الإثبات بالتدريج + مجاميع :

خطوة $E(n+1)$

$$S_{n+1}$$
$$\downarrow$$
$$S_n$$
$$\downarrow$$
$$\star$$
$$\downarrow$$

توحيد مقامات $\longrightarrow$ عامل مشترك $\longrightarrow \frac{1}{2}$

ص 21 رقم 1) في حال $n \geq 1$

$$S_n = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2$$

1- احسب S_1 و S_2 و S_3

ثم عبر عن S_{n+1} بدلالة S_n و n

2- أثبت بالتدريج في حال $n \geq 1$:

$$S_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

الحل

$$S_1 = 1^2 = 1$$

$$S_2 = 1 + 2^2 = 5 \qquad S_3 = S_2 + 3^2$$

$$S_3 = 14$$

$$S_{n+1} = \underbrace{1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2}_{S_n} + (n+1)^2$$

$$S_{n+1} = S_n + (n+1)^2$$

$E(n) : \quad S_n = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ نسمي العلاقة ②

نثبت صحة $E(1)$

$$S_1 = \frac{1(1+1)(2+1)}{6}$$

$1 = 1$ محققة

نفرض صحة $E(n)$

$$S_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

لدينا

نثبت صحة $E(n+1)$

$$S_{n+1} = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$$

$$S_{n+1} = S_n + (n+1)^2$$

$$S_{n+1} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2$$

$$S_{n+1} = \frac{n(n+1)(2n+1) + 6(n+1)^2}{6}$$

$$S_{n+1} = \frac{(n+1)\left(n(2n+1) + 6(n+1)\right)}{6}$$

$$S_{n+1} = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$$

العلاقة محققة مهما كانت $n \geq 1$

إذا وجد أكثر من n
نعزل الحد الأكبر

إثبات بالتدريج + مضاعفات :

أول خطوتين مثل ما هون (قبل ما كيفها A نعزل حد يحوي n)

↲ $E(n+1)$ ← نبدل الرمز من $K \leftarrow M$

مثال : أثبت أن 4^n+2 مضاعف
للعدد 3 .

تراجعة ← *

أما مساواة ← من طرف إلى طرف

نص العلاقة $E(n):\ 4^n+2=3k$

صحيح k

نثبت صحة $E(0)$

$$4^0+2=3k$$
$$1+2=3k$$

محققة $3=3k$

وظيفة (13) ص 25

نفرض صحة $E(n)$

$$4^n+2=3k$$

صحيحة $\ast\quad 4^n=3k-2$

نثبت صحة $E(n+1)$

$$4^{n+1}+2=3M$$

صحيح M

$$L_1=4^{n+1}+2$$
$$=4^n\cdot 4^1+2$$
$$=(3k-2)4+2$$
$$=12k-8+2 \Longrightarrow 12k-6$$
$$\underbrace{3(4k-2)}_{M}=3M$$

محققة

أثبت أن n^3+2n مضاعف للعدد 3.

الحل

نسمي العلاقة $E(n):\ n^3+2n=3K$

K صحيح

نثبت صحة $E(0)$

$$0+0=3K$$

$$0=3K$$ محققة

الصفر مضاعف لأي عدد

نفرض صحة $E(n)$

$$n^3+2n=3K$$

$$n^3=3K-2n \quad (\star)$$

نثبت صحة $E(n+1)$

$$(n+1)^3+2(n+1)=3M$$

M صحيح

$$L_1=n^3+3n^2+3n+1+2n+2$$

$$L_1=3K\cancel{-2n}+3n^2+3n+3\cancel{+2n}$$ مطابقة تكعيبية

مكعب أول + ثلاثة أضعاف مربع ثاني بالأول + ثلاثة أضعاف مربع أول بالثاني + مكعب ثاني

$$L_1=3K+3n^2+3n+3$$

$$3\underbrace{(K+n^2+n+1)}_{M}=3M$$

محققة

إثبات بالتدريج + متراجحات:

خطوة $E(n+1)$

← ابدأ من الطرف الأكبر وفكه.

← استخدم ★ لتحويل المساواة إلى متراجحة

← أصغر الصغير لأصل للمطلوب.

أثبت أنه $3n^2 \geq (n+1)^2$ مهما كانت

$n \geq 2$

الحل: نسمي العلاقة

$E(n): \quad 3n^2 \geq (n+1)^2$

نثبت صحة $E(2)$

$3(2)^2 \geq (2+1)^2$

$12 \geq 9$ محققة

نفرض صحة $E(n)$

★ $3n^2 \geq (n+1)^2$

نثبت صحة $E(n+1)$

$3(n+1)^2 \geq (n+2)^2$

خطوات:

$3(n+1)^2 = 3[n^2+2n+1]$

$3(n+1)^2 = 3n^2+6n+3$

$3(n+1)^2 \geq (n+1)^2+6n+3$

$$3(n+1)^2 \geq (n+1)^2 + 6n + 3$$

$$3(n+1)^2 \geq n^2 + 2n + 1 + 6n + 3$$

$$3(n+1)^2 \geq n^2 + 8n + 4$$

$$3(n+1)^2 \geq n^2 + 4n + 4$$

$$3(n+1)^2 \geq (n+2)^2$$

محققة مهما كانت $n \geq 2$

$\frac{16}{25}$

60

$(U_n)_{n\geq 0}$ متتالية معرفة وفق:

$$\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = \dfrac{3U_n + 2}{2U_n + 6} \end{cases}$$

1) أثبت أن $f(x) = \dfrac{3x+2}{2x+6}$ متزايدة تماماً

2) استنتج أن $\frac{1}{2} < U_n \leq 1$ أياً كان n

3) أثبت أن المتتالية متناقصة تماماً.

مشتق التابع الكسري =

$$\frac{\text{مشتق البسط بالمقام ناقص مشتق المقام بالبسط}}{(\text{المقام})^2}$$

الحل: (1)

$$f(x) = \frac{3x+2}{2x+6}$$

$$f'(x) = \frac{3(2x+6) - 2(3x+2)}{(2x+6)^2}$$

$$f'(x) = \frac{\cancel{6x} + 18 - \cancel{6x} - 4}{(2x+6)^2}$$

$$f'(x) = \frac{14}{(2x+6)^2} > 0$$

التابع متزايد تماماً.

(2) استنتج أن $\frac{1}{2} < U_n \leq 1$

نسمي العلاقة $E(n) : \frac{1}{2} < U_n \leq 1$

نثبت صحة $E(0)$

$$\frac{1}{2} < U_0 \leq 1$$

$$\frac{1}{2} < 1 \leq 1$$ محققة

نفرض صحة $E(n)$

$$\frac{1}{2} < U_n \leq 1 \quad (*)$$

نثبت صحة $E(n+1)$

$$\frac{1}{2} < U_{n+1} \leq 1$$

ننطلق من ★

$$\frac{1}{2} < U_n \leq 1$$

نصور أطراف ★

بما أن f متزايد تماماً

$$f\left(\frac{1}{2}\right) < f(U_n) \leq f(1)$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3\left(\frac{1}{2}\right)+2}{2\left(\frac{1}{2}\right)+6}$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\frac{3}{2}+2}{1+6}$$

$$= \frac{\frac{7}{2}}{7}$$

$$= \frac{7}{2} \times \frac{1}{7}$$

$$= \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2} < U_{n+1} \leq \frac{5}{8}$$

تكبير

$$\frac{1}{2} < U_{n+1} \leq 1$$

★ إذا كان U_n مرتين ⟸ تصوير

★ إذا كان U_n واحدة ⟸ إحاطة

إثبات أن المتتالية متناقصة تماماً

نسمي العلاقة $E(n): \quad U_{n+1} < U_n$

نثبت صحة $E(0)$

$$U_1 < U_0$$

$\frac{5}{8} < 1$ محققة

نفرض صحة $E(n)$

$U_{n+1} < U_n$ ⊛ صحيحة

نثبت صحة $E(n+1)$

$$U_{n+2} < U_{n+1}$$

ننطلق من ⊛

$$U_{n+1} < U_n$$

بما أن f متزايدة تماماً نطبق الطرف ⊛

$$\underline{f(U_{n+1}) < f(U_n)}$$

$U_{n+2} < U_{n+1}$ محققة

حدود متعاقبة من متتالية هندسية أو حسابية ،

حسابية

$$b = \frac{a+c}{2}$$ إذا ما طلب r

هندسية

$$b^2 = a.c$$ إذا ما طلب q

$$b = a+r$$
$$c = a+2r$$
إذا طلب r

$$b = aq$$
$$c = aq^2$$
إذا طلب q

تمرين: ثلاث حدود a,b,c متعاقبة من متتالية هندسية تحقق

$a+b+c = 13$ ___ (1)

$a.b.c = 27$ ___ (2)

احسب a,b,c.

الحل

$$b^2 = a.c$$

من (2) نجد $\underbrace{a.c}_{b^2}.b = 27$

$$b^2.b = 27 \Longrightarrow b^3 = 27$$

$\boxed{b = 3}$

نعوض في 1 و 2

$a + 3 + c = 13$

$\boxed{a + c = 10}$ (A)

$a \cdot 3 \cdot c = 27$

$a \cdot c = \frac{27}{3}$

$\boxed{a \cdot c = 9}$ (A')

من (A) و (A') عددان جمعهما ١٠ وضربهما ٩ هما ٩ و ١

إما:

$a = 1$

$c = 9$

أو:

$a = 9$

$c = 1$

6/22

a, b, c ثلاث حدود من متتالية متعاقبة هندسية نسبتها $q \neq 1$ ، $3a, 2b, c$ ثلاث حدود متعاقبة من متتالية حسابية ، أوجد q .

الحل :

$$2b = \frac{3a+c}{2}$$

من الحسابية

$$4b = 3a + c \quad \bigstar$$

من الهندسية

$$b = aq$$

$$c = aq^2$$

نعوض في ★

$$4aq = 3a + aq^2$$

نقسم على a

$$4q = 3 + q^2$$

$$q^2 + 3 - 4q = 0$$

$$(q-3)(q-1) = 0$$

$$q = 3$$

$$q = 1$$