اسم الطالب	مذاكرة مادة الرياضيات لطلاب البكالوريا (2023-2024)	Abdulla Attar math teacher
....	النهايات والاستمرار	
التاريخ : / 7 / 2023	الدرجة : 300 — المدة : ساعة ونصف	

أولاً : حل كل من التمارين الآتية : (60 للأول – 70 للثاني – 30 للثالث - 50 للرابع)

التمرين الأول : ليكن f التابع المعرف على R وفق : $f(x)=\frac{4}{9+5cosx}$

كذلك g المعرف على R وفق : $g(x)=\frac{4x^2}{9+5cosx}$ والمطلوب :

1- أثبت أن f محدود .

2- استنتج نهاية g عند $-\infty$.

التمرين الثاني : ليكن f التابع المعين بالعلاقة : $f(x)=\frac{3x-5}{x-1}$ خطه البياني (C) والمطلوب :

1- عين D_f مجموعة تعريف f .

2- ادرس نهاية f عند حدود مجالات تعريفه ، ودل على كل مقارب للخط (C) .

3- احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(f(x))$.

4- عين عدداً حقيقياً A يحقق الشرط : إذا كان $x>A$ انتمى $f(x)$ إلى المجال $I=]2.9,3.1[$.

التمرين الثالث : ليكن f تابعاً معرفاً على المجال $[0,+\infty[$ وفق : $f(x)=\begin{cases}\frac{\sqrt{x}-1}{4x-4} & ;x\neq 1\\ \frac{1}{8} & ;x=1\end{cases}$ والمطلوب :

هل التابع f مستمر على المجال $[0,+\infty[$ ؟

التمرين الرابع : ليكن (C) الخط البياني للتابع f المعرف على R وفق : $f(x)=\sqrt{x^2-4x+5}$ والمطلوب :

1- ادرس نهاية f عند $-\infty$.

2- a. اكتب : x^2-4x+5 بالصيغة القانونية .

b . استنتج ان الخط (C) يقبل مقارب مائل Δ عند $-\infty$ يطلب ايجاد معادلته .

ثانياً : حل المسألة الآتية : (90 درجة)

ليكن (C) الخط البياني للتابع f المعرف على $R/\{-1\}$ وفق $f(x)=\frac{x^2-x+2}{x+1}$ **والمطلوب :**

1- أثبت أن f يكتب بالشكل : $f(x)=ax+b+\frac{c}{x+1}$ ، حيث a,b,c أعداد حقيقية يطلب تعيينها .

2- أوجد كل مقارب للخط (C) يوازي المحور yy' ، ثم ادرس وضع (C) بالنسبة الى كل مقارب وجدته .

3- أثبت أن المستقيم $\Delta: y=ax+b$ مقارب للخط (C) ثم ادرس وضع الخط (C) بالنسبة الى المقارب Δ .

4- ادرس تغيرات التابع f ونظم جدولاً بها ، ثم ارسم كل مقارب وجدته و ارسم (C) .

انتهت الأسئلة

الموضوع:

أولاً: التمرين الأول

1- $-1 \le \cos x \le 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$$-5 \le 5\cos x \le 5$$

$$4 \le 9+5\cos x \le 14$$

$$\frac{1}{4} \ge \frac{1}{9+5\cos x} \ge \frac{1}{14}$$

$$1 \ge \frac{4}{9+5\cos x} \ge \frac{4}{14} = \frac{2}{7}$$

$$1 \ge f(x) \ge \frac{2}{7}$$

ومنه فإن f محدود بالمجال

$$\left[\frac{2}{7}, 1\right]$$

2- لدينا من الطلب الأول:

$$\frac{2}{7} \le \frac{4}{9+5\cos x} \le 1$$

نضرب $x^2 > 0$

$$\frac{2x^2}{7} \le \frac{4x^2}{9+5\cos x} \le x^2$$

$$\frac{2x^2}{7} \le \frac{4x^2}{9+5\cos x} \text{ أي}$$

ومنه $\frac{2x^2}{7} \le f(x)$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{2x^2}{7} = +\infty$$

وحسب مبرهنة المقارنة نجد أن

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$$

التمرين الثاني :

1- $\mathbb{R}\setminus\{1\}$

2- $\lim\limits_{x\to\mp\infty} f(x) = 3$

$y=3$ مقارب أفقي للمنحنى C في جوار $\mp\infty$

$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \frac{-2}{0^-} = +\infty$

$\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \frac{-2}{0^+} = -\infty$

$x=1$ مقارب شاقولي للمنحنى C

و إن C على يسار المقارب نحو oy^+

وعلى يمين المقارب نحو oy^-

3- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(f(x)) = f(3) = 2$

الموضوع:

4 - $C = 3$ $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 3$

$r = b - C = 0{,}15$

$|f(x) - C| < r$

$\left|\frac{3x-5}{x-1} - 3\right| < 0{,}15$

$\left|\frac{3x-5-3x+3}{x-1}\right| < \frac{15}{100}$

$\left|\frac{-2}{x-1}\right| < \frac{15}{100}$

$\frac{2}{x-1} < \frac{3}{20}$

$\frac{x-1}{2} > \frac{20}{3}$

$x - 1 > \frac{40}{3}$

$x > \frac{43}{3}$

ومنه $A = \frac{43}{3}$

التمرين الثالث:

حتى يكون التابع مستمر

يجب أن يتحقق:

$\lim_{x \to 1} f(x) = f(1)$

عدم تعيين $\lim_{x \to 1} f(x) = \frac{0}{0}$

$f(x) = \frac{\sqrt{x}-1}{4x-4} \times \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1}$

$f(x) = \frac{x-1}{4x-4(\sqrt{x}+1)}$

التاريخ: / /

$$\Rightarrow f(x) = \frac{\cancel{x-1}}{4\cancel{(x-1)}(\sqrt{x}+1)}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to 1} f(x) = \frac{1}{8}$$

و لدينا $f(1) = \frac{1}{8}$

ومنه حسب الشرط محقق

$$\lim_{x \to 1} f(x) = f(1) = \frac{1}{8}$$

إذاً التابع $f(x)$ مستمر في المجال $[0, +\infty[$

التاريخ: / /

التمرين الرابع:

1 -

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \sqrt{(-\infty)^2} = +\infty$$

.a - 2

$$x^2 - 4x + 4 - 4 + 5$$

$$(x-2)^2 + 1$$

.b

نبرهن أن $\Delta : y = \sqrt{(x-2)^2}$

$$f(x) - y_\Delta = \sqrt{(x-)^2 + 1} - \sqrt{(x-2)^2}$$

نضرب ونقسم بالمرافق

$$f(x) - y_\Delta = \frac{\left(\sqrt{(x-2)^2+1} - \sqrt{(x-2)^2}\right)\left(\sqrt{(x-2)^2+1} + \sqrt{(x-2)^2}\right)}{\sqrt{(x-2)^2+1} + \sqrt{(x-2)^2}}$$

$$= \frac{\cancel{(x-2)^2} + 1 - \cancel{(x-2)^2}}{\sqrt{(x-2)^2+1} + \sqrt{(x-2)^2}}$$

$$f(x) - y_\Delta = \frac{1}{\sqrt{(x-2)^2+1} + \sqrt{(x-2)^2}}$$

$$\lim_{x \to -\infty} \left(f(x) - y_\Delta\right) = \frac{1}{\infty} = 0$$

$$\Delta : y = \sqrt{(x-2)^2} = |x-2| = -x+2$$

مقارب مائل للمنحنى C في جوار $-\infty$

الموضوع: التاريخ: / /

ثانيا: حل المسألة 1

1-

$$\begin{array}{r|l} x^2 - x + 2 & x+1 \\ \mp x^2 \mp x & x-2 \\ \hline -2x + 2 & \\ \pm 2x \pm 2 & \\ \hline 4 & \end{array}$$

ومنه

$$f(x) = x - 2 + \frac{4}{x+1}$$

$a = 1 \quad , b = -2 \quad , c = 4$

2- $\lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = \frac{4}{0^-} = -\infty$

$x=-1$ مقارب شاقولي للمنحنى C

وإن C على يسار المقارب نحو الأسفل

$\lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = \frac{4}{0^+} = +\infty$

$x=-1$ مقارب شاقولي للمنحنى C

وإن C على يمين المقارب نحو الأعلى

3- لدينا $\Delta : y = ax+b = x-2$

ومنه

$$f(x) - y_\Delta = \cancel{x-2} + \frac{4}{x+1} - \cancel{(x-2)}$$

$$f(x) - y_\Delta = \frac{4}{x+1}$$

$\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) - y_\Delta = 0$

إذاً $\Delta : y = x-2$ مقارب مائل للمنحنى C في جوار $\pm\infty$

لدراسة الوضع النسبي ندرس إشارة الفرق

$$f(x) - y_\Delta = \frac{4}{x+1}$$

البسط موجب تماما فإشارة الفرق من إشارة المقام

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$x+1$	$-$	0	$+$
$f(x)-y_\Delta$	$-$	$\|$	$+$
الوضع النسبي	C تحت Δ		C فوق Δ

4- $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

$$f'(x) = \frac{(2x-1)(x+1) - (x^2 - x + 2)}{(x+1)^2}$$

$$= \frac{2x^2 + 2x \cancel{-x} - 1 - x^2 \cancel{+x} - 2}{(x+1)^2}$$

$$= \frac{x^2 + 2x - 3}{(x+1)^2}$$

المقام موجب تماما فإشارة f' من إشارة البسط

$f'(x) = 0 \Rightarrow x^2 + 2x - 3 = 0$

$(x+3)(x-1) = 0$

إما $x = -3 \Rightarrow f(-3) = -7$

أو $x = 1 \Rightarrow f(1) = 1$

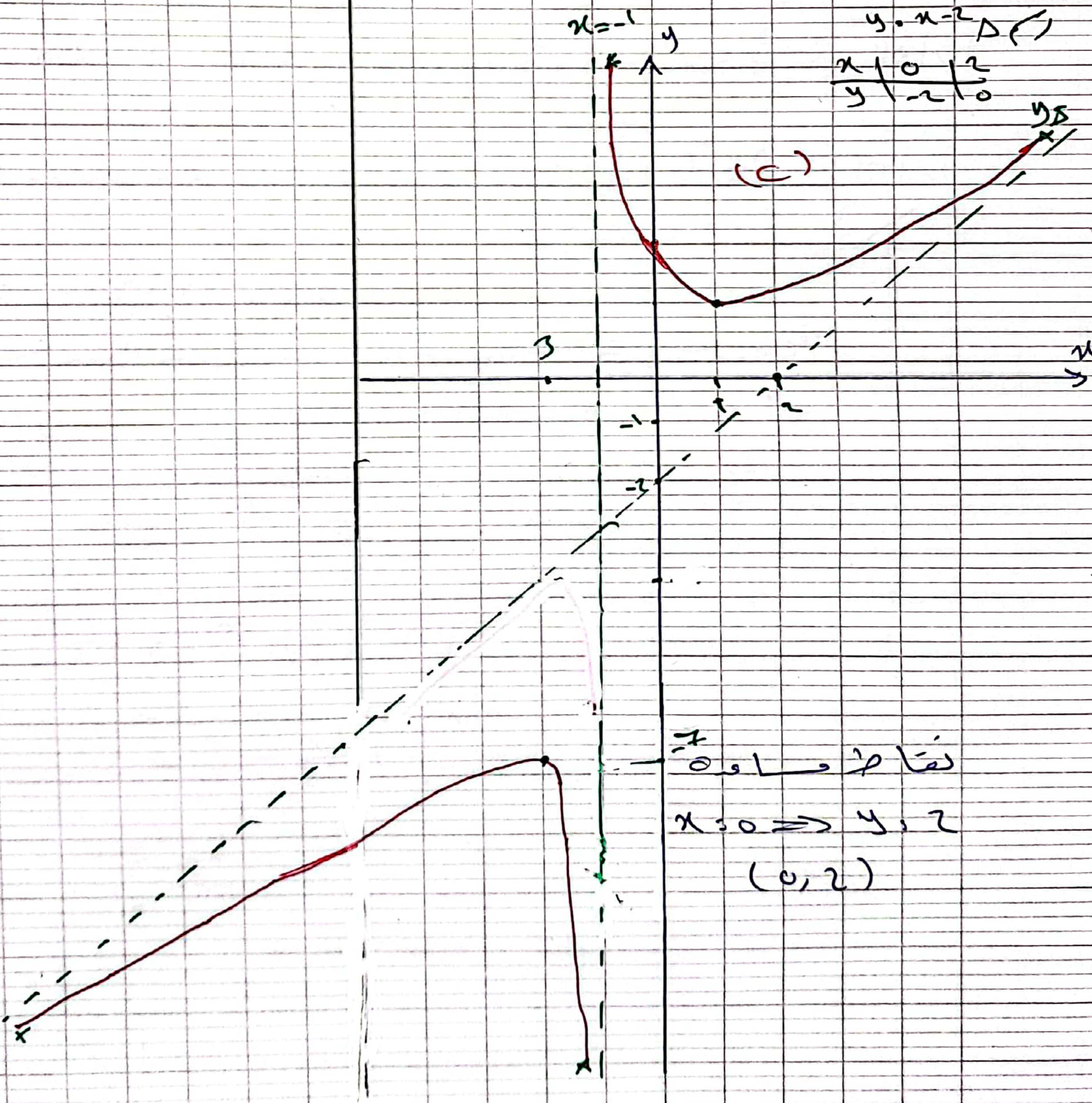
الموضوع: .... التاريخ:

x	$-\infty$		-3		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$\|\|$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	-7	$\searrow$	$-\infty \,\|\|\, +\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

$f(-3) = -7$ قيمة حدية كبرى محليا

$f(1) = 1$ قيمة حدية صغرى محليا

$f(\mathbb{R} \setminus \{-1\}) =]-\infty, -7] \cup [1, +\infty[$



نقاط مساعدة

$x = 0 \Rightarrow y = 2$

$(0, 2)$