اسم الطالب عبدالوهاب زين التاريخ : / 7 / 2023	مذاكرة مادة الرياضيات لطلاب البكالوريا (2023-2024) النهايات والاستمرار الدرجة : 300 — المدة : ساعة ونصف	Abdulla Attar math teacher 0934 800 056

أولاً : حل كل من التمارين الآتية : (50 للأول – 70 للثاني – 30 للثالث - 60 للرابع)

التمرين الأول : ليكن (C) الخط البياني للتابع f المعرف على المجال $]-\infty,0[$ وفق : $f(x)=\frac{x^2+2+cosx}{x}$

ادرس نهاية f عند $-\infty$ ، ثم اكتب معادلة للمستقيم Δ مقارب الخط (C) في جوار $-\infty$ مبيناً وضع (C) مع Δ .

التمرين الثاني : ليكن f التابع المعين بالعلاقة : $f(x)=\frac{3x-5}{x-1}$ خطه البياني (C) والمطلوب :

1- عين D_f مجموعة تعريف f .

2- ادرس نهاية f عند حدود مجالات تعريفه ، وفسّر النتيجة هندسياً .

3- احسب $\lim_{x\to+\infty} f(f(x))$.

4- عين عدداً حقيقياً A يحقق الشرط : إذا كان $x>A$ انتمى $f(x)$ إلى المجال $I=]2.85,3.15[$.

التمرين الثالث : ليكن f تابعاً معرفاً على المجال $[0,+\infty[$ وفق : $f(x)=\begin{cases}\frac{\sqrt{x}-1}{4x-4} & ;x\neq 1\\ \frac{1}{8} & ;x=1\end{cases}$ والمطلوب :

هل التابع f مستمر على المجال $[0,+\infty[$ ؟

التمرين الرابع : ليكن f التابع المعرف على المجال $[0,+\infty[$ وفق : $f(x)=\sqrt{2+x}-\sqrt{x}$ والمطلوب :

1- تحقق أن $f(x)=\frac{2}{\sqrt{2+x}+\sqrt{x}}$ أياً كان $x\geq 0$.

2- استنتج أن $\frac{1}{\sqrt{2+x}}\leq f(x)\leq\frac{1}{\sqrt{x}}$ في حالة $x>0$.

3- ما نهاية f عند $+\infty$ ؟

ثانياً : حل المسألة الآتية : (90 درجة)

ليكن (C) الخط البياني للتابع f المعرف على R وفق : $f(x)=\frac{2x^2-x-1}{x^2+x+1}$ والمطلوب :

1- اكتب معادلة للمقارب الأفقي ثم ادرس وضعه النسبي .

2- ادرس تغيرات التابع f ونظم جدولاً بها .

3- عين $f(]-\infty,0[)$ ، ثم أثبت أن المعادلة $f(x)=1$ تقبل حلان فقط في R .

4- عين نقاط تقاطع الخط (C) مع المحاور الإحداثية ثم ارسم الخط (C) .

استمرار اطراد

انتهت الأسئلة

8 + 2 - 1

الموضوع: التاريخ: / /

التمرين الأول:

$\forall x \in \mathbb{R};\ -1 \leq \cos x \leq 1$

$x^2+1 \leq x^2+2+\cos x \leq x^2+3$

نقسم على x لأن $x<0$ في جوار $-\infty$

$\frac{x^2+1}{x} \geq \frac{x^2+2+\cos x}{x} \leq \frac{x^2+3}{x}$

$\frac{x^2+3}{x} \leq f(x) \leq \frac{x^2+1}{x}$

أي:

$f(x) \leq \frac{x^2+1}{x}$

$\lim_{x\to-\infty} \frac{x^2+1}{x} = -\infty$

ومنه حسب مبرهنة المقارنة نجد:

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

ومنه شرط وجود مقارب مائل محقق

$f(x) = x + \frac{2+\cos x}{x}$

نبرهن $\Delta : y = x$

$f(x) - y_\Delta = \frac{2+\cos x}{x}$

$\lim_{x\to-\infty} (f(x)-y_\Delta) = \frac{2+\cos x}{x}$

$\forall x \in \mathbb{R}\quad -1 \leq \cos x \leq 1$

$1 \leq 2+\cos x \leq 3$

نقسم على x لأن $x<0$ في جوار $-\infty$

$\frac{1}{x} \geq \frac{2+\cos x}{x} \geq \frac{3}{x}$

$\frac{1}{x} \geq f(x)-y_\Delta \geq \frac{3}{x}$

$\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{3}{x} = 0$

ومنه حسب مبرهنة الحصر نجد:

$\lim_{x\to-\infty} (f(x)-y_\Delta) = 0$

إذاً: $\Delta : y = x$ مقارب مائل للمنحنى C في جوار $-\infty$

ندرس الوضعية النسبية

$1 \leq 2+\cos x \leq 3$

إذاً: إشارة الفرق هي إشارة المقام

x	$-\infty$	0
x	$-$	
$f(x)-y_\Delta$	$-$	
الوضع النسبي	C تحت Δ	

التمرين الثاني:

1- $\mathbb{R} \setminus \{1\}$

2- $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 3$

$y = 3$ مقارب أفقي للمنحنى C في جوار $\pm\infty$

$\lim_{x\to1^-} f(x) = \frac{-2}{0^-} = +\infty$

$\lim_{x\to1^+} f(x) = \frac{-2}{0^+} = -\infty$

$x = 1$ مقارب عمودي للمنحنى C

ويكون C على يسار المقارب نحو Oy^+

وعلى يمين المقارب نحو Oy^-

3- $\lim_{x\to+\infty} f(f(x)) = f(3) = 2$

AL ABRASH

الموضوع: التاريخ: / /

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 3 = C$ —4

$r = b - C = 0{,}15$

$|f(x) - C| < r$

$\left|\dfrac{3x-5}{x-1} - 3\right| < 0{,}15$

$\left|\dfrac{3x-5-3x+3}{x-1}\right| < \dfrac{15}{100}$

$\left|\dfrac{-2}{x-1}\right| < \dfrac{15}{100}$

$\dfrac{2}{x-1} < \dfrac{3}{20}$

$\dfrac{x-1}{2} > \dfrac{20}{3}$

$x-1 > \dfrac{40}{3}$

$x > \dfrac{43}{3}$

وإذاً $A = \dfrac{43}{3}$

التمرين الثالث:

متى يكون التابع مستمر

يجب أن يتحقق:

$\lim\limits_{x\to 1} f(x) = f(1)$

$\lim\limits_{x\to 1} f(x) = \dfrac{0}{0}$ عدم تعيين

$f(x) = \dfrac{\sqrt{x}-1}{4x-4} \times \dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1}$

$f(x) = \dfrac{x-1}{(4x-4)(\sqrt{x}+1)}$

$\Rightarrow f(x) = \dfrac{\cancel{x-1}}{4\cancel{(x-1)}(\sqrt{x}+1)}$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to 1} f(x) = \dfrac{1}{8}$

ولدينا $f(1) = \dfrac{1}{8}$

ومنه فإن الشرط محقق

$\lim\limits_{x\to 1} f(x) = f(1) = \dfrac{1}{8}$

وإذاً التابع $f(x)$ مستمر في المجال $[0,+\infty[$

التمرين الرابع:

1- $f(x) = \sqrt{2+x} - \sqrt{x} \times \dfrac{\sqrt{2+x}+\sqrt{x}}{\sqrt{2+x}+\sqrt{x}}$

$= \dfrac{2+x-x}{\sqrt{2+x}+\sqrt{x}} = \dfrac{2}{\sqrt{2+x}+\sqrt{x}}$

2- لدينا $\sqrt{2+x} \geq \sqrt{x}$ — (*)

نضيف $\sqrt{x}$ للطرفين (*)

$\sqrt{2+x}+\sqrt{x} \geq 2\sqrt{x}$

$\dfrac{1}{\sqrt{2+x}+\sqrt{x}} \leq \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

$\dfrac{2}{\sqrt{2+x}+\sqrt{x}} \leq \dfrac{\cancel{2}}{\cancel{2}\sqrt{x}}$

$f(x) \leq \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ —(1)

نضيف $\sqrt{2+x}$ للطرفين (*)

$2\sqrt{2+x} \geq \sqrt{2+x}+\sqrt{x}$

$\dfrac{1}{2\sqrt{2+x}} \leq \dfrac{1}{\sqrt{2+x}+\sqrt{x}}$

AL ABRASH

$$\frac{2}{2\sqrt{2+x}} \leq \frac{2}{\sqrt{2+x}+\sqrt{x}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2+x}} \leq f(x) \quad --- (2)$$

من (1) و (2) نجد

$$\frac{1}{\sqrt{2+x}} \leq f(x) \leq \frac{1}{\sqrt{x}}$$

3 _

لدينا $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{2+x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$

ومن مبرهنة الإحاطة نجد $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$

ثانياً: مسألة ١

1_ $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \left(\frac{2x^2}{x^2}\right) = 2$

2_ $y=2$ مقارب أفقي في جوار $\pm\infty$

$$f(x) - y_\Delta = \frac{2x^2-x-1}{x^2+x+1} - 2$$

$$= \frac{\cancel{2x^2}-x-1-\cancel{2x^2}-2x-2}{x^2+x+1}$$

$$= \frac{-3x-3}{x^2+x+1}$$

$x^2+x+1=0$

$\Delta = b^2-4a.c = -3 < 0$ مستحيلة الحل

وعليه فإن إشارة الفرق من إشارة البسط

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$-3x-3$		$+$	0	$-$	
$f(x)-y_\Delta$		$+$	0	$-$	
الوضع النسبي		C فوق Δ		C تحت Δ	

نقطة مشتركة بين Δ و C
$M(-1, 2)$

2_ f مستمر و قابل للاشتقاق على $\mathbb{R}$

$$f'(x) = \frac{(4x-1)(x^2+x+1)-(2x+1)(2x^2-x-1)}{(x^2+x+1)^2}$$

$$= \frac{\cancel{4x^3}+4x^2+\cancel{4x}-x^2-\cancel{x}-\cancel{1}-\cancel{4x^3}+2x^2+2x-\cancel{2x^2}+\cancel{x}+\cancel{1}}{(x^2+x+1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{3x^2+6x}{(x^2+x+1)^2}$$

المقام موجب تماماً إشارة $f'(x)$ من إشارة البسط

$f'(x)=0 \Rightarrow 3x^2+6x=0$

$\Rightarrow 3x(x+2)=0$

$\Rightarrow$ إما $x=0 \Rightarrow f(0)=-1$

أو $x=-2 \Rightarrow f(-2)=3$

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	2	$\nearrow$	3	$\searrow$	-1	$\nearrow$	2

$f(-2)=3$ قيمة حدية كبرى محلياً

$f(0)=-1$ قيمة حدية صغرى محلياً

$f(\mathbb{R}) = [-1, 3]$

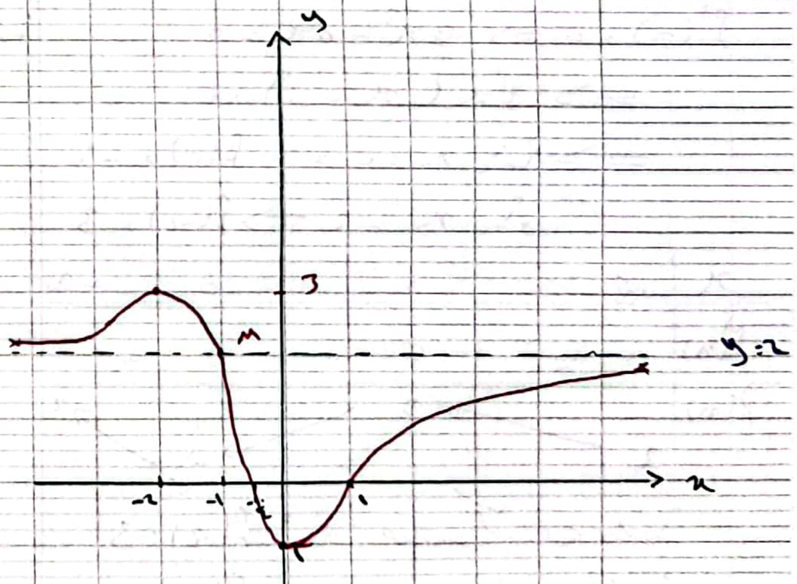
الموضوع: التاريخ: / /

3- $f(]-\infty,0[) =]-1,3]$

• f مستمر ومتزايد تماما على المجال $I_1 =]-\infty,-2[$
و $f(I_1) =]2,3[$ وبما أن $1 \notin]2,3[$
فإن المعادلة $f(x)=1$ لا تقبل الحل في المجال I_1

• f مستمر ومتناقص في المجال $I_2 = [-2,0]$
و $f(I_2) = [-1,3]$ وبما أن $1 \in]-1,3[$
فإن للمعادلة $f(x)=1$ حل وحيد $\alpha_1 \in I_2$

• f مستمر ومتزايد تماما على المجال
$I_3 =]0,+\infty[$ و $f(I_3) =]-1,2[$ وبما أن
$1 \in]-1,2[$ فإن للمعادلة $f(x)=1$
حل وحيد ~~في~~ $\alpha_2 \in I_3$
مما سبق نجد أن للمعادلة
$f(x)=1$ حلان فقط في $\mathbb{R}$



تقاطع مع الفواصل

$y=0 \Rightarrow f(x)=0$

$2x^2-x-1=0$

$\Delta = 1+8 = 9 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = 3$

$x_1 = \frac{1-3}{4} = -\frac{1}{2}$ $(-\frac{1}{2}, 0)$

$x_2 = \frac{1+3}{4} = 1$ $(1, 0)$

AL ABRASH