شغف رفيقك خطوة بخطوة

شغف التعليمي

Educational passion

القناة الرئيسية " فريق شغف التعليمي "

https://t.me/alsh276

مكتبة شغف " بوت الملفات "

https://t.me/passion_study_bot

* النهايات المثلثية *

معنونا

$0 \to$ تعويض

$\infty \to$ احاطة

النهايات

الأسية

* $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x}=+\infty$

* $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{e^x}=0$

* $\lim\limits_{t\to0}\frac{e^t-1}{t}=1$

* $\lim\limits_{t\to0}\frac{t}{e^t-1}=1$

* $\lim\limits_{x\to0}x^n e^x=0^-$

فردي $=0^-$ ، زوجيا $=0^+$

اللوغاريتمية

* $\lim\limits_{t\to+\infty}\frac{\ln t}{t}=0$

* $\lim\limits_{t\to+\infty}\frac{t}{\ln t}=+\infty$

* $\lim\limits_{x\to0}x\ln x=0$

* $\lim\limits_{t\to0}\frac{\ln(1+t)}{t}=1$

* $\lim\limits_{t\to0}\frac{t}{\ln(1+t)}=1$

* $\lim\limits_{x\to1}\frac{\ln t}{x-1}=1$

* $\lim\limits_{t\to1}\frac{t-1}{\ln t}=1$

عدم التعيين 1^∞

1: نكتب المحصور $1+\square$

2: نفرض (*) $t=\square$

3: نعين جهة السعي.

4: نعزل x من علاقة (*)

5: نكتب الأس بدلالة t.

6: نعدل الأس إلى أن نصل إلى $\lim\limits_{t\to0}\frac{\ln(1+t)}{t}$

حالات عدم التعيين

$\frac{\infty}{\infty}$ ← حد أعلى مناسب.

$\infty-\infty$ ← مرافق ، عامل مشترك .

$\frac{0}{0}$ ← جذر مرافق . ، تحليل . ، دساتير مثلثية

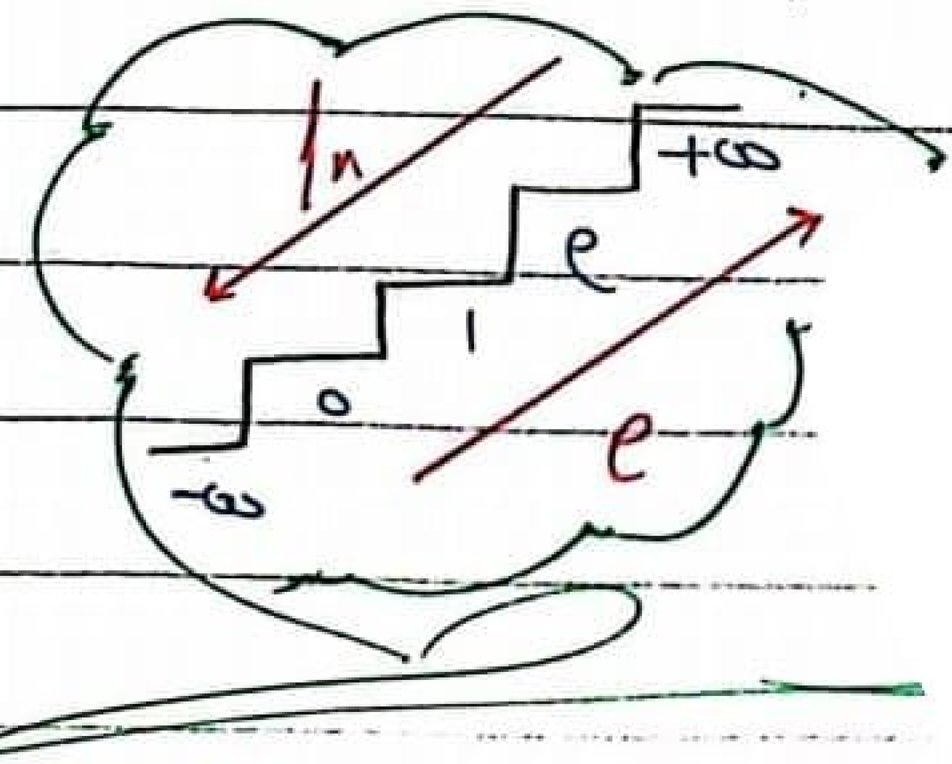
$1-\cos^2\theta=\sin^2\theta$ ، $\cos^2\theta-1=-\sin^2\theta$

$\begin{cases}1-\cos\theta=2\sin^2\frac{\theta}{2}\\-1+\cos\theta=-2\sin^2\frac{\theta}{2}\end{cases}$

$0\cdot\infty$ ← تحويل . ، عبارات متشابكة .

حساب عامل مشترك ، تفريق كسور ، تحليل مباشر

مطابقات ... إلخ



تذكر :

$-1\le\sin x\le1$

$0\le\sin^2x\le1$

$-1\le\cos x\le1$

$0\le\cos^2x\le1$

مبرهنات الإضافة :

$-1 \le \sin x \le 1$

$-1 \le \cos x \le 1$

$0 \le \sin^2 x \le 1$

$0 \le \cos^2 x \le 1$

* المبرهنة الأولى :

$h(x) \le f(x) \le g(x)$

إذا كان $* \lim\limits_{x \to \square} h(x) = \ell$

$* \lim\limits_{x \to \square} g(x) = \ell$

إذا حسب مبرهنة الإضافة (1)

$\lim\limits_{x \to \square} f(x) = \ell$

المبرهنة الثانية :

$|f(x) - L| \le g(x)$

إذا كان $* \lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = 0$

إذا حسب مبرهنة الإضافة (2)

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \ell$

المبرهنة الثالثة :

$* \ f(x) \ge g(x)$

إذا كان $\lim\limits_{x \to \square} g(x) = +\infty$

إذا حسب مبرهنة الإضافة (3) $\lim\limits_{x \to \square} f(x) = +\infty$

$* \ f(x) \le g(x)$

إذا كان $\lim\limits_{x \to \square} g(x) = -\infty$

إذا حسب مبرهنة الإضافة (3) $\lim\limits_{x \to \square} f(x) = -\infty$

* تمرين :

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sin x}{x^2}$ $\boxed{1}$

$* \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\cos^2 x}{x+1}$ $\boxed{2}$

$* \lim\limits_{x \to \pm\infty} x + \cos x$ $\boxed{3}$

$* \ |f(x) - 3| \le \dfrac{1}{x+1}$ $\boxed{4}$

$a = +\infty$

$|f(x) - 6\cos| \le \dfrac{1 - \cos 2x}{x}$ $\boxed{5}$

$a = -\infty$

❖حالة $0.\infty$:

أولاً : تغير المتحول:

شغف التعليمي

Educational passion

$$\lim_{x\to+\infty} x\sin\left(\frac{1}{x}\right) \quad : +\infty(0)$$

الحل: نفرض $t = \frac{1}{x}$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} = \quad ; \quad x\to+\infty \quad t\to 0$$

$$\lim_{t\to 0} \frac{\sin t}{t} = 1$$

$$\lim_{x\to+\infty} x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) \quad : +\infty(0)$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}$$

نفرض $t = \frac{1}{x}$; $x\to+\infty$ $\quad t\to 0$

$$\lim_{t\to 0} \frac{\ln(1+t)}{t} = 1$$

لم هذه المبرهنة فقط نتوصل وصول الناتج $\ln(1)$

$$\lim_{x\to+\infty} x\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right) \quad : +\infty(0)$$

مصنع حذف وإطالة

الحل:

$$x+1 \overline{)\,x-1\,} \quad 1$$

$$\lim_{x\to+\infty} x\ln\left(1-\frac{2}{x+1}\right)$$

$$= \lim_{x\to+\infty} x\cdot\frac{-2}{x+1}\cdot\frac{\ln\left(1-\frac{2}{x+1}\right)}{\frac{-2}{x+1}}$$

$$= -2(1) = -2$$

$$\lim_{t\to 0} t\ln t = 0$$

$$\lim_{x\to 0} x\ln^2 x$$

$$\lim_{x\to 0} \sqrt{x}^2\cdot\ln^2 x$$

$$= \lim_{x\to 0} (\sqrt{x}\ln x)^2$$

$$= \lim_{x\to 0} (\sqrt{x}\ln\sqrt{x}^2)^2 = \lim_{x=0} (2\sqrt{x}\ln\sqrt{x})^2$$

$$= 2(0)^2 = 0$$

ثانياً: مهارات و تغيير صياغة

تمرين 1:

1) $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2\left(\sqrt{2+\frac{1}{x}}-\sqrt{2}\right)$

2) $\lim\limits_{x\to0^+} \sin x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}$

3) $\lim\limits_{x\to0^+} x(\ln(x)-1)$

تمرين 2:

1) $\lim\limits_{x\to0}\frac{6x^2+2-2\cos 2x}{2x^2}$

2) $\lim\limits_{x\to0}\frac{2\cos x-2}{\sqrt{4x^2+2}-\sqrt{2}}$

3) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{\sqrt{x+1}}-\frac{x}{\sqrt{x+2}}$

4) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt{1+\sin x}-\sqrt{1-\sin x}}{x}$

5) $\lim\limits_{x\to1}(2-x)^{\frac{1}{x-1}}$

6) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x-2}{x+1}\right)^{\frac{x+1}{3}}$

7) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x}{\sqrt{1+x}-1}$

8) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}}{x+1}$

9) $\lim\limits_{x\to0}\frac{x^2+2-2\cos\sqrt{x}}{x}$

10) $\lim\limits_{x\to+\infty}(3+x)^{\frac{1}{x+2}}$

11) $\lim\limits_{x\to1}\frac{7x-7}{\sqrt{3x+1}-2}$

12) $\lim\limits_{x\to1}\frac{\sqrt{4x+5}-3}{2-\sqrt{3x+1}}$

10: $\lim_{x\to} (3+x)^{\frac{1}{-x+2}}$

$: 1^{+\infty}$

$f(x) = (3+x)^{\frac{1}{x+2}}$

$= (1+2+x)^{\frac{1}{x+2}}$

$* t = 2+x$

$* x \to 2$

$t \to 0$

$* x = 2-t$

$* \frac{1}{-x+2} = \frac{1}{t}$

$f(x) = (1+t)^{\frac{1}{t}}$

$\lim_{t\to0} e^{\ln(1+t)^{\frac{1}{t}}}$

$\lim_{t\to0} e^{\frac{1}{t}\ln(1+t)}$

$\lim_{t\to0} e^{\frac{\ln(1+t)}{t}} = e$

طريقة حل $1^{+\infty}$:

① نضع ♡ + ☺

② نفرض $t =$ ①(*)

③ نغير جهة السهم.

④ نعزل x من العلاقة (*)

⑤ نحسب الأسس بدلالة t.

⑥ نضع e و ln ونطبق قوانينها ونحل.

8: $\lim_{x\to+\infty} -\frac{\sqrt{x}}{x+1} = \frac{\infty}{\infty}$

$f(x) = -\frac{\sqrt{x}}{x(1+\frac{1}{x})}$

$= -\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}\cdot\sqrt{x}(1+\frac{1}{x})}$

$= \frac{-1}{\sqrt{x}(1+\frac{1}{x})}$

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$

9: $\lim_{x\to0} \frac{x^2+2-2\cos\sqrt{x}}{x}$

$: \frac{0}{0}$

$f(x) = \frac{x^2+2(1-\cos\sqrt{x})}{x}$

$= \frac{x^2+2(2\sin^2\frac{\sqrt{x}}{2})}{x}$

$= \frac{x^2+4\sin^2\frac{\sqrt{x}}{2}}{x}$

$= \frac{x^2}{x} + \frac{4\sin^2\frac{\sqrt{x}}{2}}{(\sqrt{x})^2}$

$= x + 4\cdot\frac{\sin^2\frac{\sqrt{x}}{2}}{4\cdot\frac{\sqrt{x}}{2}}$

$= x+4\left[\frac{\sin\frac{\sqrt{x}}{2}}{2\cdot\frac{\sqrt{x}}{2}}\right]^2$

$\lim_{x\to0} f(x) = 0+4\left(\frac{1}{2}\right)^2$

$= 1$

5: $\lim_{x\to1} (2-x)^{\frac{1}{x-1}} : 1^{\infty}$

$f(x) = (1+1-x)^{\frac{1}{x-1}}$

$* t = 1-x$

$x \to 1$

$t \to 0$

$* x = 1-t$

$* \frac{1}{x-1} = \frac{-1}{t}$

$f(x) = (1+t)^{-\frac{1}{t}}$

$\lim_{t\to0} e^{\ln(1+t)^{-\frac{1}{t}}}$

$\lim_{t\to0} e^{-\frac{1}{t}\ln(1+t)}$

$\lim_{t\to0} e^{-\frac{\ln(1+t)}{t}}$

$= e^{-1} = \frac{1}{e}$

تدريب 2

1: $\lim_{x\to0} \frac{6x^2+2-2\cos2x}{2x^2} : \frac{0}{0}$

$f(x) = \frac{6x^2+2(1-\cos2x)}{2x^2}$

$f(x) = \frac{6x^2+2\cdot2\sin^2x}{2\cdot x^2}$

$f(x) = \frac{6x^2+4\cdot\sin^2x}{2\cdot x^2}$

$f(x) = \frac{6x^2}{2x^2} + 4\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2$

$= 3+4\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2$

$\lim_{x\to0} f(x) = 3+4(1)$
$= 7$

لأن $\lim_{t\to0} \frac{\sin t}{t} = 1$

2: $f(x) = \frac{2\cos x-2}{\sqrt{4x^2+2}-\sqrt{2}}$

$\lim_{x\to0} f(x) : \frac{0}{0}$

$f(x) = \frac{2(\cos x-1)}{\sqrt{4x^2+2}-\sqrt{2}}$

$= \frac{-2(-\cos x+1)(\cos x+1)(\sqrt{4x^2+2}+\sqrt{2})}{(\sqrt{4x^2+2}-\sqrt{2})(\sqrt{4x^2+2}+\sqrt{2})(\cos x+1)}$

$= \frac{-2(\cos^2-1)(\sqrt{4x^2+2}+\sqrt{2})}{4x^2(1+\cos x)}$

$= \frac{-2\sin^2x(\sqrt{4x^2+2}+\sqrt{2})}{4x^2(1+\cos x)}$

$= -\frac{2}{4}\cdot\frac{\sin^2x}{x^2}\cdot\frac{\sqrt{4x^2+2}+\sqrt{2}}{1+\cos x}$

$= -\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2\cdot\frac{\sqrt{4x^2+2}+\sqrt{2}}{1+\cos x}$

$\lim_{x\to0} f(x) = -\frac{1}{2}(1)(2\sqrt{2})$

$= -\sqrt{2}$

7: $\lim_{x\to0} \frac{\sin x}{\sqrt{1+x}-1} : \frac{0}{0}$

$f(x) = \frac{\sin x\cdot(\sqrt{1+x}+1)}{(\sqrt{1+x}-1)(\sqrt{1+x}+1)}$

$= \frac{\sin x(\sqrt{1+x}+1)}{x}$

$= \frac{\sin x}{x}\cdot\frac{\sqrt{1+x}+1}{x}$

$\lim_{x\to0} f(x) = 1(+\infty) = +\infty$

تدريب 1

1: $\lim_{x\to+\infty} x^2\left(\sqrt{2+\frac{1}{x}}-\sqrt{2}\right)$

$: +\infty(0)$

$\lim_{x\to+\infty} x^2\left[\frac{(\sqrt{2+\frac{1}{x}}-\sqrt{2})(\sqrt{2+\frac{1}{x}}+\sqrt{2})}{\sqrt{2+\frac{1}{x}}+\sqrt{2}}\right]$

$\lim_{x\to+\infty} x^2\left[\frac{2+\frac{1}{x}-2}{\sqrt{2+\frac{1}{x}}+\sqrt{2}}\right]$

$\lim_{x\to+\infty} x^2\left[\frac{\frac{1}{x}}{\sqrt{2+\frac{1}{x}}+\sqrt{2}}\right]$

$\lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{x^2}{x}}{\sqrt{2+\frac{1}{x}}+\sqrt{2}}$

$\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{\sqrt{2+\frac{1}{x}}+\sqrt{2}} = \frac{+\infty}{2\sqrt{2}} = +\infty$

2: $\lim_{x\to0^+} \sin x\cdot\sqrt{1+\frac{1}{x^2}} : +0(+\infty)$

$\lim_{x\to0^+} \sin x\cdot\sqrt{\frac{1}{x^2}(x^2+1)}$

$\lim_{x\to0} \sin x\cdot\sqrt{\frac{1}{x^2}}\cdot\sqrt{x^2+1}$

$* \sqrt{\frac{1}{x^2}} = \left|\frac{1}{x}\right|$

$\lim_{x\to0^+} \sin x\left|\frac{1}{x}\right|\sqrt{x^2+1}$

$\left|\frac{1}{x}\right| = +\frac{1}{x}$ لأن $x\to+\infty$

$\lim_{x\to0^+} \sin x\cdot\frac{1}{x}\cdot\sqrt{x^2+1}$

$\lim_{x\to0} \frac{\sin x}{x}\sqrt{x^2+1}$

$= 1(\sqrt{1}) = 1$

لأن $\lim_{t\to0} \frac{\sin t}{t} = 1$

3: $\lim_{x\to0} x(\ln x-1) : 0(+\infty)$

$\lim_{x\to0} x\ln x - x$

$= 0-0 = 0$

لأن $\lim_{t\to0} t\ln t = 0$

دساتير مهمة

$1-\cos\theta = 2\sin^2\frac{\theta}{2}$

$-1+\cos\theta = -2\sin^2\frac{\theta}{2}$

$1-\cos^2\theta = \sin^2\theta$

تدرب3

1	$f(x)=\frac{lnx}{x}$
2	$f(x)=x-lnx$
3	$f(x)=\frac{1}{x}+lnx$
4	$f(x)=\frac{1}{x}-lnx$
5	$f(x)=\frac{x}{lnx}$
6	$f(x)=\frac{lnx}{x^2}$
7	$f(x)=x(1-lnx)$
8	$f(x)=\frac{1}{x}(lnx-1)$
9	$f(x)=\frac{x-lnx}{x}$
10	$f(x)=\frac{x+1}{lnx}$
11	$f(x)=\frac{xlnx}{x+1}$
12	$f(x)=\frac{xlnx}{x-1}$
13	$f(x)=\ln(2x+1)-\ln(x)$
14	$f(x)=\ln\left(\frac{x-1}{x-2}\right)$
15	$f(x)=\frac{\ln(1+sinx)}{x}$ $,a=0$
16	$f(x)=\frac{\ln(\sqrt{x+1})-ln\sqrt{2}}{x-1}$ $a=1$
17	$f(x)=\frac{ln\sqrt{x}}{x}$ $,a=+\infty$
18	$f(x)=\frac{lnx}{\sqrt{x}}$

تدرب 4

1	$f(x) = e^x - x^2$
2	$f(x) = \dfrac{2e^x + 1}{1 + e^x}$
3	$f(x) = \ln(x) - e^x$
4	$f(x) = \dfrac{e^x - 1}{e^x + 1}$
5	$f(x) = (3 - x)e^x$
6	$f(x) = \dfrac{e^x - 1}{x - 1}$
7	$f(x) = \dfrac{e^x - 1}{2x}$
8	$f(x) = \ln(e^x + 2)$
9	$f(x) = 2xe^{-x}$
10	$f(x) = 2x - 1 + e^{-x}$
11	$f(x) = e^{2x} - x - 2$
12	$f(x) = x - \ln(e^x + 1)$ $a = +\infty$

تمارين 3

1:. $f(x)=\frac{\ln x}{x}$; $]0,+\infty[$

$\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$

$\lim_{x\to 0} f(x)=-\infty$

2:. $f(x)=x-\ln x$; $D_f=]0,+\infty[$

$\lim_{x\to 0} f(x)=+\infty$

$\lim_{x\to+\infty} x\left(1-\frac{\ln x}{x}\right)=+\infty(1)=+\infty$

3:. $f(x)=\frac{1}{x}+\ln x$; $D_f=]0,+\infty[$

$\lim_{x\to+\infty} f(x)=0+\infty=+\infty$

$\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x}(1+x\ln x)=+\infty(1+0)=+\infty$

4:. $f(x)=\frac{1}{x}-\ln x$ $]0,+\infty[$

$\lim_{x\to 0} f(x)=+\infty$

$\lim_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$

5:. $f(x)=\frac{x}{\ln x}$ $]0,1[\cup]1,+\infty[$

$\lim_{x\to 0^+} f(x)=0$

$\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$

$\lim_{x\to 1^-} f(x)=-\infty$

$\lim_{x\to 1^+} f(x)=+\infty$

6: $f(x)=\frac{\ln x}{x^2}$ $]0,+\infty[$

$\lim_{x\to 0} f(x)=-\infty$

$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x\cdot x}=0$

7: $f(x)=x(1-\ln x)$ $]0,+\infty[$

$\lim_{x\to 0} x-x\ln x=0$

$\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty(-\infty)=-\infty$

8: $f(x)=\frac{1}{x}(\ln x-1)$ $]0,+\infty[$

$\lim_{x\to 0} f(x)=+\infty(-\infty)=-\infty$

$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}-\frac{1}{x}$
$=0$

9: $f(x)=\frac{x-\ln x}{x}$ $]0,+\infty[$

$\lim_{x\to 0} f(x)=+\infty$

$\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x}-\frac{\ln x}{x}=1-0=1$

10: $f(x)=\frac{x+1}{\ln x}$

$]0,1[\cup]1,+\infty[$

$\lim_{x\to 0^+} f(x)=0$

$\lim_{x\to 1^-} f(x)=-\infty$

$\lim_{x\to 1^+} f(x)=+\infty$

$\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\ln x}+\frac{1}{\ln x}=+\infty+0=+\infty$

12 $f(x)=\frac{x\ln x}{x-1}$

$]0,1[\cup]1,+\infty[$

$\lim_{x\to 0} f(x)=0$

$\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim x\cdot\frac{\ln x}{x-1}$
$=1\cdot1=1$

$\lim_{x\to 1^+} f(x)=1$

$\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x-1}\cdot\ln(x)$
$=1(+\infty)=+\infty$

13: $f(x)=\ln(2x+1)-\ln(x)$

$]0,+\infty[$

$\lim_{x\to 0} f(x)=0-(-\infty)=+\infty$

$\lim_{x\to+\infty}\ln\left(\frac{2x+1}{x}\right)=2$

14: تتسرط حل
\+ نفوا لها لوح.

15: $f(x)=\frac{\ln(1+\sin x)}{x}$

$a=0$

$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\cdot\frac{\ln(1+\sin x)}{\sin x\cdot\frac{1}{\sin x}}$

$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{\ln(1+\sin x)}{\sin x}$

$=1(1)=1$

16: $f(x)=\frac{\ln\sqrt{x+1}-\ln\sqrt{2}}{x-1}$

$a=1$

بتعريف العدد المشتق.

$g(x)=\ln\sqrt{x+1}-\ln\sqrt{2}$

$g'(x)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x+1}$

$g(1)=0$

$g'(1)=\frac{1}{4}$

$\lim_{x\to 1}\frac{g(x)-g(1)}{x-1}=g'(1)=\frac{1}{4}$

17: $f(x)=\frac{\ln\sqrt{x}}{x}$; $a=+\infty$

$\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{2}\ln x}{x}=\frac{1}{2}(0)=0$

18: $f(x)=\frac{\ln x}{\sqrt{x}}$; $a=+\infty$

$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\sqrt{x}^2}{\sqrt{x}}$

$=\lim_{x\to+\infty} 2\frac{\ln\sqrt{x}}{\sqrt{x}}=2(0)=2$

تمارين 4

1: $f(x)=e^x-x^2$

$]-\infty,+\infty[$

$\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$

$\lim_{x\to+\infty} x^2\left(\frac{e^x}{x}-1\right)$
$=+\infty(+\infty-1)=+\infty$

2: $f(x)=\frac{2e^x+1}{1+e^x}$

$]-\infty,+\infty[$

$\lim_{x\to-\infty} f(x)=1$

$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x\left(2+\frac{1}{e^x}\right)}{e^x\left(1+\frac{1}{e^x}\right)}$

$\lim_{x\to+\infty}\frac{2+\frac{1}{e^x}}{1+\frac{1}{e^x}}=2$

3: $f(x)=\ln x-e^x$

$I=]0,+\infty[$

$\lim_{x\to 0} f(x)=-\infty-1=-\infty$

$\lim_{x\to+\infty} x\left(\frac{\ln x}{x}-\frac{e^x}{x}\right)$

$=+\infty(-\infty)=-\infty$

4: $f(x)=\frac{e^x-1}{e^x+1}$

$]-\infty,+\infty[$

$\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\frac{1}{1}=-1$

$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x\left(1-\frac{1}{e^x}\right)}{e^x\left(1+\frac{1}{e^x}\right)}=1$

5: $f(x)=(3-x)e^x$

$]-\infty,+\infty[$

lim

10: $f(x)=2x-1+e^{-x}$

$]-\infty,+\infty[$

$\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

$\lim_{x\to-\infty} 2x-1+\frac{1}{e^x}$

$\lim_{x\to-\infty}\frac{2xe^x-e^x+1}{e^x}=+\infty$

11: $f(x)=e^{2x}-x+2$

$a=+\infty$

$\lim_{x\to+\infty} x\left[\frac{e^{2x}}{x}-1-\frac{2}{x}\right]$

$\lim_{x\to+\infty} x\left[2\frac{e^{2x}}{2x}-1-\frac{2}{x}\right]$

$=+\infty(+\infty)=+\infty$

ن: مع تطبيق القانون

12: $f(x)=x-\ln(e^x+1)$

$a=+\infty$

$\lim_{x\to+\infty} x-\ln\left(e^x\left(1+\frac{1}{e^x}\right)\right)$

$\lim_{x\to+\infty} x-\left[\ln e^x+\ln\left(1+\frac{1}{e^x}\right)\right]$

$\lim_{x\to+\infty} x-\left[x+\ln\left(1+\frac{1}{e^x}\right)\right]$

$\lim_{x\to+\infty} -\ln\left(1+\frac{1}{e^x}\right)$

$=0$

:: المقاربات ::

* اثبات مقارب مائل ::

1) شكل الفرق $f(x) - y_\Delta$

2) نبين أن

$$\lim_{x \to \pm\infty} (f(x) - y_\Delta) = 0$$

* الوضع النسبي بين المقارب و C_f

العرف ودراسة الإشارة — الفرق ودراسة الإشارة

نكرر فوراً — * ندرس الإشارة

- $f(x) - y_\Delta > 0$ يكون C فوق المقارب. — * شكل جدول اشارة
- $f(x) - y_\Delta < 0$ يكون C تحت المقارب

* ايجاد معادلة مقارب مائل :

1) $f(x) = ax + b + u(x)$

$\longrightarrow \Delta : y = ax + b$.

2) كسر درجة البسط أكبر من درجة المقام

يكون قسمة اقليدية.

3) الإتمام إلى مربع كامل.

$$f(x) = \sqrt{ax^2 + bx + c}$$

$$* \; a(x - x_0)^2$$

* نضع $h(x) = f(x) - \sqrt{a(x - x_0)^2}$

* نضرب بالمرافق.

* نحسب نهاية

* نستنتج أن $d_{1,2} : y = \sqrt{a(x - x_0)^2}$

$$= |a(x - x_0)^2|$$

4) التعريف.

5)
$$a = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x}$$

$$b = \lim_{x \to \pm\infty} f(x) - ax$$

$$y = ax + b$$

تدريب 5 :

$$f(x) = 4x + \frac{1+\sin^2 x}{x^4+1}$$

$\Delta : y = 4x$

الحل :

$$f(x) - y_\Delta = 4x + \frac{1+\sin^2 x}{x^4+1} - 4x$$

$$= \frac{1+\sin^2 x}{x^4+1}$$

$0 \leq \sin^2 x \leq 1$

نجمع 1

$1 \leq 1+\sin^2 x \leq 2$

نقسم على x^4+1

$$\frac{1}{x^4+1} \leq \frac{1+\sin^2 x}{x^4+1} \leq \frac{2}{x^4+1}$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^4+1} = 0$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{2}{x^4+1} = 0$$

حسب مبرهنة الإحاطة (1)

$$\lim_{x \to +\infty} (f(x) - y_\Delta) = 0$$

اذاً Δ مقارب مائل.

الوضع النسبي

$$f(x) - y_\Delta = \frac{1+\sin^2 x}{x^4+1} > 0$$

اذاً C فوق Δ.

$f(x) = 2x - 1 + \frac{1}{x}$; $\Delta : y = 2x - 1$

* $f(x) - y_\Delta = \frac{1}{x} \Rightarrow \lim_{x \to +\infty} (f(x) - y_\Delta) = 0$

اذاً Δ مقارب مائل.

* الوضع النسبي

▪ البسط $1 > 0$ موجب دائماً

▪ المقام x نعدم

$x = 0$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
1	$+$	||	$+$
x	$-$	||	$+$
$\frac{1}{x}$	$-$	||	$+$
	C تحت Δ		C فوق Δ

تدريب 6

$$f(x) = \frac{x^3+1}{x^2+1}$$

① جد a , b كحقيقتان

$$a = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}$$

$$b = \lim_{x \to +\infty} f(x) - ax$$

② أكتب معادلة المقارب المائل

③ ادرس الوضع النسبي

* الحل

①

$$+ \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{x^3+1}{x^2+1}}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^3+1}{x^3+x} = 1$$

$$a = 1$$

$$+ \lim_{x \to +\infty} f(x) - ax = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^3+1}{x^2+1} - x$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^3+1}{x^2+1} - \frac{x^3+x}{x^2+1}$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1-x}{x^2+1} = 0$$

$b = 0$ ومنه

②

$$\Delta : y = ax + b$$

$$\longrightarrow \Delta : y = x$$

③

$$* f(x) - y_\Delta = \frac{1-x}{x^2+1}$$

البسط $x = 1$

المقام لا ينعدم موجب تماما

x	$-\infty$	1	$+\infty$
بسط	+	0	−
مقام	+	+	+
كسر	+	0	−
الوضع نسبيا	C فوق Δ		C تحت Δ

تدريب :

$f(x) = \sqrt{4x^2 + 4x + 5}$

أوجد معادلة المقارب المائل

وادرس الوضع النسبي

$* \; 4x^2 + 4x + 5$

$= 4\left(x^2 + x + \frac{5}{4}\right)$

$\rightarrow 4\left(x^2 + x + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} + \frac{5}{4}\right)$

$4\left(\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + 1\right)$

$\rightarrow 4\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + 4.$

نضع

$h(x) = f(x) - \sqrt{4\left(x + \frac{1}{2}\right)^2}$

$= \sqrt{4\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + 4} - \sqrt{4\left(x + \frac{1}{2}\right)^2}$

$\lim\limits_{x \to +\infty} h(x)$

بعد الضرب بالمرافق

$\lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{4}{\sqrt{4\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + 4} + \sqrt{4\left(x + \frac{1}{2}\right)^2}}$

$= 0$

$h(x) = f(x) - \sqrt{4\left(x + \frac{1}{2}\right)^2}$

$= f(x) - y_\Delta$

$\Delta : y_\Delta = \sqrt{4\left(x + \frac{1}{2}\right)^2}$

$= 2\left|x + \frac{1}{2}\right|^2$

$\rightarrow 2x + 1$ عند $+\infty$

$\rightarrow -2x - 1$ عند $-\infty$

$h(x) = f(x) - y_\Delta = \frac{4}{\sqrt{4\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + 4} + \sqrt{4\left(x + \frac{1}{2}\right)^2}} > 0$

C فوق D

التفسير الهندسي للنهايات:

أولاً:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \ell$$

$y=\ell$ مقارب أفقي في جوار $+\infty$.

* صيغة السؤال:

جد عدداً حقيقياً A بحيث $x>A$ من أجل $f(x)\in]a,b[$

* طريقة الحل:

① نحدد المركز $\ell = \frac{b+a}{2}$

② نحدد نصف القطر $\varepsilon = b-\ell$

③ نعوض في القانون $|f(x)-\ell| < \varepsilon$

④ نعزل x.

تمرين:

$f(x) = \frac{\ln x - 1}{\ln x + 2}$, $D_f =]e^{-2}, +\infty[$

① احسب نهاية عند $+\infty$ وما تفسيرها الهندسي

② جد عدداً حقيقياً A تحقق الشرط $x>A$ من أجل $f(x)\in]0,99 , 1,01[$

الحل:

①

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x - 1}{\ln x + 2} = \frac{\infty}{\infty}$$ حالة عدم تعيين

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x\left[1-\frac{1}{\ln x}\right]}{\ln x\left[1+\frac{2}{\ln x}\right]} = 1$$

$y=1$ مقارب أفقي في جوار $+\infty$.

② نحدد المركز $\ell = \frac{0,99+1,01}{2} = 1$

نصف القطر $\varepsilon = 1,01 - 1 = 0,01 = \frac{1}{100}$

$|f(x)-\ell| < \varepsilon$

$\left|\frac{\ln x - 1}{\ln x - 2} - 1\right| < 0,01$

بعد توحيد المقامات

$\left|\frac{-3}{\ln x + 2}\right| < \frac{1}{100}$

$\frac{3}{\ln x + 2} < \frac{1}{100}$

$\frac{\ln x + 2}{3} > 100 \Rightarrow \ln x + 2 > 300$

$\ln x > 298$

$\Rightarrow \boxed{x > e^{298}}$

نختار $A = e^{298}$ أو أي عدد أكبر منه.

ثانياً:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \pm\infty$$

$x = x_0$ مقارب شاقولي في جوار $\pm\infty$

* صيغة السؤال

① $f(x) > M$ من أجل $x \in]x_0-\alpha, x_0+\alpha[$

② عين مجالاً I مركزه x_0 تحقق $f(x)>M$ عندما $x \in I$

* فكرة الحل

① * نضع $f(x) > M$

② * عندما $x \to x_0$ نستبدل البسط بـ A حيث A يساوي البسط

③ * نجزئ المقام لنحاول الوصول إلى الشكل $|x-x_0| < \alpha$

④ * بذلك نكون أوجدنا α

⑤ * إذا أردنا المجال نكتب خواص القيم المطلقة

$$-\alpha < x - x_0 < \alpha$$

نضيف x_0 للأطراف

$$x_0-\alpha < x < x_0+\alpha$$

فنجد المجال المطلوب

تدريب:

$$f(x) = \frac{5x-1}{(x-1)^2} ; \mathbb{R}/\{1\}$$

① احسب نهاية عند 1 + وما تفسيرها الهندسي

② جد عدداً حقيقياً α يحقق الشرط $f(x) > 10^3$ عندما $x \in]1-\alpha, 1+\alpha[$

الحل

① $$\lim_{x\to 1} \frac{5x-1}{x^2-2x+1} = +\infty$$

إذاً $x = 1$ مقارب شاقولي بجوار $+\infty$.

② $$f(x) > 1000$$

$$\frac{5x-1}{(x-1)^2} > 1000$$

$5x-1 = A \approx 4 \leftarrow x \to 1$

$$\frac{A}{(x-1)^2} > 1000$$

$$(x-1)^2 < \frac{A}{1000}$$

نختار $A = 3{,}6$

$$(x-1)^2 < \frac{3{,}6}{1000}$$

$$(x-1)^2 < \frac{36}{10^4}$$

$$|x-1| < \frac{6}{10^2} \to |x-1| < 0{,}06$$

إذاً $\alpha = 0{,}06$ نعين المجال:

$$-0{,}06 < x-1 < 0{,}06$$

$$1-0{,}06 < x < 1+0{,}06$$

$$0{,}94 < x < 1{,}06$$

$$I =]0{,}94, 1{,}06[$$

ثالثاً: $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \pm\infty$

صيغة السؤال

جد عدداً حقيقياً A بحيث

$f(x) > M$ عندما $x > A$

خطوات الحل

1. ننطلق من $f(x) > M$
2. نعزل x فنحصل على $x > A$

رابعاً: $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$

صيغة السؤال

جد مجالاً I مركزه x_0 بحيث

$f(x) \in]a,b[$ من أجل $x \in I$

خطوات الحل

1. ننطلق من $a < f(x) < b$
2. نعزل x فنحصل على

$A < x < B$

:: الإستمرار ::

- شرط الإستمرار عند نقطة a :

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

- أدرس استمرار التابع .
- عين الثابت m ليكون f مستمراً :

تدريب

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{x - \ln x} & ; x > 0 \\ 0 & ; x = 0 \end{cases}$$

ادرس استمرار f عند 0 :

$* f(0) = 0$

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{x}{x - \ln x} = 0$$

ومنه $\lim_{x \to 1} f(x) = f(1)$;

اذا f مستمر على R

تدريب

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^x - 1}{2x} & ; x \neq 0 \\ 2A - \dfrac{1}{2} & ; x = 0 \end{cases}$$

عين قيمة الثابت A ليكون f مستمراً على R .

$f(0) = 2A - \frac{1}{2}$ (*)

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{2x} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{2} \cdot \frac{e^x - 1}{x}$$

$$= \frac{1}{2}(1) = \frac{1}{2}$$

ومنه

$\frac{1}{2} = 2A - \frac{1}{2}$

$2A = \frac{2}{2} = 1$

$2A = 1 \longrightarrow A = \frac{1}{2}$

نهاية تابع مركب

صيغة السؤال:

احسب $\lim_{x \to a} f(f(x))$

فكرة الحل:

نفرض أن المجهول $U(x)=f(x)$

نحسب $\lim_{x \to a} U(x) = L$

نعوّض المجهول U فنحصل على $f(u)$

نحسب $\lim_{u \to L} f(u)$

تدريب:

$$f(x) = \frac{e^x - 1}{e^{2x}+1}$$

① احسب نهاية عند $+\infty$

② استنتج نهاية $f(f(x))$ عند $+\infty$

الحل:

①

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x\left(1 - \frac{1}{e^x}\right)}{e^x\left(e^x + \frac{1}{e^x}\right)} = 0$$

② نفرض: $U(x) = f(x)$

وجدنا أنّ:

$$\lim_{u \to 0} f(u) = 0$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(f(x)) = \lim_{u \to 0} f(u) = 0$$

تابع الجزء الصحيح

تمرين

$f(x) = 2x + E(x) \quad ; x \in [0,3[$

1) اكتب f بعبارة مستقلة عن $E(x)$

2) ادرس استمرار f على $[0,3[$

3) ارسم C_f.

4) احسب نهاية

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x^2+1}$$

الحل

1)

$$f(x) = \begin{cases} 2x & x \in [0,1[\quad (d_1) \\ 2x+1 & x \in [1,2[\quad (d_2) \\ 2x+2 & x \in [2,3[\quad (d_3) \end{cases}$$

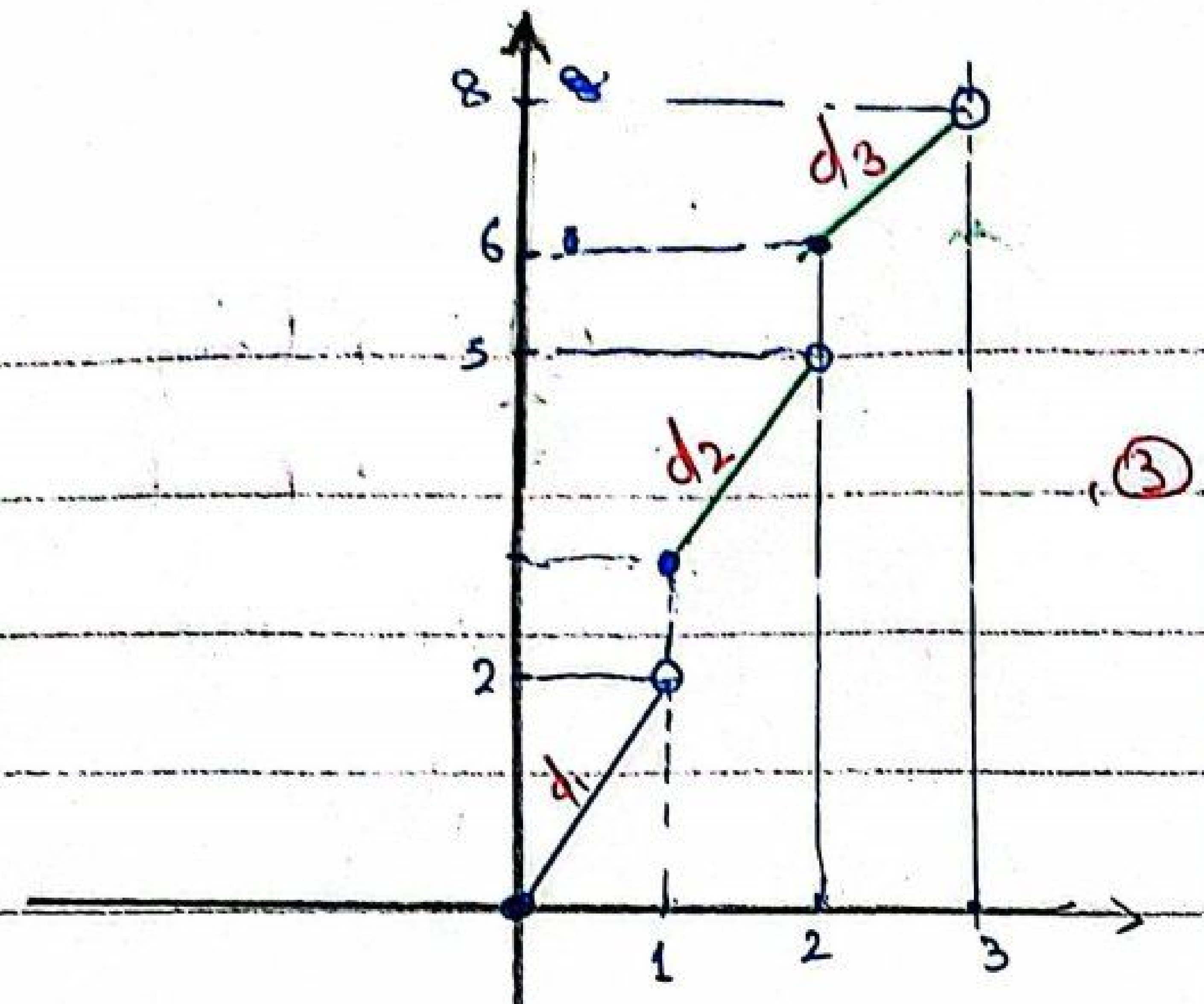
2) الاستمرار عند $a=1$

$\lim_{x \to 1^-} f(x) = 2$

$f(1) = 3 \rightarrow \lim_{x \to 1} f(x) \neq f(1)$

غير مستمرة

3)



$d_1 : y_1 = 2x$

x	y
0	0
1	2

$d_2 : y_2 = 2x+1$

x	y
1	3
2	5

$d_3 : y_3 = 2x+2$

x	y
2	6
3	8

4) $$\lim_{x \to +\infty} \frac{2x + E(x)}{x^2+1}$$

تذكير: $x-1 < E(x) \leq x$

$\boxed{+2x}$ $\quad 3x-1 < 2x + E(x) \leq 3x$

نقسم على $x^2+1>0$

$$\frac{3x-1}{x^2+1} < \frac{2x+E(x)}{x^2+1} \leq \frac{3x}{x^2+1}$$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{3x-1}{x^2+1} = 0$

$\lim \frac{3x}{x^2+1} = 0$

حسب مبرهنة احاطة (1)

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{2x+E(x)}{x^2+1} = 0$$

مع تمنياتنا لكم بالشغف الدائم

فريق شغف التعليمي

شغف التعليمي

Educational passion

من تقديم:

Rima Sabbagh

Àslañ Baset

Asmaa Abo Alhawa

شغف رفيقك خطوة بخطوة

شغف التعليمي

Educational passion

القناة الرئيسية " فريق شغف التعليمي "

https://t.me/alsh276

مكتبة شغف " بوت الملفات "

https://t.me/passion_study_bot