$T_0^2 = 4\pi^2 \frac{I_c}{k} \Rightarrow I_\Delta = 2 I_{\Delta/m_1} = 2m_1\left(\frac{l}{2}\right)^2$

$\left(\frac{1.6}{2}\right)^2 = 4\pi^2 \frac{2 \times 125 \times 10^{-3} \cdot l^2}{16 \times 10^{-3}} \cdot \frac{1}{4}$

$\frac{25}{4} = \frac{4\pi^2 \cdot 2 \cdot 125 l^2}{64}$ $\Rightarrow l^2 = \frac{64 \cdot 25}{40 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 125}$

$l^2 = \frac{4}{40 \cdot 5} = \frac{4}{200} = \frac{1}{50}$

$l' = \frac{25 \cdot 16 \cdot 1}{40 \cdot 4 \cdot 125 \cdot 2} = \frac{16}{400} \Rightarrow l = \sqrt{\frac{16}{400}}$

$l = \frac{4}{20} = \frac{1}{5} \Rightarrow 0.2\,m$

المسألة الثالثة: 1994

ساق أفقية متجانسة طولها $l = 40\,cm$ معلقة بسلك فتل شاقولي يمر من منتصفها.

a) ندير الساق في مستوٍ أفقي بزاوية $\theta = 60°$ انطلاقاً من وضع توازنها ونتركها دون سرعة ابتدائية في اللحظة $t = 0$ فتهتز بحركة جيبية دورانية دورها الخاص $T_0 = 1\,s$ فإذا علمت أن عزم عطالة الساق بالنسبة لسلك الفتل محاورياً $I_{\Delta/c} = 2 \times 10^{-3}\,kg \cdot m^2$ المطلوب:

1- استنتج التابع الزمني للمطال الزاوي انطلاقاً من شكله العام.

2- احسب قيمة السرعة الزاوية للساق لحظة مرورها الثاني بوضع التوازن.

3- احسب قيمة المسار الزاوي للساق عندما تصنع زاوية $(-30°)$ مع وضع توازنها.

b) نثبت بالطرفين a، b كتلتين $m_1 = m_2 = 75\,g$ استنتج قيمة الدور الخاص الجديد للحركة المهتزة. ثم احسب قيمة ثابت فتل السلك.

c) نقسم سلك الفتل إلى قسمين متساويين ونعلق الساق بنصفي السلك معاً أحدهما فوق الآخر من الأعلى والآخر من الأسفل. استنتج قيمة الدور الخاص الجديد للساق (دون وجود الكتل).

الحل:

1) المعادلة الزمنية:

$\theta = \theta_{max} \cos(\omega t + \varphi)$

$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = \frac{2\pi}{1} = 2\pi \ rad.s^{-1}$

$\theta = \theta_{max} = \frac{\pi}{3} rad$ عند بداية تسجيل الحركة

$t = 0 \quad \theta = \theta_{max} \cos(\varphi)$

$\theta = \theta_{max} \Rightarrow \cos\varphi = 1 \Rightarrow \varphi = 0$

$\theta = \frac{\pi}{3} \cos(2\pi t)$

2) $\omega = -2\pi \cdot \frac{\pi}{3} \sin(2\pi t)$

لحساب السرعة الأولى:

$t = \frac{3T_0}{4} = \frac{3(1)}{4} = \frac{3}{4} s$

$\bar{\omega} = -2\pi \cdot \frac{\pi}{3} \sin\left(2\pi \cdot \frac{3}{4}\right)$

$\bar{\omega} = +\frac{20}{3}(-1)$

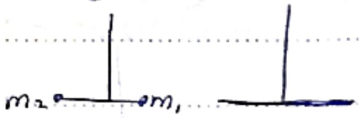
$\bar{\omega} = +\frac{20}{3} rad.s^{-1}$

3) $\bar{\alpha} = -\omega_0^2 \cdot \bar{\theta} \quad ; \quad \theta = \frac{\pi}{180} \cdot 30 = \frac{\pi}{6} rad$

$\bar{\alpha} = (2\pi)^2 \cdot \left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{4\pi^2}{6} = -\frac{\pi}{3} \quad \lambda = \frac{\pi}{3}$

$\omega = \frac{20\pi}{3} rad.s^{-1}$

6)



$T_0' = \quad I_0' = I_{0rc} + 2I_{0/m_1}$

$I = 1.2 \times 10^{-3} + 2 \cdot \frac{7 \times 10^{-3} \cdot 16 \times 10^{-2}}{4} = 8 \times 10^{-3} kg.m^2$

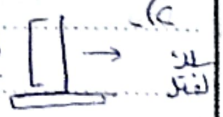
$T_0 = cst\sqrt{I_0} \quad , \quad T_0 = cst\sqrt{I_0}$

$\frac{T_0'}{T_0} = \sqrt{\frac{I_0'}{I_0}} = \sqrt{\frac{8 \times 10^{-3}}{2 \times 10^{-3}}} = \sqrt{4} = 2 s$

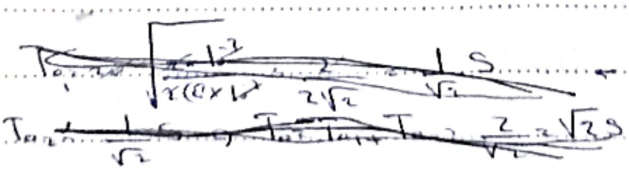
c)

$L_1 = l_2$ → نفس طول القضيب

$L_2 = \frac{l}{2}$ → نصف القضيب الأصلي



$k_1 = 2k \quad k_2 = 2k$



$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{I_0}{k}} \Rightarrow I_0 = 4\pi^2 \cdot \frac{I_0}{k}$ ثابت لي

$k = 4\pi^2 \cdot 2 \times 10^{-3} = 8 \times 10^{-2} N.m.rad^{-1}$

$T_0' = 2\pi \sqrt{\frac{I_0}{4k'}} = 2\pi \sqrt{\frac{2 \times 10^{-3}}{4(8 \times 10^{-2})}} = \frac{1}{2} s$

$k = k_1 + k_2 = 2k + 2k = 4k$

دورة 2017 :

يتألف نواس لفتل من قرص متجانس معلق من مركزه بسلك فتل شاقولي ثابت فتله $K = 8 \times 10^{-2}\ mN.rad^{-1}$ ندير القرص في المستوي الأفقي بزاوية $\theta = +\frac{\pi}{2} rad$ ونتركه دون سرعة ابتدائية في اللحظة $(t=0)$ إذا علمت أن عزم عطالة القرص بالنسبة لسلك الفتل $I_{\Delta/c} = 2 \times 10^{-3}\ kg.m^2$ المطلوب:

1- احسب الدور الخاص لهذا النواس. 2- استنتج التابع الزمني للمطال الزاوي.

3- احسب متى تكون السرعة الزاوية للقرص لحظة المرور الأول بوضع التوازن ثم احسب طاقته الحركية.

الحل:

1) $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{I_c}{K}} = 2\pi\sqrt{\frac{2\times10^{-3}}{8\times10^{-2}}}$

$T_0 = \frac{2}{\sqrt{4}} = 1S.$

2) التابع الزمني للمطال:

$\theta = \theta_{max}\cos(\omega_0 t + \varphi)$

عند ترك القرص دون سرعة ابتدائية $\theta = \theta_{max} = \frac{\pi}{2} rad$

$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = \frac{2\pi}{1} = 2\pi\ rad.s^{-1}$

$t=0 \Rightarrow \theta_{max} = \theta_{max}\cos(\omega_0 t + \varphi)$

$\theta = \theta_{max} \Rightarrow \cos\varphi = 1 \Rightarrow \varphi = 0\ rad$

$\theta = \frac{\pi}{2}\cos(2\pi t)$

3) $\omega = -\omega_0 \theta_{max}\sin(\omega_0 t)$

$t_1 = \frac{T_0}{4} = \frac{1}{4} s.$

$\omega = -2\pi \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \sin(\frac{2\pi}{4})$

$\omega = -\pi^2 \sin(1) = -\pi^2\ rad.s^{-1}$

$E_K = \frac{1}{2} I_0 \omega^2 = \frac{1}{2} 2\times10^{-3} \cdot \pi^4 = \pi^4\ J$

دورة 2018 :

ساق مهملة الكتلة طولها $l = 40\,cm$ تثبت في كل من طرفيها كتلة نقطية $m_1 = m_2 = 100\,g$ ونعلق منتصفها بسلك فتل شاقولي ثابت فتله k . ندير الساق في مستو أفقي بزاوية $\theta = +\frac{\pi}{3}\,rad$ عن وضع توازنها ونتركها دون سرعة ابتدائية في اللحظة $(t=0)$ فتهتز حركة جيبية دورانية دورها الخاص $T_0 = 2\,S$ المطلوب

1- استنتج المعادلة التفاضلية التي يحققها الزوج الزاوي الذي يطأ مع شكل الحركة.

2- احسب قيمة السرعة الزاوية للساق لحظة المرور الأول بوضع التوازن.

3- احسب ثابت فتل السلك k.

4- نجعل طول سلك الفتل نصف ما كان عليه. احسب الدور الخاص الجديد T_0'.

إشارة: إذا أردنا الدور أن ينقص بمقدار $\left(\frac{1}{10}\right)$ من قيمته فكم يجب أن يكون البعد بين الكتلتين ليتحقق ذلك.

الحل:

$T_0' = ?$ $\quad l' = \frac{1}{2}l$

$T_0 = const\sqrt{l}$, $T_0' = const\sqrt{l'}$

$\frac{T_0'}{T_0} = \sqrt{\frac{l'}{l}} = \sqrt{\frac{\frac{1}{2}l}{l}} = \sqrt{\frac{1}{2}} \Rightarrow T_0' = \frac{T_0}{\sqrt{2}}$

$T_0' = \sqrt{2}\,S$

1) المعادلة الزمنية: $\theta = \theta_m \cos(\omega_0 t + \varphi)$

الشروط الابتدائية: $\theta_0 = \theta_m = \frac{\pi}{3}\,rad$

$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = \frac{2\pi}{2} = \pi\,rad/s$

$t=0 \quad \theta = \theta_m \cos(\varphi)$

$\theta = \theta_m \Rightarrow \cos\varphi = 1 \Rightarrow \varphi = 0$

وعليه تكتب المعادلة:

$\theta = \frac{\pi}{3}\cos(\pi t)$

2) $\omega = -\omega_0 \theta_m \sin(\omega_0 t)$

$t_1 = \frac{T_0}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}\,s$

$\omega = -\pi \cdot \frac{\pi}{3} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{\pi^2}{3}(1) = -\frac{\pi^2}{3}\,rad/s$

3) حساب k: $\omega_0^2 = \frac{k}{I_0} \Rightarrow k = I_0 \omega_0^2$

$I_0 = 2I_0/m_1 = 2 \cdot \frac{1}{12} \cdot m \cdot l^2$

$I_0 = 8 \times 10^{-3}\,kg.m^2$

$\omega_0^2 = \frac{k}{I_0} \Rightarrow k = I_0 \omega_0^2 = 8 \times 10^{-3} \cdot \pi^2 = 8 \times 10^{-3}\,N.m.rad^{-1}$

@ $T_0' - T_0 = \frac{1}{10}$

$T_0' = 2 - \frac{1}{10} = \frac{19}{10} = 1.9$ s

$T_0 = \text{Const} \cdot r$ أي أن

$T_0 = \text{Const} \cdot r'$

$\frac{T_0'}{T_0} = \frac{r'}{r} \Rightarrow r = \frac{\ell}{2}$

$\frac{T_0'}{T_0} = \frac{r'}{\frac{\ell}{2}} = \frac{2r'}{\ell}$ ← بالضرب بالكاتس

$2r' = \ell \times \frac{T_0'}{T_0}$

$2r' = 40 \times 10^{-2} \times \frac{19}{2}$

$2r' = 38 \times 10^{-2}$ m