$$S = 8\left(\frac{-255}{-1}\right)$$

$$S = 8\,(255)$$

$$S = 2040$$

تطبيق: لتكن المتتالية $(U_n)_{n\geq 0}$ متتالية حسابية فيها

$U_6 = 12$, $U_3 = 6$

1- اكتب U_n بدلالة n

2- احسب المجموع $U_4 + U_5 + \dots + U_{13}$

الحل:

$$r = \frac{U_m - U_p}{m-p} \Longrightarrow \frac{U_6 - U_3}{6-3}$$

$$r = \frac{12-6}{3} \Longrightarrow r = 2$$

$$U_n - U_m = (n-m)r \Longrightarrow U_n - 12 = (n-6).2$$

$$U_n = 2n - 12 + 12 \Longrightarrow U_n = 2n$$

$U_4 = 8$, $U_{13} = 26$, $n = 13-4+1 = 10$

$$S = \frac{10(8+26)}{2} \Longrightarrow 170$$

وظيفة: $(U_n)_{n\geq 1}$ هندسية فيها $q=2$, $U_1=3$

1- اكتب U_n بدلالة n واحسب U_3

2- احسب $U_1+U_2+\dots+U_5$.

الحل: ①

$$U_n = U_m\, q^{n-m}$$

$$U_n = U_1\, q^{n-1}$$

$$U_n = 3\,(2)^{n-1}$$

$$U_3 = 3\,(2)^{3-1} \Longrightarrow U_3 = 3\,(2)^2$$

$$U_3 = 3\,(4) = 12$$

②

$$S = a\left(\frac{1-q^n}{1-q}\right)$$

$n = 5-1+1$

$n = 5$

$$S = 3\left(\frac{1-(2)^5}{1-2}\right)$$

$$S = 3\left(\frac{1-32}{-1}\right) \Longrightarrow S = 93$$

ع 18 ص 5

$(U_n)_{n\geq 0}$ متتالية حسابية أساسها $r=-2$ ، $U_0=-3$

احسب $U_{25}+U_{26}+\dots+U_{125}$

الحل

$$U_n - U_m = (n-m)r$$

$$U_n - U_0 = (n-0)r$$

$$U_n + 3 = (n)-2 \Longrightarrow \boxed{U_n = -2n-3}$$

$$U_{25} = -2(25)-3 \Longrightarrow -50-3 = -53$$

$$U_{125} = -2(+125)-3 \Longrightarrow -250-3 = -253$$

$$n = 125-25+1 \Longrightarrow n = 101$$

$$S = \frac{101(-53-253)}{2}$$

$$S = \frac{101(-306)}{2} \Longrightarrow -15453$$

جمع أرقام صي:

احسب S

$$S = \frac{1}{2} + 1 + \frac{3}{2} + \cdots + 10$$

الحل:

نضرب بـ 2

$$2S = 1 + 2 + 3 + \cdots + 20$$

$$2S = \frac{n(a+l)}{2}$$

$n = 20 - 1 + 1$

$n = 20$

$$2S = \frac{20(21)}{\cancel{2}}$$

$$2S = 10(21) \Rightarrow 2S = 210$$

$$\Rightarrow S = 105$$

مثال ٢ : $S = 1+2+3+ \dots +201$

الحل : مجموع عادي :

$$S = \frac{n(a+l)}{2}$$

$n = 201 - 1 + 1$

$n = 201$

$$S = \frac{201(202)}{2}$$

$S = 201(101) \Rightarrow S = 20301$

دراسة اطراد متتالية : U_n بدلالة n :

الطريقة الأولى : طريقة الفرق : الطريقة الثانية :

بيعطيك U_n ← بتعطيه U_{n+1}

$U_{n+1} - U_n =$

> 0 متزايدة تماما

< 0 متناقصة تماما

$= 0$ ثابتة.

ملاحظة: متتالية مجاميع ← طريقة الفارق،

رقم ٦ ص 18 ادرس جهة اطراد المتتاليات:

1) $U_n = \frac{1}{n^2+1}$

$\downarrow$

$U_{n+1} = \frac{1}{(n+1)^2+1}$

$U_{n+1} - U_n = \frac{1}{(n+1)^2+1} - \frac{1}{n^2+1}$

كسرين لهما نفس البسط

اذهب للمقام الأصغر وضع إشارته.

$U_{n+1} - U_n < 0$

المتتالية متناقصة تماماً.

جميع الحدود موجبة تماماً

الطريقة الثانية: طريقة النسبة،

بيطلب U_n ← بنطلع U_{n+1}

$\Rightarrow \frac{U_{n+1}}{U_n} =$

$\frac{U_{n+1}}{U_n} = 1$ ثابتة

$\frac{U_{n+1}}{U_n} > 1$ متزايدة تماماً

$\frac{U_{n+1}}{U_n} < 1$ متناقصة تماماً

Alamal

ملاحظة: $(\text{عدد})^n$, العاملي !

$U_n = 2^n$

$U_{n+1} = 2^{n+1}$

$\Longrightarrow \frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{\cancel{2^n} \cdot 2}{\cancel{2^n}} > 1$

المتتالية متزايدة تماماً.

$U_n = \left(-\frac{1}{n}\right)^n$

n زوجي ⟸ موجبة

n فردي ⟸ سالبة

⟸ المتتالية ليست مطردة.

العاملي:

$n! = n(n-1)(n-2)(n-3)\_\_\_\_ \times 2 \times 1$

$5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$

$3! = 3 \times 2 \times 1$

$0! = 1$

$(n+1)! = (n+1)(n)(n-1)(n-2)!$

Alamal

$$U_n = \frac{n^2}{n!}$$ $\boxed{n \geq 1}$

$$U_{n+1} = \frac{(n+1)^2}{(n+1)!}$$

$$U_{n+1} = \frac{(n+1)^{\cancel{2}}}{\cancel{(n+1)}(n)!} \Rightarrow U_{n+1} = \frac{n+1}{n!}$$

$$\Rightarrow \frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{\frac{n+1}{n!}}{\frac{n^2}{n!}} \Rightarrow \frac{n+1}{\cancel{n!}} \times \frac{\cancel{n!}}{n^2}$$

$$\Rightarrow \frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{n+1}{n^2}$$

عالمسودة

جدول مساعدة

$\frac{n+1}{n^2}$	
2	1
$\frac{3}{4}$	2
$\frac{4}{9}$	3

$1 < 2$

$1 > \frac{3}{4}$

$1 > \frac{4}{9}$

$1 >$

المتتالية متناقصة

بدءاً من $n \geq 2$

الطريقة الثالثة: التابع: نشكل تابع مماثل للمتتالية

كل $n \to x$, $U_n = f(x)$

نشتق التابع.

$f'(x) > 0$

التابع متزايد تماماً ⟸ المتتالية متزايدة تماماً

$f'(x) < 0$

التابع متناقص تماماً ⟸ المتتالية متناقصة تماماً.

⟸ المتتالية الجذرية ⟸ المتتالية الكسرية

⟸ المتتالية اللوغاريتمية

$U_n = \sqrt{3n+1}$

$n \geq 0$

نشكل تابع

$f(x) = \sqrt{3x+1}$

$[0, +\infty[$

$f'(x) = \dfrac{3}{2\sqrt{3x+1}} > 0$

مشتق التابع الجذري ⟸ مشتق ما تحت الجذر على ضعفي الجذر

التابع متزايد تماماً ⟸ المتتالية متزايدة تماماً.

$$U_n = \frac{3n+1}{n-2} \qquad n > 2$$

$$f(x) = \frac{3x+1}{x-2} \qquad]2, +\infty[$$

$$f'(x) = \frac{3(x-2) - 1(3x+1)}{(x-2)^2}$$

مشتق التابع الكسري ⟸ مشتق البسط بالمقام ناقص مشتق المقام بالبسط على مربع المقام

$$f'(x) = \frac{\cancel{3x} - 6 - \cancel{3x} - 1}{(x-2)^2}$$

$$f'(x) = \frac{-7}{(x-2)^2} < 0$$

التابع متناقص تماماً ⟸ المتتالية متناقصة تماماً.

ملاحظة ص 18 الاطراد + أسئلة الوحدة السؤال الأول

مثال 2: ادرس اطراد المتتالية:

$$U_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} \qquad n \geq \phi$$

الطريقة الثانية ⟸

$$U_{n+1} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1}$$

$$U_{n+1} - U_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} - \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}\right)$$

$$U_{n+1} - U_n = \frac{1}{n+1} > 0$$

المتتالية متزايدة تماماً.

الإثبات بالتدريج : إثبات صحة علاقة

نسمي العلاقة ـــــ $E(n)$

1) نثبت صحة $E(n_0)$ حد البدء

2) نفرض صحة $E(n)$ ⟵ نكتب العلاقة كما هي ونسميها ★

3) نثبت صحة $E(n+1)$

مثال: لتكن المتتالية معرفة وفق

$$\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = \sqrt{2+U_n} \end{cases}$$

أثبت أن $1 \leq U_n \leq 2$

مهما كان العدد الطبيعي n.

الحل: نبرهن بالتدريج

نسمي العلاقة $E(n) : 1 \leq U_n \leq 2$

1) نثبت صحة $E(0)$

$E(0) : 1 \leq U_0 \leq 2$

$1 \leq 1 \leq 2$ محققة

2) نفرض صحة $E(n)$

$1 \leq U_n \leq 2$ (A)

صحيحة

3) نثبت صحة $E(n+1)$

$E(n+1)$: $1 \leq U_{n+1} < 2$

ننطلق من ★

$1 \leq U_n < 2$

نجمع 2

$3 \leq 2+U_n \leq 4$

نجذر

$\sqrt{3} \leq \sqrt{2+U_n} \leq \sqrt{4}$

تصغير

$1 \leq U_{n+1} \leq 2$

من 1) و 2) و 3) نجد أن الخاصة محققة مهما كانت

$n \geq 0$

ملاحظة: بالمتراجحات عند تكبير الكبير وتصغير الصغير

حفظ

دراسة اطراد متتالية عددية

متتالية متزايدة $\Longleftrightarrow$ $U_{n+1} > U_n$

متتالية متناقصة $\Longleftrightarrow$ $U_{n+1} < U_n$

متتالية ثابتة $\Longleftrightarrow$ $U_{n+1} = U_n$

★ سؤال الكتاب ادرس اطراد

★ سؤال الامتحان $\Leftarrow$ أثبت أن المتتالية متزايدة

مثال: ادرس الاطراد

$$\begin{cases} U_0 = 2 \\ U_{n+1} = U_n - 3 \end{cases}$$

الحل: عالمسودة

$U_1 = U_0 - 3$

$U_1 = -1$

$U_2 = U_1 - 3$

$U_2 = -4$

$U_3 = -4 - 3 = -7$

المتتالية متناقصة تماما

نثبت ذلك بالتدريج

نص اللاقة : $U_{n+1} < U_n$ $E(n)$

1) نثبت صحة $E(0)$

$U_1 < U_0$

$-1 < 2$ محققة

2) نفرض صحة $E(n)$

(*) $U_{n+1} < U_n$ صحيحة

3) نثبت صحة $E(n+1)$

$U_{n+2} < U_{n+1}$

نطلق من (*)

$U_{n+1} < U_n$

نطرح 3

$U_{n+1} - 3 < U_n - 3$

$U_{n+2} < U_{n+1}$

من (1) و (2) و (3) نجد أن العلاقة محققة مهما كانت n

المتتالية متناقصة تماماً

Alamal