المسألة الأولى :

يتألف نواس الفتل من قرص متجانس كتلته $m = 2\,kg$ ونصف قطره $r = 4\,cm$ معلق من مركزه بطرف سلك فتل شاقولي ثابت فتله $k = 16\times10^{-3}\ m.N.rad^{-1}$ ، ندير القرص في مستوٍ أفقي بزاوية $\theta = +\frac{\pi}{4}\,rad$ عن وضع توازنه ونتركه دون سرعة ابتدائية في اللحظة $(t = 0)$.

المطلوب : 1 - احسب الدور الخاص للنواس .

2 - استنتج التابع الزمني للمطال الزاوي انطلاقاً من شكله العام .

3 - احسب الطاقة الكامنة في وضع مطاله الزاوي $\theta = \frac{\pi}{8}\,rad$ ثم احسب طاقته الحركية عندئذٍ (عزم عطالة القرص بالنسبة لمحور مار من مركزه $I_{\Delta/c} = \frac{1}{2} m . r^2$)

1) الحل :

$I_0 = \frac{1}{2} m . r^2$ $\quad T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{I_0}{k}}$

$I_0 = \frac{1}{2} 2 (4\times10^{-2})^2 = 1 . 16\times10^{-4} = 16\times10^{-4}\ kg.m^2$

$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{16\times10^{-4}}{16\times10^{-3}}} = 2\pi\sqrt{\frac{1}{10}} = 2\,s$

2) الشكل العام $\theta = \theta_{max} \cos(\omega_0 t + \varphi)$

لأنه تركت دون سرعة ابتدائية عندئذٍ $\theta_{max} = +\frac{\pi}{4}\,rad$

$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = \frac{2\pi}{2} = \pi\ rad.s^{-1}$

$t = 0$ $\quad \theta_{max} = \theta_{max} \cos(\omega_0 t + \varphi)$

$\theta = \theta_{max} \Rightarrow \cos\varphi = 1 \rightarrow \varphi = 0$

ومنه تابع المطال يكون :

$\theta = \frac{\pi}{4} \cos(\pi t + 0)$

$E_p = \frac{1}{2} k \theta^2 = \frac{1}{2} 16\times10^{-3} . \frac{10}{64} = \frac{10^{-2}}{8}\ J$

مطلوب إضافي :

احسب السرعة الزاوية للقرص لحظة المرور الأول بوضع التوازن :

زمن مرور أول $t_1 = \frac{T_0}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}\,s$

$\omega = -\omega_0\,\theta_{max}\sin(\omega_0 t)$

$\omega = -\pi \times \frac{\pi}{4}\sin(\frac{\pi}{2})$

$\omega = -\frac{10}{4}(1) = -\frac{10}{4}\ rad.s^{-1}$

طلب حساب E_k $\quad E_k = \frac{1}{2}k(\theta_m^2 - \theta^2)$

$E_k = \frac{1}{2}16\times10^{-3}(\frac{10}{16} - \frac{10}{64})$

$E_k = \frac{10^{-3}}{2}(\frac{40}{4} - \frac{10}{4}) = \frac{3}{8}\times10^{-2}\,j$

المسألة الثانية

$I_{0,c} = 0$

ساق مهملة الكتلة طولها l، نثبت في كل من طرفيها كتلة نقطية $m_1 = m_2 = 125\,g \times 10^{-3}\,kg$ ونعلق الساق من منتصفها بسلك فتل شاقولي ثابت فتله $K = 16\times10^{-3}\,m.N.rad^{-1}$ لتؤلف الجملة نواس فتل. نزيح الساق عن وضع توازنها في مستوٍ أفقي بزاوية $\theta = \frac{\pi}{3}\,rad$ ونتركه دون سرعة ابتدائية لحظة بدء الزمن، فتهتز بحركة جيبية دورانية دورها الخاص $T_0 = 2{,}5\,s$

المطلوب:

1- استنتج التابع الزمني للمطال الزاوي انطلاقاً من شكله العام.

2- احسب قيمة السرعة الزاوية للساق لحظة مرورها الأول بوضع التوازن.

3- احسب طول الساق.

الحل:

1) الشكل العام: $\bar{\theta} = \theta_{max}\cos(\omega_0 t + \bar{\varphi})$

لأنه ترك دون سرعة ابتدائية $\theta_{max} = \theta = \frac{\pi}{3}\,rad$

$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = \frac{2\pi}{2{,}5} = \frac{4\pi}{5} = 8\pi\times10^{-1}\,rad.s^{-1}$

$t = 0$ $\quad \theta_{max} = \theta_{max}\cos(\varphi)$

$\theta = \theta_{max} \Rightarrow \cos\varphi = 1 \Rightarrow \varphi = 0$

وعنه التابع الزمني يكون:

$\theta = \frac{\pi}{3}\cos(8\pi\times10^{-1}t)$

2) $\omega = -\omega_0\,\theta_{max}\sin(\omega_0 t)$

لحظة المرور الأول $t_1 = \frac{T_0}{4} = \frac{\frac{5}{2}}{4} = \frac{5}{8}\,s$

نعوض في تابع السرعة:

$\omega = -8\pi\times10^{-1}\cdot\frac{\pi}{3}\cdot\sin(8\pi\times10^{-1}\cdot\frac{5}{8})$

$\omega = -\frac{8}{3}\sin(\frac{5\pi}{10}) = -\frac{8}{3}\sin(\frac{\pi}{2}) = -\frac{8}{3}\,rad.s^{-1}$

3) نحسب عزم العطالة:

~~$I_\Delta = I_{\Delta} = 2I_{\Delta/m_1} = 2m_1r^2 = 2\cdot125\cdot10^{-3}$~~

~~$I_\Delta = I_{\Delta/c} = 0 \quad r = ?$~~

~~$I_\Delta = \frac{k}{\omega_0^2} = \frac{16\times10^{-3}}{64\cdot10^{-2}} = \frac{10^{-2}}{4}\,kg.m^2$~~

~~$I_\Delta = 2I_{\Delta/m_1} \Rightarrow \frac{10^{-2}}{4} = 2m_1r^2$~~

~~$\frac{10^{-2}}{4} = 2\cdot125\times10^{-3}\,r^2 \Rightarrow r^2 = \frac{\times10^{-1}}{250}$~~

$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{I_A}{k}}$

نربع :

$T_0^2 = 40\,\frac{I_A}{k} \Rightarrow : I_A = 2\,I_{A/m_1} = 2m_1\left(\frac{\ell}{2}\right.$

$\left(\frac{5}{2}\right)^2 = \frac{40 \cdot 2 \cdot 125\times10^{-3}\cdot \ell^2}{\cancel{16\times10^{-3}}\quad 4}$

$\frac{25}{4} = \frac{40 \cdot 2 \cdot 125\,\ell^2}{64} \Rightarrow \ell^2 = \frac{\overset{4}{\cancel{64}}\cdot 25}{40\cdot\cancel{4\cdot2}\cdot\underset{5}{\cancel{125}}}$

$\ell^2 = \frac{4}{40\cdot5} = \frac{4}{200} = \frac{1}{50}$

$\frac{25}{4} = \frac{40 \cdot 125\cdot10^{-3}\cdot \ell^2 \cdot 2}{16\cdot4\cdot\cancel{10^{-3}}}$

$\ell^2 = \frac{\cancel{25}\cdot16\cdot\cancel{4}\cdot1}{40\cdot\cancel{4}\cdot\underset{5}{\cancel{125}}\cdot2} = \frac{16}{400} \Rightarrow \ell = \sqrt{\frac{16}{400}}$

$\ell = \frac{4}{20} = \frac{1}{5} = 0.2\,m$