المتتاليات :

تعريف المتتالية : هي تابع معرف على مجموعة الأعداد الطبيعية $\mathbb{N}$

الأعداد الطبيعية : هي مجموعة الأعداد الموجبة :

$0, 1, 2, 3, 4, \ldots$

طريقة عرض المتتالية : الطريقة الأولى : الشكل الصريح ، الحد العام

U_n بدلالة n

$U_n = 2n+1$ ← دليل

احسب U_1, U_2, U_3 واحسب U_{n+1}

الحل : نعوض كل n بدلالة

$U_1 = 2(1)+1$

$U_1 = 3$

$U_2 = 2(2)+1$

$U_2 = 5$

$U_3 = 2(3)+1$

$U_3 = 7$

احسب U_{n+1}

$U_{n+1} = 2(n+1)+1$

$U_{n+1} = 2n+2+1 \Rightarrow U_{n+1} = 2n+3$

T.Ahmad Shalhoum

ملاحظة: لا يجب بدل نقطة بقطعين ( )

الشكل الثاني: علاقة تدريجية: U_{n+1} بدلالة U_n

ملاحظة هامة: لا يجب أن يكون معي الترتيب.

مثال: لتكن المتتالية

$$\begin{cases} U_{n+1} = 2U_n + 5 \\ U_0 = +1 \end{cases}$$

احسب U_1، U_2، U_3

$U_1 = 2U_0 + 5$

$U_1 = 2(1) + 5$

$U_1 = 7$

$U_2 = 2U_1 + 5$

$U_2 = 2(7) + 5$

$U_2 = 19$

$U_3 = 2U_2 + 5$

$U_3 = 2(19) + 5$

$U_3 = 38 + 5 = 43$

T.Abdou Shalkoum

Alamal

المتتالية الحسابية: كل حد ينتج من سابقه بإضافة عدد ثابت r
نسمي r أساس المتتالية.

$$U_n = \underbrace{\frac{1}{2}}_{+1} + \underbrace{\frac{3}{2}}_{+1} + \frac{5}{2} + \dots + \frac{21}{2}$$

هي متتالية حسابية.

إثبات أن المتتالية حسابية: نبسط $U_{n+1} - U_n$

$$U_{n+1} - U_n = \square$$

* إذا كان الناتج يحوي $n \Rightarrow$ ليست حسابية
* إذا كان الناتج عدد مقيض $\Rightarrow$ تكون حسابية.

مثال: بين إذا كانت المتتالية حسابية أم لا.

1) $U_n = 2n+5$

$$U_{n+1} = 2(n+1)+5 \Rightarrow U_{n+1} = 2n+2+5$$

$$U_{n+1} = 2n+7$$

$$\Rightarrow U_{n+1} - U_n = 2n+7-(2n+5)$$

$$= 2n+7-2n-5$$

$$= 2 \quad \text{مقيض}$$

المتتالية حسابية أساسها $r=2$

Ahmad Shalhoum

$(a+b)^2$ ⟹ مربع الأول + ضعفي الأول بالثاني + مربع الثاني

$U_n = n^2 + 1$

$U_{n+1} = (n+1)^2 + 1$

$U_{n+1} = n^2 + 2(n)(1) + 1^2 + 1 \Longrightarrow U_{n+1} = n^2 + 2n + 2$

$\Longrightarrow U_{n+1} - U_n = n^2 + 2n + 2 - (n^2 + 1)$

$= n^2 + 2n + 2 - n^2 - 1$

$= 2n + 1$

⟸ متتالية صاعدة.

وظيفة: بين إذا كانت المتتاليات صاعدة أم لا؟

1) $U_n = n - 3$

2) $U_n = 2n^2 + 1$

T.Ahmad Shalhoum

/ /

قوانين إكتابية: القانون الأول.

قانون الحد العام: $U_n - U_m = (n-m)r$

U_n: هو مبطن بالمائة

r: أساس المتتالية

n: دليل الحد المطلوب

التعبير U_n بدلالة n

القانون الثاني: قانون حساب الأساس إذا عرفنا حدين بالمائة

$$r = \frac{U_m - U_p}{m-p}$$

القانون الثالث: قانون حساب المجموع

$$S = \frac{n(a+l)}{2}$$

عدد الحدود

a: أول حد بالمتتالية

l: آخر حد بالمتتالية

عدد الحدود: دليل آخر حد - دليل أول حد + 1

$U_1 + U_2 + \dots + U_7$

$7 - 1 + 1 = 7$

T.Ahmad Shalhoum

تدرب ص 18 ، 1 $(U_n)_{n\geq 0}$ متتالية حسابية

نعطى $U_2 = 41$ و $U_5 = -13$

أحسب U_{20} .

(ملاحظة: إذا كتبت U_n بدلالة n ← يجوز بكتب U_n بدلالة n)

الحل :

$$U_n - U_m = (n-m)r$$

$$U_n - U_2 = (n-2)r$$

$$U_n - 41 = (n-2)\cdot -18$$

$$U_n - 41 = -18n + 36$$

$$U_n = -18n + 36 + 41$$

$$U_n = -18n + 77$$

نحسب U_{20}

$$U_{20} = -18(20) + 77$$

$$U_{20} = -360 + 77 \Rightarrow U_{20} = -283$$

$$r = \frac{U_m - U_p}{m-p}$$

$$r = \frac{U_2 - U_5}{2-5}$$

$$r = \frac{41 + 13}{-3}$$

$$r = \frac{54}{-3} = -18$$

T:Ahmed Shalhoum

3) $(U_n)_{n\geq 0}$ متتالية حسابية أساسها 3 وحدها الأول $U_1 = -2$

احسب U_n بدلالة n، استنتج قيمة المجموعين

$U_1 + U_2 + \cdots + U_{20}$ ، $U_{30} + U_{31} + U_{32}$

الحل: حساب U_n بدلالة n ← قانون الحد العام

$$U_n - U_m = (n-m)r$$

$$U_n - U_1 = (n-1)3$$

$$U_n + 2 = 3n - 3 \Longrightarrow \boxed{U_n = 3n - 5}$$

حساب المجموع: $U_1 + U_2 + \cdots + U_{20}$

$U_1 = -2$

$U_{20} = 3(20) - 5$

$U_{20} = 60 - 5$

$= 55$

$n = 20 - 1 + 1$

$n = 20$

$$S = \frac{n(a+l)}{2}$$

$$S = \frac{\overset{10}{\cancel{20}}(-2+55)}{2} \Longrightarrow S = 10(53)$$

$$S = 530$$

T.Ahmad Shaikoum

/ /

$U_{30} + U_{31} + U_{32}$ صاب

$U_{30} = 3(30) - 5$

$U_{30} = 90 - 5 = 85$

$U_{32} = 3(32) - 5$

$U_{32} = 96 - 5 = 91$

$n = 32 - 30 + 1$

$n = 2 + 1 = 3$

$S = \frac{n(a+l)}{2} \Rightarrow$

$S = \frac{3(85+91)}{2}$

$S = \frac{3(176)}{2}$

$S = \frac{528}{2} \Rightarrow S = 264$

T.Ahmad Shalhoum

/ /

المتتالية الهندسية : كل حد ينتج عن سابقه بضربه بعدد ثابت غير الصفر يسمى أساس المتتالية ورمزه q.

$$U_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots + \frac{1}{2^n}$$

(×1/2) (×1/2) (×1/2) (×1/2)

← متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$

إثبات أن المتتالية هندسية : بتوطيد U_n

بتوطيد U_{n+1}

$$\Rightarrow \frac{U_{n+1}}{U_n} = \square$$

★ إذا كان الناتج يحوي n ← ليست هندسية

★ إذا كان الناتج عدد حقيقي ← هندسية.

مثال: لتكن المتتالية $U_n = 2^n$

أثبت أنها هندسية.

الحل:

$$U_{n+1} = 2^{n+1}$$

$$\frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{2^{n+1}}{2^n} = \frac{2^n \cdot 2^1}{2^n} = 2$$

← المتتالية هندسية أساسها $q = 2$

Ahmad Shihoum

ص 18 / /

تمرين 1 : لتكن (U_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ $U_n = \frac{2^n}{3^{n+1}}$

أثبت أن المتتالية هندسية وحدد أساسها.

الحل :

$$U_{n+1} = \frac{2^{n+1}}{3^{n+2}}$$

$$\Rightarrow \frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{\frac{2^{n+1}}{3^{n+2}}}{\frac{2^n}{3^{n+1}}} \Rightarrow \frac{2^{n+1}}{3^{n+2}} \times \frac{3^{n+1}}{2^n}$$

$$\frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{2^{n+1}}{3^{n+1} \cdot 3} \times \frac{3^{n+1}}{2^n} = \frac{2}{3}$$

$\Rightarrow$ المتتالية هندسية أساسها $q = \frac{2}{3}$

T:Ahmad Shalhoum

اكتب بدلالة n

قوانين المتتالية الهندسية: القانون الأول: قانون الحد العام.

$$U_n = U_m \, q^{n-m}$$

U_m: حد معطى بالمسألة

q: أساس المتتالية

m: دليل الحد المعطى

القانون الثاني: قانون حساب الأساس إذا علمنا حدين من المتتالية

$$q^{m-p} = \frac{U_m}{U_p}$$

حيث U_m ، U_p حدان بالمسألة.

القانون الثالث: قانون حساب المجموع

$$S = a\left(\frac{1-q^n}{1-q}\right)$$

n عدد الحدود a: أول حد بالمجموع.

دليل آخر حد - دليل أول حد + 1

T.Ahmad Shalhoum

تعريف المتتالية الهندسية تدريب 1

صح X8 / 1

تمرين 6: $(U_n)_{n\geq 0}$ متتالية أساسها 2 وحدها الأول $U_0 = 1$ احسب المجموع $U_3 + U_4 + \cdots + U_{10}$

الحل:

حساب U_n بدلالة n.

$$U_n = U_m q^{n-m}$$

$$U_n = U_0 q^{n-0}$$

$$U_n = 1 (2)^n \Longrightarrow \boxed{U_n = 2^n}$$

$$U_3 = 2^3 = 8 \qquad q = 2$$

$$n = 10 - 3 + 1 = 8$$

$$S = a\left(\frac{1-q^n}{1-q}\right)$$

$$S = 8\left(\frac{1-(2)^8}{1-2}\right) \Longrightarrow S = 8\left(\frac{1-256}{-1}\right)$$

T.Ahmad Shalhoum

$$S = 8\left(\frac{-255}{-1}\right)$$

$$S = 8(255)$$

$$S = 2040$$

وظيفة: لتكن المتتالية $(U_n)_{n\geq 0}$ متتالية حسابية فيها

$U_3 = 6$ ، $U_6 = 12$

1- اكتب U_n بدلالة n

2- احسب المجموع $U_4 + U_5 + \cdots + U_{13}$

T:Ahmad Shahoum

وظيفة : $(U_n)_{n\geq 1}$ هندسية فيها $U_1 = 3$, $q = 2$

1- اكتب U_n بدلالة n واحسب U_3

2- احسب $U_1 + U_2 + \cdots + U_5$.

T.Ahmad Shalhoum