17
26

ليكن θ عدد حقيقي من المجال $]0, \frac{\pi}{2}[$ ثم نعرف متتالية $(U_n)_{n\geq 0}$

وفق

$$\begin{cases} U_0 = 2\cos\theta \\ U_{n+1} = \sqrt{2+U_n} \end{cases}$$

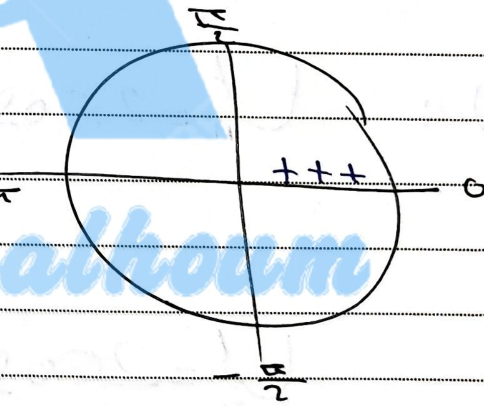
1) احسب U_1 , U_2

2) أثبت بالتدريج أن $U_n = 2\cos\frac{\theta}{2^n}$.

الحل

$1 + \cos$ زاوية $= 2\cos^2$ نصف الزاوية

حساب U_1:



$U_1 = \sqrt{2+U_0}$

$U_1 = \sqrt{2+2\cos\theta}$

$U_1 = \sqrt{2\underbrace{(1+\cos\theta)}_{\text{قانون}}}$

$U_1 = \sqrt{2\left(2\cos^2\frac{\theta}{2}\right)}$

$U_1 = \sqrt{4\cos^2\frac{\theta}{2}} \Longrightarrow U_1 = 2\left|\cos\frac{\theta}{2}\right|$

$U_1 = 2\cos\frac{\theta}{2}$

$$U_2 = \sqrt{2+U_1}$$

$$U_2 = \sqrt{2+2\cos\frac{\theta}{2}}$$

$$U_2 = \sqrt{2(\underbrace{1+\cos\frac{\theta}{2}}_{\text{قانون}})} \Longrightarrow U_2 = \sqrt{2.2\cos^2\frac{\theta}{2}\,\frac{1}{2}}$$

$$U_2 = \sqrt{4\cos^2\frac{\theta}{4}}$$

$$U_2 = 2\cos\frac{\theta}{4}$$

أثبت بالتدريج أن

$$U_n = 2\cos\frac{\theta}{2^n}$$

<u>الحل</u>:

نسمي العلاقة

$$E(n): \quad U_n = 2\cos\frac{\theta}{2^n}$$

نثبت صحة $E(0)$

$$U_0 = 2\cos\frac{\theta}{1}$$

$$2\cos\theta = 2\cos\theta$$

<u>صحيحة</u>

نفرض صحة $E(n)$

(*) $U_n = 2\cos\frac{\theta}{2^n}$

صحيحة

نثبت صحة $E(n+1)$

$$U_{n+1} = 2\cos\frac{\theta}{2^{n+1}}$$

$$L_1 = U_{n+1} = \sqrt{2+U_n}$$

$\downarrow$ (*)

$$U_{n+1} = \sqrt{2+2\cos\frac{\theta}{2^n}}$$

$$U_{n+1} = \sqrt{2\left(1+\cos\frac{\theta}{2^n}\right)}$$

$$\Rightarrow U_{n+1} = \sqrt{2\left(2\cos^2\frac{\theta}{2^n}\cdot\frac{1}{2^1}\right)}$$

$$U_{n+1} = \sqrt{4\cos^2\frac{\theta}{2^{n+1}}} \Rightarrow U_{n+1} = 2\cos\frac{\theta}{2^{n+1}}$$

Alamal

صحيحة

أثبت بالتدريج $n! \geq 2^{n-1}$

حيث $n \geq 1$

الحل:

نسمي العلاقة $E(n) : n! \geq 2^{n-1}$

نثبت صحة $E(1)$

$1! \geq 2^{0}$

محققة $1 \geq 1$

نفرض صحة $E(n)$

$n! \geq 2^{n-1}$ ★

الطلب

نثبت صحة $E(n+1)$

$(n+1)! \geq 2^{n}$

$$(n+1)! = (n+1)\, n!$$

$$\downarrow *$$

$$(n+1)! \geq (n+1)\, 2^{n-1}$$

$$(n+1)! \geq 2^1\, 2^{n-1}$$

$$(n+1)! \geq 2^n$$

محققة

ومنه العلاقة صحيحة مهما كانت $n \geq 1$

مجموع حدود غير متعاقبة من متتالية هندسية:

خطوات: 1- نضع متتالية جديدة t_n حسب القفزة

مثلاً: القفزة 2 $\quad t_n = U_{2n}$

القفزة 3 $\quad t_n = U_{3n}$

2- نثبت أن t_n نفس نوع U_n

3- نطبق القانون على حدود t_n. حيث

كل $U \longrightarrow t$ نقسم رقم الحد

على عدد القفزات

مثال: لتكن المتتالية $U_n = 2^n$ هندسية

احسب $U_4 + U_6 + \dots + U_{12}$

الحل:

$$t_n = U_{2n}$$

$$t_n = 2^{2n}$$

نثبت أن t_n هندسية:

$$t_{n+1} = 2^{2(n+1)} \Longrightarrow t_{n+1} = 2^{2n+2}$$

$$\Longrightarrow \frac{t_{n+1}}{t_n} = \frac{\cancel{2^{2n}} \cdot 2^2}{\cancel{2^{2n}}} = 2^2 = 4 = q$$

المتتالية هندسية أساسها

$$q = 4$$

$$t_2 + t_3 + \dots + t_6$$

$$S = a\left(\frac{1-q^n}{1-q}\right)$$

$$\frac{t}{2} = 2^4 \implies \frac{t}{2} = 16$$

$$n = 6 - 2 + 1 = 5$$

$$S = 16\left(\frac{1-(4)^5}{1-4}\right)$$

$$S = \frac{16}{-3}\left(1-(4)^5\right)$$

$$S = -\frac{16}{3}\left(1-1024\right)$$

$$S = -\frac{16}{3}\left(-1023\right)$$

$$S = 5456$$