)\right]^6$$

$$= \left[\cos\left(\frac{9\pi}{5}\right) + i\sin\left(\frac{9\pi}{5}\right)\right]^6$$

تذكر: نحول النسبة $\sin \Leftrightarrow \cos$

لحل مشكلة النسبة نستخدم:

$\sin\theta = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$

$\cos\theta = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$

③ $z = (1+i)\left(\cos\frac{\pi}{9} + i\sin\frac{\pi}{9}\right)$

$$z_1 = (1+i) = \sqrt{2}\left[\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right]$$

$$z_2 = \left(\cos\frac{\pi}{9} + i\sin\frac{\pi}{9}\right)$$

$$z = z_1.z_2 = \sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{9}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{9}\right)\right]$$

$$z = \sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{13\pi}{36}\right) + i\sin\left(\frac{13\pi}{36}\right)\right]$$

④ $z = [1+i]^{2016}$

$$z = \left[\sqrt{2}\left[\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right]\right]^{2016}$$

$$= \left(\sqrt{2}\right)^{2016}\left[\cos\frac{2016\pi}{4} + i\sin\frac{2016\pi}{4}\right]$$

$$z = 2^{1008}[\cos 504\pi + i\sin 504\pi]$$

$$\Rightarrow z = 2^{1008}[\cos 0 + i\sin 0]$$

طلب إضافي

① $z = -2i\left[\cos\frac{\pi}{5} + i\sin\frac{\pi}{5}\right]$

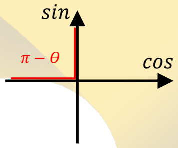
$$z = 2\left(\left(\cos\frac{-\pi}{2} + i\sin\frac{-\pi}{2}\right)\right)\left(\cos\frac{\pi}{5} + i\sin\frac{\pi}{5}\right) = 2\left(\cos\frac{-3\pi}{10} + i\sin\frac{-3\pi}{10}\right)$$

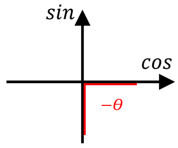
② $z = 3\left(-\cos\frac{\pi}{9} + i\sin\frac{\pi}{9}\right)$

$$z = 3\left(\cos\left(\pi-\frac{\pi}{9}\right) + i\sin\left(\pi-\frac{\pi}{9}\right)\right)$$

$$z = 3\left(\cos\left(\frac{8\pi}{9}\right) + i\sin\left(\frac{8\pi}{9}\right)\right)$$

حل مشكلة الإشارة حسب الربع (نحدد الربع بالنسبة لإشارتي $\cos$ و $\sin$)





③ $z = 2\left[\cos\frac{\pi}{8} - i\sin\frac{\pi}{8}\right]$

$$z = 2\left[\cos\frac{-\pi}{8} + i\sin\frac{-\pi}{8}\right]$$

تمرين 3 صفحة 113 اكتب بالشكل المثلثي العدد العقدي $1+i\sqrt{3}$ واستنتج الشكل المثلثي للعدد $1-i\sqrt{3}$ وأخيراً احسب العددين:

① $z_1 = \left(1+i\sqrt{3}\right)^5 + \left(1-i\sqrt{3}\right)^5$

② $z_2 = \left(1+i\sqrt{3}\right)^5 - \left(1-i\sqrt{3}\right)^5$

الحل:

$$1+i\sqrt{3} = 2\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2\left[\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right]$$

$$1-i\sqrt{3} = 2\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2\left[\cos\frac{-\pi}{3} + i\sin\frac{-\pi}{3}\right]$$

① $z_1 = \left(1+i\sqrt{3}\right)^5 + \left(1-i\sqrt{3}\right)^5 = 32\left[\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3}\right] + 32\left[\cos\frac{-5\pi}{3} + i\sin\frac{-5\pi}{3}\right] \qquad \left(\frac{-5\pi}{3} = \frac{\pi}{3}\right)$

$$z_1 = 32\left(+\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + 32\left(+\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \Rightarrow z_1 = 16 - 16i\sqrt{3} + 16 + 16i\sqrt{3} = 32$$

② $z_2 = \left(1+i\sqrt{3}\right)^5 - \left(1-i\sqrt{3}\right)^5 = -32\sqrt{3}i$

تمرين اكتب بالشكل المثلثي:

$z = 1-\sqrt{2} \qquad$ (-1 حقيقي سالب نضرب بـ)

$$z = \left(-1+\sqrt{2}\right)(\cos\pi + i\sin\pi)$$

ملاحظات

الشكل المثلثي لعدد عقدي هو:

$$Z = r[\cos\theta + i\sin\theta]$$

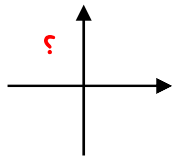
حقيقي موجب دوما

أمثال sin وcos هي $+1$

نفس الزاوية مع cos وsin

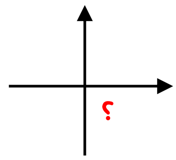
تأتي مع sin فقط

التحويل من الشكل المثلثي إلى الجبري:



عندما يكون البسط أصغر من المقام بواحد نكون في الربع الثاني.

مثال: $\frac{3\pi}{4}, \frac{2\pi}{3}, \frac{5\pi}{6}$



عندما يكون البسط أكبر من المقام بواحد نكون في الربع الرابع.

مثال: $\frac{5\pi}{4}, \frac{4\pi}{3}, \frac{7\pi}{6}$

1. $z = 2\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$

ربع ثاني $3 \times 45 = 135$

$$z = 2\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\sqrt{2} + i\sqrt{2}$$

2. $z = 5\left(\cos\frac{-\pi}{3} + i\sin\frac{-\pi}{3}\right)$

$$z = 5\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{5}{2} - \frac{5\sqrt{3}}{2}i$$

تمرين أوجد الشكل المثلثي للعدد: $z = 2\left(-\sin\frac{\pi}{5} + i\cos\frac{\pi}{5}\right)^2$

$$z = 2\left(-\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{5}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{5}\right)\right)^2$$

$$z = 2\left(-\cos\frac{3\pi}{10} + i\sin\frac{3\pi}{10}\right)^2$$

$$z = 2\left(\cos\left(\pi - \frac{3\pi}{10}\right) + i\sin\left(\pi - \frac{3\pi}{10}\right)\right)^2$$

$$z = 2\left(\cos\frac{7\pi}{10} + i\sin\frac{7\pi}{10}\right)^2$$

$$z = 2\left(\cos\frac{7\pi}{5} + i\sin\frac{7\pi}{5}\right)$$

انتبه التربيع لا يضم الطويلة

11 الشكل الأسي لعدد عقدي

شكل مثلثي $z = r(\cos\theta + i\sin\theta) \Longrightarrow$ شكل جبري $z = a + ib \Longrightarrow$

بفرض:

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

الشكل الأسي $\boxed{z = r.e^{i\theta}}$

$$[r_1 . e^{i\theta_1}].[r_2 . e^{i\theta_2}] = r_1 . r_2 . e^{i(\theta_1+\theta_2)}$$

$$[r . e^{i\theta}]^n = r^n . e^{in\theta}$$

$$\frac{r_1 e^{i\theta_1}}{r_2 . e^{i\theta_2}} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\theta_1-\theta_2)}$$

تمرين 3 صفحة 116 ليكن $Z = \frac{-\sqrt{2}}{1+i} e^{i\frac{\pi}{3}}$، بيّن أي الخواص التالية صحيحة:

1. $|Z| = 1$
2. $Z = -(1-i)e^{i\frac{\pi}{3}}$
3. $\arg Z = -\frac{\pi}{12}$
4. $Z = e^{i\frac{13\pi}{12}}$

الحل:

1. $|Z| = 1$

$$|Z| = \left|\frac{-\sqrt{2}}{1+i}\right| . \left|e^{i\frac{\pi}{3}}\right| \Rightarrow |Z| = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} .1 = 1 \Rightarrow$$ العبارة الأولى صحيحة

2. $Z = -(1-i)e^{i\frac{\pi}{3}}$

$$Z = \frac{-\sqrt{2}(1-i)}{(1+i)(1-i)} . e^{i\frac{\pi}{3}} = \frac{-\sqrt{2}(1-i)}{2} . e^{i\frac{\pi}{3}} \Rightarrow$$ العبارة الثانية خاطئة

3. $\arg Z = -\frac{\pi}{12}$

$$Z = \frac{-\sqrt{2}}{1+i} e^{i\frac{\pi}{3}}$$

$$\arg Z = \arg\left(\frac{-\sqrt{2}}{1+i}\right) + \arg e^{i\frac{\pi}{3}} \Rightarrow \arg Z = \arg(-\sqrt{2}) - \arg(1+i) + \frac{\pi}{3} \Rightarrow \arg Z = \pi - \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3}$$

$$= \frac{13\pi}{12} \Rightarrow$$ العبارة الثالثة خاطئة $\left(\frac{13\pi}{12} - 2\pi = \frac{-11}{12}\right)$

4. $Z = e^{i\frac{13\pi}{12}}$

وجدنا أنّ $\arg Z = \frac{13\pi}{12}$, $|Z| = 1 \Leftarrow Z = e^{i\frac{13\pi}{3}} \Leftarrow$ الإجابة الرابعة صحيحة.

تمرين 1 صفحة 116 نضع $z_1 = e^{i\pi/3}$ و $z_2 = 3e^{-i\pi/4}$ و $z_3 = \sqrt{2}e^{2i\pi/3}$، جِد الشكل الأسي للأعداد الاتية:

1. $z_1 . z_2 = 3e^{i\pi/12}$
2. $\frac{z_1}{z_2} = \frac{1}{3}e^{i7\pi/12}$
3. ${z_1}^3 = e^{i\pi}$
4. $z_1 . z_2 . z_3 = 3\sqrt{2}e^{i\left(\frac{3\pi}{2}+\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)} = 3\sqrt{2}e^{i\left(\frac{3\pi}{4}\right)}$
5. ${z_3}^4 = 4e^{i\frac{8\pi}{3}}$
6. $\frac{z_2}{z_3} = \frac{3}{\sqrt{2}}e^{i\left(\frac{-\pi}{4}-\frac{2\pi}{3}\right)} = \frac{3}{\sqrt{2}}e^{i\left(\frac{-11\pi}{12}\right)}$

تمرين 2 صفحة 116 اكتب بالشكل الأسي كلًّا من الأعداد العقدية الاتية:

1. $z_1 = 2\sqrt{3} + 6i$

$$= 4\sqrt{3}\left(\frac{2\sqrt{3}}{4\sqrt{3}} + \frac{6}{4\sqrt{3}}\right) = 4\sqrt{3}\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$\Longrightarrow \theta = \frac{\pi}{3} \Longrightarrow z_1 = 4\sqrt{3}e^{i\pi/3}$$

2. $z_2 = (1+i)\sqrt{3}e^{i\pi/3}$

$$= \sqrt{2}e^{i\pi/4}\sqrt{3}e^{i\pi/3} = \sqrt{6}e^{i7\pi/12}$$

3. $z_3 = (1-\sqrt{2})e^{i\pi/4}$

$$-1 + \sqrt{2}e^{i\pi}.e^{\frac{i\pi}{4}} = -1 + \sqrt{2}e^{i5\pi/4}$$

4. $z_4 = (1+i\sqrt{3})^4$

$$= \left(e^{i\pi/3}\right)^4 = 16e^{i4\pi/3}$$

5. $z_5 = \frac{6}{1+i}$

$$= \frac{6e^{i0}}{\sqrt{2}e^{i\pi/4}} = \frac{6}{\sqrt{2}}e^{i-\pi/4} = \frac{3\times\sqrt{2}\times\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$$

$$= 3\sqrt{2e^{i-\pi/4}}$$

6. $z_6 = \left(1+i\sqrt{3}\right)^4.e^{i4\pi/3}$

$$= \left(2e^{i\pi/3}\right)^4.e^{i4\pi/3} = 16e^{i4\pi/3}.e^{i4\pi/3}$$

$= 16e^{i8\pi/3}$ الزاوية أكبر دورة لأن البسط ضعفي المقام $= 16e^{i2\pi/3}$

7. $z_7 = \left[\frac{1+i}{\sqrt{3}+i}\right]^5$

$$= \left[\frac{\sqrt{2}.e^{i\pi/4}}{2e^{i\pi/6}}\right]^5 = \left[\frac{\sqrt{2}}{2}e^{i\pi/12}\right]^5 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^5.e^{i5\pi/12}$$

$$= \frac{4\sqrt{2}}{32}e^{i5\pi/12}$$

8. $z_8 = \frac{\left(2\sqrt{3}+2i\right)^5}{(1-i)^4}$

$$= \frac{\left(4e^{i\pi/6}\right)^5}{\left(\sqrt{2}e^{-i\pi/4}\right)^4} = \frac{4^5e^{i5\pi/6}}{4e^{-i\pi}} = 4^4e^{i11\pi/6}$$

$= 256e^{-i\pi/6}$:بالتحويل إلى القياس الأساسي

9. $z_9 = -12e^{i\pi/4} = 12e^{i5\pi/4}$

10. $z_{10} = 3ie^{i\pi/3}$

$$= 3e^{i\pi/3} = 3e^{i\pi/3}.e^{i\pi/2} = 3e^{i5\pi/6}$$

تمرين حوِّل إلى الشكل الأسي:

عندما تكون الطويلة سالبة
نضربها بـ-1 ونضيف π للزاوية.

1. $z = \left(1-\sqrt{3}\right)\left(\cos\frac{\pi}{5} - i\sin\frac{\pi}{5}\right)$

$$z = -1 + \sqrt{3}e^{i\pi}\left(\cos\frac{-\pi}{5} + i\sin\frac{-\pi}{5}\right) == -1 + \sqrt{3}e^{i\pi}.e^{-i\pi/5}$$

$$= \sqrt{3} - 1e^{i\left(\pi-\frac{\pi}{5}\right)} = \sqrt{3} - 1e^{i4\pi/5}$$

2. $z = 2\left(\sin\frac{\pi}{8} - i\cos\frac{\pi}{8}\right)$

$$z = 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{8}\right) - i\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{8}\right)\right) = \left(\cos\frac{3\pi}{8} - i\sin\frac{3\pi}{8}\right) = 2\left(\cos\frac{-3\pi}{8} + i\sin\frac{-3\pi}{8}\right)$$

$$= 2e^{i\left(\frac{-3\pi}{8}\right)}$$

3. $z = 3\left(\sin\frac{\pi}{5} - i\sin\frac{\pi}{5}\right)$

$$z = 3\sin\frac{\pi}{5}(1-i) = 3\sin\frac{\pi}{5}.\sqrt{2}\left(\cos\frac{-\pi}{4} + i\sin\frac{-\pi}{4}\right) = 3\sqrt{3}\sin\frac{\pi}{5}e^{-i\pi/4}$$

4. $z = -2\left(\cos\frac{\pi}{5} - i\sin\frac{\pi}{5}\right)$

$$z = 2e^{i\pi}\left(\cos\frac{-\pi}{5} + i\sin\frac{-\pi}{5}\right) = 2e^{i\pi}.e^{-i\pi/5} = 2e^{i4\pi/5}$$

5. $z = \left(\sqrt{3}-i\right)^5 = \left(2e^{-i\pi/6}\right)^5 = 32e^{-i5\pi/6}$

6. $z = -3e^{i\pi/5} = 3e^{+i6\pi/5}$

13 دستوا أويلر

نعلم أنّ:

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

مرافق الطرفين

$$e^{-i\theta} = \cos\theta - i\sin\theta$$

بالجمع

$$e^{i\theta} + e^{-i\theta} = 2\cos\theta$$

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$$

بالطرح

$$e^{i\theta} - e^{-i\theta} = 2i\sin\theta$$

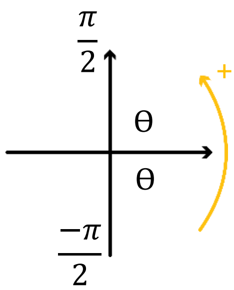
$$\sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

تمرين محلول صفحة 116 ليكن θ عدداً من المجال $\left]\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$. أعطِ الشكل الأسي للعدد العقدي $z = 1 + e^{2i\theta}$

$$z = 1 + e^{i\theta}.e^{i\theta} = e^{i\theta}\left(\frac{1}{e^{i\theta}} + e^{i\theta}\right) = e^{i\theta}\left(e^{-i\theta} + e^{i\theta}\right)$$

حسب أويلر $z = e^{i\theta}(2\cos\theta) = 2\cos e^{i\theta}$

$$\cos\theta > 0$$

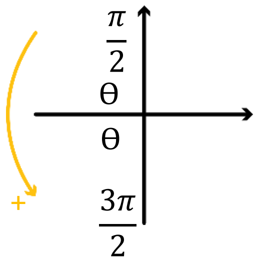


طلب إضافي لو كان $\theta \in \left]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right[$

$$z = 2\cos\theta\, e^{i\theta}$$

$$\cos\theta < 0$$

$$z = -2\cos\theta\, e^{i(\pi+\theta)}$$



* اطّلع على التمرين A **الهام** الموجود في الصفحة قبل الأخيرة *

تمرين 5 صفحة 122 اكتب بالشكل الجبري العددين:

1 $z = \frac{\cos x + i\sin x}{\cos x - i\sin x}$

$$z = \frac{\cos x + i\sin x}{\cos(-x) + i\sin(-x)} = \cos(2x) + i\sin(2x)$$

2 $z = (3+i)^4$

$$z = [(3+i)^2]^2 = (9 + 6i - 1)^2 = (8 + 6i)^2$$

$$z = 64 + 96i - 36 = 28 + 96i$$

تمرين 3 صفحة 122 بسِّط كتابة العدد العقدي: $Z = \frac{1+\cos x - i\sin x}{1+\cos x + i\sin x}$ موضحاً قيم x التي تجعل المقدار موجوداً.

$$1 + \cos x + i\sin x = 0 \Longrightarrow \cos x + i\sin x = 1 \Longrightarrow e^{ix} = e^{i\pi}$$

من تساوي عددين عقديين

$x = \pi + 2\pi k$; k صحيح

مجموعة تعريف x هي $R\backslash[\pi + 2\pi K]$

تساوي عددين عقديين:

$$(z_1 = z_2) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} r_1 = r_2 \\ \theta_1 = \theta_2 + 2\pi k \end{pmatrix}$$

التبسيط:

$$Z=\frac{1+e^{-ix}}{1+e^{ix}}=\frac{1+\frac{1}{e^{ix}}}{1+e^{ix}}$$

$$Z=\frac{\frac{e^{ix}+1}{e^{ix}}}{1+e^{ix}}\Rightarrow Z=\frac{e^{ix}+1}{e^{ix}}\times\frac{1}{1+e^{ix}}=\frac{1}{e^{ix}}$$

طريقة ثانية:

$$Z=\frac{2\cos^2\frac{x}{2}-2i\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{2\cos^2\frac{x}{2}+2i\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}=\frac{2\cos\frac{x}{2}\left(\cos\frac{x}{2}-i\sin\frac{x}{2}\right)}{2\cos\frac{x}{2}\left(\cos\frac{x}{2}+i\sin\frac{x}{2}\right)}=\frac{\cos\frac{-x}{2}+i\sin\frac{-x}{2}}{\cos\frac{x}{2}+i\sin\frac{x}{2}}\Rightarrow Z=\cos -x+i\sin -x$$

$$=e^{-ix}$$

14 المعادلات

حل معادلة درجة أولى بمجهول واحد المجاهيل في طرف والمعاليم في طرف.

تمرين حل في C:

$$iz-2=z+i$$

$$iz-z=i+2\Rightarrow z(i-1)=i+2\Rightarrow z=\frac{2+i}{i-1}\Rightarrow z=\frac{2+i}{-1+i}\Rightarrow z=\frac{(2+i)(-1-i)}{(-1+i)(-1-i)}$$

$$=\frac{-2-2i-i-i^2}{2}=\frac{-1}{2}-\frac{3}{2}i$$

حل معادلة درجة ثانية

تمرين حل في C:

1. $iz^2-3z=0\Rightarrow z(-iz-3)=0$ إمّا $z=0$ أو $z=-3i \Leftarrow z=\frac{3}{i}$
2. $z^2-16=0\Rightarrow z^2=16\Rightarrow$ إمّا $z=-4$ أو $z=4$
3. $z^2+4=0\Rightarrow z^2=-4\Rightarrow z^2=4i^2\Rightarrow$ إمّا $z=-2i$ أو $z=2i$
4. $z^2=9i$ لا يوجد حل مباشر للمعادلة، لكن توجد طريقة لحلها

حل معادلة درجة ثانية من الشكل $z^2=a+ib$ [إيجاد الجذور التربيعية لعدد عقدي $a+ib$]

فكرة الحل: نشكل ثلاث معادلات ونحلها.

نفرض $z=x+iy$

$$(x+iy)^2 = a+ib$$

$$x^2 - y^2 = a \cdots\cdots 1$$

$$x^2 + y^2 = \sqrt{a^2+b^2} \cdots\cdots 2$$

$$2xy = b \cdots\cdots 3$$

نجمع المعادلتين 1 و2 نحصل على x، نعوض في 3 نحصل على y ثم نعوّض x, y في z

تمرين 14 صفحة 124 أولاً: حل في C المعادلات $z^2 = w$ في الحالات الاتية:

1) $z^2 = -3+4i$

نفرض $z = x+iy$

$$\Longrightarrow (x+iy)^2 = -3+4i$$

نشكل المعادلات:

$$x^2 - y^2 = -3 \cdots\cdots 1$$

$$x^2 + y^2 = \sqrt{16+9} = 5 \cdots\cdots 2$$

$$2xy = 4 \cdots\cdots 3$$

بجمع المعادلتين 1 و2 نجد: $2x^2 = 2 \Longrightarrow x^2 = 1$

إمّا $x = 1$ أو $x = -1$

عندما $x = 1$ نعوض في 3: $2(1)y = 4 \Longrightarrow y = 2$

الجذر الأول $z_1 = 1+2i$

وعندما $x = -1$ نعوض في 3: $2(-1)y = 4 \Longrightarrow y = -2$

الجذر الثاني $z_2 = -1-2i$

ملاحظة

الجذران التربيعيان للمعادلة $z^2 = a+ib$ متعاكسان بالإشارة

2) $z^2 = -21-20i$

$$z = x+iy$$

$$\Longrightarrow (x+iy)^2 = -21-20i$$

$$x^2 - y^2 = 21 \cdots\cdots 1$$

$$x^2 + y^2 = \sqrt{441+400} = \sqrt{841} = 29 \cdots\cdots 2$$

$$2xy = -20 \cdots\cdots 3$$

بجمع المعادلتين 1 و2 نجد: $2x^2 = 8 \Longrightarrow x^2 = 4$

إمّا $x = 2$ أو $x = -2$

عندما $x = 2$ نعوض في 3: $2(2)y = 20 \Longrightarrow y - 5$

الجذر الأول $z_1 = 2 - 5i$

وعندما $x = -2$ نعوض في (3): $2(-2)y = -4y = -20 \Longrightarrow y = 5$

الجذر الثاني $z_2 = -2 + 5i$

حل معادلة درجة ثانية من الشكل $az^2 + bz + c = 0 \;,\; a \neq 0$

نحسب Δ حيث: $\Delta = b^2 - 4a.c$

ونميِّز أربعة حالات:

① $\Delta > 0$ (حقيقي موجب تماماً)

للمعادلة جذران حقيقيان

$$z_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \quad , \quad z_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

② $\Delta = 0$

للمعادلة جذر مضاعف

$$z = \frac{-b}{2a}$$

③ $\Delta < 0$ (حقيقي سالب تماماً)

للمعادلة جذران عقديان

$$z_1 = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a} \quad , \quad z_2 = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a}$$

④ $\Delta = a + ib$

نوجد الجذور التربيعية لـΔ وذلك بتشكيل 3 معادلات وحلها

ثم نعوض في $z_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \quad , \quad z_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$

ملاحظة

جذرا المعادلة $az^2 + bz + c = 0$ مترافقان إذا تحقق الشرطان:

1. الأمثال a, b, c حقيقية.

2.

تمرين 2 صفحة 118 حل في C كلّاً من المعادلات الاتية:

① $2z^2 - 6z + 5 = 0$

$$\Delta = b^2 - 4a.c = 36 - 4(2)(5) = -4 < 0$$

$$\sqrt{-\Delta} = 2$$

$$z_1 = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a} = \frac{6 + 2i}{4} = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}i \quad , \quad z_2 = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a} = \frac{6 - 2i}{4} = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}i$$

② $z^2 - 2(\cos\theta)z + 1 = 0$

$$z^2 - 2(\cos\theta)z + \cos^2\theta - \cos^2\theta + 1 = 0$$
$$(z - \cos\theta)^2 - \cos^2\theta + 1 = 0$$
$$(z - \cos\theta)^2 + \sin^2\theta = 0$$
$$(z - \cos\theta)^2 = -\sin^2\theta$$
$$(z - \cos\theta)^2 = i^2\sin^2\theta$$

يمكن الحل بـΔ

إمّا $z - \cos\theta = i\sin\theta$ أو $z - \cos\theta = -i\sin\theta$

$z = \cos\theta + i\sin\theta$ ، $z = \cos\theta - i\sin\theta$

③ $z^2 - 2z + 3 = 0$

$$\Delta = b^2 - 4a.c = 4 - 4(1)(3) = -8 < 0$$
$$\sqrt{-\Delta} = 2\sqrt{2}$$

$$z_1 = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a} = \frac{2 + 2\sqrt{2}i}{2} = 1 + \sqrt{2}i \quad , \quad z_2 = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a} = \frac{2 - 2\sqrt{2}i}{2} = 1 - \sqrt{2}i$$

④ $z^2 - 2(1+\sqrt{2})z + 2(\sqrt{2}+2) = 0$

$$\Delta = b^2 - 4a.c = 4(1+\sqrt{2})^2 - 4(2)(\sqrt{2}+2) = 4(1 + 2\sqrt{2} + 2) - 8\sqrt{2} - 16$$
$$= 4 + 8\sqrt{2} + 8 - 8\sqrt{2} - 16 = -4 \Longrightarrow \sqrt{-\Delta} = 2$$
$$z_1 = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a} = \frac{2(1+\sqrt{2}) + 2i}{2} = (1+\sqrt{2}) + i$$
$$z_2 = \overline{z}_1 = (1+\sqrt{2}) - i$$

تمرين 14 صفحة 124 ثانياً: حل في C المعادلات الاتية:

① $z^2 + (1+4i)z - 5 - i = 0$

$$\Delta = b^2 - 4a.c = (1+4i) - 4(1)(-5-i) = 1 + 8i - 16 + 20 + 4i = 4 + 1 + 12i = 5 + 12i$$

نفرض $\sqrt{\Delta} = x + iy$

$$(x+iy)^2 = 5 + 12i$$
$$x^2 - y^2 = 5 \cdots\cdots ①$$
$$x^2 + y^2 = \sqrt{25 + 144} = 13 \cdots\cdots ②$$
$$2xy = 12 \cdots\cdots ③$$

بجمع المعادلتين ① و② نجد: $2x^2 = 18 \Longrightarrow x^2 = 9$

إمّا $x = 3$ أو $x = -3$

* عندما $x = 3$ نعوض في ③: $2(3)y = 12 \Longrightarrow y = 2$

** عندما $x = -3$ نعوض في ③: $2(-3)y = 12 \Longrightarrow y = -2$

ومنه نجد من* $\sqrt{\Delta_1} = 3 + 2i$ ⟸ نختار أحدهما

ومنه نجد من ** $\sqrt{\Delta_2} = -3 - 2i$

نعوض في:

$$z_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(1+4i) + 3 + 2i}{2} = 1 - i \quad , \quad z_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(1+4i) - 3 - 2i}{2} = -2 - 3i$$

② $2iz^2 + (3+7i)z + 4 + 2i = 0$

$$\Delta = b^2 - 4a.c = (3+7i) - 4(2i)(4+2i) = \big(9 + 42i - 49 - 8i(4+2i)\big)$$
$$= 9 + 42i - 49 - 32i + 16 \Longrightarrow \Delta = -24 + 10i$$

$\sqrt{\Delta} = x + iy$ **نفرض**

$$(x+iy)^2 = -24 + 10i$$

$$x^2 - y^2 = -24 \cdots\cdots ①$$

$$x^2 + y^2 = \sqrt{25+144} = 26 \cdots\cdots ②$$

$$2xy = 10 \cdots\cdots ③$$

بجمع المعادلتين ① و② نجد:

$$x^2 = 1$$

$$x = 1 \Longrightarrow y = 5$$

$\boxed{\sqrt{\Delta_1} = 1 + 5i}$ $\Longleftarrow$ **نختار أحد الحلول** ، $\sqrt{\Delta_2} = -1 - 5i$

نضرب البسط والمقام بـi

$$z_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-3-7i+1+5i}{4i} = \frac{-2-2i}{4i} = \frac{-1}{2} + \frac{1}{2}i$$

نضرب البسط والمقام بـi

$$z_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-3-7i-1-5i}{4i} = \frac{-4-12i}{4i} = \frac{-1-3i}{i} = -3 + i$$

طريقة ثانية لطرح السؤال

إذا كان $-24 + 10i = (1+5i)^2$ **حل في** C **:** $2iz^2 + (3+7i)z + 4 + 2i = 0$.

الحل:

$$\Delta = \cdots$$

$$\vdots$$

$$\Delta = -24 + 10i$$

من الفرض $-24 + 10i = (1+5i)^2$

$$\sqrt{-24+10i} = 1 + 5i$$

$$\sqrt{\Delta} = 1 + 5i$$

$$\vdots$$

$$z_1 = \cdots \quad , \quad z_2 = \cdots$$

الفكرة من السؤال هي توفير وقت من أجل إيجاد الجذور التربيعية لـΔ

فكرة 1: **إذا كان z_1 وz_2 هما حلول المعادلة** $az^2 + bz + c = 0$ **فإنّه يمكن كتابة المعادلة على الشكل:**

$a(z - z_1)(z - z_2) = 0 \Longleftarrow$ **طريقة تمثيل ثلاثي الحدود**

فكرة 2: **إذا كان** $az^2 + bz + c = 0$ **فإنًّ:**

$$\boxed{z_1 + z_2 = \frac{-b}{a} \quad , \quad z_1 . z_2 = \frac{c}{a}}$$

الفائدة: **استنتاج أحد الجذور إذا عُلم الاخر أو لإيجاد الثوابت** b, a

التمرين الثالث صفحة 208 حل في مجموعة الأعداد العقدية C المعادلة ذات المجهول z التالية:

$z^2 - 2(1-\sqrt{3})z + 8$ لاحظ أنَّ: $(1+\sqrt{3})^2 = 4 + 2\sqrt{3}$

الحل:

$$\Delta = b^2 - 4a.c = 4(1-\sqrt{3})^2 - 4(1)(8) = 4(1 - 2\sqrt{3} + 3) - 32 = 4 - 8\sqrt{3} + 12 - 32 = -16 - 8\sqrt{3}$$

$$\Delta = -4(4 + 2\sqrt{3}) \Rightarrow -\Delta = 4(4 + 2\sqrt{3})$$

$$\sqrt{-\Delta} = 2\sqrt{4 + 2\sqrt{3}}$$

ولدينا من الفرض: $(1-\sqrt{3})^2 = 4 + 2\sqrt{3}$

$$\sqrt{4 + 2\sqrt{3}} = 1 + \sqrt{3}$$

$$2\sqrt{4 + 2\sqrt{3}} = 2 + 2\sqrt{3}$$

$$\sqrt{-\Delta} = 2 + 2\sqrt{3}$$

$$z_1 = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a} = \frac{2 - 2\sqrt{3} - i(2 + 2\sqrt{3})}{2}$$

$$z_1 = \frac{2 - 2\sqrt{3} - 2i - 2\sqrt{3}i}{2} = 1 - \sqrt{3} - i - \sqrt{3}i$$

$$z_1 = 1 - \sqrt{3} - i(1 + \sqrt{3})$$

$$z_2 = \overline{z_1} = 1 - \sqrt{3} + i(1 + \sqrt{3})$$

تمرين 1 صفحة 118 حل في C جملة المعادلتين بالمجهولين z و z'.

$$\begin{cases} 3z + z' = 5 + 2i \cdots\cdots (1) \\ -z + z' = 1 - 2i \cdots\cdots (2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3z + z' = 5 + 2i \cdots\cdots (1) \\ z - z' = -1 + 2i \cdots\cdots (2)' \end{cases}$$

بالجمع بين المعادلتين نجد:

$$4z = 4 + 4i \Rightarrow z = 1 + i$$

نعوض في (2):

$$-1 - i + z' = 1 - 2i$$

$$z' = 2 - i$$

تمرين 3 صفحة 118 جِد عددين عقديين p و q كي تقبل المعادلة $z^2 + pz + q = 0$ العددين $1 + 2i$ و $3 - 5i$ جذرين لها.

الحل: نفرض $z_1 = 1 + 2i$ و $z_2 = 3 - 5i$

$$* \; z_1 + z_2 = \frac{-b}{a} \Rightarrow 4 - 3i = \frac{-p}{1} \Rightarrow p = -4 + 3i$$

$$* \; z_1.z_2 = \frac{c}{a} \Rightarrow (3 - 5i)(1 + 2i) = \frac{q}{1} \Rightarrow q = 13 + i$$

طريقة ثانية:

$$z^2 + pz + q = a(z - z_1)(z - z_2)$$

$$= (z - 1 - 2i)(z - 3 + 5i)$$

ثم نطابق

تمرين 10 صفحة 123 نتأمّل كثير الحدود $P(z) = z^4 - 19z^2 + 52z - 40$

1. عيِّن عددين حقيقيين a و b يحققان $P(z) = (z^2 + az + b)(z^2 + 4z + 2a)$
2. حل في C المعادلة $P(z) = 0$

الحل: الطلب 1:

$$P(z) = (z^2 + az + b)(z^2 + 4z + 2a) = z^4 + 4z^3 + 2az^2 + az^3 + 4az^2 + 2a^2z + bz^2 + 4bz + 2ab$$

$$P(z) = z^4 + (4 + a)z^3 + (6a + b)z^2 + (2a^2 + 4b)z + 2ab$$

بالمطابقة مع $P(z) = z^4 - 19z^2 + 52z - 40$

$4 + a = 0 \cdots\cdots (1)$ $\qquad$ $6a + b = -19 \cdots\cdots (2)$

$2a^2 + 4b = 52 \cdots\cdots (4)$ $\qquad$ $2ab = -40 \cdots\cdots (3)$

من (1) نجد $a = -4$ نعوض a في (3) نجد $2(-4)b = -40$ نجد $b = 5$

نتحقق في (2) و (4) نجد $-40 = -40$ محققة و $-24 + 5 = -19 \Leftarrow$ ومنه $P(z) = (z^2 - 4z + 5)(z^2 + 4z - 8)$

الطلب 2:

$$(z^2 - 4z + 5)(z^2 + 4z - 8) = 0$$

ومنه إمّا: $z^2 + 4z - 8 = 0$

$$\Delta = 16 + 32 = 48 \Longrightarrow \sqrt{\Delta} = \sqrt{48} = 4\sqrt{3}$$

$$z_1 = \frac{-4 + 4\sqrt{3}}{2} = -2 + 2\sqrt{3} \quad , \quad z_2 = \frac{-4 - 4\sqrt{3}}{2} = -2 - 2\sqrt{3}$$

أو $z^2 - 4z + 5 = 0$

$$\Delta = 16 - 20 = -4 \Longrightarrow \sqrt{-\Delta} = 2$$

$$z_3 = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a} = \frac{4 + 2i}{2} = 2 + i \quad , \quad z_4 = \overline{z}_3 = 2 - i$$

تمرين ليكن $z^2 + (1 + 4i)z - 5 - i = 0$، تحقق أنَّ $z = 1 - i$ جذر للمعادلة ثم استنتج الجذر الاخر.

نعوض $z = 1 - i$ في المعادلة

$$(1 - i)^2 + (1 + 4i)(1 - i) - 5 - i = 0$$

$$\vdots$$

$$0 = 0$$

ومنه $z = 1 - i$ جذر للمعادلة

الجذر الاخر: $z_1 + z_2 = \frac{-b}{a} \Longrightarrow 1 - i + z_2 = \frac{-1-4i}{1}$

$$\Longrightarrow z_2 = -1 - 4i - 1 + i \Longrightarrow z_2 = -2 - 3i$$

تمرين 1 صفحة 122 لتكن النقاط A وB وC وD نقاطاً تمثّل بالترتيب الأعداد العقدية $a = 1$ و $b = e^{i\pi/3}$ و $c = \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ و $d = \frac{\sqrt{3}}{2}e^{-i\pi/6}$.

1. اكتب c بالشكل الأسي ،واكتب d بالشكل الجبري.
2. a. وضّع النقاط A وB وC وD في مستوٍ مزود بمعلم متجانس.

   b. أثبت أنّ الرباعي $OACB$ معين.

الحل: الطلب 1:

$$c = \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \Rightarrow c = \sqrt{3}\left(\frac{3}{2\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}\right) = \sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\right)$$

$$\theta = \frac{\pi}{6} \Rightarrow c = \sqrt{3}e^{i\pi/6}$$

ربع رابع

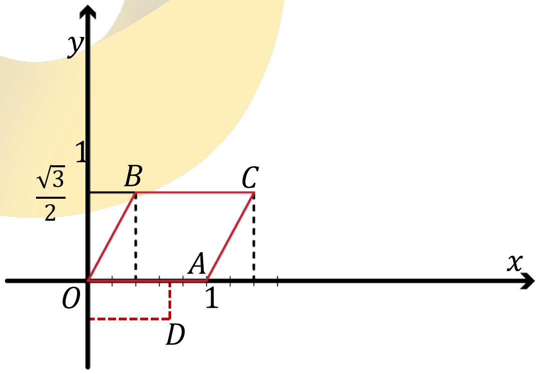
$$d = \frac{\sqrt{3}}{2}e^{-i\pi/6} = \frac{\sqrt{3}}{2}\left[\cos\left(\frac{-\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{-\pi}{6}\right)\right]$$

$$d = \frac{\sqrt{3}}{2}\left[\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}\right] = \frac{3}{4} - \frac{\sqrt{3}}{4}i$$

الطلب 2:

$$a(1,0) \quad , \quad d\left(\frac{3}{4}, \frac{-\sqrt{3}}{4}\right) \quad , \quad c\left(\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$b = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \Rightarrow b\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$



تمرين

$$z^2 + 3 - 4i = 0$$

إذا كان $z_1 = 1 + 5i$ استنتج الجذر الاخر.

الحل:

$z^2 = -3 + 4i$ (جذر تربيعي)

$z_2 = -1 - 5i$ (معاكس)

أو: $z_1 + z_2 = \frac{-b}{a} \Rightarrow 1 + 5i + z_2 = 0$

$z_2 = -1 - 5i$

$z^2 + i = 0$

الحل: $z^2 = -i$

$a = 0 \ , \quad b = -1$

نفرض المعادلات............

شرط أن يكون الرباعي معين هو تساوي أطوال أضلاعه

$O(0,0)$

$A(1,0)$

$B\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$C\left(\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$$\left.\begin{aligned} OA &= \sqrt{1+0} = 1 \\ AC &= \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = 1 \\ CB &= \sqrt{1+0} = 1 \\ OB &= \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = 1 \end{aligned}\right\} OA = AC = CB = OB$$

والرباعي معين

تمرين 2 صفحة 122

1. اكتب بالشكل الأسي حلول المعادلة: $(z^2 + 3\sqrt{3}z + 9)(z^2 - 3\sqrt{3}z + 9)$
2. أثبت أنّ النقاط A وB وC وD التي تمثل جذور المعادلة السابقة هي رؤوس مستطيل.

الحل: الطلب 1:

إمّا $z^2 + 3\sqrt{3}z + 9 = 0$ | أو $z^2 - 3\sqrt{3}z + 9 = 0$

$$\Delta = 27 - 36 = -9 < 0 \Longrightarrow \sqrt{-\Delta} = 3$$

$$z_1 = \frac{-3\sqrt{3} + 3i}{2} = \frac{-3\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i$$

$$r = 3$$

$$\left.\begin{matrix} \cos\theta = \frac{-\sqrt{3}}{2} \\ \sin\theta = \frac{1}{2} \end{matrix}\right\} \theta = \frac{5\pi}{6}$$

$$z_1 = 3e^{i5\pi/6}$$

$$z_2 = \overline{z_1} = 3e^{-i5\pi/6}$$

$$\Delta = 27 - 36 = -9 < 0 \Longrightarrow \sqrt{-\Delta} = 3$$

$$z_4 = \frac{3\sqrt{3} + 3i}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i$$

$$r = 3$$

$$\left.\begin{matrix} \cos\theta = \frac{-\sqrt{3}}{2} \\ \sin\theta = \frac{1}{2} \end{matrix}\right\} \theta = \frac{\pi}{6}$$

$$z_4 = 3e^{i\pi/6}$$

$$z_3 = \overline{z_4} = 3e^{-i\pi/6}$$

الطلب 2:

$$B\left(\frac{-3\sqrt{3}}{2}, \frac{-3}{2}\right) \quad A\left(\frac{-3\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{2}\right)$$

$$D\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{2}\right) \quad C\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}, \frac{-3}{2}\right)$$

انتبه

اختيار الرموز مع الإحداثيات ليس عشوائياً، تابع الفيديو (الأعداد العقديّة 26-المعادلات 7) للتوسع في الفكرة.

$\frac{a+c}{2} \stackrel{?}{=} \frac{b+d}{2} \Longrightarrow$ نعوّض $\Longrightarrow$ محققة

أقطار متناصفة (ومنه الرباعي متوازي أضلاع)

$AC \stackrel{?}{=} BD \Longrightarrow$ نعوّض $\Longrightarrow$ محققة

أقطاره متساوية (ومنه الشكل مستطيل لأنه متوازي أضلاع أقطاره متساوية)

طريقة ثانية:

$\overrightarrow{BC}(3\sqrt{3}, 0)$, $\overrightarrow{AD}(3\sqrt{3}, 0) \Longleftarrow \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC} \Longleftarrow$ الشكل متوازي أضلاع لوجود شعاعين متقابلين متساويين

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD} = 0 \times 3\sqrt{3} + (-3) \times 0 = 0$ فالزاوية A قائمة $\Longleftarrow$ الشكل مستطيل لأنه متوازي أضلاع وفيه زاوية قائمة.

في الطريقة الأولى (الأقطار) لإثبات أنّ الشكل مربع نثبت أنّ الأقطار متعامدة $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BD} = 0$

تمرين 1 صفحة 120 نهدف إلى حل المعادلة $z^3 - 3z^2 + 3z + 7 = 0$ ...... (1)

1. علل وجود كثير حدود من الدرجة الثانية Q يحقق: $Q(z).(z+1) = z^3 - 3z^2 + 3z + 7$
2. عيِّن Q ثم حل المعادلة $Q(z) = 0$
3. لتكن A وB وC نقاط المستوي التي تمثل حلول المعادلة (1) أثبت انّ ABC مثلث متساوي الأضلاع.

الحل: الطلب 1: نعوض $z = -1$ في المعادلة

$$(-1)^3 - 3(-1)^2 + 3(-1) + 7 = 0$$

محققة ومنه $z = -1$ حل للمعادلة

أي يوجد كثير حدود $Q(z)$ درجة ثانية يجعل المعادلة (1) على الشكل $Q(z).(z+1) = 0$

الطلب 2:

$$\begin{array}{r|l} z^3 - 3z^2 + 3z + 7 & z+1 \\ \hline -z^3 \mp z^2 & z^2 - 4z + 7 \\ \hline -4z^2 + 3z + 7 & \\ \pm 4z^2 \pm 4z & \\ \hline 7z + 7 & \\ \mp 7z \mp 7 & \end{array}$$

$$Q(z) = z^2 - 4z + 7$$
$$Q(z) = 0$$
$$z^2 - 4z + 7 = 0$$
$$\Delta = 16 - 4(1)(7) = -12 < 0$$
$$\sqrt{-\Delta} = 2\sqrt{3}$$
$$z_1 = \frac{4 + i2\sqrt{3}}{2} \Longrightarrow z_1 = 2 + i\sqrt{3}$$
$$z_2 = \frac{4 - i2\sqrt{3}}{2} \Longrightarrow z_2 = 2 - i\sqrt{3}$$

الطلب 3: حلول المعادلة 1:

$$z_1 = -1 \Longrightarrow A(-1,0)$$
$$z_1 = 2 + i\sqrt{3} \Longrightarrow B(2, \sqrt{3})$$
$$z_3 = 2 - i\sqrt{3} \Longrightarrow C(2. -\sqrt{3})$$

لمعرفة نوع مثلث نحسب أطوال أضلاعه

نحسب الأطوال: $AB = \sqrt{9+3} = \sqrt{12}$, $AC = \sqrt{9+3} = \sqrt{12}$, $BC = \sqrt{12}$

$$AB = AC = BC$$

والمثلث ABC متساوي الأضلاع.

تمرين 11 صفحة 123 حل في C المعادلة $z^3 - (3+4i)z^2 - 6(3-2i)z + 72i$ إذا علمت انها تقبل حلّاً تخيلياً بحتاً.

نفرض: $z = ai$ **أحد جذور المعادلة**

ومنه بجعل المعادلة: $(z - ai).Q(z) = 0$

$$* \ (z - ai)(z^2 + bz + c) = 0$$
$$z^3 + bz^2 + cz - aiz^2 - aibz - aic = 0$$
$$z^3 + (b - ai)z^2 + (-aib + c)z - aic = 0$$

ولدينا: $z^3 + (-3 - 4i)z^2 + (-18 + 12i)z + 72i$

نطابق مع $z^3 + (b - ai)z^2 + (-aib + c)z - aic = 0$

نشكل المعادلات:

$$1 \ \ b - ai = -3 - 4i$$
$$2 \ \ c - abi = -18 + 12i$$
$$3 \ \ -aci = 72i$$

من 1 (من تساوي عددين عقديين) $\Longrightarrow b = -3 \Longrightarrow a = +4$

نعوض a في 3 نجد: $-4ci = 72i \Longrightarrow c = -18$

نتحقق في 2 : $-18 - 4(-3)i = -18 + 12i$ **محققة**

نعوض في * : $(z - 4i)(z^2 - 3z - 18) = 0$

إمّا $z-4i=0 \Longrightarrow z_1=4i$

أو $z^2-3z-18=0$

بالتحليل المباشر: $(z-6)(z+3)=0$

ومنه إمّا $z_2=-3$ أو $z_3=6$

حلول المعادلة هي $\{4i,-3,6\}$

طريقة ثانية: نعوض $z=ai$ في المعادلة المعطاة

$$(-a^3+4a^2-18a+72)i+3a^2-12a=0$$

من تساوي عددين عقديين

$$3a^2-12a=0 \cdots\cdots (1)$$

$$-a^3+4a^2-18a+72=0 \cdots\cdots (2)$$

$$3a(a-4)=0$$

إمّا $a=0$ نعوض في (2) $\Longleftarrow$ غير محققة

أو $a=4$ نعوض في (2) $\Longleftarrow$ محققة

ومنه $z=4i$ حل للمعادلة $\Longleftarrow$ نقسم المعادلة ... $z^3-(3+4i)z^2-6$ على $z-4i$

$$\begin{array}{r|l}
 & z^2-3z-18 \\
\hline
z-4i & z^3-(3+4i)z^2-6(3-2i)z+72i \\
 & \mp z^3 \pm 4iz^2 \\
\hline
 & -3z^2-6(3-2i)z+72i \\
 & \pm 3z^2 \mp 12iz \\
\hline
 & -18z+72i \\
 & \pm 18z \mp 72i \\
\hline
 & 0
\end{array}$$

ومنه $(z-4i)(z^2-3z-18)=0$ ثمّ نكمل كما في الطريقة الأولى.

ملاحظة

حل معادلات الدرجة الثالثة والرابعة

- يجب أن نحلل المعادلة إلى جداء قوسين
- يجب معرفة أحد جذور المعادلة:

1. يعطينا الجذر بشكل صريح مثلاً $z=2$ جذر للمعادلة
2. الجذر معطى بشكل غير مباشر مثلاً:

$(z+1).Q(z)=0 \Longrightarrow z=-1$ جذر

3. يُعطى للجذر صفة مثلاً: الجذر تخيلي بحت $\Longleftarrow$ نفرض $z=ai$
4. التجريب: $z=1, z=-1, \ldots.$

تمرين 2 صفحة 120 نهدف إلى حل المعادلة $z^4-6z^3+24z^2-18z+63=0$ ②

1. تحقق أنَّ $i\sqrt{3}$ جذر للمعادلة ② ثم استنتج جذر اخر لها.
2. استنتج وجود كثير حدود من الدرجة الثانية Q يجعل المعادلة ② تكتب بالشكل $(z^2+3).Q(z)=0$.
3. حل المعادلة ②. لتكن النقاط A وB وC وD نقاط المستوي التي تمثل حلول المعادلة ②، أثبت أنَّ هذه النقاط تقع على دائرة واحدة. عيِّن مركزها ونصف قطرها.

الحل: الطلب 1: نعوض:

$$\left(i\sqrt{3}\right)^4-6\left(i\sqrt{3}\right)^3+24\left(i\sqrt{3}\right)^2-18i\sqrt{3}+63=0$$

$$9+i18\sqrt{3}-72-18i\sqrt{3}+63=0$$

$0=0$ محققة

ومنه $z_1=i\sqrt{3}$ هو حل للمعادلة والجذر الاخر هو مرافقه أي $z_2=-i\sqrt{3}$

فكرة: إذا كان لمعادلة الدرجة الرابعة ذات الأمثال الحقيقية جذر عقدي z_0 فإنَّ مرافقه هو أيضاً جذر للمعادلة

الطلب 2:

ملاحظة

في حال طلب التعليل كما في المعادلة رقم ① نكتب:

$z=i\sqrt{3}$ هو حل $\Leftarrow$ $(z-i\sqrt{3})$ هو أحد العوامل.

و $z=-i\sqrt{3}$ هو حل $\Leftarrow$ $(z+i\sqrt{3})$ هو أحد العوامل.

تصبح المعادلة $(z-i\sqrt{3})(z+i\sqrt{3})Q(z)=0 \Leftarrow (z^2+3).Q(z)=0$

نقسم إقليدياً:

$$\begin{array}{r|l}
 & z^2-6z+21 \\
z^2+3 & z^4-6z^3+24z^2-18z+63 \\
 & -z^4 \qquad \mp 3z^2 \\
 & -6z^3+21z^2-18z+63 \\
 & \pm 6z^3 \qquad \pm 18z \\
 & 21z^2+63 \\
 & -21z^2 \mp 63 \\
 & 0
\end{array}$$

$\longrightarrow$ $Q(z)=z^2-6z+21$

حلول المعادلة (2) هي نفسها حلول $(z^2+3).Q(z)=0$

ومنه $(z^2+3)(z^2-6+21) \Leftarrow$ إمّا: $z^2-6+21=0$ أو: $z^2+3=0 \Rightarrow z=i\sqrt{3}, z=-i\sqrt{3}$

$$\Delta=36-4(1)(21)=36-84=-48$$

$$\sqrt{-\Delta}=\sqrt{48}=4\sqrt{3}$$

$$z=\frac{-b-i\sqrt{-\Delta}}{2a}=\frac{6-4\sqrt{3}i}{2}$$

$$z_3=\frac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2a}$$

$$z_3=\frac{6-4\sqrt{3}i}{2}$$

$$z_4=\frac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2a}$$

$$z_4=\frac{6+4\sqrt{3}i}{2}$$

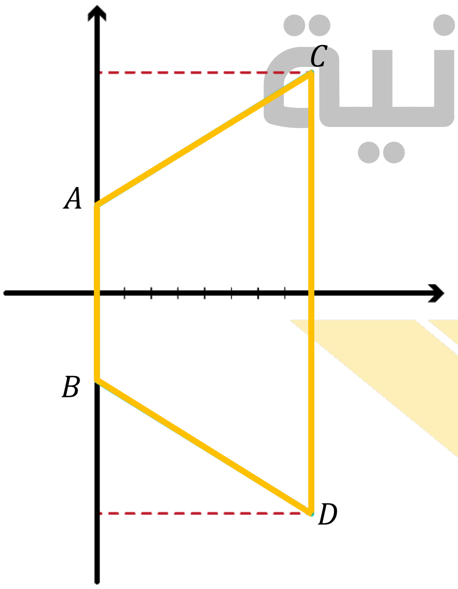
$z_3 = 3-2i\sqrt{3} \Longrightarrow$ يمكن تطبيق فكرة الرافق $\Longleftarrow z_4 = 3+2i\sqrt{3}$

ومنه حلول المعادلة (2) هي $\{i\sqrt{3}, -i\sqrt{3}, 3+2\sqrt{3}i, 3+2\sqrt{3}i\}$

طلب 3:

$z = -i\sqrt{3} \Longrightarrow B(0,-\sqrt{3})$ $\qquad$ $z = i\sqrt{3} \Longrightarrow A(0,\sqrt{3})$

$z = 3-2\sqrt{3}i \Longrightarrow D(3,-2\sqrt{3})$ $\qquad$ $z = 3+2\sqrt{3}i \Longrightarrow C(3,2\sqrt{3})$



وتناظر بالنسبة لـ xx' $\qquad AB \parallel CD$

أضلاع مسدس متساوية $\begin{cases} AC = \sqrt{9+3} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3} \\ AB = \sqrt{12} = 2\sqrt{3} \\ BD = \sqrt{12} = 2\sqrt{3} \end{cases}$

$$CD = \sqrt{\left(4\sqrt{3}\right)^2} = 4\sqrt{3}$$

الرباعي $ABCD$ نصف مسدس منتظم تمر من رؤوسه دائرة مركزها منتصف CD

$$\Omega(3,0) \Longleftarrow \Omega\left(\frac{3+3}{2}, 0\right)$$

نصف قطرها $R = \Omega C = \Omega A = \Omega B = 2\sqrt{3}$

15 إيجاد الجذور بالشكل الأسي $Z^n = a+ib$

فكرة: إيجاد الجذور (الحلول) بالشكل الأسي للمعادلة $Z^n = a+ib$:

1. نحوّل $a+ib$ إلى الشكل الأسي.
2. نفرض $z = re^{i\theta}$
3. نعوض في المعادلة المعطاة ونستفيد من تساوي عددين عقديين

قيم k هي .... $0,1,2,$ و عدد قيم k من درجة المعادلة.

تمرين: حل في C وبالشكل الأسي $z^2 = \sqrt{3}+i$

نفرض $z = re^{i\theta}$

$$\sqrt{3}+i = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\right) = 2e^{i\pi/6}$$

$$(re^{i\theta})^2 = 2e^{i\pi/6}$$

$$r^2e^{2i\theta} = 2e^{i\pi/6}$$

من تساوي عددين عقديين: $\begin{matrix} * \ r^2 = 2 \Longrightarrow r = \sqrt{2} \\ * \ 2\theta = \frac{\pi}{6}+2\pi k \Longrightarrow \theta = \frac{\pi}{12}+\pi k \end{matrix}$

$k = 1 \Longrightarrow \theta = \frac{13\pi}{12} \Longrightarrow z_2 = \sqrt{2}e^{\frac{i13\pi}{12}}$ $\quad , \quad$ $k = 0 \Longrightarrow \theta = \frac{\pi}{12} \Longrightarrow z_1 = \sqrt{2}e^{\frac{i\pi}{12}}$

تمرين حل في C: $z^3+1=0$

$$z^3=-1$$

$$-1=e^{i\pi}$$

نفرض $z=re^{i\theta}$

$$\left(re^{i\theta}\right)^3=e^{i\pi}\Longrightarrow r^3e^{3i\pi}=e^{i\theta}$$

من تساوي عددين عقديين:

$$*\ r^3=1\Longrightarrow r=1$$
$$*\ 3\theta=\pi+2\pi k$$

$$k=0\Longrightarrow\theta=\frac{\pi}{3}\Longrightarrow z_1=e^{i\pi/3}$$

$$k=1\Longrightarrow\theta=\frac{\pi}{3}+\frac{2\pi}{3}=\frac{3\pi}{3}=\pi\Longrightarrow z_2=e^{i\pi}$$

$$k=2\Longrightarrow\theta=\frac{5\pi}{3}\Longrightarrow z_3=e^{i5\pi/3}$$

تمرين حل المعادلة $z^2=1+i$، ثم حل المعادلة نفسها بطريقة ثانية (شكل أسي) واستنتج النسب المثلثية لـ$\frac{\pi}{8}$.

نفرض $z=x+iy$

$$(x+iy)^2=1+i$$

نشكل المعادلات:

$$x^2+y^2=1\cdots\cdots\ (1)$$

$$x^2-y^2=\sqrt{2}\cdots\cdots\ (2)$$

$$2xy=1\cdots\cdots\ (3)$$

نجمع المعادلتين (1) و (2) $\Longleftarrow 2x^2=1+\sqrt{2}\Longleftarrow x^2=\frac{1+\sqrt2}{2}\Longleftarrow x=\sqrt{\frac{1+\sqrt2}{2}}$

نعوض في (3): $2\sqrt{\frac{1+\sqrt2}{2}}\,y=1\Longleftarrow\sqrt2\sqrt{1+\sqrt2}\,y=1\Longleftarrow y=\frac{1}{\sqrt{2+2\sqrt2}}$

$$z_1=\sqrt{\frac{1+\sqrt2}{2}}+i\frac{1}{\sqrt{2+2\sqrt2}}\quad,\quad z_2=-\sqrt{\frac{1+\sqrt2}{2}}-i\frac{1}{\sqrt{2+2\sqrt2}}$$

الطريقة الثانية: لدينا

$$1+i=\sqrt2e^{i\pi/4}$$

نفرض $z=re^{i\theta}$

نعوض $\left(re^{i\theta}\right)^2=\sqrt2e^{i\pi/4}$

$$r^2e^{2i\theta}=\sqrt2e^{i\pi/4}$$

من تساوي عددين عقديين:

$$*\ r^2=\sqrt2\Longrightarrow r=\sqrt{\sqrt2}$$
$$*\ 2\theta=\frac{\pi}{4}+2\pi k\Longrightarrow\theta=\frac{\pi}{8}+2\pi k$$

$$k=0\Longrightarrow\theta=\frac{\pi}{8}\Longrightarrow z_1=\sqrt{\sqrt2}e^{i\pi/8}$$

$$k=1\Longrightarrow\theta=\frac{9\pi}{8}\Longrightarrow\sqrt{\sqrt2}e^{i9\pi/8}$$

لدينا: $z_1 = \sqrt{\sqrt{2}}\left(\cos\frac{\pi}{8} + i\sin\frac{\pi}{8}\right)$, $z_1 = \sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}} + i\,\frac{1}{\sqrt{2+2\sqrt{2}}}$

ملاحظة

نأخذ z_1 لأن $\cos , \sin$ موجبين في ربع أول $\longleftarrow$ الزاوية المطلوبة $\Leftarrow \frac{\pi}{8}$

نأخذ z_2 إذا كانت الزاوية المطلوبة $\frac{9\pi}{8} \Leftarrow$ ربع ثالث $\Leftarrow \sin , \cos$ سالبين

$$\cos\frac{\pi}{8} = \frac{a}{r} = \frac{\sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}}}{\sqrt{\sqrt{2}}} = \sqrt{\frac{\frac{1+\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{1}}} = \sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}}$$

$$\sin\frac{\pi}{8} = \frac{b}{r} = \frac{\frac{1}{\sqrt{2+2\sqrt{2}}}}{\sqrt{\sqrt{2}}} = \frac{\sqrt{\frac{1}{2+2\sqrt{2}}}}{\sqrt{\sqrt{2}}} = \sqrt{\frac{1}{2\sqrt{2}+4}}$$

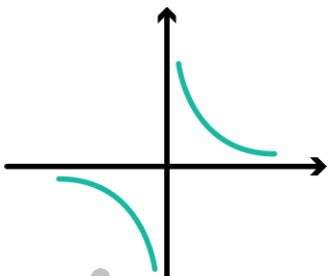
16 تعيين مجموعة النقاط $M(z)$

إحدى الطرق لتعيين مجموعة النقاط $M(z)$ هي فرضية: نفرض $z = x + iy$ بعد التعويض سنحصل على معادلة ديكارتية بدلاً من x , y

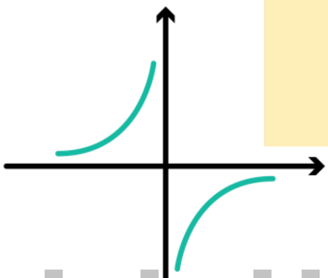
من خلال شكل المعادلة سنحكم على مجموعة النقاط هي مستقيم أو دائرة أو قطع زائد.

شكل معادلة المستقيم	$y = mx + c$, $ax + by + c = 0$
شكل معادلة الدائرة	$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$
شكل معادلة القطع الزائد	$y = \frac{a}{x}$

$y = \frac{a}{x}$; $a > 0$



$y = \frac{a}{x}$; $a < 0$



تمرين 4 صفحة 110 في كل من الحالات الاتية عيِّن مجموعة النقاط M التي يحقق العدد العقدي z الذي يمثلها الشرط المُعطى.

1. $|z| = 3$

نفرض $z = x + iy$ ثم نعوض $|x + iy| = 3$

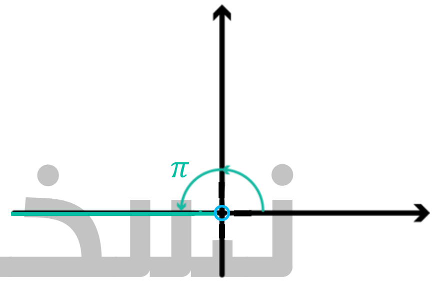
$$\sqrt{x^2 + y^2} = 3$$

نربّع $x^2 + y^2 = 9$ ومنه $M(z)$ تمثل دائرة مركزها $O(0,0)$ ونصف قطرها $R = 3$

3 $\arg z = \pi$

$M(z)$ تمثّل نصف مستقيم

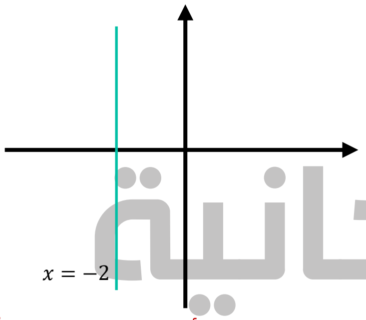
نصنع من ox^+ زاوية π (الأعداد الحقيقية السالبة عدا المبدأ)



2 $Re(z) = -2$

نفرض $z = x + iy \Longleftarrow x = -2$

مجموعة النقاط $M(z)$ تمثّل مستقيم يوازي yy'

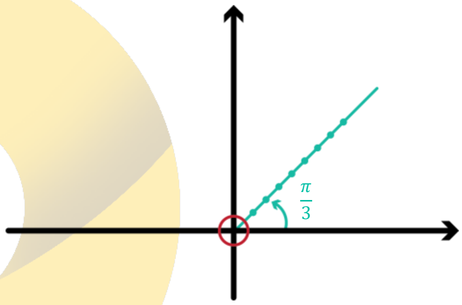


(الرسم غير ضروري لأن السؤال ليس "مثّل")

6 $\arg z = \frac{\pi}{3}$

مجموعة النقاط $M(z)$ تمثل نصف مستقيم يصنع مع ox^+

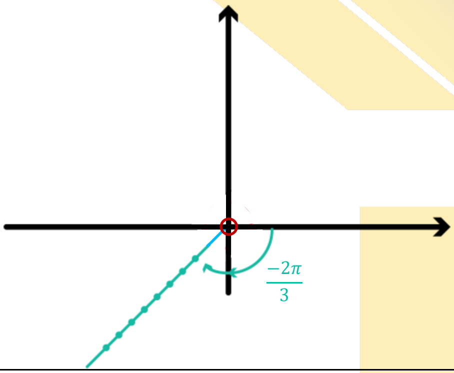
زاوية $\frac{\pi}{3}$ عدا المبدأ.



5 $\arg z = \frac{-2\pi}{3}$

مجموعة النقاط $M(z)$ تمثل نصف مستقيم يصنع مع ox^+

زاوية $\frac{-2\pi}{3}$ عدا المبدأ.



4 $Im(z) = 1$

نفرض $z = x + iy \Longleftarrow y = 1$

مجموعة النقاط $M(z)$ تمثّل مستقيم يوازي xx'

طلب إضافي لرقم 6 جِد المعادلة الديكارتية لـ$M(z)$.

معادلة مستقيم مار من المبدأ $y = mx$

$$m = \tan\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$$

$$y = \sqrt{3}x \quad ; \quad x > 0$$

الفائدة من $x > 0$

1. لكي يكون نصف مستقيم.
2. عدا المبدأ (لا نضع يساوي).

تمرين 8 صفحة 123 ليكن a عدداً عقدياً معطى، لتكن ε مجموعة الأعداد العقدية z التي تحقق:

$$z^2 - a^2 = \overline{z}^2 - \overline{a}^2$$

عيِّن المجموعة ε ومثِّلها في مستوٍ مزود بمعلم.

نفرض

$$a = \alpha + i\beta \qquad z = x + iy$$
$$\overline{a} = \alpha - i\beta \qquad \overline{z} = x - iy$$

$$z^2 - \overline{z}^2 = a^2 - \overline{a}^2$$

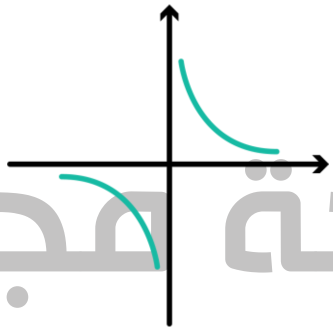
$$(z + \overline{z})(z - \overline{z}) = (a + \overline{a})(a - \overline{a})$$

$$(2x)(2iy) = (2\alpha)(2i\beta) \Longrightarrow 4ixy = 4i\alpha\beta$$

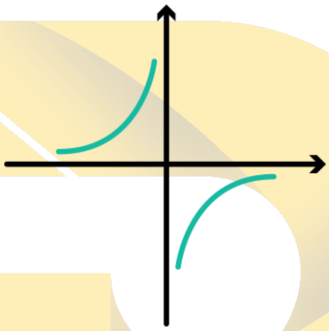
$$xy = \alpha\beta$$

المناقشة:

1. $\alpha.\beta > 0 \Leftarrow M(z)$ **تمثّل قطع زائد:** $y = \frac{\alpha.\beta}{x}$



2. $\alpha.\beta < 0 \Leftarrow M(z)$ **تمثّل قطع زائد:** $y = \frac{\alpha.\beta}{x}$



3. $\alpha\beta = 0 \Leftarrow xy = 0$

إمّا $x = 0 \Leftarrow M(z)$ **تمثّل المحور** yy'

أو $y = 0 \Leftarrow M(z)$ **تمثّل المحور** xx'

تمرين 15 صفحة 124 **في حالة عدد عقدي** $z \neq -1$ **نضع** $Z = \frac{2+\bar{z}}{1+\bar{z}}$ **ونفترض أنّ** $z = x + iy$ **و** $Z = X + iY$ **حيث** Y, X, y, x **هي أعداد حقيقية.**

1. **احسب العددين** X **و** Y **بدلالة العددين** x **و** y.
2. **أثبت أنّ مجموعة النقاط** $M(z)$ **التي يكون عندها** Z **حقيقياً هي مستقيم محذوف منه نقطة.**
3. **أثبت أنّ مجموعة النقاط** $M(z)$ **التي يكون عندها** Z **تخيلياً بحتاً هي دائرة محذوف منها نقطة.**

الحل: الطلب 1:

$$X + iY = \frac{2 + x - iy}{1 + x - iy} = \frac{(2 + x - iy)(1 + x + iy)}{(1 + x - iy)(1 + x + iy)} = \frac{2 + 2x + 2iy + x + x^2 + xiy - iy - iyx + y^2}{(1 + x)^2 + y^2}$$

$$= \frac{x^2 + 3x + y^2 + iy + 2}{(1 + x)^2 + y^2} = \frac{x^2 + 3x + y^2 + 2}{(1 + x)^2 + y^2} + i\frac{y}{(1 + x)^2 + y^2}$$

من تساوي عددين عقديين: $Y = \frac{y}{(1+x)^2+y^2}$, $X = \frac{x^2+3x+y^2+2}{(1+x)^2+y^2}$

الطلب 2: **التخيلي معدوم** $Y = 0 \Leftrightarrow Z$ **حقيقي**

$$\frac{y}{(1+x)^2+y^2}=0 \Longrightarrow y=0$$

$M(z)$ تمثّل المستقيم xx' عدا النقطة $(-1{,}0)$

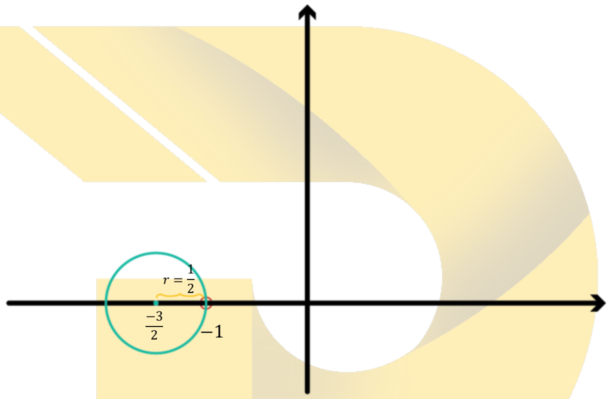
الطلب 3: الحقيقي معدوم $X=0 \Longleftrightarrow Z$ تخيلي بحت

$$x^2+3x+y^2+2=0$$

$$x^2+3x+\left(\frac{3}{2}\right)^2-\left(\frac{3}{2}\right)^2+y^2+2=0$$

$$\left(x+\frac{3}{2}\right)^2+y^2=\frac{1}{4}$$

$M(z)$ تمثّل دائرة مركزها $\Omega\left(-\frac{3}{2},0\right)$ ونصف قطرها $\frac{1}{2}$ عدا النقطة $(-1{,}0)$



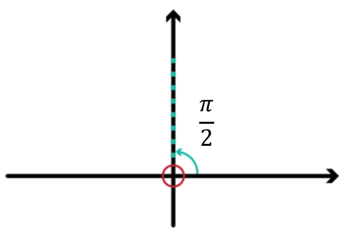
تمرين عيِّن مجموعة النقاط $M(z)$ التي تحقق $\arg(-iz)=0$

$$\arg z+\arg -i=0 \Longrightarrow \arg z=\arg -i \Longrightarrow \arg z=\frac{\pi}{2}$$

$M(z)$ تمثّل نصف مستقيم يصنع مع ox^+ زاوية $\frac{\pi}{2}$ عدا المبدأ (الأعداد التخيلية الموجبة).

المعادلة الديكارتية: $x=x_0 \Longrightarrow \boxed{x=0\,,y>0}$

لأنّ $m=\frac{1}{0}=\frac{\sin\frac{\pi}{2}}{\cos\frac{\pi}{2}}=\tan\frac{\pi}{2}$ (أي الميل غير معرف)



تمرين $z^2-4i=\overline{z}^2+4i$، مثّل مجموعة النقاط $M(z)$.

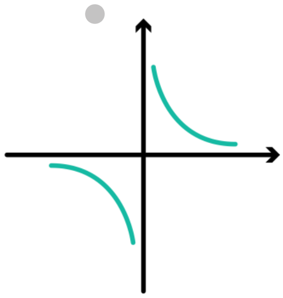
لدينا $z^2-\overline{z}^2=8i$

نفرض $z=x+iy \quad , \quad \overline{z}=x-iy$

$$(z-\overline{z})(z+\overline{z})=8i$$

نعوض $(2iy)(2x)=8i$

$$2>0 \qquad x.y=2 \Longrightarrow \boxed{y=\frac{2}{x}}$$



$M(z)$ تمثّل قطع زائد فرعاه في الربع الأول والثالث

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

m عدد معروف	$m = 0$	m غير معروف
نعوض في معادلة المماس	$y - y_0 = 0$ $y = y_0$	$x = x_0$

* اطّلع على التمرين الموجود في نهاية النوطة *

تمرين 12 صفحة 124 ليكن $\alpha = e^{2i\pi/5}$، نضع $A = \alpha + \alpha^4$ و $B = \alpha^2 + \alpha^3$.

1. أثبت أنّ $1 + \alpha + \alpha^2 + \alpha^3 + \alpha^4 = 0$ واستنتج أنّ AوB هما جذرا المعادلة من الدرجة الثانية $x^2 + x - 1 = 0$ ①
2. عبّر عن A بدلالة $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$.
3. حل المعادلة ① واستنتج قيمة $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$.

الحل: الطلب 1:

$$l_1 = \underbrace{1 + \alpha + \alpha^2 + \alpha^3 + \alpha^4}_{\text{مجموع حدود متتالية هندسية}} = a\left(\frac{1-q^n}{1-q}\right) = 1\left(\frac{1-\alpha^5}{1-\alpha}\right)$$

حدها الأول 1 وأساسها α وعدد حدودها 5

ومنه $l_1 = l_2$

$$l_1 = \frac{1 - e^{i10\pi/5}}{1 - e^{i2\pi/5}} = \frac{1 - 1}{1 - e^{i2\pi/5}} = 0 = l_2$$

$\alpha^5 = 1$

نعوض في A:

$$(\alpha + \alpha^4)^2 + (\alpha + \alpha^4) - 1 \overset{?}{=} 0$$

$$\alpha^2 + 2\alpha^5 + \alpha^8 + \alpha + \alpha^4 - 1 \overset{?}{=} 0$$

$$\alpha^2 + 2(1) + \alpha^3\alpha^5 + \alpha + \alpha^4 - 1 \overset{?}{=} 0$$

$$\alpha^2 + 2 + \alpha^3 + \alpha + \alpha^4 - 1 = 0$$

$$1 + \alpha + \alpha^2 + \alpha^3 + \alpha^4 = 0$$

$$0 = 0$$

محققة ومنه A جذر للمعادلة

نعوض في B: ....ومنه B جذر للمعادلة

الطلب 2:

$$A = \alpha + \alpha^4$$

$$A = e^{i2\pi/5} + e^{i8\pi/5} \qquad \left(\frac{8\pi}{5} - 2\pi = \frac{-2\pi}{5}\right)$$

أويلر

$$A = e^{+i2\pi/5} + e^{-i2\pi/5}$$

$$A = 2\cos\frac{2\pi}{5}$$ ⊕ ربع أول

الطلب 3:

$$x^2 + x - 1 = 0$$

$$x_1 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \ \oplus \quad , \quad x_2 = \frac{-1-\sqrt{5}}{2} \ \ominus$$

$$A = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$$

$$\Longrightarrow 2\cos\frac{2\pi}{5} = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$$

$$\cos\frac{2\pi}{5} = \frac{-1+\sqrt{5}}{4}$$

تمرين A اكتب بالشكل الأسي:

$\theta \in \left]\pi, \frac{3\pi}{2}\right[$

1. $z = 1 - e^{i\theta}$
2. $z = 1 + e^{\frac{i\pi}{4}}$

$1)\ z = 1 - e^{i\frac{\theta}{2}}.e^{i\frac{\theta}{2}}$ نسحب عامل مشترك $e^{i(\text{نصف الزاوية})}$

$$z = e^{i\frac{\theta}{2}}\left(e^{-i\frac{\theta}{2}} - e^{i\frac{\theta}{2}}\right)$$

$$z = -e^{i\frac{\theta}{2}}\left(e^{i\frac{\theta}{2}} - e^{-i\frac{\theta}{2}}\right)$$ نسحب الناقص لبرا

$$z = -2\sin\frac{\theta}{2}e^{i\frac{\theta}{2}}$$

$\theta \in \left]\pi, \frac{3\pi}{2}\right[$

$$z = (-2i)\sin\frac{\theta}{2}e^{i\frac{\theta}{2}}$$

$\frac{\theta}{2} \in \left]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}\right[$

$$z = 2e^{-i\frac{\pi}{2}}\sin\frac{\theta}{2}e^{i\frac{\theta}{2}}$$

$\sin\frac{\theta}{2} > 0$

$$z = 2\sin\frac{\theta}{2}e^{i\left(\frac{-\pi}{2}+\frac{\theta}{2}\right)}$$

طريقة ثانية:

$$1)\ z = -(-1 + e^{i\theta})$$

$$z = e^{i\pi}(e^{i\pi} + e^{i\theta}) = 1 + e^{i(\pi+\theta)}$$

$$z = e^{i\left(\frac{\pi+\theta}{2}\right)}\left(e^{-i\left(\frac{\pi+\theta}{2}\right)} + e^{i\left(\frac{\pi+\theta}{2}\right)}\right)$$

$$z = e^{i\left(\frac{\pi+\theta}{2}\right)}.2\cos\left(\frac{\pi+\theta}{2}\right)$$

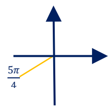
$$z = 2\cos\left(\frac{\pi+\theta}{2}\right)e^{i\left(\frac{\pi+\theta}{2}\right)}$$

ولكنّ

$$\theta \in \left]\pi, \frac{3\pi}{2}\right[\Longrightarrow \pi+\theta \in \left]2\pi, \frac{5\pi}{2}\right[$$

$$\Longrightarrow \frac{\pi+\theta}{2} \in \left]\pi, \frac{5\pi}{4}\right[$$

$\cos\left(\frac{\pi+\theta}{2}\right) < 0 \Longleftarrow$ سالبة cos



$$z = -2\cos\left(\frac{\pi+\theta}{2}\right)e^{i\left(\frac{-\pi}{2}+\frac{\theta}{2}\right)}$$

$$z = -2\sin\left(\frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi+\theta}{2}\right)\right)e^{i\left(\frac{-\pi}{2}+\frac{\theta}{2}\right)}$$

$$z = -2\sin -\frac{\theta}{2}e^{i\left(\frac{-\pi}{2}+\frac{\theta}{2}\right)}$$

$$z = 2\sin\frac{\theta}{2}e^{i\left(\frac{-\pi}{2}+\frac{\theta}{2}\right)}$$

$$\pi + \frac{\pi+\theta}{2} \qquad \frac{3\pi+\theta}{2} \qquad \frac{3\pi}{2}+\frac{\theta}{2} \qquad \frac{-\pi}{2}+\frac{\theta}{2}$$

$$2)\ z = 1 + e^{i\frac{\pi}{8}}.e^{i\frac{\pi}{8}}$$

$$z = e^{i\frac{\pi}{8}}\left(\frac{1}{e^{i\frac{\pi}{8}}} + e^{i\frac{\pi}{8}}\right)$$

$$z = e^{i\frac{\pi}{8}}\left(e^{-i\frac{\pi}{8}} + e^{i\frac{\pi}{8}}\right)$$

$$z = e^{i\frac{\pi}{8}}2\cos\frac{\pi}{8}$$

$$z = 2\cos\frac{\pi}{8}e^{i\frac{\pi}{8}}$$

من المهم جداً مشاهدة شرح التمرين على اليوتيوب

Pixel YouTube

تمرين امتحاني $z \neq -1$ عيِّن مجموعة النقاط التي تجعل $z = \frac{2+\overline{z}}{1+\overline{z}}$ تخيلي بحت.

لا يمكن الحل إلا بفرض $z = x + iy$ ويمكن الفرض من البداية.

$$z = -\overline{z}$$

$$\frac{2+\overline{z}}{1+\overline{z}} = -\frac{2+z}{1+z}$$

$$(1+\overline{z})(2+z) = (-2-\overline{z})(1+z)$$

$$2 + z + 2\overline{z} + \overline{z}.z = -2 - 2z - \overline{z} - z.\overline{z}$$

$$4 + 3z + 3\overline{z} + 2z.\overline{z} = 0$$

نفرض $z = x + iy$

$$4 + 3(x+iy) + 3(x-iy) + 2(x+iy)(x-iy) = 0$$

$$4 + 3x + 3iy + 3x - 3iy + (2x+2iy)(x-iy) = 0$$

$$4 + 6x + 2x^2 - 2xyi + 2xyi + 2y^2 = 0$$ نقسم على 2

$$x^2 + 3x + y^2 + 2 = 0$$ وهي نفسها المعادلة في التمرين السابق

Pixel - بكسل