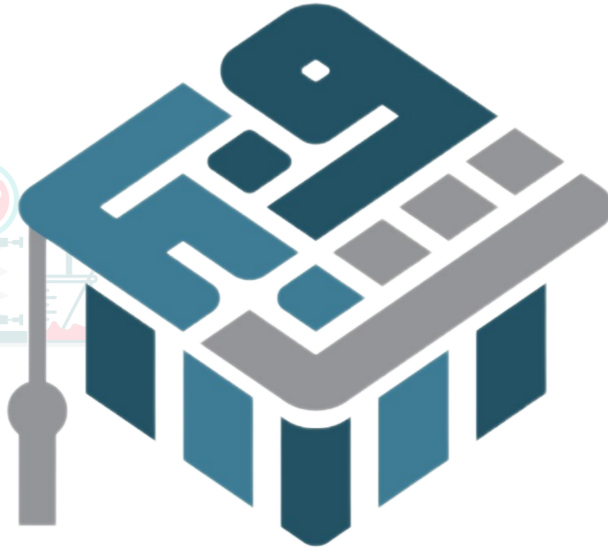


شغف وفريقك خطوة بخطوة



شغف التعليمي
Educational passion

$2 > -3$
 $0.999... = 1$
 $\pi \approx 3.14$
 $\sqrt{2}$
 5^{2^3}
 $101_2 = 5_{10}$



القناة الرئيسية " فريق شغف التعليمي "



<https://t.me/alsh276>

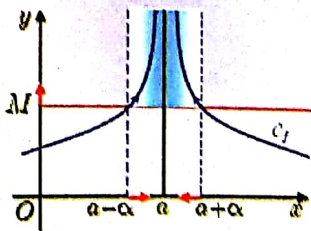
مكتبة شغف " بوت الملفات "



https://t.me/passion_study_bot

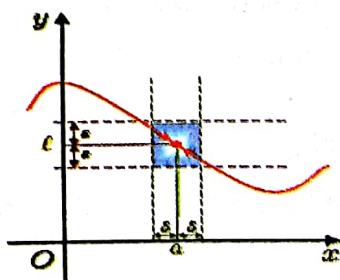
نهاية تابع عددي

أولاً: نهاية تابع f عند a هي $+\infty$:
 نقول إن نهاية التابع f عند a هي $+\infty$ إذا تجاوزت جميع قيم $f(x)$ أي عدد حقيقي M عندما تكون x قريبة بالقدر الكافي من a ونكتب: $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$



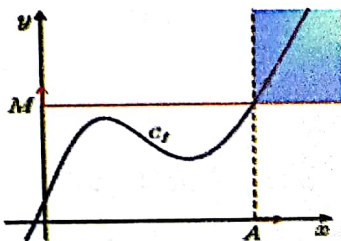
ثانياً: نهاية تابع f عند a هي قيمة عددية l :

نقول إن نهاية التابع f عند a هي قيمة عددية l إذا تجمعت جميع قيم $f(x)$ بالقرب من l أو حول l عندما تكون x قريبة بالقدر الكافي من a ونكتب: $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$



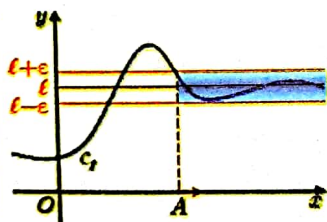
ثالثاً: نهاية تابع f عند $+\infty$ هي $+\infty$:

نقول إن نهاية التابع f عند $+\infty$ هي $+\infty$ إذا تجاوزت جميع قيم $f(x)$ أي عدد حقيقي M عندما تكون x كبيرة بالقدر الكافي ونكتب: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$



نهاية تابع f عند $+\infty$ هي قيمة عددية l :

نقول إن نهاية التابع f عند $+\infty$ هي قيمة عددية l إذا تجمعت جميع قيم $f(x)$ بالقرب من l أو حول l عندما تكون x كبيرة بالقدر الكافي ونكتب: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l$



بمعنى أدق:

أياً يكن العدد الحقيقي $\varepsilon > 0$ فإن قيم $f(x)$ ستقع ضمن المجال $l - \varepsilon, l + \varepsilon$ [بدءاً من حد معين x_0 أي: $f(x) \in]l - \varepsilon, l + \varepsilon[$

$$l - \varepsilon < f(x) < l + \varepsilon$$

$$-\varepsilon < f(x) - l < \varepsilon$$

$$|f(x) - l| < \varepsilon$$

$$l = \frac{a+b}{2}$$

حيث: l مركز المجال

ε نصف قطر المجال

ملاحظات:

1 رمز نصف قطر المجال في الكتاب (α أو ε) وهو مقدار موجب لأنه يمثل مسافة.

مثال ① : أوجد مجال مفتوح مركزه $\ell = 3$ ونصف قطره $\varepsilon = 0.04$ $\Rightarrow I =]2.96, 3.04[$

مثال ② : أوجد مركز ونصف قطر المجال $I =]4.82, 5.18[$

المركز $\ell = \frac{5.18 + 4.82}{2} = 5$ ، نصف القطر $\varepsilon = \frac{5.18 - 4.82}{2} = 0.18$

$|x| < a \Leftrightarrow -a < x < a$ $|x| > a \Leftrightarrow \begin{cases} \text{إما } x > a \\ \text{أو } x < -a \end{cases}$ $|x| = a \Leftrightarrow \begin{cases} \text{إما } x = a \\ \text{أو } x = -a \end{cases}$ [2]

مثال: ليكن التابع $f(x) = \frac{x+3}{x+1}$ المعرفة على $R \setminus \{-1\}$ عين العدد A الذي يحقق الشرط: إذا كان $x > A$ انتمى $f(x)$ إلى المجال I المفتوح الذي مركزه (1) ونصف قطره (0.05)

نعلم أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$ عندئذ $\ell = 1$

$f(x)$ ينتمي إلى المجال المفتوح I الذي مركزه $\ell = 1$ ونصف قطره $\varepsilon = 0.05$ إذا تحققت المتراجحة:

$$\begin{aligned} |f(x) - \ell| &< \varepsilon \\ \left| \frac{x+3}{x+1} - 1 \right| &< \frac{5}{100} \\ \left| \frac{x+3-x-1}{x+1} \right| &< \frac{5}{100} \\ \left| \frac{2}{x+1} \right| &< \frac{1}{20} \\ 40 &< |x+1| \end{aligned}$$

وبما أن $x \rightarrow +\infty$ فإننا نهتم بالقيم الكبيرة لـ x أي $x > 0$ نجد أن:
 $x > 39 \Rightarrow A = 39$ أي
 ينتج عن ذلك أنه إذا كان $x > 39$ انتمى $f(x)$ إلى المجال $I =]1 - 0.05, 1 + 0.05[$
 $I =]0.95, 1.05[$

مثال: بفرض f تابع معرف على $R \setminus \{-\frac{3}{2}\}$ وفق $f(x) = \frac{4x-5}{2x+3}$ أوجد نهاية f عند $+\infty$ ثم عين عدداً A يحقق الشرط: إذا كان $x > A$ انتمى $f(x)$ إلى المجال المفتوح I الذي مركزه 2 ونصف قطره 0.05

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2 \Rightarrow (\ell = 2)$

$f(x)$ تنتمي للمجال الذي مركزه $(\ell = 2)$ ونصف قطره $(\varepsilon = \frac{5}{100})$ يجب أن تحقق المتراجحة:

$$\begin{aligned} |f(x) - \ell| &< \varepsilon \\ \left| \frac{4x-5}{2x+3} - 2 \right| &< \frac{5}{100} \\ \left| \frac{4x-5-4x-6}{2x+3} \right| &< \frac{1}{20} \\ \left| \frac{-11}{2x+3} \right| &< \frac{1}{20} \\ \frac{11}{|2x+3|} &< \frac{1}{20} \\ 220 &< |2x+3| \end{aligned}$$

بما أن $x \rightarrow +\infty$ ونهتم بالقيم الكبيرة لـ x أي $x > 0$ نجد أن:
 $220 < 2x + 3$
 $217 < 2x$
 $108.5 < x \Rightarrow A = 108.5$
 ينتج عن ذلك أنه إذا كان $x > 108.5$ انتمى $f(x)$ إلى المجال الذي مركزه $(\ell = 2)$ ونصف قطره $(\varepsilon = 0.05)$ أي:
 $f(x) \in]2 - 0.05, 2 + 0.05[$
 $f(x) \in]1.95, 2.05[$

للتوضيح: ♦ إذا أخذنا $x = 109$ للمجال $f(109) = \frac{431}{221} = 1.9502 \in$
 ♦ إذا أخذنا $x = 107$ للمجال $f(107) = \frac{423}{217} = 1.949 \notin$

مسألة 34 رقم 2: احسب نهاية التابع f المعطى بالملاقة $f(x) = \frac{5x-1}{x-1}$ عند $+\infty$ ثم اعط عدداً A يحقق الشرط:

إذا كان $x > A$ كان $f(x)$ في المجال $]4.9, 5.1[$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 5$$

$$\ell = \frac{4.9+5.1}{2} = 5 \quad \text{نوجد مركز المجال ونصف قطره:}$$

$$\varepsilon = \frac{5.1 - 4.9}{2} = 0.1 = \frac{1}{10}$$

$f(x) \in]4.9, 5.1[$ إذا تحققت المتراجحة:

$$|f(x) - \ell| < \varepsilon$$

$$\left| \frac{5x-1}{x-1} - 5 \right| < \frac{1}{10}$$

$$\frac{4}{|x-1|} < \frac{1}{10}$$

$$40 < |x-1|$$

بما أن $x \rightarrow +\infty$ نهتم بالقيم الكبيرة لـ x أي $x > 0$

$$40 < x - 1$$

ف نجد أن:

$$41 < x \Rightarrow A = 41$$

$$f(x) \in]5 - 0.1, 5 + 0.1[=]4.9, 5.1[$$

إذا كانت $x > 41$

قواعد في النهايات :

$$\textcircled{1} \frac{\text{عدد}}{\infty} = 0, \quad \frac{0}{\infty} = 0$$

$$\textcircled{2} \frac{\infty}{0} = \infty, \quad \frac{\text{عدد غير الصفر}}{0} = \infty \quad (\text{ندرس إشارة الصفر و ننتبه لإشارة البسط})$$

$$\textcircled{3} \frac{\infty}{\text{عدد}} = \infty \quad (\text{انتبه لإشارات البسط و المقام})$$

$$\textcircled{4} -\infty - \infty = -\infty, \quad +\infty + \infty = +\infty$$

$$\textcircled{5} \infty \times \infty = \infty \quad (\text{انتبه للإشارات})$$

حالات عدم التعيين :

$\frac{\infty}{\infty}$	$\frac{0}{0}$	$0 \cdot \infty$	$+\infty - \infty$
-------------------------	---------------	------------------	--------------------

العمليات على النهايات :

$$\textcircled{1} \lim_{x \rightarrow x_0} (f + g)(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) + \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$$

$$\textcircled{2} \lim_{x \rightarrow x_0} (f \cdot g)(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$$

$$\textcircled{3} \lim_{x \rightarrow x_0} \left(\frac{f}{g} \right)(x) = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)} \quad ; \quad g(x) \neq 0$$

$$\textcircled{4} \lim_{x \rightarrow x_0} (k f(x)) = k \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$$

نهايات مرجعية :

$$\textcircled{1} \lim_{x \rightarrow -\infty} x^n = \begin{cases} +\infty & n \text{ زوجي غير معدوم} \\ -\infty & n \text{ فردي غير معدوم} \end{cases}$$

$$\textcircled{2} \lim_{\substack{x \rightarrow -\infty \\ x \rightarrow +\infty}} \frac{1}{x^n} = 0 \quad ; \quad n \in \mathbb{N}^*$$

$$\textcircled{3} \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = +\infty$$

$$\textcircled{4} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$$

ملاحظة: بعض التوابع ليس لها نهاية عند $+\infty$ أو $-\infty$ ، مثل: $f(x) = \cos x$, $f(x) = \sin x$

ليس للتابعين السابقين نهاية عند $+\infty, -\infty$ حيث:

$$-1 \leq \sin x \leq 1, \quad -1 \leq \cos x \leq 1 \quad \text{أياً كانت } x \in \mathbb{R} \text{ وبالتالي مجموعة قيم التابعين محصورة في المجال } [-1, 1].$$

نهاية التابع الثابت $f(x) = b$: إن نهاية التابع الثابت عند أي قيمة هي دائماً (b)

$$f(x) = -3, \quad \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x \rightarrow -\infty \\ x \rightarrow +\infty}} f(x) = -3$$

مثال:

نهاية التابع الصحيح عند $\pm\infty$:

فردي $(-\infty) = -\infty$

زوجي $(-\infty) = +\infty$

هي نهاية حده الأكبر أساساً مع أمثاله وإشارته.

زوجي أو فردي $(+\infty) = +\infty$ ملاحظة :

تمرين:

اوجد نهاية كل تابع من التوابع الآتية عند $\pm\infty$:

1 $f(x) = 2x + x^2 + 1$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

2 $f(x) = x^3 - 2x + 1$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

3 $f(x) = 2x^2 - x^3 + 5$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$

4 $f(x) = \frac{x-1}{3}$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

5 $f(x) = \frac{x^2 - 4x + 5}{-5}$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$

6 $f(x) = \sqrt{2}x - \sqrt{3}x^4$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$

تدريب صفحة 34 رقم 1 :

احسب نهايات التوابع الآتية عند $+\infty$ وعند $-\infty$

1 $f(x) = -x^3 + x^2 - x + 1$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (-x^3) = -\infty$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (-x^3) = +\infty$

2 $f(x) = -3x^4 + 1$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (-3x^4) = -\infty$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (-3x^4) = -\infty$

3 $f(x) = 8x^4 - 12x^3 + 5x^2 - x$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (8x^4) = +\infty$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (8x^4) = +\infty$

4 $f(x) = 5x^3 - 3x - 1$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (5x^3) = +\infty$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (5x^3) = -\infty$

5 $f(x) = 7x^3 + 2x^2 - 5x - 1$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (7x^3) = +\infty$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (7x^3) = -\infty$

6 $f(x) = -2x^4 + 100x^3$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (-2x^4) = -\infty$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (-2x^4) = -\infty$

الرياضة

نهاية تابع كسري حدودي عند $\pm\infty$:

نأخذ الحد الأكبر أولاً بالبسط مع أمثاله وإشارته ونأخذ الحد الأكبر أولاً بالمقام مع أمثاله وإشارته.
نختصر ثم نعوض ونوجد النهاية.

تمرين: اوجد نهاية كل تابع عند $\pm\infty$

$$\boxed{1} f(x) = \frac{2x - 1}{x^2 + 1}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{2x}{x^2} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{2}{x} \right) = \frac{2}{-\infty} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x}{x^2} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{x} \right) = \frac{2}{+\infty} = 0$$

$$\boxed{2} f(x) = \frac{x^2 + 1}{1 - x^2}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x^2}{-x^2} \right) = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2}{-x^2} \right) = -1$$

$$\boxed{3} f(x) = \frac{x^3 - x^2 + 1}{1 - x^2}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x^3}{-x^2} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} (-x) = -(-\infty) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^3}{-x^2} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} (-x) = -(+\infty) = -\infty$$

$$\boxed{4} f(x) = \frac{6}{x^2 - 4}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{6}{x^2} \right) = \frac{6}{+\infty} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{6}{x^2} \right) = \frac{6}{+\infty} = 0$$

$$\boxed{5} f(x) = \frac{\sqrt{2}x - 1}{1 - 2x}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{\sqrt{2}x}{-2x} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{-\sqrt{2}}{2} \right) = \frac{-\sqrt{2}}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\sqrt{2}x}{-2x} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{-\sqrt{2}}{2} \right) = \frac{-\sqrt{2}}{2}$$

$$\boxed{6} f(x) = \frac{1 - 2x^2}{x^3 - 1}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{-2x^2}{x^3} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{-2}{x} \right) = \frac{-2}{-\infty} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{-2x^2}{x^3} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{-2}{x} \right) = \frac{-2}{+\infty} = 0$$

$$\boxed{7} f(x) = \frac{x - 1}{3x}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \frac{1}{3}, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{1}{3}$$

$$\boxed{8} f(x) = \frac{1 - x^2}{1 - x}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

لتذكرة و ملاحظات:

1 من طرق تحليل كثير الحدود: العامل المشترك والتحليل المباشر والتجميع إلى فئات والمطابقات.

3 المتطابقات التكعيبية:

2 المتطابقات التربيعية:

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$$

$$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$$

نهاية تابع كسري حدودي عند قيمة عددية (a):

نعوض a في التابع فنحصل على النهاية مباشرة او نحصل على إحدى الحالتين الآتيتين :

$\frac{0}{0}$ حالة عدم تعيين

$\frac{\text{عدد غير الصفر}}{0} = \infty$

يجب إزالة حالة عدم التعيين وذلك بطرق التحليل التي تعلمناها سابقاً (عامل مشترك - مطابقة - تحليل مباشر - مربع كامل - Δ - قسمة إقليدية).

يجب دراسة إشارة الصفر (إشارة المقام) ناخذ : قيمتان لـ x من جوار a (قيمة أصغر و قيمة أكبر) نعوضها فقط في المقام.

تمرين: أوجد نهاية كل تابع من التوابع الآتية عند القيم المرفقة بجانب كل تابع:

1 $f(x) = \frac{x^3 + 1}{x^2 - 1}$ (a = -1)

2 $f(x) = \frac{x^2 - 5x + 6}{3 - x}$ (a = 3)

$\frac{0}{0}$ عدم تعيين.

$\frac{0}{0}$ عدم تعيين.

$f(x) = \frac{(x+1)(x^2-x+1)}{(x-1)(x+1)} = \frac{x^2-x+1}{x-1}$

$f(x) = \frac{(x-3)(x-2)}{3-x} = -(x-2)$

$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \frac{-3}{2}$

$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = -1$

3 $f(x) = \frac{x^2 - x}{x^3 - 1}$ (a = 1)

$\frac{0}{0}$ عدم تعيين

$f(x) = \frac{x(x-1)}{(x-1)(x^2+x+1)} = \frac{x}{x^2+x+1}$

$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \frac{1}{3}$

4 $f(x) = \frac{x^3 - 2x^2 - x + 2}{x - 2}$ (a = 2)

$\frac{0}{0}$ عدم تعيين.

طريقة القسمة الإقليدية:

الطريقة التجميعية:

$$\begin{array}{r} x^2 - 1 \\ x - 2 \overline{) x^3 - 2x^2 - x + 2} \\ \underline{+x^3 \pm 2x^2} \\ -x + 2 \\ \underline{+x \mp 2} \\ 0 \end{array}$$

$$f(x) = \frac{x^3 - 2x^2 - x + 2}{x - 2} = \frac{x^2(x-2) - (x-2)}{x-2} = \frac{(x^2-1)(x-2)}{x-2} = x^2 - 1$$

$f(x) = x^2 - 1$
 $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 3$

$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 3$

5 $f(x) = \frac{2x-1}{x+1}$ (a = -1)

6 $f(x) = \frac{x-1}{x^2}$ (a = 0)

$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \frac{1}{0^-} = -\infty$

$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \frac{-1}{0^+} = -\infty$

$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \frac{1}{0^+} = +\infty$

$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \frac{-1}{0^-} = +\infty$

$$\boxed{7} f(x) = \frac{4}{2-x} \quad (a=2)$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \frac{4}{0^-} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \frac{4}{0^+} = +\infty$$

$$\boxed{8} f(x) = \frac{x^2-1}{(x-1)^2} \quad (a=1)$$

عدم تعيين: $\frac{0}{0}$

$$f(x) = \frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(x-1)} = \frac{x+1}{x-1}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \frac{2}{0^-} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \frac{2}{0^+} = +\infty$$

إزالة حالة عدم التعمين من الشكل $\infty - \infty$: يوجد طريقتان إما العامل المناسب أو الضرب بالمرافق بطريقة العامل المناسب : نخرج من داخل الجذر x^2 عامل مناسب حتى وإن لم يكن موجود.

$$\sqrt{x^2} = |x| = \begin{cases} +x & : x \rightarrow +\infty \\ -x & : x \rightarrow -\infty \end{cases}$$

ملاحظة: بعد إخراج عامل مناسب نحصل على عامل مشترك بين الحدين

تمارين:

$$\boxed{1} f(x) = \sqrt{x^2 + x + 1} - 2x \quad (a = +\infty)$$

$$f(x) = \sqrt{x^2 \left(\frac{x^2}{x^2} + \frac{x}{x^2} + \frac{1}{x^2} \right)} - 2x$$

$\infty - \infty$ عدم تعيين.

$$= |x| \sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} - 2x = x \sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} - 2x = x \left(\sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} - 2 \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty(1-2) = -\infty$$

$$\boxed{2} f(x) = 3x + \sqrt{x^2 + 2} \quad (a = -\infty)$$

$$f(x) = 3x + \sqrt{x^2 \left(\frac{x^2}{x^2} + \frac{2}{x^2} \right)}$$

$\infty - \infty$ عدم تعيين.

$$= 3x + |x| \sqrt{1 + \frac{2}{x^2}} = 3x - x \sqrt{1 + \frac{2}{x^2}} = x \left(3 - \sqrt{1 + \frac{2}{x^2}} \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty(3-1) = -\infty$$

$$\boxed{3} f(x) = \sqrt{x-1} - x \quad (a = +\infty)$$

$$f(x) = \sqrt{x^2 \left(\frac{x-1}{x^2} - \frac{1}{x^2} \right)} - x = |x| \sqrt{\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}} - x$$

$\infty - \infty$ عدم تعيين.

$$= x \sqrt{\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}} - x = x \left(\sqrt{\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}} - 1 \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty(0-1) = -\infty$$

4 $f(x) = \sqrt{2x^2 + 1} - \sqrt{x^2 + 4}$ ($a = +\infty$)

$$f(x) = \sqrt{x^2 \left(\frac{2x^2}{x^2} + \frac{1}{x^2} \right)} - \sqrt{x^2 \left(\frac{x^2}{x^2} + \frac{4}{x^2} \right)}$$

$$= |x| \sqrt{2 + \frac{1}{x^2}} - |x| \sqrt{1 + \frac{4}{x^2}} = x \sqrt{2 + \frac{1}{x^2}} - x \sqrt{1 + \frac{4}{x^2}}$$

$$= x \left(\sqrt{2 + \frac{1}{x^2}} - \sqrt{1 + \frac{4}{x^2}} \right)$$

$\infty - \infty$ عدم تعيين.

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty(\sqrt{2} - 1) = +\infty$

طريقة الضرب بالمرافق (مرافق الجذر) :

نضرب بمرافق الجذر ونقسم عليه:

$\sqrt{A} + B \xrightarrow{\text{مرافقه}} \sqrt{A} - B$ $\sqrt{A} - B \xrightarrow{\text{مرافقه}} \sqrt{A} + B$ $\sqrt{A} \pm \sqrt{B} \xrightarrow{\text{مرافقه}} \sqrt{A} \mp \sqrt{B}$

ملاحظة:

1. بعد الضرب بمرافق الجذر نستخدم المطابقة التربيعية من الشكل $(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$

2. بعد الضرب والقسمة على المرافق نميز حالتين:

- * إذا لم يبقى x في البسط نعوض فوراً.
- * إذا بقي x في البسط نطبق طريقة العامل المناسب.

تمارين:

1 $f(x) = \sqrt{x^2 + x + 1} - x$ ($a = +\infty$)

$$f(x) = \frac{\left(\sqrt{x^2 + x + 1} - \overset{a}{x} \right) \left(\sqrt{x^2 + x + 1} + \overset{b}{x} \right)}{\sqrt{x^2 + x + 1} + x}$$

$$= \frac{x^2 + x + 1 - x^2}{\sqrt{x^2 + x + 1} + x} = \frac{x + 1}{\sqrt{x^2 + x + 1} + x} = \frac{x \left(1 + \frac{1}{x} \right)}{x \left(\sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} + 1 \right)}$$

$\infty - \infty$ عدم تعيين.

$$= \frac{1 + \frac{1}{x}}{\sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} + 1}$$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{1}{1 + 1} = \frac{1}{2}$

2 $f(x) = 2x - \sqrt{4x^2 + 1}$ ($a = +\infty$)

$$f(x) = \frac{(2x - \sqrt{4x^2 + 1})(2x + \sqrt{4x^2 + 1})}{2x + \sqrt{4x^2 + 1}}$$

$$= \frac{4x^2 - (4x^2 + 1)}{2x + \sqrt{4x^2 + 1}} = \frac{-1}{2x + \sqrt{4x^2 + 1}}$$

$\infty - \infty$ عدم تعيين.

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -1$

$$\boxed{3} f(x) = \sqrt{2x^2 + 1} - \sqrt{2x} \quad (a = +\infty)$$

$$f(x) = \frac{(\sqrt{2x^2 + 1} - \sqrt{2x})(\sqrt{2x^2 + 1} + \sqrt{2x})}{(\sqrt{2x^2 + 1} + \sqrt{2x})}$$

$$= \frac{2x^2 + 1 - 2x^2}{(\sqrt{2x^2 + 1} + \sqrt{2x})} = \frac{1}{(\sqrt{2x^2 + 1} + \sqrt{2x})}$$

$\infty - \infty$ عدم تعيين.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{1}{+\infty} = 0$$

تابع كسري جذري

$$\frac{\infty}{\infty} \quad \text{عامل مناسب} \quad \frac{0}{0} \quad \text{ضرب بالمرافق}$$

تمرين: أوجد نهاية كل من التوابع الآتية عند القيم المرفقة بجانب كل تابع:

$$\boxed{1} f(x) = \frac{\sqrt{x+1} - 2}{3-x} \quad (a = 3)$$

$$f(x) = \frac{(\sqrt{x+1} - 2)(\sqrt{x+1} + 2)}{(3-x)(\sqrt{x+1} + 2)} = \frac{x+1-4}{(3-x)(\sqrt{x+1} + 2)}$$

$$= \frac{x-3}{(3-x)(\sqrt{x+1} + 2)} = \frac{-1}{\sqrt{x+1} + 2}$$

$\frac{0}{0}$ عدم تعيين.

$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \frac{-1}{4}$$

$$\boxed{2} f(x) = \frac{\sqrt{2x^3 - 1} - 1}{x-1} \quad (a = 1)$$

$$f(x) = \frac{(\sqrt{2x^3 - 1} - 1)(\sqrt{2x^3 - 1} + 1)}{(x-1)(\sqrt{2x^3 - 1} + 1)}$$

$$= \frac{2x^3 - 1 - 1}{(x-1)(\sqrt{2x^3 - 1} + 1)} = \frac{2x^3 - 2}{(x-1)(\sqrt{2x^3 - 1} + 1)} = \frac{2(x^3 - 1)}{(x-1)(\sqrt{2x^3 - 1} + 1)}$$

$$= \frac{2(x-1)(x^2 + x + 1)}{(x-1)(\sqrt{2x^3 - 1} + 1)} = \frac{2(x^2 + x + 1)}{\sqrt{2x^3 - 1} + 1}$$

$\frac{0}{0}$ عدم تعيين.

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \frac{2(3)}{2} = 3$$

$$\boxed{3} f(x) = \frac{\sqrt{x^2 + 4}}{2x-1} \quad (a = -\infty)$$

$$f(x) = \frac{\sqrt{x^2(1 + \frac{4}{x^2})}}{x(2 - \frac{1}{x})} = \frac{|x| \sqrt{1 + \frac{4}{x^2}}}{x(2 - \frac{1}{x})} = \frac{-x \sqrt{1 + \frac{4}{x^2}}}{x(2 - \frac{1}{x})}$$

$\frac{\infty}{\infty}$ عدم تعيين.

$$= \frac{-\sqrt{1 + \frac{4}{x^2}}}{2 - \frac{1}{x}}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \frac{-1}{2}$$

$$\boxed{3} f(x) = \sqrt{2x^2 + 1} - \sqrt{2x} \quad (a = +\infty)$$

$$f(x) = \frac{(\sqrt{2x^2 + 1} - \sqrt{2x})(\sqrt{2x^2 + 1} + \sqrt{2x})}{(\sqrt{2x^2 + 1} + \sqrt{2x})} \quad \infty - \infty \text{ عدم تعيين.}$$

$$= \frac{2x^2 + 1 - 2x^2}{(\sqrt{2x^2 + 1} + \sqrt{2x})} = \frac{1}{(\sqrt{2x^2 + 1} + \sqrt{2x})}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{1}{+\infty} = 0$$

تابع كسري جذري

$$\frac{\infty}{\infty} \quad \text{عامل مناسب} \quad \frac{0}{0} \quad \text{ضرب بالمرافق}$$

تمرين: اوجد نهاية كل من التتابع الآتية عند القيم المرفقة بجانب كل تابع:

$$\boxed{1} f(x) = \frac{\sqrt{x+1} - 2}{3-x} \quad (a = 3)$$

$$f(x) = \frac{(\sqrt{x+1} - 2)(\sqrt{x+1} + 2)}{(3-x)(\sqrt{x+1} + 2)} = \frac{x+1-4}{(3-x)(\sqrt{x+1} + 2)} \quad \frac{0}{0} \text{ عدم تعيين.}$$

$$= \frac{x-3}{(3-x)(\sqrt{x+1} + 2)} = \frac{-1}{\sqrt{x+1} + 2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \frac{-1}{4}$$

$$\boxed{2} f(x) = \frac{\sqrt{2x^3 - 1} - 1}{x-1} \quad (a = 1)$$

$$f(x) = \frac{(\sqrt{2x^3 - 1} - 1)(\sqrt{2x^3 - 1} + 1)}{(x-1)(\sqrt{2x^3 - 1} + 1)} \quad \frac{0}{0} \text{ عدم تعيين.}$$

$$= \frac{2x^3 - 1 - 1}{(x-1)(\sqrt{2x^3 - 1} + 1)} = \frac{2x^3 - 2}{(x-1)(\sqrt{2x^3 - 1} + 1)} = \frac{2(x^3 - 1)}{(x-1)(\sqrt{2x^3 - 1} + 1)}$$

$$= \frac{2(x-1)(x^2 + x + 1)}{(x-1)(\sqrt{2x^3 - 1} + 1)} = \frac{2(x^2 + x + 1)}{\sqrt{2x^3 - 1} + 1}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \frac{2(3)}{2} = 3$$

$$\boxed{3} f(x) = \frac{\sqrt{x^2 + 4}}{2x-1} \quad (a = -\infty)$$

$$f(x) = \frac{\sqrt{x^2(1 + \frac{4}{x^2})}}{x(2 - \frac{1}{x})} = \frac{|x| \sqrt{1 + \frac{4}{x^2}}}{x(2 - \frac{1}{x})} = \frac{-x \sqrt{1 + \frac{4}{x^2}}}{x(2 - \frac{1}{x})} \quad \frac{\infty}{\infty} \text{ عدم تعيين.}$$

$$= \frac{-\sqrt{1 + \frac{4}{x^2}}}{2 - \frac{1}{x}}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \frac{-1}{2}$$

4] $f(x) = \frac{\sqrt{x+4}-2}{x^2}$ ($a=0$)
 $f(x) = \frac{(\sqrt{x+4}-2)(\sqrt{x+4}+2)}{x^2(\sqrt{x+4}+2)}$

عدم تعيين $\frac{0}{0}$

$= \frac{x+4-4}{x^2(\sqrt{x+4}+2)} = \frac{x}{x^2(\sqrt{x+4}+2)} = \frac{1}{x(\sqrt{x+4}+2)}$
 $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \frac{1}{0^+} = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \frac{1}{0^-} = -\infty$

5] $f(x) = x - 2\sqrt{x}$ ($a = +\infty$)

$\infty - \infty$ عدم تعيين

طريقة ثانية:

طريقة اولى:

$f(x) = \sqrt{x}(\sqrt{x}-2)$; $x > 0$
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty(+\infty - 2) = +\infty$

$f(x) = x - 2\sqrt{x^2 \cdot \frac{1}{x}} = x - 2|x|\sqrt{\frac{1}{x}}$
 $= x - 2x\sqrt{\frac{1}{x}} = x\left(1 - 2\sqrt{\frac{1}{x}}\right)$
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty(1 - 0) = +\infty$

6] $f(x) = \sqrt{x^2+x-3} - x + 1$ ($a = +\infty$)
 $f(x) = \sqrt{x^2+x-3} - x + 1$

$\infty - \infty$ عدم تعيين.

$= \frac{(\sqrt{x^2+x-3}-x)(\sqrt{x^2+x-3}+x) + 1}{\sqrt{x^2+x-3}+x} + 1$
 $= \frac{x^2+x-3-x^2}{\sqrt{x^2+x-3}+x} + 1 = \frac{x-3}{\sqrt{x^2+x-3}+x} + 1$
 $= \frac{x-3}{x\left(1+\frac{1}{x}-\frac{3}{x^2}\right)+x} + 1 = \frac{x\left(1-\frac{3}{x}\right)}{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x}-\frac{3}{x^2}}+x} + 1$
 $= \frac{x\left(1-\frac{3}{x}\right)}{x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}-\frac{3}{x^2}}+1\right)} + 1 = \frac{1-\frac{3}{x}}{\sqrt{1+\frac{1}{x}-\frac{3}{x^2}}+1} + 1$
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}$

7] $f(x) = \frac{x+\sqrt{x}}{x+1}$ ($a = +\infty$)

$\frac{\infty}{\infty}$ عدم تعيين.

$f(x) = \frac{x+\sqrt{x^2 \cdot \frac{1}{x}}}{x+1} = \frac{x+|x|\sqrt{\frac{1}{x}}}{x+1} = \frac{x+x\sqrt{\frac{1}{x}}}{x+1} = \frac{x\left(1+\sqrt{\frac{1}{x}}\right)}{x\left(1+\frac{1}{x}\right)} = \frac{1+\sqrt{\frac{1}{x}}}{1+\frac{1}{x}}$
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{1}{1} = 1$

مكتبة

التابع المثلثي :

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin \theta}{\theta} = 1 \quad \text{مبرهنة :}$$

قوانين هامة في المثلثات:

$$\begin{aligned} \sin 2x &= 2 \sin x \cdot \cos x \\ 1 - \cos x &= 2 \sin^2 \frac{x}{2} \\ \sin 3x &= 3 \sin x - 4 \sin^3 x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sin x &= 2 \sin \frac{x}{2} \cdot \cos \frac{x}{2} \\ 1 - \cos 2x &= 2 \sin^2 x \\ \cos 3x &= 4 \cos^3 x - 3 \cos x \end{aligned}$$

تمرين: أوجد نهاية كل تابع مما يلي عند القيم المرفقة بجانب كل تابع:

$$\boxed{1} \quad f(x) = \frac{\sin 3x}{x} \quad : a = 0$$

حالة عدم تعيين $\frac{0}{0}$

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{\sin 3x}{x} = 3 \cdot \frac{\sin 3x}{3x} \\ \lim_{x \rightarrow 0} f(x) &= 3(1) = 3 \\ &\left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{3x} = 1 \right) \quad \text{علماً أن :} \end{aligned}$$

$$\boxed{2} \quad f(x) = \frac{\sin 2x}{3x} \quad : a = 0$$

حالة عدم تعيين $\frac{0}{0}$

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{\sin 2x}{3x} = \frac{2}{3} \cdot \frac{\sin 2x}{2x} \\ \lim_{x \rightarrow 0} f(x) &= \frac{2}{3}(1) = \frac{2}{3} \\ &\left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{2x} = 1 \right) \quad \text{علماً أن :} \end{aligned}$$

$$\boxed{3} \quad f(x) = \frac{1 - \cos 2x}{x} \quad : a = 0$$

حالة عدم تعيين $\frac{0}{0}$

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1 - \cos 2x}{x} = \frac{2 \sin^2 x}{x} \\ &= 2 \sin x \cdot \frac{\sin x}{x} \\ \lim_{x \rightarrow 0} f(x) &= 2(0)(1) = 0 \\ &\left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \right) \quad \text{علماً أن :} \end{aligned}$$

$$\boxed{4} \quad f(x) = \frac{1 - \cos 2x}{3x^2} \quad : a = 0$$

حالة عدم تعيين $\frac{0}{0}$

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1 - \cos 2x}{3x^2} = \frac{1}{3} \cdot \frac{2 \sin^2 x}{x^2} \\ &= \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{\sin x}{x} \right)^2 \\ \lim_{x \rightarrow 0} f(x) &= \frac{2}{3}(1)^2 = \frac{2}{3} \\ &\left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \right) \quad \text{علماً أن :} \end{aligned}$$

$$\boxed{5} \quad f(x) = \frac{1 - \cos x}{x} \quad : a = 0$$

حالة عدم تعيين $\frac{0}{0}$

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1 - \cos x}{x} = \frac{2 \sin^2 \frac{x}{2}}{x} \\ &= 2 \sin \frac{x}{2} \cdot \frac{\sin \frac{x}{2}}{x} = 2 \sin \frac{x}{2} \cdot \frac{\sin \frac{x}{2}}{2 \cdot \frac{x}{2}} \\ &= \sin \frac{x}{2} \cdot \frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \\ \lim_{x \rightarrow 0} f(x) &= (0)(1) = 0 \\ &\left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} = 1 \right) \quad \text{علماً أن :} \end{aligned}$$

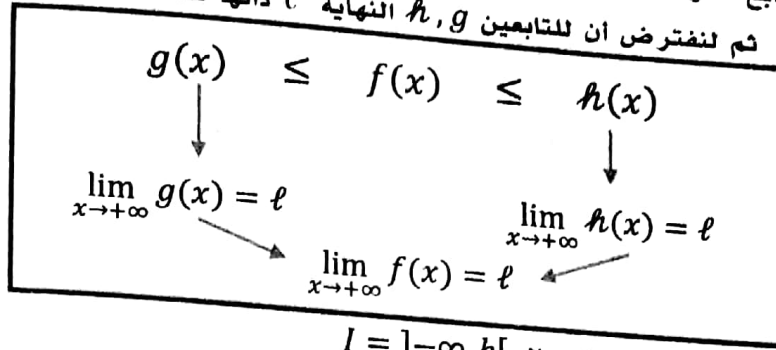
$$\boxed{6} \quad f(x) = \frac{1 - \cos x}{3x^2} \quad : a = 0$$

حالة عدم تعيين $\frac{0}{0}$

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1 - \cos x}{3x^2} = \frac{1}{3} \cdot \frac{2 \sin^2 \frac{x}{2}}{x^2} \\ &= \frac{2}{3} \left(\frac{\sin \frac{x}{2}}{x} \right)^2 = \frac{2}{3} \left(\frac{\sin \frac{x}{2}}{2 \cdot \frac{x}{2}} \right)^2 \\ &= \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4} \left(\frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \right)^2 = \frac{1}{6} \left(\frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \right)^2 \\ \lim_{x \rightarrow 0} f(x) &= \frac{1}{6}(1)^2 = \frac{1}{6} \\ &\left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} = 1 \right) \quad \text{علماً أن :} \end{aligned}$$

مبرهنة المقارنة

مبرهنة ① (الإحاطة):
 بفرض f, g, h ثلاثة توابع معرفة على مجال من الشكل $I =]b, +\infty[$ ولنفرض انه عند كل x من I تتحقق المتراجحة
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell$ عندئذ: $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ ثم لنفترض ان للتابعين g, h النهاية ℓ ذاتها عند $+\infty$ عندئذ:



ملخص المبرهنة:

◆ تبقى المبرهنة السابقة صحيحة على المجال $I =]-\infty, b[$

ملاحظات هامة:

1. نطبق مبرهنة الإحاطة عندما نحصل على $\sin \infty$ او $\cos \infty$
2. نبدأ الحل في مبرهنة الإحاطة: اياً يكن $x \in D$ فإن:

$$-1 \leq \frac{\sin(g(x))}{\cos(g(x))} \leq 1 \quad \text{او} \quad 0 \leq \frac{\sin^2(g(x))}{\cos^2(g(x))} \leq 1$$
3. تغيير جهة المتراجحة عندما نضرب او نقسم على مقدار سالب او عندما نأخذ مقلوب المتراجحة.

تمرين: اوجد نهاية كل تابع من التوابع الآتية عند القيم المرفقة بجانب كل تابع:

① $f(x) = \frac{\cos x}{x} \quad : a = -\infty$
 $-1 \leq \cos x \leq 1 \quad \div (x) < 0 \quad : \text{ايأً يكن } x < 0$

$$\frac{-1}{x} \geq \frac{\cos x}{x} \geq \frac{1}{x}$$

$$\frac{-1}{x} \geq f(x) \geq \frac{1}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{-1}{x} \right) = 0 \quad \left. \begin{array}{l} \text{حسب مبرهنة} \\ \text{الإحاطة (1)} \end{array} \right\} \implies \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{1}{x} \right) = 0$$

② $f(x) = \frac{x(3 + \sin x)}{x^2 + 1} \quad : a = +\infty$
 $-1 \leq \sin x \leq 1 \quad : \text{ايأً يكن } x > 0$
 $2 \leq 3 + \sin x \leq 4$
 $2x \leq x(3 + \sin x) \leq 4x \quad \div (x^2 + 1 > 0)$

$$\frac{2x}{x^2 + 1} \leq \frac{x(3 + \sin x)}{x^2 + 1} \leq \frac{4x}{x^2 + 1}$$

$$\frac{2x}{x^2 + 1} \leq f(x) \leq \frac{4x}{x^2 + 1}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x}{x^2 + 1} \right) = 0 \quad \left. \begin{array}{l} \text{حسب مبرهنة} \\ \text{الإحاطة (1)} \end{array} \right\} \implies \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{4x}{x^2 + 1} \right) = 0$$

③ $f(x) = 4 + \frac{\sin x}{x} \quad : a = -\infty$
 $-1 \leq \sin x \leq 1 \quad : \text{ايأً يكن } x < 0$

$$\frac{-1}{x} \geq \frac{\sin x}{x} \geq \frac{1}{x}$$

$$4 - \frac{1}{x} \geq 4 + \frac{\sin x}{x} \geq 4 + \frac{1}{x}$$

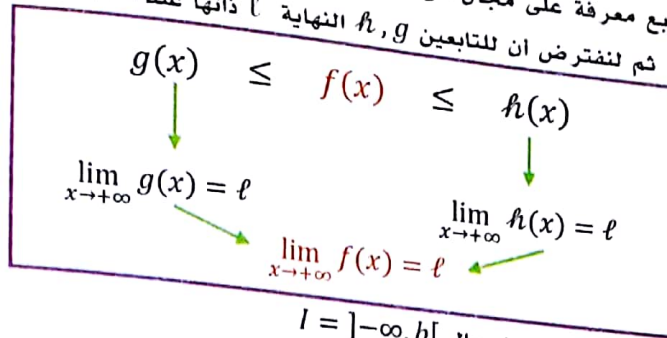
$$4 - \frac{1}{x} \geq f(x) \geq 4 + \frac{1}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(4 - \frac{1}{x} \right) = 4 \quad \left. \begin{array}{l} \text{حسب مبرهنة} \\ \text{الإحاطة ①} \end{array} \right\} \implies \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 4$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(4 + \frac{1}{x} \right) = 4$$

مبرهنات المقارنة

مبرهنة ① (الإحاطة): بفرض f, g, h ثلاثة توابع معرفة على مجال من الشكل $l =]b, +\infty[$ ولنفرض انه عند كل x من l تتحقق المتراجحة $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ ثم لنفترض ان للتابعين g, h النهاية l ذاتها عند $+\infty$ عندئذ: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l$



ملخص المبرهنة:

♦ تبقى المبرهنة السابقة صحيحة على المجال $l =]-\infty, b[$

ملاحظات هامة:

1. تطبيق مبرهنة الإحاطة عندما نحصل على $\cos \infty$ او $\sin \infty$
2. نبدأ الحل في مبرهنة الإحاطة: اياً يكن $x \in D$ فإن:

$$-1 \leq \sin(g(x)) \leq 1 \quad \text{او} \quad 0 \leq \sin^2(g(x)) \leq 1$$
3. نغير جهة المتراجحة عندما نضرب او نقسم على مقدار سالب او عندما نأخذ مقلوب المتراجحة.

تمرين: اوجد نهاية كل تابع من التوابع الآتية عند القيم المرفقة بجانب كل تابع:

① $f(x) = \frac{\cos x}{x}$: $a = -\infty$

$-1 \leq \cos x \leq 1$: اياً يكن $x < 0$: $x < 0$

$$\frac{-1}{x} \geq \frac{\cos x}{x} \geq \frac{1}{x}$$

$$\frac{-1}{x} \geq f(x) \geq \frac{1}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{-1}{x} \right) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{1}{x} \right) = 0$$

حسب مبرهنة الإحاطة (1) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$

② $f(x) = \frac{x(3 + \sin x)}{x^2 + 1}$: $a = +\infty$

$-1 \leq \sin x \leq 1$: اياً يكن $x > 0$

$2 \leq 3 + \sin x \leq 4$

$2x \leq x(3 + \sin x) \leq 4x$: $(x^2 + 1 > 0)$

$$\frac{2x}{x^2 + 1} \leq \frac{x(3 + \sin x)}{x^2 + 1} \leq \frac{4x}{x^2 + 1}$$

$$\frac{2x}{x^2 + 1} \leq f(x) \leq \frac{4x}{x^2 + 1}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x}{x^2 + 1} \right) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{4x}{x^2 + 1} \right) = 0$$

حسب مبرهنة الإحاطة (1) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$

③ $f(x) = 4 + \frac{\sin x}{x}$: $a = -\infty$

$-1 \leq \sin x \leq 1$: اياً يكن $x < 0$

$$\frac{-1}{x} \geq \frac{\sin x}{x} \geq \frac{1}{x}$$

$$4 - \frac{1}{x} \geq 4 + \frac{\sin x}{x} \geq 4 + \frac{1}{x}$$

$$4 - \frac{1}{x} \geq f(x) \geq 4 + \frac{1}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(4 - \frac{1}{x} \right) = 4$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(4 + \frac{1}{x} \right) = 4$$

حسب مبرهنة الإحاطة (1) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 4$

مبرهنة ② : بفرض f, g تابعين معرفين على المجال $l =]b, +\infty[$ ولنفرض أنه عند كل x من l تتحقق المتراجحة $|f(x) - l| \leq g(x)$ ثم لنفرض أن:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0 \implies \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l$$

◆ تبقى المبرهنة صحيحة على المجال $l =]-\infty, b[$

ملخص المبرهنة:

$$\left. \begin{array}{l} |f(x) - l| \leq g(x) \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0 \end{array} \right\} \implies \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l$$

تمرين: بفرض f تابع يحقق $|f(x) + 4| \leq \frac{-3}{x+4}$ أيًا يكن $x > 0$ ما نهاية التابع f عند $+\infty$

$$\left. \begin{array}{l} |f(x) - (-4)| \leq \frac{-3}{x+4} \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-3}{x+4} = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{حسب مبرهنة} \\ \text{المقارنة ②} \end{array} \implies \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -4$$

تمرين: بفرض f تابع يحقق $|f(x) - 2| \leq \frac{x \sin^2 x}{x^2 + 4}$ أيًا يكن $x > 0$ ما نهاية التابع f عند $+\infty$

$$g(x) = \frac{x \sin^2 x}{x^2 + 4} \quad \text{بفرض :}$$

$$0 \leq \sin^2 x \leq 1 \quad \text{أيًا يكن } x > 0$$

$$0 \leq x \sin^2 x \leq x$$

$$0 \leq \frac{x \sin^2 x}{x^2 + 4} \leq \frac{x}{x^2 + 4}$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x}{x^2 + 4} \right) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} (0) = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{حسب مبرهنة} \\ \text{الإحاطة ①} \end{array} \implies \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$$

أصبح لدينا:

$$\left. \begin{array}{l} |f(x) - 2| \leq \frac{x \sin^2 x}{x^2 + 4} \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \sin^2 x}{x^2 + 4} = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{حسب مبرهنة} \\ \text{المقارنة ②} \end{array} \implies \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$$

مبرهنة رقم ③ : بفرض f, g تابعين معرفين على المجال $l =]b, +\infty[$ عندئذ:

$$1. \text{ إذا كان } f(x) \geq g(x) \text{ عند كل } x \text{ من } l \text{ وكان: } \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty \iff \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

$$2. \text{ إذا كان } f(x) \leq g(x) \text{ عند كل } x \text{ من } l \text{ وكان: } \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty \iff \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$$

تمرين: أوجد نهاية التابع $f(x) = \frac{-x}{3} + \cos \pi x$ عند $-\infty$

$$-1 \leq \cos \pi x \leq 1 \quad \text{أيًا يكن } x < 0$$

$$\frac{-x}{3} - 1 \leq \frac{-x}{3} + \cos \pi x \leq \frac{-x}{3} + 1$$

$$\frac{-x}{3} - 1 \leq f(x) \leq \frac{-x}{3} + 1$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{-x}{3} - 1 \right) = +\infty \xrightarrow{\text{حسب مبرهنة المقارنة ③}} \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$$

تمرين: أوجد نهاية التابع $f(x) = 2x - 3 \sin x$ عند $+\infty$

$$-1 \leq \sin x \leq 1 \quad \text{أيًا يكن } x > 0$$

$$3 \geq -3 \sin x \geq -3$$

$$2x + 3 \geq 2x - 3 \sin x \geq 2x - 3$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (2x - 3) = +\infty \xrightarrow{\text{حسب مبرهنة المقارنة ③}} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

تدريب صفحة 38 رقم 1 : احسب نهايات التتابع الآتية عند $+\infty$ وعند $-\infty$ وعند النقطة a المعطاة، ويمكن في حالة عدم وجود النهاية حساب النهاية من اليمين والنهاية من اليسار عند a

1) $f(x) = \frac{x-3}{x-1} \begin{pmatrix} +\infty \\ -\infty \\ 1 \end{pmatrix}$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x}{x}\right) = 1$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x}{x}\right) = 1$

$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \frac{-2}{0^-} = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \frac{-2}{0^+} = -\infty$

2) $f(x) = \frac{x^2+2}{x-2} \begin{pmatrix} +\infty \\ -\infty \\ 2 \end{pmatrix}$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2}{x}\right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x) = +\infty$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x^2}{x}\right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x) = -\infty$

$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \frac{+6}{0^-} = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \frac{+6}{0^+} = +\infty$

3) $f(x) = \frac{2x-1}{x+1} \begin{pmatrix} +\infty \\ -\infty \\ -1 \end{pmatrix}$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x}{x}\right) = 2$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{2x}{x}\right) = 2$

$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \frac{-3}{0^-} = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \frac{-3}{0^+} = -\infty$

4) $f(x) = \frac{5x+1}{x+1} \begin{pmatrix} +\infty \\ -\infty \\ -1 \end{pmatrix}$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{5x}{x}\right) = 5$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{5x}{x}\right) = 5$

$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \frac{-4}{0^-} = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \frac{-4}{0^+} = -\infty$

5) $f(x) = \frac{x+2}{(x-2)^2} \begin{pmatrix} +\infty \\ -\infty \\ 2 \end{pmatrix}$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x+2}{x^2-4x+4}\right)$
 $= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x}{x^2}\right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x}\right) = 0$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x}{x^2}\right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{1}{x}\right) = 0$

$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \frac{+4}{0^+} = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \frac{+4}{0^+} = +\infty$

6) $f(x) = 3x - 5 + \frac{2}{x+2} \begin{pmatrix} +\infty \\ -\infty \\ -2 \end{pmatrix}$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty - 5 + \frac{2}{+\infty} = +\infty$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty - 5 + \frac{2}{-\infty} = -\infty$

$\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = -11 + \frac{2}{0^-} = -\infty$

$\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = -11 + \frac{2}{0^+} = +\infty$

تدريب صفحة 38 رقم 2 : جد نهاية التابع f المعين بالعلاقة $f(x) = \frac{5x-1}{(x-1)^2}$ عند 1 ثم عين عدداً α يحقق الشرط: إذا كان x عنصراً من المجال $[1-\alpha, 1+\alpha]$ مختلفاً عن 1 كان $f(x) > 10^3$

$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \frac{+4}{0^+} = +\infty$

$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \frac{+4}{0^+} = +\infty$

$\Delta = (-5)^2 - 4(10^3)(-4)$
 $= 25 + 16000 = 16025$

$\sqrt{\Delta} = \sqrt{16025} \approx 126.5$

$t_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-5) + 126.5}{2(1000)} = \frac{5 + 126.5}{2000}$

$= \frac{131.5}{2000} = 0.06$

$t_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-5) - 126.5}{2(1000)} = \frac{5 - 126.5}{2000}$

$= \frac{-121.5}{2000} = -0.06$

طريقة أولى:

لدينا $f(x) > 10^3$ وهذا يكافئ $\frac{5x-1}{(x-1)^2} > 10^3$

نفرض $x = t + 1 \iff t = x - 1$

$\frac{5(t+1)-1}{t^2} > 10^3$

$\frac{5t+4}{t^2} > 10^3$

$10^3 t^2 - 5t - 4 < 0$

$10^3 t^2 - 5t - 4 = 0$

مترابحة

مراجعة درجة ثانية ندرس إشارتها

t	$-\infty$	-0.06	0.06	$+\infty$
$10^3 t^2 - 5t - 4$		+	-	+
$10t^2 - 5t - 4 < 0$		غير محققة	محققة	غير محققة

$-0.06 < t < 0.06$ نعوض $t = x - 1$ ومنه $-0.06 < x - 1 < 0.06$
وبالتالي $1 - 0.06 < x < 1 + 0.06$ $\alpha = 0.06$

طريقة ثانية: لنكتب $f(x)$ بالشكل:

$$f(x) = \frac{5x - 1}{(x - 1)^2} = \frac{A}{(x - 1)^2}$$

$$f(x) > 10^3$$

$$\frac{A}{(x - 1)^2} > 10^3 \Rightarrow \frac{(x - 1)^2}{A} < \frac{1}{10^3}$$

$$(x - 1)^2 < \frac{A}{10^3}$$

$$|x - 1| < \sqrt{\frac{A}{10^3}}$$

وبما أن $\lim_{x \rightarrow 1} (5x - 1) = 4$ فإن البسط سيكون قريب من عدد حقيقي A موجب تماماً أصغر من (4)

ومنه $\alpha = \sqrt{\frac{A}{10^3}}$ وبما أن $\lim_{x \rightarrow 1} (5x - 1) = 4$ فيكون: $5x - 1 > A$ في جوار معين للعدد (1)

أصبح لدينا:

$$\frac{5x - 1}{(x - 1)^2} > \frac{A}{(x - 1)^2} > 10^3$$

إذا اخترنا $A = 1.6$ عندئذ:

$$\alpha = \sqrt{\frac{1.6}{10^3}} = \sqrt{\frac{16}{10^4}} = 0.04$$

تدريب صفحة 42 رقم 1: احسب نهايات التتابع الآتية عند $+\infty$ وعند $-\infty$ وعند النقاط a المعطاة ويمكن عند الحاجة

حساب النهاية من اليمين ومن اليسار عند a

$$\boxed{1} f(x) = \frac{2x^2}{(x-1)(2-x)} \quad \begin{matrix} (1) \\ (2) \end{matrix}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x^2}{-x^2} \right) = -2$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{2x^2}{-x^2} \right) = -2$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \frac{2}{0^+} = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \frac{2}{0^-} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \frac{8}{0^-} = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \frac{8}{0^+} = +\infty$$

$$\boxed{2} f(x) = \frac{2x+1}{x^2-4} \quad \begin{matrix} (2) \\ (-2) \end{matrix}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{2x}{x^2} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x}{x^2} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = \frac{-3}{0^-} = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = \frac{-3}{0^+} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \frac{5}{0^+} = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \frac{5}{0^-} = -\infty$$

رؤية شاملة في النهايات والاستمرار

52

3 $f(x) = x^2 - 2 + \frac{1}{(1-x)^2}$ (1)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty - 2 + \frac{1}{+\infty} = +\infty + 0 = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty - 2 + \frac{1}{+\infty} = +\infty + 0 = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 1 - 2 + \frac{1}{0^+} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 1 - 2 + \frac{1}{0^+} = +\infty$$

4 $f(x) = x + \frac{1}{1-x} - \frac{1}{x-2}$ (2)

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 1 + \frac{1}{0^+} - \frac{1}{-1} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 1 + \frac{1}{0^-} - \frac{1}{-1} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 2 + \frac{1}{-1} - \frac{1}{0^-} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 2 + \frac{1}{-1} - \frac{1}{0^+} = -\infty$$

تدريب صفحة 42 رقم 2 : عين فيما يأتي مجموعة تعريف التابع f ثم ادرس في كل حالة نهاية f عند اطراف مجموعة تعريفه وادرس عند اللزوم النهاية من اليمين والنهاية من اليسار.

1 $f(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x}-1}$

شرط الجذر: شرط الكسر:

$$x \geq 0 \qquad \sqrt{x} - 1 \neq 0$$

$$[0, +\infty[\qquad \sqrt{x} \neq 1$$

$$\qquad \qquad \qquad x \neq 1$$

$$D = [0, +\infty[\setminus \{1\} = [0, 1[\cup]1, +\infty[$$

$$f(0) = \frac{+1}{-1} = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \frac{+2}{0^-} = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \frac{+2}{0^+} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = ? \quad \frac{\infty}{\infty} \text{ حالة عدم تعيين من الشكل}$$

بما أن $x > 0$ فإن :

$$f(x) = \frac{x(1 + \frac{1}{x})}{\sqrt{x}(1 - \frac{1}{\sqrt{x}})} = \frac{\sqrt{x}(1 + \frac{1}{x})}{1 - \frac{1}{\sqrt{x}}}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{+\infty(1+0)}{1-0} = +\infty$$

2 $f(x) = x^2 + \sqrt{x} - 1$

شرط الجذر: $x \geq 0$ وشرط الكسر: $x \neq 0$

$$D = [0, +\infty[\setminus \{0\} =]0, +\infty[$$

$$f(0) = -1, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty + \infty - 1 = +\infty$$

3 $f(x) = \sqrt{x} + \frac{1}{x}$

شرط الجذر: شرط الكسر:

$$x \geq 0 \qquad x \neq 0$$

$$[0, +\infty[\qquad D =]0, +\infty[$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0 + \frac{1}{0^+} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty + \frac{1}{+\infty} = +\infty + 0 = +\infty$$

4 $f(x) = \frac{x + \sqrt{x}}{x+1}$

شرط الجذر: شرط الكسر:

$$x \geq 0 \qquad x+1 \neq 0$$

$$[0, +\infty[\qquad x \neq -1$$

$$D = [0, +\infty[$$

$$f(0) = \frac{0+0}{0+1} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = ? \quad \frac{\infty}{\infty} \text{ حالة عدم تعيين من الشكل}$$

$$f(x) = \frac{x(1 + \frac{\sqrt{x}}{x})}{x(1 + \frac{1}{x})} = \frac{1 + \frac{1}{\sqrt{x}}}{1 + \frac{1}{x}}$$

بما أن $x > 0$ فإن :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{1+0}{1+0} = 1$$

$$[5] f(x) = \frac{x^2 + x - \sqrt{x}}{x^2 + 1}$$

شرط الجذر:

$$x \geq 0 \\ [0, +\infty[$$

شرط الكسر:

$$x^2 + 1 \neq 0 \\ \text{المقام معرف على } R$$

$$D = [0, +\infty[$$

$$f(0) = \frac{0}{1} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = ? \quad \text{حالة عدم تعيين من الشكل } \infty - \infty \\ \text{بما ان } x > 0 \text{ فإن :}$$

$$f(x) = \frac{x^2 \left(1 + \frac{x}{x^2} - \frac{\sqrt{x}}{x^2}\right)}{x^2 \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)} = \frac{1 + \frac{1}{x} - \frac{1}{x\sqrt{x}}}{1 + \frac{1}{x^2}}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{1 + 0 - 0}{1 + 0} = 1$$

$$[6] f(x) = \sqrt{x-1} - \sqrt{x}$$

شرط الجذر الثاني:

$$x \geq 0 \\ [0, +\infty[$$

شرط الجذر الأول:

$$x - 1 \geq 0 \\ x \geq 1 \\ [1, +\infty[$$

$$D = [1, +\infty[$$

$$f(1) = 0 - 1 = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = ? \quad \text{حالة عدم تعيين من الشكل } \infty - \infty$$

$$f(x) = \frac{(\sqrt{x-1} - \sqrt{x}) \cdot (\sqrt{x-1} + \sqrt{x})}{(\sqrt{x-1} + \sqrt{x})} \\ = \frac{(x-1) - (x)}{\sqrt{x-1} + \sqrt{x}} = \frac{-1}{\sqrt{x-1} + \sqrt{x}}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{-1}{+\infty + \infty} = \frac{-1}{+\infty} = 0$$

تدرب صفحة 42 رقم 3: اوجد نهاية التابع f المعين بالعلاقة $f(x) = \frac{-2x+1}{x+3}$ عند $+\infty$, ثم اوجد عدداً A يحقق الشرط إذا كان $x > A$, وكان $f(x)$ في المجال $]-2.05, -1.95[$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -2 \quad \text{لدينا :} \\ \varepsilon = 0.05, \quad \ell = -2 \\ \text{حتى ينتمي } f(x) \text{ للمجال }]-2.05, -1.95[$$

يجب أن تتحقق المتراجحة: $|f(x) - \ell| < \varepsilon$

$$\left| \frac{-2x+1}{x+3} + 2 \right| < \frac{5}{100}$$

$$\left| \frac{-2x+1+2x+6}{x+3} \right| < \frac{1}{20} \\ \left| \frac{7}{x+3} \right| < \frac{1}{20}$$

بما ان $x \rightarrow +\infty$ نهتم بالقيم الكبيرة للمتحول x

$$\frac{7}{x+3} < \frac{1}{20} \Rightarrow 140 < x+3 \Rightarrow x > 137$$

و بالتالي نختار $A = 137$

تدرب صفحة 42 رقم 4: اوجد نهاية التابع f المعين بالعلاقة $f(x) = \frac{x+3}{x-3}$ عند 5 ثم اوجد مجالاً I مركزه 5 يحقق الشرط إذا انتمى x إلى المجال I انتمى $f(x)$ إلى المجال $]3.95, 4.05[$

$$\lim_{x \rightarrow 5} f(x) = 4, \quad \ell = \frac{3.95 + 4.05}{2} = 4, \quad \varepsilon = \frac{4.05 - 3.95}{2} = 0.05$$

إذا تحققت المتراجحة: $f(x) \in]3.95, 4.05[$

$$|f(x) - \ell| < \varepsilon \\ \left| \frac{x+3}{x-3} - 4 \right| < \frac{5}{100}$$

$$\left| \frac{-3x+15}{x-3} \right| < \frac{1}{20}$$

نستخدم القسمة المطولة:

$$\left| -3 + \frac{6}{x-3} \right| < \frac{1}{20}$$

$$\frac{-1}{20} < -3 + \frac{6}{x-3} < \frac{1}{20}$$

$$\frac{-1}{20} + 3 < \frac{6}{x-3} < \frac{1}{20} + 3$$

$$\frac{59}{20} < \frac{6}{x-3} < \frac{61}{20} \\ \frac{20}{59} > \frac{x-3}{6} > \frac{20}{61} \quad (\times 6)$$

$$\frac{120}{59} > x-3 > \frac{120}{61} \\ \frac{120}{59} + 3 > x > \frac{120}{61} + 3$$

$$\frac{297}{59} > x > \frac{303}{61} \\ x \in \left] \frac{303}{61}, \frac{297}{59} \right[$$

مكتبة

تدرب صفحة 46 رقم 1 : اجب عن الاسئلة الآتية :
 1. f تابع يحقق $\frac{3x+\cos x}{x} \leq f(x) \leq \frac{3x+7}{x-1}$ اياً كان $x > 1$, ما نهاية f عند $+\infty$ ؟
 حصلنا على $\cos \infty$ نستخدم الإحاطة
 اياً كان $x > 1$ فإن :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x + \cos x}{x} = ?$$

$$-1 \leq \cos x \leq 1$$

$$3x - 1 \leq 3x + \cos x \leq 3x + 1$$

$$\frac{3x - 1}{x} \leq \frac{3x + \cos x}{x} \leq \frac{3x + 1}{x}$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x - 1}{x} = 3 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x + 1}{x} = 3 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{حسب مبرهنة} \\ \text{الإحاطة ①} \end{array} \implies \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x + \cos x}{x} = 3$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x + \cos x}{x} = 3 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x + 7}{x - 1} = 3 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{حسب مبرهنة} \\ \text{الإحاطة ①} \end{array} \implies \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 3$$

2. اثبت ان $-\frac{1}{x+1} \leq \frac{\cos x}{x+1} \leq \frac{1}{x+1}$ اياً يكن $x > -1$, استنتج نهاية $f: x \mapsto \frac{\cos x}{x+1}$ عند $+\infty$
 ثم ادرس بالمثل نهاية التابع ذاته عند $-\infty$

$$-1 \leq \cos x \leq 1$$

$$-\frac{1}{x+1} \leq \frac{\cos x}{x+1} \leq \frac{1}{x+1} \quad : \text{اياً يكن } x > -1 \text{ فإن :}$$

$$\text{نقسم على } (x+1 > 0) :$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-1}{x+1} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x+1} = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{حسب مبرهنة} \\ \text{المقارنة ②} \end{array} \implies \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cos x}{x+1} = 0$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-1}{x+1} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x+1} = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{حسب مبرهنة} \\ \text{الإحاطة ①} \end{array} \implies \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\cos x}{x+1} = 0$$

3. f تابع يحقق $|f(x) - 3| \leq \frac{1}{x+1}$ اياً كان $x \geq 0$, ما نهاية f عند $+\infty$ ؟

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x+1} = 0 \quad \begin{array}{l} \text{حسب مبرهنة} \\ \text{المقارنة ②} \end{array} \implies \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 3$$

4. f تابع يحقق $f(x) \geq \frac{1}{4}x^2$ اياً كان $x < 0$, ما نهاية f عند $-\infty$ ؟

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{4}x^2 = +\infty \quad \begin{array}{l} \text{حسب مبرهنة} \\ \text{المقارنة ③} \end{array} \implies \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$$

5. اثبت ان $x^2 - 5 \sin x \geq x^2 - 5$ اياً كان العدد الحقيقي x . استنتج من المتراجحة السابقة نهاية $x \mapsto x^2 - 5 \sin x$ عند $+\infty$ وعند $-\infty$

$$-1 \leq \sin x \leq 1 \quad : \text{اياً كان } x \in \mathbb{R} \text{ فإن :}$$

$$5 \geq -5 \sin x \geq -5$$

$$x^2 + 5 \geq x^2 - 5 \sin x \geq x^2 - 5$$

$$x^2 - 5 \sin x \geq x^2 - 5 \quad : \text{ومن هنا :}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 - 5) = +\infty \quad \begin{array}{l} \text{حسب مبرهنة} \\ \text{المقارنة ③} \end{array} \implies \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 - 5 \sin x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 - 5) = +\infty \quad \begin{array}{l} \text{حسب مبرهنة} \\ \text{المقارنة ③} \end{array} \implies \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 - 5 \sin x) = +\infty$$

تدرب صفحة 46 رقم 2 : ليكن f التابع المعرف على المجال $[0, +\infty[$ وفق $f(x) = \sqrt{1+x} - \sqrt{x}$ تحقق ان $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x} + \sqrt{x}}$ اياً يكن $x \geq 0$

$$f(x) = \frac{(\sqrt{1+x} - \sqrt{x})(\sqrt{1+x} + \sqrt{x})}{\sqrt{1+x} + \sqrt{x}} = \frac{1+x-x}{\sqrt{1+x} + \sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{1+x} + \sqrt{x}}$$

وائل زعتريه 0933699123

ياسر الساسة 0949198068

علاء رحال 0952480990

2. استنتج ان $\frac{1}{2\sqrt{1+x}} \leq f(x) \leq \frac{1}{2\sqrt{x}}$ اياً يكن $x > 0$
 اياً يكن $x > 0$ فإن $\sqrt{1+x} \geq \sqrt{x}$

نضيف \sqrt{x} للطرفين :

نضيف $\sqrt{1+x}$ للطرفين :

$$2\sqrt{1+x} \geq \sqrt{1+x} + \sqrt{x}$$

$$\frac{1}{2\sqrt{1+x}} \leq \frac{1}{\sqrt{1+x} + \sqrt{x}}$$

$$\frac{1}{2\sqrt{1+x}} \leq f(x)$$

$$\sqrt{1+x} + \sqrt{x} \geq 2\sqrt{x}$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+x} + \sqrt{x}} \leq \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$f(x) \leq \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

و منه : $\frac{1}{2\sqrt{1+x}} \leq f(x) \leq \frac{1}{2\sqrt{x}}$

3. ما نهاية f عند $+\infty$ ؟

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2\sqrt{1+x}} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2\sqrt{x}} = 0$$

حسب مبرهنة الإحاطة ① $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$

نهاية تابع مركب :

مبرهنة: بفرض لدينا ثلاثة توابع f, g, h وبفرض $f(x) = (g \circ h)(x) = g(h(x))$

إذا كان $\lim_{x \rightarrow a} h(x) = b$ و $\lim_{x \rightarrow b} g(x) = c$ عندئذٍ : $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = c$

سواء كانت المقادير a, b, c أعداد حقيقية منتهية أو مقادير لا نهائية.

مثال: بفرض $f(x) = x^2 + 2x + 1$ و $h(x) = x + 1$ و $g(x) = x^2$ تحقق $f(x) = (g \circ h)(x)$

بتعويض ما يساوي h حسب قاعدة ربط g

$$(g \circ h)(x) = g(h(x)) \cong g(x+1) \cong (x+1)^2 = x^2 + 2x + 1 = f(x)$$

توضيح بأخذ $a = 2$ نجد : $\lim_{x \rightarrow 2} h(x) = 3$ و منه $\lim_{x \rightarrow 3} g(x) = 9$

وبالفعل نلاحظ ان $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 4 + 4 + 1 = 9$

تدريب صفحة 49 رقم 1 : فيما يأتي نعطى تابعاً f معرفاً على مجموعة D ويطلب حساب نهاية f عند a

سنتبع في حل هذه التمارين طريقة تركيب التوابع:

① $D =]5, +\infty[$ $f(x) = \sqrt{\frac{x+3}{x-5}}$ $a = 5$

نفرض $X = h(x) = \frac{x+3}{x-5}$ $\lim_{x \rightarrow 5^+} h(x) = +\infty$

$$\lim_{x \rightarrow 5^+} f(x) = \lim_{X \rightarrow +\infty} \sqrt{X} = +\infty$$

③ $D =]-\infty, 1[$ $f(x) = \sqrt{\frac{-x+1}{x^2+1}}$ $a = -\infty$

نفرض $X = h(x) = \frac{-x+1}{x^2+1}$ $\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = 0$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{X \rightarrow 0} \sqrt{X} = 0$$

② $D =]-\infty, \frac{1-\sqrt{5}}{2}[$

نفرض $X = h(x) = -x^3 + x^2 + x$ $a = -\infty$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = +\infty$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{X \rightarrow +\infty} \sqrt{X} = +\infty$$

④ $D =]-1, 1[$ $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $a = 1$

نفرض $X = h(x) = 1 - x^2$ $\lim_{x \rightarrow 1^-} h(x) = 0$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{X \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt{X}} = +\infty$$

$$\boxed{5} D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$$

$$f(x) = \cos \pi x + \frac{1}{(x-1)^2} \quad a = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} h(x) = +\infty \quad X = h(x) = \frac{1}{(x-1)^2} \text{ نفرض}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} (\cos \pi x) + \lim_{x \rightarrow +\infty} X = +\infty$$

$$\boxed{6} D = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$$

$$f(x) = \cos\left(\frac{\pi x + 1}{x + 2}\right) \quad a = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = \pi \quad X = h(x) = \frac{\pi x + 1}{x + 2} \text{ نفرض}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{X \rightarrow \pi} (\cos X) = -1$$

$$\boxed{7} D =]-\infty, 1[$$

$$f(x) = \sqrt{\frac{2x^2}{1-x}} \quad a = \begin{pmatrix} 1 \\ -\infty \end{pmatrix}$$

$$X = h(x) = \frac{2x^2}{1-x} \text{ نفرض } a = 1 \blacklozenge$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} h(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{X \rightarrow +\infty} \sqrt{X} = +\infty$$

$$X = h(x) = \frac{2x^2}{1-x} \text{ نفرض } a = -\infty \blacklozenge$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{X \rightarrow +\infty} \sqrt{X} = +\infty$$

$$\boxed{8} D =]0, +\infty[\quad f(x) = \sin\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right) \quad a = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = 0 \quad X = h(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \text{ نفرض}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{X \rightarrow 0} \sin(X) = 0$$

$$\boxed{9} D =]0, +\infty[$$

$$f(x) = \left(x - \sqrt{x} + \frac{1}{x}\right)^2 \quad a = +\infty$$

$$X = h(x) = x - \sqrt{x} + \frac{1}{x} \text{ نفرض}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = ? \quad \infty - \infty \text{ عدم تعيين من الشكل}$$

$$X = h(x) = x \left(1 - \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{x^2}\right); x > 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{X \rightarrow +\infty} (X)^2 = +\infty$$

$$\boxed{10} D =]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$$

$$f(x) = \cos^2\left(\pi \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\right) \quad a = +\infty$$

$$X = h(x) = \pi \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} \text{ نفرض}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = \pi$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{X \rightarrow \pi} \cos^2(X) = 1$$

ملاحظة: يمكن حل التمارين السابقة بطريقة التعويض فوراً والحصول على النتائج ذاتها.

تدريب صفحة 49 رقم 2: ليكن f التابع المعرف على المجال $] -5, +\infty[$ وفق $f(x) = \frac{x-3}{x+5}$

1. احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و استنتج $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(f(x))$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1 \quad \text{ومنه} \quad X = f(x) = \frac{x-3}{x+5} \text{ نفرض}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(f(x)) = \lim_{X \rightarrow 1} f(X) = \frac{1-3}{1+5} = \frac{-2}{6} = \frac{-1}{3}$$

2. اعد حساب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(f(x))$ بعد كتابة $f(f(x))$ بدلالة x

$$f(f(x)) = \frac{f(x) - 3}{f(x) + 5} = \frac{\frac{x-3}{x+5} - 3}{\frac{x-3}{x+5} + 5} = \frac{\frac{x-3-3x-15}{x+5}}{\frac{x-3+5x+25}{x+5}} = \frac{-2x-18}{6x+22} = \frac{-x-9}{3x+11}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(f(x)) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{-x}{3x}\right) = \frac{-1}{3}$$

تعريفه:

ليكن f تابع معرف على المجال $]b, +\infty[$ وليكن C الخط البياني للتابع f وبفرض المستقيم $\Delta: y = ax + b$.
نقول ان Δ مستقيم مقارب للخط C في جوار $(+\infty)$ إذا فقط إذا تحقق:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - y_\Delta] = 0$$

وإذا كان f تابع معرف على المجال $] -\infty, b[$ عندئذ:

نقول ان Δ مستقيم مقارب للخط C في جوار $(-\infty)$ إذا فقط إذا تحقق:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - y_\Delta] = 0$$

ولمعرفة الوضع النسبي بين Δ, C ندرس إشارة المقدار $f(x) - y_\Delta$

$$f(x) - y_\Delta \Rightarrow \begin{cases} f(x) - y_\Delta > 0 & : \Delta \text{ يقع فوق } C \\ f(x) - y_\Delta < 0 & : \Delta \text{ يقع تحت } C \end{cases}$$

تمرين: ليكن C_f الخط البياني للتابع $f(x) = \frac{x^2+3x+1}{x+2}$ المعرف على $R \setminus \{-2\}$ وليكن المستقيم $\Delta: y = x + 1$.
اثبت ان Δ مستقيم مقارب لـ C في جوار $+\infty$ ثم ادرس الوضع النسبي لـ C مع Δ

$$f(x) - y_\Delta = \frac{x^2 + 3x + 1}{x + 2} - (x + 1) = \frac{x^2 + 3x + 1 - x^2 - 2x - x - 2}{x + 2} = \frac{-1}{x + 2}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - y_\Delta] = 0 \Rightarrow \Delta: y = x + 1 \text{ مقارب مائل لـ } C \text{ عند } +\infty$$

دراسة الوضع النسبي: ندرس إشارة $f(x) - y_\Delta$ لدينا $f(x) - y_\Delta = \frac{-1}{x+2}$

x	$-\infty$	-2	$+\infty$
$f(x) - y_\Delta$	+		-
الوضع النسبي	Δ فوق C		Δ تحت C

تدريب صفحة 51 رقم 1 : فيما يأتي بين معللاً إيجابتك إذا كان المستقيم Δ مقارباً للخط البياني C_f للتابع f عند $+\infty$ أو عند $-\infty$ ادرس بعدئذ الوضع النسبي للخط C_f ومقاربه Δ

$$\boxed{1} f(x) = 2x + 3 + \frac{10}{x+1} ; \Delta: y = 2x + 3$$

$$f(x) - y_\Delta = 2x + 3 + \frac{10}{x+1} - (2x + 3) = \frac{10}{x+1} : f \text{ تابع معرف على } R \setminus \{-1\}$$

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - y_\Delta] &= 0 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - y_\Delta] &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \Delta \text{ مقارب مائل للخط } C \text{ عند } -\infty, +\infty$$

دراسة الوضع النسبي: ندرس إشارة المقدار $f(x) - y_\Delta$ لدينا $f(x) - y_\Delta = \frac{10}{x+1}$

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f(x) - y_\Delta$	-		+
الوضع النسبي	Δ تحت C		Δ فوق C

$$2) f(x) = -x + 1 - \frac{1}{x^2} ; \Delta: y = -x + 1$$

$$f(x) - y_\Delta = -x + 1 - \frac{1}{x^2} - (-x + 1) = -\frac{1}{x^2}$$

f تابع معرف على $R \setminus \{0\}$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - y_\Delta] = 0 \Rightarrow \Delta \text{ مقارب مائل للخط } C \text{ عند } -\infty, +\infty$$

دراسة الوضع النسبي: ندرس إشارة المقدار $f(x) - y_\Delta$ لدينا $(f(x) - y_\Delta = \frac{-1}{x^2} < 0)$ ومنه C تحت Δ

$$3) f(x) = x + \frac{\sin x}{x} ; \Delta: y = x$$

$$f(x) - y_\Delta = x + \frac{\sin x}{x} - x = \frac{\sin x}{x}$$

f تابع معرف على R^*

لدراسة نهاية $f(x) - y_\Delta$ عند $\pm\infty$ نستخدم مبرهنة الإحاطة:

ونميز حالتين:

1. في حالة $x > 0$ أي $x \in]0, +\infty[$

$$\begin{aligned} -1 &\leq \sin x \leq +1 \\ \frac{-1}{x} &\leq \frac{\sin x}{x} \leq \frac{+1}{x} \end{aligned} \quad (\div x)$$

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-1}{x} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{+1}{x} = 0 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} &\text{حسب مبرهنة} \\ &\text{الإحاطة ①} \end{aligned} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin x}{x} = 0 \Rightarrow \Delta \text{ مقارب مائل للخط } C \text{ عند } +\infty$$

2. في حالة $x < 0$ أي $x \in]-\infty, 0[$

نلاحظ أن $\frac{\sin x}{x}$ تابع زوجي على R^* أي $\frac{\sin(-x)}{-x} = \frac{-\sin x}{-x} = \frac{\sin x}{x}$ وبالتالي يمكننا أن نكتب:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sin x}{x} = 0 \Rightarrow \Delta \text{ مقارب مائل لـ } C \text{ عند } -\infty$$

دراسة الوضع النسبي: ندرس إشارة المقدار $f(x) - y_\Delta$ لدينا $(f(x) - y_\Delta = \frac{\sin x}{x})$ معرف على $R \setminus \{0\}$

$$\left. \begin{aligned} f(x) - y_\Delta = 0 \\ \frac{\sin x}{x} = 0 \end{aligned} \right\} x = \pi k ; k \in Z$$

x	$-\infty$	-2π	$-\pi$	0	π	2π	$+\infty$
$\sin x$		-	0	+	0	-	0
x			-	0		+	
$\frac{\sin x}{x}$		+	0	-	0	+	
الوضع النسبي		فوق C	تحت C	فوق C	فوق C	تحت C	فوق C
		Δ	Δ	Δ	Δ	Δ	Δ

$$4) f(x) = 3x + 7 - \frac{5}{\sqrt{|x|}} ; \Delta: y = 3x + 7$$

$$f(x) - y_\Delta = \frac{-5}{\sqrt{|x|}}$$

f تابع معرف على R^*

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - y_\Delta] = 0 \Rightarrow \Delta \text{ مقارب مائل للخط } C \text{ عند } -\infty, +\infty$$

دراسة الوضع النسبي: ندرس إشارة المقدار $f(x) - y_\Delta$ لدينا $(f(x) - y_\Delta = \frac{-5}{\sqrt{|x|}} < 0)$ ومنه C تحت Δ

5 $f(x) = \frac{2x^2 - 7x - 3}{x - 4}$; $\Delta: y = 2x + 1$

$f(x) = 2x + 1 + \frac{1}{x - 4}$ بالقسمة المطولة نجد :

$f(x) - y_\Delta = \frac{1}{x - 4}$ f تابع معرف على $R \setminus \{4\}$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - y_\Delta] = 0$
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - y_\Delta] = 0$ \Rightarrow Δ مقارب مائل للخط C عند $-\infty, +\infty$

دراسة الوضع النسبي: ندرس إشارة المقدار $f(x) - y_\Delta$ لدينا $f(x) - y_\Delta = \frac{1}{x - 4}$

x	$-\infty$	4	$+\infty$
$f(x) - y_\Delta$	-		+
الوضع النسبي	Δ تحت C		Δ فوق C

6 $f(x) = \frac{x^3 - 3x - 5}{(x + 1)^2}$; $\Delta: y = x - 2$

f تابع معرف على $R \setminus \{-1\}$ وباستخدام القسمة المطولة المبينة جانباً نجد:

$f(x) = \frac{x^3 - 3x - 5}{x^2 + 2x + 1}$

$f(x) = x - 2 - \frac{3}{(x + 1)^2}$

$f(x) - y_\Delta = x - 2 - \frac{3}{(x + 1)^2} - (x - 2)$

$f(x) - y_\Delta = \frac{-3}{(x + 1)^2}$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - y_\Delta] = 0$
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - y_\Delta] = 0$ \Rightarrow Δ مقارب مائل للخط C عند $-\infty, +\infty$

دراسة الوضع النسبي: ندرس إشارة $f(x) - y_\Delta$ لدينا $f(x) - y_\Delta = \frac{-3}{(x + 1)^2} < 0$, ومنه C تحت Δ

$$\begin{array}{r} x - 2 \\ \hline x^3 - 3x - 5 \\ \hline x^2 + 2x + 1 \\ \hline \overline{-x^3 + 2x^2 + x} \\ -2x^2 - 4x - 5 \\ \hline \overline{+2x^2 + 4x + 2} \\ -3 \end{array}$$

7 $f(x) = \frac{-x^2 - 4x + \sin x}{x}$; $\Delta: y = -x - 4$

f تابع معرف على $R \setminus \{0\}$

$f(x) - y_\Delta = \frac{-x^2 - 4x + \sin x}{x} - (-x - 4) \stackrel{\text{بتوزيع البسط على المقام}}{=} -x - 4 + \frac{\sin x}{x} + x + 4 = \frac{\sin x}{x}$

لدينا $f(x) - y_\Delta = \frac{\sin x}{x}$ وبالتالي يبرهن أن المستقيم $\Delta: y = -x - 4$ مقارب مائل

كما ورد إثباته ودراسة وضعه النسبي في التمرين 3

البيطار

5) $f(x) = \frac{2x^2 - 7x - 3}{x - 4}$; $\Delta: y = 2x + 1$

بالقسمة المطولة نجد : $f(x) = 2x + 1 + \frac{1}{x - 4}$

$f(x) - y_\Delta = \frac{1}{x - 4}$ f تابع معرف على $R \setminus \{4\}$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - y_\Delta] = 0$
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - y_\Delta] = 0$ \Rightarrow Δ مقارب مائل للخط C عند $-\infty, +\infty$

دراسة الوضع النسبي: ندرس إشارة المقدار $f(x) - y_\Delta$ لدينا $f(x) - y_\Delta = \frac{1}{x - 4}$

x	$-\infty$	4	$+\infty$
$f(x) - y_\Delta$		-	+
الوضع النسبي		Δ تحت C	Δ فوق C

6) $f(x) = \frac{x^3 - 3x - 5}{(x + 1)^2}$; $\Delta: y = x - 2$

f تابع معرف على $R \setminus \{-1\}$ وباستخدام القسمة المطولة المبينة جانباً نجد:

$$f(x) = \frac{x^3 - 3x - 5}{x^2 + 2x + 1} = x - 2 - \frac{3}{(x + 1)^2}$$

$$f(x) - y_\Delta = x - 2 - \frac{3}{(x + 1)^2} - (x - 2) = \frac{-3}{(x + 1)^2}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - y_\Delta] = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - y_\Delta] = 0 \Rightarrow \Delta \text{ مقارب مائل للخط } C \text{ عند } -\infty, +\infty$$

$$\begin{array}{r} x - 2 \\ \hline x^3 - 3x - 5 \\ \mp x^3 \mp 2x^2 \mp x \\ \hline -2x^2 - 4x - 5 \\ \pm 2x^2 \pm 4x \pm 2 \\ \hline -3 \end{array}$$

دراسة الوضع النسبي: ندرس إشارة $f(x) - y_\Delta$ لدينا $(f(x) - y_\Delta = \frac{-3}{(x + 1)^2} < 0)$, ومنه C تحت Δ

7) $f(x) = \frac{-x^2 - 4x + \sin x}{x}$; $\Delta: y = -x - 4$

f تابع معرف على $R \setminus \{0\}$

بتوزيع البسط على المقام $f(x) - y_\Delta = \frac{-x^2 - 4x + \sin x}{x} - (-x - 4) \equiv -x - 4 + \frac{\sin x}{x} + x + 4 = \frac{\sin x}{x}$

لدينا $f(x) - y_\Delta = \frac{\sin x}{x}$ وبالتالي يبرهن ان المستقيم $\Delta: y = -x - 4$ مقارب مائل

كما ورد إثباته ودراسة وضعه النسبي في التمرين 3

البيطار

$$\textcircled{B} f(x) = \frac{x^2 + \frac{5}{2}x + \sqrt{x} + 1}{2x + 1}$$

$$\Delta: y = \frac{1}{2}x + 1$$

f تابع معرف على $[0, +\infty[$ بالقسمة المطولة المبينة جانباً نجد:

$$f(x) = \frac{1}{2}x + 1 + \frac{\sqrt{x}}{2x + 1}$$

$$f(x) - y_\Delta = \frac{1}{2}x + 1 + \frac{\sqrt{x}}{2x + 1} - \left(\frac{1}{2}x + 1\right)$$

$$f(x) - y_\Delta = \frac{\sqrt{x}}{2x + 1}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - y_\Delta] = ? \quad \frac{\infty}{\infty} \text{ حصلنا على حالة عدم تعيين من الشكل}$$

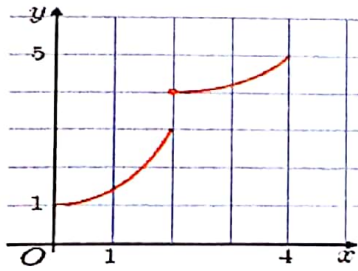
$$f(x) - y_\Delta = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} \left(2\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)} \xrightarrow{\text{عندما } x > 0 \text{ نجد}} f(x) - y_\Delta = \frac{1}{2\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - y_\Delta] = 0 \Rightarrow \Delta \text{ مقارب مائل لـ } C \text{ عند } +\infty$$

دراسة الوضع النسبي: ندرس إشارة المقدار $f(x) - y_\Delta$ لدينا $f(x) - y_\Delta = \frac{1}{2\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}} > 0$ ، إذا C فوق Δ

الاستمرار

مفهوم الاستمرار: نقول إن الخط البياني C للتابع f أنه مستمر على المجال I إذا كان الخط C متصل على جميع نقاط هذا المجال أي الخط البياني متصل.



غير مستمر على المجال $[0, 4]$

لأنه غير مستمر عند $x = 2$



مستمر على المجال $[0, 4]$

تعريفه: لتكن a نقطة من مجموعة التعريف D نقول أن التابع f مستمر عند a إذا وفقط إذا تحقق الشرط:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

* ونقول إن التابع f مستمر على مجموعة A محتواة في D إذا وفقط إذا كان f مستمر عند كل نقطة من نقاط A

مبرهنة:

1. إذا كان التابع f اشتقاقياً عند نقطة a كان f مستمراً عند a والعكس غير صحيح بالضرورة.
2. إذا كان التابع f اشتقاقياً على المجال I كان f مستمراً على I والعكس غير صحيح بالضرورة.

استمرار التوابع المرجعية:

1. تابع الجذر التربيعي $f(x) = \sqrt{x}$ اشتقائي على $]0, +\infty[$ فهو مستمر عليه ونلاحظ أن: $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x} = 0$ ، $f(0) = 0$

فحسب تعريف الاستمرار يكون f مستمر عند $x = 0$ أي مستمر على $]0, +\infty[$ ولكنه ليس اشتقاقياً عند $x = 0$ لأن:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$$

أي f غير اشتقائي عند $x = 0$ فهو غير اشتقائي على المجال $]0, +\infty[$ ولكنه اشتقائي على المجال $]0, +\infty[$.

2. توابع كبيراً ...
 3. التوابع الكسرية اشتقاقية على مجموعة تعريفها D فهي مستمرة على D .
 4. التابعان $x \mapsto \sin x$, $x \mapsto \cos x$ اشتقايان على R فهما مستمران على R .

تدرب صفحة 54 رقم 1 : نتامل التابع f المعطى وفق $f(x) = \sqrt{1 - \cos x}$

1. ما مجموعة تعريف f ؟

f معرف عندما:

$$1 - \cos x \geq 0$$

$$1 \geq \cos x$$

محققة دائماً

$$D_f = R$$

2. ايكون f مستمراً على مجموعة تعريفه ؟

$$f$$
 عبارة عن تركيب تابعين $T(x) = 1 - \cos x$, $h(x) = \sqrt{x}$

$$f(x) = (h \circ T)(x)$$
 ومنه f مستمر على مجموعة تعريف T اي مستمر على R

3. بيّن ان التابع f زوجي و يقبل العدد 2π دوراً له

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{ايأ يكن } x \in R \text{ فإن } -x \in R \\ \text{ومنه } f \text{ تابع زوجي} \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} f(-x) = \sqrt{1 - \cos(-x)} = \sqrt{1 - \cos x} = f(x) \end{array} \right.$$

$$f(x + 2\pi) = \sqrt{1 - \cos(x + 2\pi)} = \sqrt{1 - \cos x} = f(x)$$
 اي f تابع دوري و دوره 2π

4. ليكن g مقصور التابع f على المجال $[0, \pi]$, اثبت ان g اشتقائي و ارسم خطه البياني

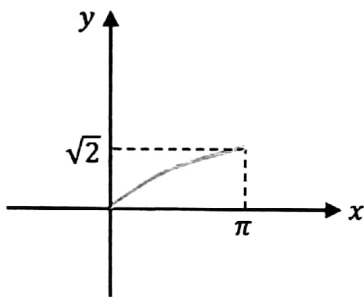
$$f(x) = \sqrt{1 - \cos x} = \sqrt{2 \sin^2 \frac{x}{2}} = \sqrt{2} \cdot \sin \frac{x}{2}$$
 لدينا:

بما ان $x \rightarrow \sqrt{2} \cdot \sin \frac{x}{2}$ اشتقائي على R فإنه اشتقائي على المجال $[0, \pi]$

ومنه g اشتقائي على المجال $[0, \pi]$

نرسم الخط البياني للتابع f نقطياً على المجال $[0, \pi]$

$$f(0) = 0 , f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 , f(\pi) = \sqrt{2}$$



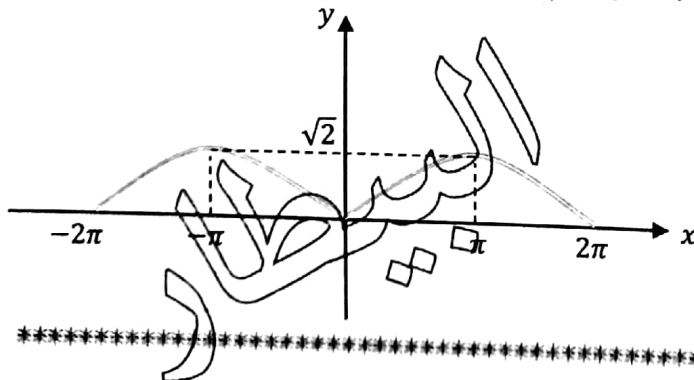
5. استنتج الخط البياني للتابع f على المجال $[-2\pi, 2\pi]$, ما مجموعة تعريف التابع f ؟

بما ان g تابع زوجي فإن خطه C متناظر بالنسبة لـ y , إذا من رسم g يمكن ان نستنتج رسم C_f على $[-2\pi, 2\pi]$

حسب الزوجية والدورية:

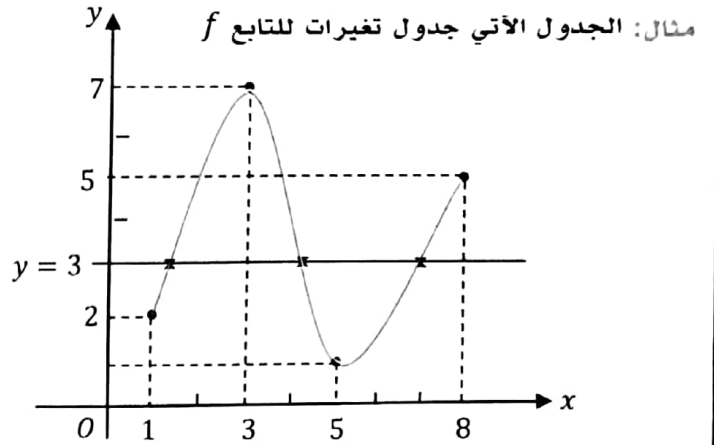
$$f'(x) = \frac{\sqrt{2}}{2} \cos \frac{x}{2}$$
 ومنه f اشتقائي على R

f معرف على R



مبرهنة ①: إذا كان f تابعاً مستمراً على المجال $I = [a, b]$ وكان $f(a) \leq f(b)$ فإنه أياً كان $y \in [f(a), f(b)]$ فإن للمعادلة $y = f(x)$ حلاً واحداً على الأقل في المجال I

x	1	3	5	8
$f(x)$	0	+	0	-
$f(x)$	2	7	1	5

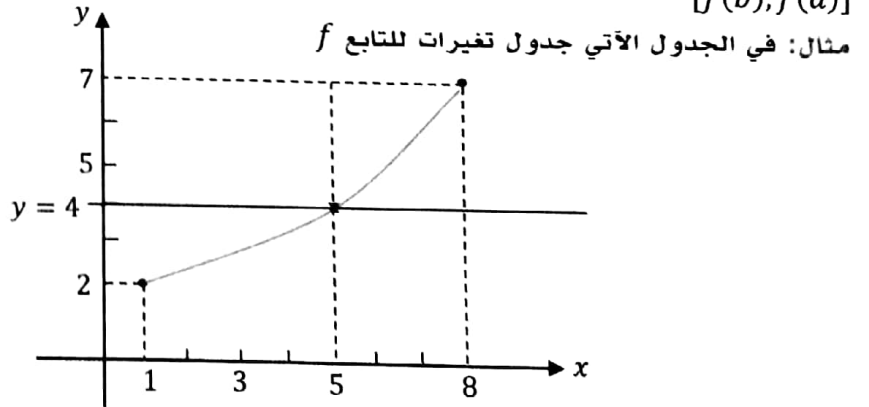


نلاحظ من جدول تغيرات التابع f والرسم البياني المقابل له أن:

التابع f مستمر على المجال $I = [1, 8]$ و $f(1) = 2$, $f(8) = 5$ أي $f(1) \leq f(8)$ ومنه أياً كانت $y \in [f(1), f(8)] = [2, 5]$ فإنه للمعادلة $y = f(x)$ حلاً واحداً على الأقل في المجال $I = [1, 8]$ ، فمثلاً $y = 3$ يوجد لها ثلاثة حلول كما هو مبين بالشكل كذلك من أجل $y = 4$ تتحقق شروط المبرهنة وللمعادلة ثلاثة حلول أيضاً

مبرهنة ②: إذا كان f تابعاً مستمراً و متزايداً تماماً على المجال $I = [a, b]$ وكانت صورة المجال I هو المجال $[f(a), f(b)]$ فإنه أياً كانت $y \in [f(a), f(b)]$ فإن للمعادلة $y = f(x)$ حلاً واحداً فقط في المجال I .
ملاحظة: تبقى المبرهنة السابقة صحيحة في حالة f تابع متناقص تماماً فتصبح صورة المجال I هو المجال $[f(b), f(a)]$

x	1	8
$f(x)$	0	+
$f(x)$	2	7



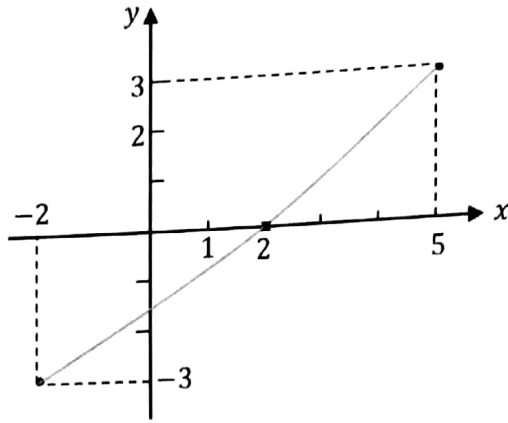
نلاحظ من جدول تغيرات التابع f والرسم البياني المقابل له أن:

التابع f مستمر و متزايد تماماً على المجال $I = [1, 8]$ و $f(1) = 2$, $f(8) = 7$ أي صورة المجال I هي $[2, 7]$ ومنه أياً كانت $y \in [2, 7]$ فإنه للمعادلة $y = f(x)$ حلاً وحيداً في المجال I فمثلاً $y = 4$ يوجد لها حلاً وحيداً فقط في المجال I هو $x = 5$

مبرهنة ③: إذا كان f مستمراً ومطروداً على المجال $I = [a, b]$ وكان $f(a) \cdot f(b) < 0$ من إشارتين متعاكستين أي $f(a) \cdot f(b) < 0$ فإن للمعادلة $f(x) = 0$ حلاً وحيداً في المجال I

البيطار

ملاحظة: إذا كان f مستمراً على مجال مغلق $[a, b]$ ومطرود تماماً على المجال $[a, b]$ فهو مطرود تماماً على المجال $[a, b]$



مثال: ليكن f تابعاً جدول تغيراته.

x	2	5
$f(x)$	0	0
$f(x)$	-3	3

نلاحظ من جدول تغيرات التابع f والرسم البياني المقابل له ان:

التابع f مستمراً و متزايداً تماماً على المجال $I = [-2, 5]$ وان $f(5) = 3$, $f(-2) = -3$ نلاحظ ان $f(5), f(-2)$ من إشارتين متعاكستين أي $f(-2) \cdot f(5) < 0$ ومنه للمعادلة $f(x) = 0$ حلاً وحيداً في $[-2, 5]$ ومن الشكل يكون الحل $x = 2$

مبرهنة (4): فيما يأتي a و b عنصران من المجموعة $R \cup \{-\infty, +\infty\}$ ونفترض ان $a < b$ ونفترض ان التابع f تابع مستمر ومطرود تماماً على المجال I وان $J = f(I)$

المجال	f متزايد تماماً	f متناقص تماماً
$I = [a, b]$	$f(I) = [f(a), f(b)]$	$f(I) = [f(b), f(a)]$
$I =]a, b]$	$f(I) =]\lim_{x \rightarrow a} f(x), f(b)]$	$f(I) = [f(b), \lim_{x \rightarrow a} f(x)[$
$I = [a, b[$	$f(I) = [f(a), \lim_{x \rightarrow b} f(x)[$	$f(I) =]\lim_{x \rightarrow b} f(x), f(a)]$
$I =]a, b[$	$f(I) =]\lim_{x \rightarrow a} f(x), \lim_{x \rightarrow b} f(x)[$	$f(I) =]\lim_{x \rightarrow b} f(x), \lim_{x \rightarrow a} f(x)[$

ملاحظة مهمة (1): إذا كان f تابعاً مستمراً و متزايداً تماماً (او متناقصاً تماماً) على المجال I وكان $0 \in f(I)$ فإنه يوجد عدد حقيقي وحيد α من I يحقق $f(\alpha) = 0$ وإذا كان $0 \notin f(I)$ فإنه لا يوجد حل للمعادلة $f(x) = 0$ في I

ملاحظة (2): الاستمرار يقتضي وجود الحل والاطراد التام للتابع f يضمن وحدانية الحل اما في حالة الاطراد غير التام فقد نجد للمعادلة أكثر من حل.

تمرين: ليكن f معرف على R وفق $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$

1. ادرس تغيرات f ونظم جدولاً بها.

f معرف ومستمر واشتقاقي على المجال $]-\infty, +\infty[$

البيطار

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

$$f(x) = 3x^2 - 6x$$

$$f(x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \text{إما } x = 2 \\ \text{أو } x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(2) = -2 \\ f(0) = 2 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

رؤية شاملة في النهايات والاستمرار

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$
$f(x)$		$+$	$-$	$+$
$f(x)$	$-\infty$	2	-2	$+\infty$

2. اثبت ان المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً c في المجال $I = [0, 2]$ اوجده.
 f مستمر ونلاحظ من جدول التغيرات ان التابع f متناقص تماماً على المجال $I = [0, 2]$ وان $f(0) = 2$, $f(2) = -2$, وهما من إشارتين مختلفتين ومنه للمعادلة $f(x) = 0$ حلاً وحيداً c في المجال $I =]0, 2[$ لإيجاده نجعل $f(x) = 0$ اي $x^3 - 3x^2 + 2 = 0$ بما ان مجموع الثوابت يساوي الصفر فإن المعادلة تقبل القسمة على $(x - 1)$ ومنه $(x - 1)(x^2 - 2x - 2) = 0$

$$\text{إما } x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1 \in I$$

$$\text{أو } x^2 - 2x - 2 = 0$$

$$\Delta = 12 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = 2\sqrt{3} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 + \sqrt{3} \notin I \\ x = 1 - \sqrt{3} \notin I \end{cases}$$

ومنه $x = 1$ حل وحيد للمعادلة $f(x) = 0$ في المجال $[0, 2]$ اي $c = 1$

3. اكتب معادلة المماس T للخط C في النقطة M التي فاصلتها (1) وعين α فاصلة نقطة تقاطع T مع محور الفواصل.

لإيجاد معادلة المماس T في النقطة $M(1, f(1))$ اي $M(1, 0)$ نوجد الميل:

$$m = f'(x_M) = -3 \Rightarrow T: y - y_M = m(x - x_M) \Rightarrow T: y - 0 = -3(x - 1)$$

$$T: \boxed{y = -3x + 3}$$

لتعيين α فاصلة نقطة تقاطع T مع محور الفواصل نجعل $y = 0$ ومنه $0 = -3x + 3$ وبالتالي $x = 1 = \alpha$

4. اثبت ان للمعادلة $f(x) = 2$ حلاً وحيداً في المجال $I_1 = [2, 4]$

f مستمر ونلاحظ من جدول التغيرات ان f متزايد تماماً على المجال $I_1 = [2, 4]$

لأنه متزايد تماماً على المجال $I = [2, +\infty[$

ولدينا $f(2) = -2$, $f(4) = 18$ اي $y = 2 \in [-2, 18]$ ومنه للمعادلة $f(x) = 2$ حلاً وحيداً في المجال $[2, 4]$

تدريب صفحة 61 رقم 1: التابع f معرف على R وفق $f(x) = x^3 - x^2 + x - 2$ علل لماذا يكون للمعادلة $f(x) = 0$ حل وحيد في المجال $]1, 2[$

ندرس تغيرات التابع f : f مستمر واشتقاقي على R

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

$$\left. \begin{aligned} f(x) &= 3x^2 - 2x + 1 \\ f'(x) &= 0 \end{aligned} \right\} 3x^2 - 2x + 1 = 0$$

$$\Delta = -8 < 0 \Rightarrow \text{مستحيلة الحل في } R \text{ وبالتالي فإن } f'(x) \text{ لا يتعدم}$$

x	$-\infty$	$+\infty$
$f(x)$		$+$
$f(x)$	$-\infty$	$+\infty$

f مستمر ومتزايد تماماً على R فهو مستمر ومتزايد تماماً على $]1, 2[$

$$\left. \begin{aligned} f(1) &= 1 - 1 + 1 - 2 = -1 \\ f(2) &= 8 - 4 + 2 - 2 = 4 \end{aligned} \right\} \Rightarrow f(1) \times f(2) < 0$$

ومنه للمعادلة $f(x) = 0$ حل وحيد في المجال $]1, 2[$

رؤية شاملة في النهايات والاستمرار

تدريب صفحة 61 رقم 2 : التابع f معرف على R وفق $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$ علل لماذا يكون للمعادلة $f(x) + 1 = 0$ ثلاثة فقط حلول حقيقية؟

لاحظ حلول المعادلة $f(x) + 1 = 0$ تكافئ $f(x) = -1$
 ندرس تغيرات التابع f : مستمر واشتقاقي على R

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

$$\left. \begin{array}{l} f'(x) = 3x^2 - 6x \\ f'(x) = 0 \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} 3x^2 - 6x = 0 \\ 3x(x-2) = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{إما } x = 0 \\ \text{أو } x = 2 \end{array} : \begin{array}{l} f(0) = 1 \\ f(2) = -3 \end{array}$$

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$
$f(x)$		+	-	+
$f(x)$	$-\infty$	1	-3	$+\infty$

لدينا $f(x) = -1$

- ♦ f مستمر ومتزايد تماماً على $]-\infty, 0[$ إذا للمعادلة $f(x) = -1$ حل وحيد في المجال $]-\infty, 0[$

$$\left\{ \begin{array}{l} -1 \in f(]-\infty, 0[) =]-\infty, 1[\end{array} \right.$$
 - ♦ f مستمر ومتناقص تماماً على $[0, 2]$ إذا للمعادلة $f(x) = -1$ حل وحيد في المجال $[0, 2]$

$$\left\{ \begin{array}{l} -1 \in f([0, 2]) = [-3, 1] \end{array} \right.$$
 - ♦ f مستمر ومتزايد تماماً على $]2, +\infty[$ إذا للمعادلة $f(x) = -1$ حل وحيد في المجال $]2, +\infty[$

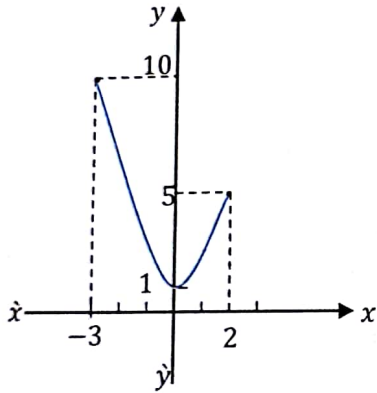
$$\left\{ \begin{array}{l} -1 \in f(]2, +\infty[) =]-3, +\infty[\end{array} \right.$$
- ومنه للمعادلة $f(x) = -1$ ثلاثة حلول في R

تدريب صفحة 61 رقم 3 :

ليكن f التابع المعرف على المجال $I = [-3, 2]$ وفق $f(x) = x^2 + 1$

1. ارسم خطه البياني C_f واحسب $f(I)$

x	-3	0	2
y	10	1	5
	$(-3, 10)$	$(0, 1)$	$(2, 5)$



حسب الشكل المجاور نجد أن: $f([-3, 2]) = [1, 10]$

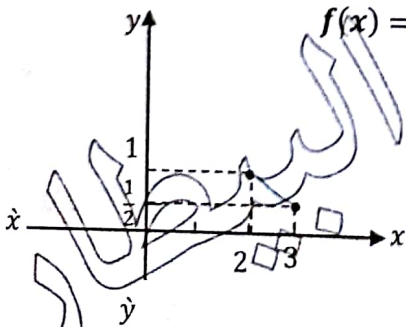
2. ما عدد حلول المعادلة $f(x) = 4$ في المجال I

من الشكل المجاور نجد أن المستقيم $y = f(x) = 4$ يقطع المنحني C_f في نقطتين إذا للمعادلة $f(x) = 4$ حلين مختلفين في I .

تدريب صفحة 61 رقم 4 : ليكن f التابع المعرف على المجال $I = [2, 3]$ وفق $f(x) = \frac{1}{x-1}$

1. ارسم خطه البياني C_f واحسب $f(I)$

x	2	3
y	1	$\frac{1}{2}$
	$(2, 1)$	$(3, \frac{1}{2})$



حسب الشكل المجاور نجد أن: $f([2, 3]) = [\frac{1}{2}, 1]$

رؤية شاملة في النهايات والاستمرار

2. ما عدد حلول المعادلة $f(x) = \frac{3}{4}$ في المجال I
 من الشكل المجاور نجد ان المستقيم $y = f(x) = \frac{3}{4}$ يقطع المنحني C_f في نقطة واحدة
 إذا للمعادلة $f(x) = \frac{3}{4}$ حل وحيد في I
 بطريقة اخرى:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{ولدينا } f'(x) = \frac{-1}{(x-1)^2} < 0 \text{ وبالتالي } f \text{ مستمر ومتناقص تماماً على } [2,3] \\ \text{ومنه للمعادلة } f(x) = \frac{3}{4} \text{ حل وحيد في } I \end{array} \right.$$

$$\frac{3}{4} \in f([2,3]) = \left[\frac{1}{2}, 1\right]$$

تدريب صفحة 61 رقم 5: ليكن f التابع المعرف على المجال R وفق $f(x) = 4x^3 - 3x - \frac{1}{2}$

1. احسب $f(-1)$ ، $f\left(-\frac{1}{2}\right)$ ، $f(0)$ ، $f\left(\frac{1}{2}\right)$ ، $f(1)$

$$f(-1) = \frac{-3}{2} \quad , \quad f\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \quad , \quad f(0) = \frac{-1}{2} \quad , \quad f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$$

2. استنتج ان المعادلة $f(x) = 0$ تقبل ثلاثة حلول في المجال $[-1, 1]$

التابع f مستمر واشتقائي على R

$$f(x) = 12x^2 - 3$$

$$\begin{cases} f(x) = 0 \\ 3(4x^2 - 1) = 0 \\ 3(2x - 1)(2x + 1) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \text{إما } x = \frac{1}{2} \rightarrow f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{-3}{2} \\ \text{أو } x = \frac{-1}{2} \rightarrow f\left(\frac{-1}{2}\right) = \frac{1}{2} \end{cases}$$

x	$-\infty$	-1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$		$\frac{-3}{2}$	$\frac{1}{2}$		$\frac{-3}{2}$	$\frac{1}{2}$

نلاحظ من جدول التغيرات:

♦ f مستمر ومتزايد تماماً على $[-1, \frac{-1}{2}]$

$$\left. \begin{array}{l} f(-1) = \frac{-3}{2} < 0 \\ f\left(\frac{-1}{2}\right) = \frac{1}{2} > 0 \end{array} \right\} \Rightarrow f(-1) \times f\left(\frac{-1}{2}\right) < 0$$

إذا للمعادلة $f(x) = 0$ حل وحيد a_1 في المجال $[-1, \frac{-1}{2}]$

♦ f مستمر ومتناقص تماماً على $[\frac{-1}{2}, \frac{1}{2}]$

$$\left. \begin{array}{l} f\left(\frac{-1}{2}\right) = \frac{1}{2} > 0 \\ f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{-3}{2} < 0 \end{array} \right\} \Rightarrow f\left(\frac{-1}{2}\right) \times f\left(\frac{1}{2}\right) < 0$$

إذا للمعادلة $f(x) = 0$ حل وحيد a_2 في المجال $[\frac{-1}{2}, \frac{1}{2}]$

البيطار

رؤية شاملة في النهايات والاستمرار

67

♦ f مستمر ومتزايد تماماً على $[\frac{1}{2}, 1]$

$$\left. \begin{array}{l} f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{-3}{2} < 0 \\ f(1) = \frac{1}{2} > 0 \end{array} \right\} \Rightarrow f\left(\frac{1}{2}\right) \times f(1) < 0$$

إذاً للمعادلة $f(x) = 0$ حل وحيد a_3 في المجال $[\frac{1}{2}, 1]$
 مما سبق نستنتج ان للمعادلة $f(x) = 0$ ثلاثة حلول حقيقية في المجال $[-1, 1]$

تدريب صفحة 61 رقم 6 : ليكن f التابع المعرف على المجال R وفق $f(x) = 1 + 3x - x^3$
 1. ادرس نهاية f عند $-\infty$ وعند $+\infty$

2. احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ وادرس إشارته ثم نظم جدولاً بتغيرات f

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$$

$$\left. \begin{array}{l} f'(x) = 3 - 3x^2 \\ f'(x) = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} 3 - 3x^2 = 0 \\ 3(1+x)(1-x) = 0 \end{array} \quad \left. \begin{array}{l} \text{إما } x = -1 : f(-1) = -1 \\ \text{أو } x = 1 : f(1) = 3 \end{array} \right\}$$

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$
$f'(x)$	$+\infty$	-1	3	$-\infty$

3. اثبت أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل ثلاثة جذور فقط ينتمي كل واحد منها إلى واحد من المجالات

$$[1, 2], [-1, 1], [-2, -1]$$

♦ f مستمر ومتناقص تماماً على $[-2, -1]$

$$0 \in f([-2, -1]) = [-1, 3] \Leftrightarrow \begin{cases} f(-2) = 3 \\ f(-1) = -1 \end{cases}$$

إذاً للمعادلة $f(x) = 0$ جذر وحيد في المجال $[-2, -1]$

♦ f مستمر ومتزايد تماماً على $[-1, 1]$

$$0 \in f([-1, 1]) = [-1, 3] \Leftrightarrow \begin{cases} f(-1) = -1 \\ f(1) = 3 \end{cases}$$

إذاً للمعادلة $f(x) = 0$ حل وحيد في المجال $[-1, 1]$

♦ f مستمر ومتناقص تماماً على $[1, 2]$

$$0 \in f([1, 2]) = [-1, 3] \Leftrightarrow \begin{cases} f(1) = 3 \\ f(2) = -1 \end{cases}$$

إذاً للمعادلة $f(x) = 0$ حل وحيد في المجال $[1, 2]$

ومنه للمعادلة $f(x) = 0$ ثلاثة حلول حقيقية في المجالات السابقة.

ملاحظة: يمكن حل التدريب باستخدام الطريقة التي وردت في التدريب رقم 5

البيطار

تدريب صفحة 61 رقم 7 : فتأمل التابع f المستر
 1. احسب $f(0), f(\frac{\pi}{2})$ واستنتج انه يوجد عدد حقيقي α يحقق $f(\alpha) = 0$

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2} - \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$$

$$f(0) = 0 - \cos(0) = -1$$

f مستمر و متزايد تماماً على $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ فإنه يوجد $\alpha \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ يحقق $f(\alpha) = 0$
 بما ان $f(0) \times f\left(\frac{\pi}{2}\right) < 0$

2. اشرح لماذا كل حل للمعادلة $f(x) = 0$ يجب ان ينتمي الى المجال $[-1, 1]$
 حل المعادلة $f(x) = 0$ يكافئ $x - \cos x = 0$ ومنه $x = \cos x$ وبما ان $\cos x \in [-1, 1]$
 فإن $x \in [-1, 1]$ إذا حل المعادلة $f(x) = 0$ يجب ان ينتمي الى المجال $[-1, 1]$

3. استنتج ان كل حل للمعادلة $f(x) = 0$ يجب ان ينتمي الى المجال $]0, 1[$

$$\left. \begin{array}{l} f \text{ مستمر و متزايد تماماً على }]0, 1[\\ f(0) = -1 < 0 \\ f(1) = 1 - \cos(1) > 0 \end{array} \right\} \Rightarrow f(0) \times f(1) < 0$$

فان للمعادلة $f(x) = 0$ حل وحيد في المجال $]0, 1[$ ونلاحظ ان f مستمر و متزايد تماماً على المجال $]-1, 0[$
 $\left. \begin{array}{l} f(-1) = -1 - \cos(-1) = -1 - \cos 1 \\ f(0) = -1 \end{array} \right\} \Rightarrow 0 \notin f(]-1 - \cos 1, -1])$

اي ليس للمعادلة $f(x) = 0$ حل في المجال $]-1, 0[$

ومنه كل حل للمعادلة $f(x) = 0$ يجب ان ينتمي الى المجال $]0, 1[$

4. برهن ان التابع $x \rightarrow x - \cos x$ متزايد تماماً على المجال $]0, 1[$ واستنتج ان للمعادلة $f(x) = 0$ حل حقيقي وحيد α ينتمي الى $]0, 1[$

$$f(x) = x - \cos x$$

f اشتقائي على $]0, 1[$ ومنه $f'(x) = 1 + \sin x > 0$ على المجال $]0, 1[$ إذا f متزايد تماماً على المجال $]0, 1[$

$$\left. \begin{array}{l} f(0) = -1 < 0 \\ f(1) = 1 - \cos(1) > 0 \end{array} \right\} \Rightarrow f(0) \times f(1) < 0$$

ومنه للمعادلة $f(x) = 0$ حل وحيد α في المجال $]0, 1[$

تمارينات ومسابقات صفحة 67

1) ادرس في كل حالة نهاية التابع f عند اطراف مجموعة تعريفه وعند اللزوم ادرس النهاية من اليمين ومن اليسار.

$$\boxed{1} \quad f(x) = \frac{x^3}{x^2 + 1}, \quad D =]-\infty, +\infty[$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x^3}{x^2} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^3}{x^2} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x) = +\infty$$

$$\boxed{2} \quad f(x) = 2 - \frac{4}{x^2}, \quad D = (]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 2 - \frac{4}{+\infty} = 2, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2 - \frac{4}{+\infty} = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 2 - \frac{4}{0^+} = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 2 - \frac{4}{0^+} = -\infty$$

$$\boxed{3} \quad f(x) = x^2 + 3x - \frac{1}{x+3}, \quad D =]-\infty, -3[\cup]-3, +\infty[$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty - \frac{1}{-\infty} = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty - \frac{1}{+\infty} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -3^-} f(x) = 9 - 9 - \frac{1}{0^-} = \frac{-1}{0^-} = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -3^+} f(x) = 9 - 9 - \frac{1}{0^+} = \frac{-1}{0^+} = -\infty$$

$$\boxed{4} \quad f(x) = x + \frac{1}{1+x} - \frac{1}{x+2}$$

شرط الكسر الثاني:

$$x + 2 \neq 0 \\ x \neq -2$$

شرط الكسر الأول:

$$1 + x \neq 0 \\ x \neq -1$$

$$D = \mathbb{R} \setminus \{-2, -1\}$$

$$D =]-\infty, -2[\cup]-2, -1[\cup]-1, +\infty[$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty + \frac{1}{-\infty} - \frac{1}{-\infty} = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty + \frac{1}{+\infty} - \frac{1}{+\infty} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = -2 + \frac{1}{-1} - \frac{1}{0^-} = -3 + \frac{-1}{0^-} = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = -3 + \frac{-1}{0^+} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = -1 + \frac{1}{0^-} - \frac{1}{+1} = -2 + \frac{1}{0^-} = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = -2 + \frac{1}{0^+} = +\infty$$

$$\boxed{5} \quad f(x) = (2x - 3)(5 - \sqrt{x}), \quad D = [0, +\infty[$$

$$f(0) = (-3)(5) = -15, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = (+\infty)(-\infty) = -\infty$$

$$\boxed{6} \quad f(x) = \cos x + \frac{1}{x}, \quad D = (]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \text{غير موجودة}, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \text{غير موجودة}$$

لأن قيم $\cos x$ تتجمع في جوار -1 وجوار $+1$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 1 - \frac{1}{0^-} = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1 + \frac{1}{0^+} = +\infty$$

رؤية شاملة في النهايات والاستمرار

70

7] $f(x) = 2x + \sin x$

$-1 \leq \sin x \leq +1$

$2x - 1 \leq 2x + \sin x \leq 2x + 1$

$D =]-\infty, +\infty[$

أيًا كانت $x \in]-\infty, +\infty[$

نضيف $2x$ إلى اطراف المتراجحة :

$\lim_{x \rightarrow -\infty} (2x + 1) = -\infty$

حسب مبرهنة المقارنة ③

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} (2x - 1) = +\infty$

حسب مبرهنة المقارنة ③

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

8] $f(x) = x^2 + 2x - \frac{1}{x}$

$D =]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty - \frac{1}{-\infty} = +\infty$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty - \frac{1}{+\infty} = +\infty$

$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \frac{-1}{0^-} = +\infty$

$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \frac{-1}{0^+} = -\infty$

9] $f(x) = x - 2\sqrt{x} + 3$

$D = [0, +\infty[$

$f(0) = 3$ ، $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = ?$ حصلنا على حالة عدم تعيين من الشكل $\infty - \infty$

$f(x) = x \left(1 - \frac{2\sqrt{x}}{x}\right) + 3 = x \left(1 - \frac{2}{\sqrt{x}}\right) + 3$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty(1 - 0) + 3 = +\infty$

10] $f(x) = \sqrt{x^2 + 1} + x$

$D =]-\infty, +\infty[$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = ?$

حصلنا على حالة عدم تعيين من الشكل $\infty - \infty$

$f(x) = \frac{(\sqrt{x^2 + 1} + x)(\sqrt{x^2 + 1} - x)}{\sqrt{x^2 + 1} - x} = \frac{(x^2 + 1) - x^2}{\sqrt{x^2 + 1} - x} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1} - x}$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \frac{1}{+\infty + \infty} = \frac{1}{+\infty} = 0$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty + \infty = +\infty$

2) اوجد نهاية التابع f المعين بالعلاقة $f(x) = \frac{2x+1}{x-1}$ عند 1 وعند $-\infty$ وعند $+\infty$

ثم اوجد معادلات المستقيمات المقاربة لخطه البياني و بين وضع الخط البياني بالنسبة إلى مقارباته الأفقية.

$f(x) = \frac{2x+1}{x-1}$

شرط الكسر: $0 \neq x - 1$ أي $x \neq 1$ ومنه $D = R \setminus \{1\} =]-\infty, 1[\cup]1, +\infty[$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{2x}{x}\right) = 2$

$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \frac{3}{0^-} = -\infty$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x}{x}\right) = 2$

$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \frac{3}{0^+} = +\infty$

$\Delta_1: x = 1$ مقارب شاقولي عند $-\infty, +\infty$

$\Delta_2: y = 2$ مقارب أفقي عند $-\infty, +\infty$

$f(x) - y_{\Delta_2} = \frac{2x+1}{x-1} - 2$

$f(x) - y_{\Delta_2} = \frac{2x+1-2x+2}{x-1} = \frac{3}{x-1}$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f(x) - y_{\Delta_2}$			$+$
الوضع النسبي		C تحت Δ_2	C فوق Δ_2

رؤية شاملة في النهايات والاستمرار

71

(3) اوجد نهاية التابع f المعين بالمعلاقة $f(x) = \frac{-2x}{x+1}$ عند -1 وعند $-\infty$ وعند $+\infty$ ثم اوجد معادلات المستقيمات المقاربة لخطه البياني وبين وضع الخط البياني بالنسبة إلى مقارباته الأفقية.

شرط الكسر: $x \neq -1 \Leftrightarrow x+1 \neq 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty, -1[\cup]-1, +\infty[$

$$f(x) = \frac{-2x}{x+1}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{-2x}{x} \right) = -2$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{-2x}{x} \right) = -2$$

مقارب أفقي عند $-\infty, +\infty$ $\Delta_2: y = -2$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \frac{2}{0^-} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \frac{2}{0^+} = +\infty$$

مقارب شاقولي عند $-\infty, +\infty$ $\Delta_1: x = -1$

الوضع النسبي للمقارب الأفقي:

$$f(x) - y_{\Delta_2} = \frac{-2x}{x+1} + 2$$

$$f(x) - y_{\Delta_2} = \frac{-2x + 2x + 2}{x+1} = \frac{2}{x+1}$$

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f(x) - y_{\Delta_2}$	$-$	$ $	$+$
الوضع النسبي	Δ_2 تحت C	$ $	Δ_2 فوق C

(4) f هو التابع المعرف على المجال $]1, +\infty[$ وفق $f(x) = \frac{2x+\sin x}{x-1}$

1. اثبت ان $\frac{2x-1}{x-1} \leq f(x) \leq \frac{2x+1}{x-1}$ أيًا يكن $x > 1$

$$-1 \leq \sin x \leq 1$$

أيًا كان $x > 1$

$$2x-1 \leq 2x+\sin x \leq 2x+1$$

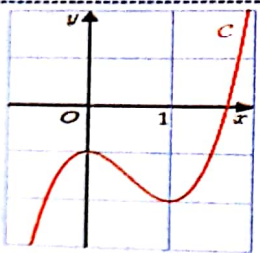
نضيف $2x$

تقسم أطراف المتراجحة على $x-1$ حيث $x-1 > 0$ لأن $x > 1$

$$\frac{2x-1}{x-1} \leq \frac{2x+\sin x}{x-1} \leq \frac{2x+1}{x-1} \Rightarrow \frac{2x-1}{x-1} \leq f(x) \leq \frac{2x+1}{x-1}$$

2. استنتج نهاية f عند $+\infty$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x-1}{x-1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x}{x} \right) = 2 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x+1}{x-1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x}{x} \right) = 2 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{حسب مبرهنة} \\ \text{الإحاطة ①} \end{array} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$$



(5) ليكن f التابع المعرف على R وفق $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 1$

وليكن C خطه البياني المبين في الشكل المرفق:

1. ادرس نهاية f عند $-\infty$ وعند $+\infty$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

2. احسب $f'(x)$ وادرس إشارته ثم نظم جدولاً بتغيرات f

$$f'(x) = 6x^2 - 6x$$

$$f'(x) = 0$$

$$x = 0$$

$$f(0) = -1$$

$$6x(x-1) = 0$$

\Rightarrow

$$x = 1$$

$$f(1) = -2$$

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0
$f(x)$	$-\infty$	-1	-2	$+\infty$

طارق سعد الدين 0955561648

خلدون سيروان 0932791896

حسان البيطار 0933756454

3. اثبت ان المعادلة $f(x) = 0$ تقبل جذرا واحدا فقط وإذا زادت α فعدد الجذور يتغير α

اثبت ان α ينتمي إلى المجال $[1.6, 1.7]$ من جدول التغيرات ومن الرسم البياني نجد ان:
 التابع f مستمر و متزايد تماما على المجال $]1, +\infty[$
 $0 \in f(]1, +\infty[) =]-2, +\infty[$

f مستمر و متزايد تماما على المجال $] -\infty, 0[$, f مستمر و متناقص تماما على المجال $[0, 1]$
 $0 \notin f([0, 1]) = [-2, -1]$, $0 \notin f(]-\infty, 0[) =]-\infty, -1[$
 ومنه ليس للمعادلة $f(x) = 0$ حل على كامل المجال $] -\infty, 1]$
 وبالتالي للمعادلة $f(x) = 0$ حل وحيد وجدناه في المجال $]1, +\infty[$
 $f(1.6) = -0.48 < 0$
 $f(1.7) = 0.15 > 0$ } $\Rightarrow f(1.6) \cdot f(1.7) < 0$
 إذا للمعادلة $f(x) = 0$ حل وحيد $\alpha \in]1.6, 1.7[$

(6) نتأمل التابع f المعرف على R^+ بالعلاقة $f(x) = \frac{\sin 3x}{x}$ ادرس نهاية f عند الصفر.

نفرض $X = h(x) = 3x$ ومنه $x = \frac{X}{3}$ وبالتالي فإن:
 $\lim_{x \rightarrow 0} h(x) = 0$
 $f(x) = \frac{\sin(X)}{\frac{X}{3}} = \frac{3 \sin(X)}{X}$

علما أن: $\left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin X}{X} = 1 \right)$, $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{3 \sin(X)}{X} \right) = 3(1) = 3$

(7) ليكن f التابع المعرف على R وفق $f(x) = \sqrt{2x^2 + x + 1}$ وليكن C خطه البياني المطلوب هو إثبات أن الخط C يقبل مقاربا مائلا في جوار $+\infty$ وكذلك الأمر في جوار $-\infty$

نعلم أن معادلة المقارب المائل من الشكل: $\Delta: y = ax + b$

◆ عند $+\infty$: ① لإيجاد a نأخذ نهاية المقدار $\frac{f(x)}{x}$

حصلنا على حالة عدم تعيين من الشكل $\frac{\infty}{\infty}$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = ?$$

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{\sqrt{x^2 \left(2 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} \right)}}{x} = \frac{x \sqrt{2 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}}{x} = \sqrt{2 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \sqrt{2} \Rightarrow a = \sqrt{2}$$

② لإيجاد b نأخذ نهاية المقدار $f(x) - ax$

حصلنا على حالة عدم تعيين من الشكل $\infty - \infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - \sqrt{2}x) = ?$$

$$f(x) - \sqrt{2}x = \sqrt{2x^2 + x + 1} - \sqrt{2}x = \frac{(\sqrt{2x^2 + x + 1} - \sqrt{2}x)(\sqrt{2x^2 + x + 1} + \sqrt{2}x)}{\sqrt{2x^2 + x + 1} + \sqrt{2}x}$$

$$f(x) - \sqrt{2}x = \frac{2x^2 + x + 1 - 2x^2}{\sqrt{2x^2 + x + 1} + \sqrt{2}x} = \frac{x + 1}{\sqrt{2x^2 + x + 1} + \sqrt{2}x}$$

$$f(x) - \sqrt{2}x = \frac{x \left(1 + \frac{1}{x} \right)}{x \left[\sqrt{2 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} + \sqrt{2} \right]} = \frac{1 + \frac{1}{x}}{\sqrt{2 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} + \sqrt{2}}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - \sqrt{2}x) = \frac{1+0}{\sqrt{2} + \sqrt{2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4} \Rightarrow b = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

$$\Delta: y = \sqrt{2}x + \frac{\sqrt{2}}{4}$$

ومنه معادلة المقارب المائل عند $+\infty$

◆ عند $-\infty$: ❶ لإيجاد a نأخذ نهاية المقدار $\frac{f(x)}{x}$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = ? \quad \frac{\infty}{\infty} \text{ حصلنا على حالة عدم تعيين من الشكل}$$

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{\sqrt{x^2 \left(2 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right)}}{x} = \frac{-x \sqrt{2 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}}{x} = -\sqrt{2 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = -\sqrt{2} \Rightarrow a = -\sqrt{2}$$

❷ لإيجاد b نأخذ نهاية المقدار $f(x) - ax$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) + \sqrt{2}x) = ?$$

حصلنا على حالة عدم تعيين من الشكل $\infty - \infty$

$$f(x) + \sqrt{2}x = \sqrt{2x^2 + x + 1} + \sqrt{2}x = \frac{(\sqrt{2x^2 + x + 1} + \sqrt{2}x)(\sqrt{2x^2 + x + 1} - \sqrt{2}x)}{\sqrt{2x^2 + x + 1} - \sqrt{2}x}$$

$$f(x) + \sqrt{2}x = \frac{2x^2 + x + 1 - 2x^2}{\sqrt{2x^2 + x + 1} - \sqrt{2}x} = \frac{x + 1}{\sqrt{2x^2 + x + 1} - \sqrt{2}x}$$

$$f(x) + \sqrt{2}x = \frac{x \left(1 + \frac{1}{x}\right)}{-x \left[\sqrt{2 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} + \sqrt{2}\right]} = \frac{1 + \frac{1}{x}}{-\left[\sqrt{2 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} + \sqrt{2}\right]}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) + \sqrt{2}x) = \frac{1+0}{-\left[\sqrt{2} + \sqrt{2}\right]} = \frac{-1}{2\sqrt{2}} = \frac{-\sqrt{2}}{4} \Rightarrow b = \frac{-\sqrt{2}}{4}$$

$$\Delta: y = -\sqrt{2}x - \frac{\sqrt{2}}{4}$$

ومنه معادلة المقارب المائل عند $-\infty$

❸ من المعلوم أن كثير حدود P من الدرجة n يكتب بالصيغة: $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0$

حيث $a_n \neq 0$ نهدف إلى إثبات أنه إذا كان n عدداً فردياً قبل P جذراً حقيقياً على الأقل.

هنا نميز حالتين حيث n عدد فردي فرضاً:

الحالة الثانية: $a_n < 0$

◆ بما أن P مستمر على R

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} P(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (a_n x^n)$$

$$= a_n (-\infty) = +\infty \quad ; \quad a_n \text{ عدد سالب}$$

وبالتالي يوجد عدد حقيقي $a \in R$ يحقق $P(a) > 0$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} P(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (a_n x^n)$$

$$= a_n (+\infty) = -\infty \quad ; \quad a_n \text{ عدد سالب}$$

وبالتالي يوجد عدد حقيقي $b \in R$ يحقق $P(b) < 0$

◆ بما أن P مستمر على المجال $[a, b]$ و $P(a) \cdot P(b) < 0$

إذاً يوجد عدد حقيقي $c \in [a, b]$ يحقق $P(c) = 0$

الحالة الأولى: $a_n > 0$

◆ بما أن P مستمر على R

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} P(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (a_n x^n)$$

$$= a_n (-\infty) = -\infty \quad ; \quad a_n \text{ عدد موجب}$$

وبالتالي يوجد عدد حقيقي $a \in R$ يحقق $P(a) < 0$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} P(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (a_n x^n)$$

$$= a_n (+\infty) = +\infty \quad ; \quad a_n \text{ عدد موجب}$$

وبالتالي يوجد عدد حقيقي $b \in R$ يحقق $P(b) > 0$

◆ بما أن P مستمر على المجال $[a, b]$ و $P(a) \cdot P(b) < 0$

إذاً يوجد عدد حقيقي $c \in [a, b]$ يحقق $P(c) = 0$

وبالتالي فإن P يقبل جذراً حقيقياً على الأقل إذا كان n عدداً فردياً.

$$\boxed{1} f(x) = \frac{x-4}{x^2-6x+5} \quad a = \begin{pmatrix} -\infty \\ +\infty \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x}{x^2} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{1}{x} \right) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x}{x^2} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x} \right) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \frac{-3}{0^+} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \frac{-3}{0^-} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 5^-} f(x) = \frac{1}{0^-} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 5^+} f(x) = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

$$\boxed{3} f(x) = \frac{2x^3 - x^2 - 1}{x^2 + x - 2} \quad a = \begin{pmatrix} -\infty \\ +\infty \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{2x^3}{x^2} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (2x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x^3}{x^2} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (2x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = \frac{-21}{0^+} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = \frac{-21}{0^-} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = ? \quad \frac{0}{0} \text{ حالة عدم تعيين من الشكل}$$

$$f(x) = \frac{2x^3 - x^2 - 1}{x^2 + x - 2} = \frac{2x^3 - x^2 - 1}{(x+2)(x-1)}$$

$$= \frac{(x-1)(2x^2 + x + 1)}{(x-1)(x+2)}$$

$$= \frac{2x^2 + x + 1}{x+2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \frac{2+1+1}{1+2} = \frac{4}{3}$$

$$\boxed{2} f(x) = \frac{x^2 - 4x - 12}{x^2 - 4} \quad a = \begin{pmatrix} -\infty \\ +\infty \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x^2}{x^2} \right) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2}{x^2} \right) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = ?$$

حصلنا على حالة عدم تعيين من الشكل $\frac{0}{0}$

$$f(x) = \frac{x^2 - 4x - 12}{x^2 - 4} = \frac{(x-6)(x+2)}{(x-2)(x+2)}$$

$$= \frac{x-6}{x-2}$$

$$\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \frac{-16}{0^-} = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \frac{-16}{0^+} = -\infty$$

$$\boxed{4} f(x) = \frac{1}{x-3} - \frac{2}{x^2-9} \quad a = \begin{pmatrix} -\infty \\ +\infty \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -3^-} f(x) = \frac{1}{-6} - \frac{2}{0^+} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -3^+} f(x) = \frac{1}{-6} - \frac{2}{0^-} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \frac{1}{0^-} - \frac{2}{0^-} = ?$$

حالة عدم تعيين من الشكل $-\infty + \infty$

$$f(x) = \frac{1}{x-3} - \frac{2}{x^2-9} = \frac{x+3-2}{x^2-9}$$

$$= \frac{x+1}{x^2-9}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \frac{4}{0^-} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \frac{1}{0^+} - \frac{2}{0^+} = ?$$

حالة عدم تعيين من الشكل $+\infty - \infty$

$$f(x) = \frac{1}{x-3} - \frac{2}{x^2-9} = \frac{x+3-2}{x^2-9}$$

$$= \frac{x+1}{x^2-9}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \frac{4}{0^+} = +\infty$$

$$\boxed{5} \quad f(x) = \frac{x^4 - 1}{x^3 - 1} \quad a = \begin{pmatrix} -\infty \\ +\infty \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x^4}{x^3} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^4}{x^3} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = ? \quad \frac{0}{0} \text{ حصلنا على حالة عدم تعيين من الشكل}$$

$$f(x) = \frac{x^4 - 1}{x^3 - 1} = \frac{(x^2 - 1)(x^2 + 1)}{(x - 1)(x^2 + x + 1)} = \frac{(x - 1)(x + 1)(x^2 + 1)}{(x - 1)(x^2 + x + 1)} = \frac{(x + 1)(x^2 + 1)}{(x^2 + x + 1)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \frac{2(2)}{1 + 1 + 1} = \frac{4}{3}$$

$$\boxed{6} \quad f(x) = 2x + \sin^2 x \quad a = \begin{pmatrix} -\infty \\ +\infty \end{pmatrix}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \quad \text{حصلنا على حالة } \sin \infty \text{ نطبق مبرهنة المقارنة :}$$

$$0 \leq \sin^2 x \leq +1 \quad x \in R \text{ اياً كانت}$$

$$2x \leq 2x + \sin^2 x \leq 1 + 2x \quad \text{نضيف } 2x \text{ إلى اطراف المتراجحة}$$

$$2x \leq f(x) \leq 1 + 2x$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (2x) = +\infty \xrightarrow[\text{المقارنة ③}]{\text{حسب مبرهنة}} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (1 + 2x) = -\infty \xrightarrow[\text{المقارنة ③}]{\text{حسب مبرهنة}} \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

$$\boxed{7} \quad f(x) = x^3(2 + \cos x) \quad a = \begin{pmatrix} +\infty \\ -\infty \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \quad \text{حصلنا على حالة } \cos \infty \text{ نطبق مبرهنة المقارنة:}$$

$$-1 \leq \cos x \leq +1 \quad x \in R \text{ اياً كان}$$

$$1 \leq 2 + \cos x \leq 3$$

$$x^3 \leq x^3(2 + \cos x) \leq 3x^3$$

$$x^3 \leq f(x) \leq 3x^3$$

$$x^3 \leq f(x) \quad \text{بما ان :}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty \xrightarrow[\text{المقارنة ③}]{\text{حسب مبرهنة}} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

◆ عندما $x > 0$ فإن $x^3 > 0$

◆ عندما $x < 0$ فإن $x^3 < 0$

$$x^3 \geq x^3(2 + \cos x) \geq 3x^3$$

$$x^3 \geq f(x) \geq 3x^3$$

$$x^3 \geq f(x) \quad \text{بما ان :}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty \xrightarrow[\text{المقارنة ③}]{\text{حسب مبرهنة}} \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 1(2 + \cos 1) = 2 + \cos 1$$

$$\textcircled{8} f(x) = \frac{\sqrt{x-1}}{x-1}$$

$$a = \left(\begin{array}{c} 1 \\ +\infty \end{array} \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = ?$$

حالة عدم تعيين من الشكل $\frac{0}{0}$

$$f(x) = \frac{\sqrt{x-1}}{x-1} = \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x-1} \cdot \sqrt{x-1}} = \frac{1}{\sqrt{x-1}}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = ?$$

$$\frac{\infty}{\infty}$$

حالة عدم تعيين من الشكل $\frac{\infty}{\infty}$

$$f(x) = \frac{\sqrt{x^2 \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} \right)}}{x \left(1 - \frac{1}{x} \right)} = \frac{x \sqrt{\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}}}{x \left(1 - \frac{1}{x} \right)} = \frac{\sqrt{\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}}}{1 - \frac{1}{x}}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{0}{1} = 0$$

(10) ليكن g التابع المعرف على R وفق $g(x) = \frac{1}{3+2\sin x}$

1. اثبت ان g محدود.

نعلم انه اياً كانت $x \in R$ فإن :

نضرب بـ 2

نجمع 3

نقلب المتراجحة

$$-1 \leq \sin x \leq 1$$

$$-2 \leq 2 \sin x \leq 2$$

$$1 \leq 3 + 2 \sin x \leq 5$$

$$1 \geq \frac{1}{3 + 2 \sin x} \geq \frac{1}{5}$$

فالتابع $g(x) \in \left[\frac{1}{5}, 1 \right]$ محدود حيث $g(x) \in \left[\frac{1}{5}, 1 \right]$

2. استنتج كلاً من النهايتين

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x + \sin x}{3 + 2 \sin x} \right), \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2}{3 + 2 \sin x} \right)$$

$$1 \geq \frac{1}{3 + 2 \sin x} \geq \frac{1}{5}$$

لدينا \blacklozenge

نضرب بـ x^2 حيث $x^2 > 0$

$$x^2 \geq \frac{x^2}{3 + 2 \sin x} \geq \frac{x^2}{5}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{5} = +\infty \xrightarrow[\text{المقارنة } \textcircled{3}]{\text{حسب مبرهنة}} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2}{3 + 2 \sin x} \right) = +\infty$$

$$1 \geq \frac{1}{3 + 2 \sin x} \geq \frac{1}{5}$$

لدينا $\blacklozenge \blacklozenge$

نضرب بـ $x + \sin x$ حيث $x \geq 0$ في جوار $+\infty$ ومنه $x + \sin x > 0$

$$\frac{x + \sin x}{3 + 2 \sin x} \geq \frac{x + \sin x}{5} \quad (*)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + \sin x}{5} \quad \text{لنحسب النهاية}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + \sin x}{5} = ? \quad \text{حصلنا على حالة } \sin \infty \text{ نستخدم مبرهنة المقارنة}$$

$$-1 \leq \sin x \leq 1$$

$$x - 1 \leq x + \sin x \leq x + 1$$

$$\frac{x - 1}{5} \leq \frac{x + \sin x}{5} \leq \frac{x + 1}{5}$$

نعلم انه اياً كانت $x > 0$ فإن :

نضيف x

نقسم على 5

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x - 1}{5} \right) = +\infty \xrightarrow[\text{المقارنة } \textcircled{3}]{\text{حسب مبرهنة}} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x + \sin x}{5} \right) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x + \sin x}{5} \right) = +\infty \xrightarrow[\text{المقارنة } \textcircled{3} \text{ في } (*)]{\text{حسب مبرهنة}} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + \sin x}{3 + 2 \sin x} = +\infty$$

$$(11) \text{ ليكن } f \text{ التابع المعين بالعلاقة } f(x) = \frac{3x^2+6x}{x^2-x-2}$$

1. عين D_f مجموعة تعريف f

شرط الكسر: $x^2 - x - 2 \neq 0$ ومنه $(x-2)(x+1) \neq 0$ اي $x \neq -1$, $x \neq 2$

$$D =]-\infty, -1[\cup]-1, 2[\cup]2, +\infty[$$

2. اوجد الأعداد a, b, c التي تحقق $f(x) = a + \frac{b}{x+1} + \frac{c}{x-2}$ ايّا تكن x من D_f

نقسم البسط على المقام (القسمة الإقليدية):

$$\left. \begin{array}{l} \frac{3x^2 + 6x}{x^2 - x - 2} \\ \underline{+3x^2 + 3x + 6} \\ \hline 9x + 6 \end{array} \right\} f(x) = 3 + \frac{9x + 6}{x^2 - x - 2} = 3 + \frac{9x + 6}{(x+1)(x-2)}$$

بالمقارنة مع الشكل $a + \frac{b}{x+1} + \frac{c}{x-2}$ نجد $a = 3$

$$\frac{9x + 6}{(x+1)(x-2)} = \frac{b}{x+1} + \frac{c}{x-2} \dots\dots\dots \boxed{*}$$

لإيجاد b نضرب طرفي المعادلة بـ $(x+1)$ ونجعل $x = -1$:

$$b + 0 = \frac{-9 + 6}{-3} = \frac{-3}{-3} = 1 \Rightarrow \boxed{b = 1}$$

لإيجاد c نضرب طرفي المعادلة بـ $(x-2)$ ونجعل $x = 2$:

$$0 + c = \frac{18 + 6}{3} = 8 \Rightarrow \boxed{c = 8}$$

$$f(x) = 3 + \frac{1}{x+1} + \frac{8}{x-2}$$

3. ادرس نهاية f عند حدود المجالات الثلاثة التي تؤلف D_f

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \frac{1}{0^-} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \frac{8}{0^-} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \frac{8}{0^+} = +\infty$$

$$(12) \text{ ليكن } f \text{ التابع المعين بالعلاقة } f(x) = \frac{x}{(x-1)^2}$$

1. ادرس نهاية f في جوار 1

شرط الكسر: $(x-1)^2 \neq 0$ ومنه $x-1 \neq 0$ اي $x \neq 1$

$$D =]-\infty, 1[\cup]1, +\infty[$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

2. اوجد مجالاً I مركزه 1 ويحقق $f(x) > 10^6$ ايّا تكن x من $I \setminus \{1\}$

$$f(x) > 10^6 \Rightarrow \frac{x}{(x-1)^2} > 10^6$$

$$\Rightarrow x > (x-1)^2 10^6$$

$$\boxed{10^6(x-1)^2 - x < 0} \quad \text{المتراجحة المطلوبة}$$

نعدم المتراجحة و ندرس إشارتها

$$10^6(x-1)^2 - x = 0$$

$$10^6(x-1)^2 - x + 1 - 1 = 0$$

$$10^6(x-1)^2 - (x-1) - 1 = 0$$

$$10^6 t^2 - t - 1 = 0 \quad \text{لناخذ } t = x - 1$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 1 - 4(10^6)(-1)$$

$$= 1 + 4(10^6) \approx 4(10^6) > 0$$

$$\sqrt{\Delta} = 2(10)^3 \quad \text{للمعادلة حلان حقيقيان}$$

$$t_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{1 + 2(10)^3}{2(10)^6}$$

$$= \frac{2001}{2(10)^6} = \frac{1000.5}{(10)^6} \approx 0.001$$

$$t_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{1 - 2(10)^3}{2(10)^6}$$

$$= \frac{-1999}{2(10)^6} = \frac{-999.5}{(10)^6} \approx -0.0009 \approx -0.001$$

$$t = x - 1 \in]-0.001, +0.001[$$

$$\Rightarrow x \in]1 - 0.001, 1 + 0.001[$$

$$x \in]0.999, 1.001[$$

1) $f(x) = \sqrt{x^2 + 2x} - x$ $a = +\infty$
 حالة عدم تعيين من الشكل $\infty - \infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 2x} - x)$$

$$= \frac{(\sqrt{x^2 + 2x} - x)(\sqrt{x^2 + 2x} + x)}{\sqrt{x^2 + 2x} + x}$$

$$= \frac{x^2 + 2x - x^2}{\sqrt{x^2 + 2x} + x}$$

$$= \frac{2x}{\sqrt{x^2 + 2x} + x} = \frac{2x}{\sqrt{x^2(1 + \frac{2x}{x^2})} + x}$$

$$= \frac{2x}{x\sqrt{1 + \frac{2}{x}} + x} = \frac{2x}{x[\sqrt{1 + \frac{2}{x}} + 1]}$$

$$f(x) = \frac{2}{\sqrt{1 + \frac{2}{x}} + 1}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{2}{1 + 1} = 1$$

2) $f(x) = \sqrt{4x^2 + x} + 2x$ $a = -\infty$
 حالة عدم تعيين من الشكل $\infty - \infty$

$$f(x) = \sqrt{4x^2 + x} + 2x$$

$$= \frac{(\sqrt{4x^2 + x} + 2x)(\sqrt{4x^2 + x} - 2x)}{(\sqrt{4x^2 + x} - 2x)}$$

$$= \frac{4x^2 + x - 4x^2}{\sqrt{4x^2 + x} - 2x} = \frac{x}{\sqrt{x^2(4 + \frac{x}{x^2})} - 2x}$$

$$= \frac{x}{-x\sqrt{4 + \frac{1}{x}} - 2x}$$

$$f(x) = \frac{x}{-x[\sqrt{4 + \frac{1}{x}} + 2]} = \frac{-1}{\sqrt{4 + \frac{1}{x}} + 2}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \frac{-1}{2 + 2} = -\frac{1}{4}$$

(13) ادرس في كل حالة نهاية التابع f عند a

$$f(x) = \frac{\sqrt{x+1} - 2}{x-3} = \frac{(\sqrt{x+1} - 2)(\sqrt{x+1} + 2)}{(x-3)(\sqrt{x+1} + 2)}$$

$$= \frac{x+1-4}{(x-3)(\sqrt{x+1} + 2)}$$

$$= \frac{(x-3)}{(x-3)(\sqrt{x+1} + 2)}$$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x+1} + 2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \frac{1}{2+2} = \frac{1}{4}$$

4) $f(x) = \frac{2x}{\sqrt{x+1} - 1}$ $a = 0$
 حالة عدم تعيين من الشكل $\frac{0}{0}$

$$f(x) = \frac{2x}{\sqrt{x+1} - 1} = \frac{2x(\sqrt{x+1} + 1)}{(\sqrt{x+1} - 1)(\sqrt{x+1} + 1)}$$

$$= \frac{2x(\sqrt{x+1} + 1)}{x+1-1} = \frac{2x(\sqrt{x+1} + 1)}{x}$$

$$f(x) = 2(\sqrt{x+1} + 1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 2(1+1) = 4$$

5) $f(x) = \frac{-x + \sqrt{x}}{x-1}$ $a = \left(\frac{1}{+\infty}\right)$
 حالة عدم تعيين من الشكل $\frac{0}{0}$

$$f(x) = \frac{-x + \sqrt{x}}{x-1} = \frac{(-x + \sqrt{x})(-x - \sqrt{x})}{(x-1)(-x - \sqrt{x})}$$

$$= \frac{x^2 - x}{(x-1)(-x - \sqrt{x})} = \frac{x}{(x-1)(-x - \sqrt{x})}$$

$$f(x) = \frac{x}{-x - \sqrt{x}}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \frac{1}{-1-1} = -\frac{1}{2}$$

حالة عدم تعيين من الشكل $\frac{\infty}{\infty}$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x}{-x - \sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-1}{-1 + \frac{1}{\sqrt{x}}} = -1 + \frac{1}{\sqrt{x}}$$

$$\boxed{6} \quad f(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x^2-1}} \quad a = \left(\begin{array}{c} -1 \\ +\infty \end{array} \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = ? \quad \frac{0}{0} \text{ حالة عدم تعيين من الشكل}$$

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{x+1}{\sqrt{x^2-1}} = \frac{(x+1)(\sqrt{x^2-1})}{(\sqrt{x^2-1})(\sqrt{x^2-1})} \\ &= \frac{(x+1)(\sqrt{x^2-1})}{(x^2-1)} \\ &= \frac{(x+1)\sqrt{x^2-1}}{(x+1)(x-1)} = \frac{\sqrt{x^2-1}}{x-1} \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \frac{0}{-2} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = ? \quad \frac{\infty}{\infty} \text{ حالة عدم تعيين من الشكل}$$

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{x+1}{\sqrt{x^2-1}} = \frac{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\sqrt{x^2\left(1-\frac{1}{x^2}\right)}} \\ &= \frac{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}{x\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}} = \frac{1+\frac{1}{x}}{\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}} \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \frac{1+0}{\sqrt{1-0}} = \frac{1}{1} = 1 \end{aligned}$$

(14) ادرس في كل حالة نهاية التابع f

$$\boxed{1} \quad f(x) = \frac{\sin x}{\sqrt{x}} \quad a = \left(\begin{array}{c} 0 \\ +\infty \end{array} \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = ? \quad \frac{0}{0} \text{ حصلنا على حالة عدم تعيين من الشكل}$$

$$f(x) = \frac{\sin x}{\sqrt{x}} = \frac{x}{\sqrt{x}} \cdot \frac{\sin x}{x} = \sqrt{x} \cdot \frac{\sin x}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = (0)(1) = 0 \quad \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \right) \text{ : علماً أن}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = ? \quad \text{حصلنا على حالة } \sin \infty \text{ نستخدم الإحاطة}$$

$$-1 \leq \sin x \leq +1 \quad x \in R \text{ كانت أيأ}$$

$$\frac{-1}{\sqrt{x}} \leq \frac{\sin x}{\sqrt{x}} \leq \frac{1}{\sqrt{x}} \quad ; x > 0$$

$$\frac{-1}{\sqrt{x}} \leq f(x) \leq \frac{1}{\sqrt{x}}$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-1}{\sqrt{x}} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{حسب مبرهنة} \\ \text{الإحاطة ①} \end{array} \implies \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

$$\boxed{2} \quad f(x) = \frac{1 - \cos x}{\sin x} \quad a = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = ? \quad \frac{0}{0} \text{ حصلنا على حالة عدم تعيين من الشكل}$$

$$\left[\sin x = 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} \right] \text{ و } \left[1 - \cos x = 2 \sin^2 \frac{x}{2} \right] \text{ نعلم أن}$$

$$f(x) = \frac{1 - \cos x}{\sin x} = \frac{2 \sin^2 \frac{x}{2}}{2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}} = \frac{\sin \frac{x}{2}}{\cos \frac{x}{2}}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \frac{0}{1} = 0$$

$$[3] f(x) = \frac{x \sin x}{1 - \cos x}$$

$$a = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = ? \quad \frac{0}{0} \text{ حصلنا على حالة عدم تعيين من الشكل}$$

$$f(x) = \frac{x \sin x}{1 - \cos x} = \frac{2x \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}}{2 \sin^2 \frac{x}{2}} = \frac{x \cos \frac{x}{2}}{\sin \frac{x}{2}} = \frac{\cos \frac{x}{2}}{\frac{\sin \frac{x}{2}}{x}} = \frac{\cos \frac{x}{2}}{\frac{1}{2} \cdot \frac{x}{2}}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$$

$$\left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} = 1 \right) \text{ : علماً أن}$$

$$[4] f(x) = \frac{2 - \sqrt{3x - 2}}{\sqrt{2x + 5} - 3}$$

$$a = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = ? \quad \frac{0}{0} \text{ حصلنا على حالة عدم تعيين من الشكل}$$

$$f(x) = \frac{2 - \sqrt{3x - 2}}{\sqrt{2x + 5} - 3}$$

نضرب البسط والمقام بمرافق البسط والمقام في آن واحد

$$= \frac{(2 - \sqrt{3x - 2})(2 + \sqrt{3x - 2})(\sqrt{2x + 5} + 3)}{(\sqrt{2x + 5} - 3)(\sqrt{2x + 5} + 3)(2 + \sqrt{3x - 2})}$$

$$= \frac{[4 - (3x - 2)](\sqrt{2x + 5} + 3)}{[2x + 5 - 9](2 + \sqrt{3x - 2})} = \frac{(-3x + 6)(\sqrt{2x + 5} + 3)}{(2x - 4)(2 + \sqrt{3x - 2})}$$

$$f(x) = \frac{-3(x - 2)(\sqrt{2x + 5} + 3)}{2(x - 2)(2 + \sqrt{3x - 2})} = \frac{-3(\sqrt{2x + 5} + 3)}{2(2 + \sqrt{3x - 2})}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \frac{-3(6)}{2(4)} = \frac{-9}{4}$$

(15) ليكن g التابع المعرفة على المجال $[3, +\infty[$ وفق $g(x) = \frac{3x-1}{x-3}$

1. احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$ واستنتج $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(g(x))$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(g(x)) = \lim_{t \rightarrow 3} g(t) = \frac{9-1}{0^+} = +\infty$$

: بفرض $g(x) = t$

2. اعد حساب $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(g(x))$ بعد كتابة $g(g(x))$ بدلالة x

$$g(g(x)) = \frac{3g(x) - 1}{g(x) - 3} = \frac{3 \left(\frac{3x-1}{x-3} \right) - 1}{\left(\frac{3x-1}{x-3} \right) - 3}$$

$$= \frac{\frac{9x-3}{x-3} - 1}{\frac{3x-1}{x-3} - 3} = \frac{\frac{9x-3-x+3}{x-3}}{\frac{3x-1-3x+9}{x-3}} = \frac{8x}{8} = x$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(g(x)) = +\infty$$

16) ليكن C الخط البياني للتابع f المعرفة بالعلاقة $f(x) = ax + b + \frac{c}{x-d}$ اوجد الأعداد الحقيقية d, c, b, a علماً أن الخواص الآتية محققة:

◆ المستقيم الشاقولي الذي معادلته $x = 3$ مقارب للخط C

◆ المستقيم المائل الذي معادلته $y = 2x - 5$ مقارب للخط C عند $+\infty$ وعند $-\infty$

◆ تنتمي النقطة $A(1, 2)$ إلى الخط C

◆ النقطة $A(1, 2)$ تنتمي لـ C

$$f(1) = 2$$

$$2(1) - 5 + \frac{c}{(1) - 3} = 2$$

$$\frac{c}{-2} = 5$$

$$\boxed{c = -10}$$

$$f(x) = 2x - 5 - \frac{10}{x-3} \quad \text{و منه :}$$

$$\lim_{x \rightarrow d} f(x) = \pm\infty \Rightarrow C \text{ مقارب شاقولي لـ } C$$

وبما أن $x = 3$ مقارب شاقولي لـ C (فرضاً)

$$\boxed{d = 3} \text{ عندئذ:}$$

◆ $y = 2x - 5$ معادلة المقارب المائل لـ C عند $+\infty$ أو $-\infty$

$$\begin{aligned} f(x) - y &= ax + b + \frac{c}{x-d} - 2x + 5 \\ &= (a-2)x + (b+5) + \frac{c}{x-d} \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - y) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a-2 = 0 \\ b+5 = 0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{a = 2}, \boxed{b = -5}$$

$$f(x) = 2x - 5 + \frac{c}{x-3} \quad \text{وجدنا :}$$

17) فيما يأتي C هو الخط البياني للتابع f الذي ندرسه على مجموعة تعريفه D_f بين في كل حالة إن كان ثمة مستقيمتين مقاربتين (أفقية أو شاقولية أو مائلة) للخط C

$$\boxed{1} \quad f(x) = \frac{x+1}{x-3}$$

$$D_f =]-\infty, 3[\cup]3, +\infty[$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1 \Rightarrow \text{مقارب أفقي يوازي } \hat{x}x \text{ عند } -\infty \quad \boxed{y = 1}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1 \Rightarrow \text{مقارب أفقي يوازي } \hat{x}x \text{ عند } +\infty \quad \boxed{y = 1}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \frac{4}{0^-} = -\infty \Rightarrow \text{مقارب شاقولي يوازي } \hat{y}y \text{ عند } -\infty \quad \boxed{x = 3}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \frac{4}{0^+} = +\infty \Rightarrow \text{مقارب شاقولي يوازي } \hat{y}y \text{ عند } +\infty \quad \boxed{x = 3}$$

$$\boxed{2} \quad f(x) = -x + 3 + \frac{2}{x^2 + 1}$$

$$D_f =]-\infty, +\infty[$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$$

لنبحث عن مقارب مائل (فرضاً) $y_\Delta = -x + 3$

$$f(x) - y_\Delta = -x + 3 + \frac{2}{x^2 + 1} - (-x + 3) = \frac{2}{x^2 + 1}$$

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{x^2 + 1} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x^2 + 1} = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \text{مقارب مائل لـ } C \text{ عند } +\infty, -\infty \quad y_\Delta = -x + 3$$

3) $f(x) = 1 - \frac{2}{x} + \frac{x}{2}$, $D_f =]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$
 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \frac{-2}{0^-} = +\infty \Rightarrow$ مقارب شاقولي منطبق على y عند $+\infty$ $x=0$

$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \frac{-2}{0^+} = -\infty \Rightarrow$ مقارب شاقولي منطبق على y عند $-\infty$ $x=0$

$f(x) - y_\Delta = 1 - \frac{2}{x} + \frac{x}{2} - \left(1 + \frac{x}{2}\right) = \frac{-2}{x}$ $y_\Delta = 1 + \frac{x}{2}$ لنبحث عن مقارب مائل, نترض ان
 $\left. \begin{matrix} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-2}{x} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2}{x} = 0 \end{matrix} \right\} \Rightarrow$ $+\infty, -\infty$ عند C لـ مقارب مائل $y_\Delta = 1 + \frac{x}{2}$

4) $f(x) = 1 - x + \frac{3x}{x^2 + 2}$, $D_f =]-\infty, +\infty[$
 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$

لنبحث عن مقارب مائل, نترض ان $y_\Delta = 1 - x$

$f(x) - y_\Delta = 1 - x + \frac{3x}{x^2 + 2} - (1 - x) = \frac{3x}{x^2 + 2}$
 $\left. \begin{matrix} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x}{x^2 + 2} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x}{x^2 + 2} = 0 \end{matrix} \right\} \Rightarrow$ $+\infty, -\infty$ عند C لـ مقارب مائل $y_\Delta = 1 - x$

5) $f(x) = \frac{2x^2 + 5x - 4}{x}$, $D_f =]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$
 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \frac{-4}{0^-} = +\infty \Rightarrow$ مقارب شاقولي منطبق على y عند $+\infty$ $x=0$
 $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \frac{-4}{0^+} = -\infty \Rightarrow$ مقارب شاقولي منطبق على y عند $-\infty$ $x=0$

$f(x) = \frac{2x^2 + 5x - 4}{x} \stackrel{\text{بتوزيع البسط على المقام}}{=} 2x + 5 - \frac{4}{x}$ لنبحث مقارب مائل :
 $f(x) - y_\Delta = 2x + 5 - \frac{4}{x} - (2x + 5) = \frac{-4}{x}$ نترض ان $y_\Delta = 2x + 5$
 $\left. \begin{matrix} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-4}{x} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-4}{x} = 0 \end{matrix} \right\} \Rightarrow$ $+\infty, -\infty$ عند C لـ مقارب مائل $y_\Delta = 2x + 5$

6) $f(x) = \frac{x^2 + 2 + \sin x}{x}$, $D_f =]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$
 $f(x) = x + \frac{2 + \sin x}{x}$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = ?$ حصلنا على حالة $\sin \infty$ نستخدم مبرهنة المقاربه
 $-1 \leq \sin x \leq 1$: نعلم انه اياً كانت $x \in R$ فإن :
 $1 \leq 2 + \sin x \leq 3$: نجمع 2 :

$$\frac{1}{x} \leq \frac{2 + \sin x}{x} \leq \frac{3}{x} \quad : \div (x > 0)$$

$$x + \frac{1}{x} \leq x + \frac{2 + \sin x}{x} \leq x + \frac{3}{x} \quad : x \text{ نجمع}$$

$$x + \frac{1}{x} \leq f(x) \leq x + \frac{3}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x + \frac{1}{x} \right) = +\infty \xrightarrow[\text{المقارنة ③}]{\text{حسب مبرهنة}} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \frac{+2}{0^-} = -\infty \Rightarrow \text{مقارب شاقولي منطبق على } y \text{ عند } -\infty \quad \boxed{x = 0}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \frac{+2}{0^+} = +\infty \Rightarrow \text{مقارب شاقولي منطبق على } y \text{ عند } +\infty \quad \boxed{x = 0}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = ? \quad \text{حصلنا على حالة } \sin \infty \text{ نستخدم مبرهنة المقارنة}$$

$$-1 \leq \sin x \leq 1 \quad : \text{نعلم أنه أياً كانت } x \in R \text{ فإن}$$

$$1 \leq 2 + \sin x \leq 3 \quad : \text{نجمع } 2$$

$$\frac{1}{x} \geq \frac{2 + \sin x}{x} \geq \frac{3}{x} \quad : \div (x < 0)$$

$$x + \frac{1}{x} \geq x + \frac{2 + \sin x}{x} \geq x + \frac{3}{x} \quad : x \text{ نجمع}$$

$$x + \frac{1}{x} \geq f(x) \geq x + \frac{3}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(x + \frac{1}{x} \right) = -\infty \xrightarrow[\text{المقارنة ③}]{\text{حسب مبرهنة}} \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

$$f(x) - y_\Delta = x + \frac{2 + \sin x}{x} - x = \frac{2 + \sin x}{x}$$

لنبحث عن مقارب مائل، نفرض أن $y_\Delta = x$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - y_\Delta] = ? \quad \text{حصلنا على حالة } \sin \infty \text{ نستخدم الإحاطة}$$

$$-1 \leq \sin x \leq 1 \quad : \text{نعلم أنه أياً كانت } x \in R \text{ فإن}$$

$$1 \leq 2 + \sin x \leq 3 \quad : \text{نجمع } 2$$

$$\frac{1}{x} \geq \frac{2 + \sin x}{x} \geq \frac{3}{x} \quad : \div (x < 0)$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3}{x} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0 \end{array} \right\} \xrightarrow[\text{الإحاطة ①}]{\text{حسب مبرهنة}} \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - y_\Delta] = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - y_\Delta] = ? \quad \text{حصلنا على حالة } \sin \infty \text{ نستخدم الإحاطة}$$

$$-1 \leq \sin x \leq 1 \quad : \text{نعلم أنه أياً كانت } x \in R \text{ فإن}$$

$$1 \leq 2 + \sin x \leq 3 \quad : \text{نجمع } 2$$

$$\frac{1}{x} \leq \frac{2 + \sin x}{x} \leq \frac{3}{x} \quad : \div (x > 0)$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{x} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0 \end{array} \right\} \xrightarrow[\text{الإحاطة ①}]{\text{حسب مبرهنة}} \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - y_\Delta] = 0$$

أي $y_\Delta = x$ مقارب مائل لـ C عند $+\infty, -\infty$

باستخدام القسمة الإقليدية

$$f(x) \cong 3x - \frac{x+1}{x^2+1}$$

لنبحث عن مقارب مائل :

$$f(x) - y_\Delta = 3x - \frac{x+1}{x^2+1} - 3x = -\frac{x+1}{x^2+1}$$

نفرض ان $y_\Delta = 3x$

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} -\frac{x+1}{x^2+1} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{x+1}{x^2+1} = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow +\infty, -\infty \text{ عند } C \text{ هو مقارب مائل لـ } y_\Delta = 3x$$

(18) ليكن f التابع المعرف على R وفق $f(x) = \sqrt{x^2 + 2x + 4}$ 1. (a) احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ ثم $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - (x+1))$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

$$f(x) - (x+1) = \sqrt{x^2 + 2x + 4} - (x+1)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - (x+1)) = ? \quad \text{حالة عدم تعيين من الشكل } \infty - \infty$$

$$\begin{aligned} f(x) - (x+1) &= \frac{[\sqrt{x^2 + 2x + 4} - (x+1)][\sqrt{x^2 + 2x + 4} + (x+1)]}{\sqrt{x^2 + 2x + 4} + (x+1)} \\ &= \frac{x^2 + 2x + 4 - (x+1)^2}{\sqrt{x^2 + 2x + 4} + x + 1} = \frac{x^2 + 2x + 4 - (x^2 + 2x + 1)}{\sqrt{x^2 + 2x + 4} + x + 1} \\ &= \frac{3}{\sqrt{x^2 + 2x + 4} + x + 1} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - (x+1)) = 0 \end{aligned}$$

(b) استنتج وجود مقارب مائل Δ للخط البياني C للتابع f في جوار $+\infty$ بما ان $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - (x+1)) = 0$ فإن $y_\Delta = x+1$ مقارب مائل للخط البياني C في جوار $+\infty$ (c) ادرس الوضع النسبي للمقارب Δ والخط C

$$f(x) - (x+1) = \sqrt{x^2 + 2x + 4} - (x+1)$$

$$f(x) - (x+1) = 0 \Rightarrow \sqrt{x^2 + 2x + 4} - (x+1) = 0$$

$$\sqrt{x^2 + 2x + 4} = (x+1)$$

$$x^2 + 2x + 4 = (x+1)^2 \quad : (x > -1) \text{ نربع بشرط}$$

$$x^2 + 2x + 4 = x^2 + 2x + 1 \Rightarrow 4 = 1 \text{ مستحيلة}$$

ملاحظة: (أي معادلة مستحيلة الحل لها إشارة واحدة). C فوق $\Delta \Rightarrow f(x) - (x+1) > 0$ 2. (a) احسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$$

(b) اثبت وجود عدد حقيقي a يحقق $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = a$ وان نهاية $f(x) - ax$ عند $-\infty$ عدد حقيقي b

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{\sqrt{x^2 + 2x + 4}}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = ? \quad \frac{\infty}{\infty} \text{ حالة عدم تعيين من الشكل}$$

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{\sqrt{x^2 \left(1 + \frac{2}{x} + \frac{4}{x^2}\right)}}{x} \stackrel{\text{عند } -\infty}{=} \frac{-x \sqrt{1 + \frac{2}{x} + \frac{4}{x^2}}}{x} = -\sqrt{1 + \frac{2}{x} + \frac{4}{x^2}}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = -1 \Rightarrow \boxed{a = -1}$$

$$f(x) - ax = \sqrt{x^2 + 2x + 4} + x$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - ax) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) + ax) = ? \quad \infty - \infty \text{ حالة عدم تعيين من الشكل}$$

$$f(x) - ax = \frac{(\sqrt{x^2 + 2x + 4} + x)(\sqrt{x^2 + 2x + 4} - x)}{\sqrt{x^2 + 2x + 4} - x}$$

$$= \frac{x^2 + 2x + 4 - x^2}{\sqrt{x^2 + 2x + 4} - x} = \frac{2x + 4}{\sqrt{x^2 + 2x + 4} - x} = \frac{x \left(2 + \frac{4}{x}\right)}{\sqrt{x^2 \left(1 + \frac{2}{x} + \frac{4}{x^2}\right)} - x}$$

$$= \frac{x \left(2 + \frac{4}{x}\right)}{-x \sqrt{1 + \frac{2}{x} + \frac{4}{x^2}} - x} = \frac{x \left(2 + \frac{4}{x}\right)}{x \left(-\sqrt{1 + \frac{2}{x} + \frac{4}{x^2}} - 1\right)} = \frac{2 + \frac{4}{x}}{-\sqrt{1 + \frac{2}{x} + \frac{4}{x^2}} - 1}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - ax) = \frac{2}{-2} = -1 \Rightarrow \boxed{b = -1}$$

(c) استنتج وجود مقارب مائل Δ للخط البياني C للتابع f في جوار $-\infty$
معادلة المقارب المائل عند $-\infty$ هي $y = -x - 1$

(19) ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على R وفق $f(x) = \sqrt{x^2 + 4x + 5}$

$$1. \text{ احسب } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

2. (a) اكتب ثلاثي الحدود $x^2 + 4x + 5$ بالصيغة القانونية (متمماً إلى مربع كامل).

$$x^2 + 4x + 5 = x^2 + 4x + 4 - 4 + 5 = x^2 + 4x + 4 + 1 = (x + 2)^2 + 1$$

(b) استنتج وجود مقارب مائل للخط البياني C للتابع f في جوار $+\infty$ اكتب معادلته.

$$f(x) = \sqrt{(x + 2)^2 + 1}$$

$$f(x) - y_\Delta = \sqrt{(x + 2)^2 + 1} - (x + 2)$$

نفرض أن $\Delta: y = x + 2$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - y_\Delta = ?$$

حصلنا على حالة عدم تعيين من الشكل $\infty - \infty$

$$f(x) - y_\Delta = \sqrt{(x + 2)^2 + 1} - (x + 2) = \frac{[\sqrt{(x + 2)^2 + 1} - (x + 2)][\sqrt{(x + 2)^2 + 1} + (x + 2)]}{\sqrt{(x + 2)^2 + 1} + (x + 2)}$$

$$= \frac{(x + 2)^2 + 1 - (x + 2)^2}{\sqrt{(x + 2)^2 + 1} + (x + 2)} = \frac{1}{\sqrt{(x + 2)^2 + 1} + (x + 2)}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - y_\Delta] = \frac{1}{+\infty} = 0 \Rightarrow y_\Delta = x + 2 \text{ مقارب مائل لـ } C \text{ عند } +\infty$$

وانزل زعفرية 0933699123

ياسر الساسة 0949198068

علاء رحال 0952480990

(20) ليكن C الخط البياني للتابع f المعروف على R وفق $f(x) = x + \sqrt{x^2 + 1}$

1. ادرس نهاية f عند $-\infty$ - اشرح التاويل الهندسي لهذه النتيجة.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = ?$$

عدم تعيين $-\infty + \infty$

$$f(x) = x + \sqrt{x^2 + 1} = \frac{(x + \sqrt{x^2 + 1})(x - \sqrt{x^2 + 1})}{x - \sqrt{x^2 + 1}} = \frac{x^2 - x^2 - 1}{x - \sqrt{x^2 + 1}} = \frac{-1}{x - \sqrt{x^2 + 1}}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \frac{-1}{-\infty} = 0$$

التاويل الهندسي: $y = 0$ مقارب أفقي منطبق على محور x عند $-\infty$

2. اثبت ان المستقيم Δ الذي معادلته $y = 2x$ مقارب للخط C في جوار $+\infty$

$$f(x) - y_\Delta = x + \sqrt{x^2 + 1} - 2x = \sqrt{x^2 + 1} - x = \frac{(\sqrt{x^2 + 1} - x)(\sqrt{x^2 + 1} + x)}{\sqrt{x^2 + 1} + x}$$

$$= \frac{x^2 + 1 - x^2}{\sqrt{x^2 + 1} + x} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1} + x}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - y_\Delta) = \frac{1}{+\infty} = 0 \Rightarrow y = 2x \text{ مقارب مائل لـ } C \text{ بجوار } +\infty$$

3. ادرس الوضع النسبي للمقارب Δ والخط C

$$f(x) - y_\Delta = \sqrt{x^2 + 1} - x$$

$$f(x) - y_\Delta = 0 \Rightarrow \sqrt{x^2 + 1} - x = 0$$

$$\sqrt{x^2 + 1} = x \quad : x > 0 \xrightarrow{\text{نربع}} x^2 + 1 = x^2 \Rightarrow 1 = 0 \text{ مستحيلة الحل}$$

ملاحظة هامة: أي معادلة مستحيلة الحل لها إشارة واحدة فقط إما موجبة دائماً أو سالبة دائماً لمعرفة قيمتها نأخذ قيمة ضمن

مجموعة التعريف ونعوضها في $f(x) - y_\Delta$ والإشارة الناتجة هي إشارة $f(x) - y_\Delta$

$$C \text{ فوق } \Delta \Rightarrow f(x) - y_\Delta > 0 \Rightarrow x = 0 \text{ قيمة تجريبية.}$$

(21) ليكن C الخط البياني للتابع f المعروف على R وفق $f(x) = x + \sqrt{|4x^2 - 1|}$

1. ادرس نهاية f عند $-\infty$ وعند $+\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty + \infty = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = ? \quad \text{حالة عدم تعيين من الشكل } -\infty + \infty$$

$$f(x) = x + \sqrt{|x^2(4 - \frac{1}{x^2})|} = x + |x| \sqrt{|4 - \frac{1}{x^2}|} = x - x \sqrt{|4 - \frac{1}{x^2}|}$$

$$= x \left(1 - \sqrt{|4 - \frac{1}{x^2}|} \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty(1 - 2) = +\infty$$

2. احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - 3x)$

$$f(x) - 3x = x + \sqrt{|4x^2 - 1|} - 3x = \sqrt{|4x^2 - 1|} - 2x$$

$$= \frac{(\sqrt{|4x^2 - 1|} - 2x)(\sqrt{|4x^2 - 1|} + 2x)}{\sqrt{|4x^2 - 1|} + 2x} = \frac{|4x^2 - 1| - 4x^2}{\sqrt{|4x^2 - 1|} + 2x}$$

$$= \frac{4x^2 - 1 - 4x^2}{\sqrt{|4x^2 - 1|} + 2x} = \frac{-1}{\sqrt{|4x^2 - 1|} + 2x}$$

عند $+\infty$ يكون $|4x^2 - 1| = 4x^2 - 1$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - 3x) = \frac{-1}{+\infty} = 0$$

$$f(x) + x = x + \sqrt{|4x^2 - 1|} + x = \sqrt{|4x^2 - 1|} + 2x$$

$$= \frac{(\sqrt{|4x^2 - 1|} + 2x)(\sqrt{|4x^2 - 1|} - 2x)}{\sqrt{|4x^2 - 1|} - 2x} = \frac{|4x^2 - 1| - 4x^2}{\sqrt{|4x^2 - 1|} - 2x}$$

$$= \frac{4x^2 - 1 - 4x^2}{\sqrt{|4x^2 - 1|} - 2x} = \frac{-1}{\sqrt{|4x^2 - 1|} - 2x}$$

عند $-\infty$ يكون $|4x^2 - 1| = 4x^2 - 1$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) + x) = \frac{-1}{+\infty} = 0$$

3. a) استنتج ان الخط C يقبل مستقيمين مقاربين مائلين Δ_1, Δ_2 يطلب إيجاد معادلتيهما.

بما ان : $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - 3x) = 0$ فإن $\Delta_1: y = 3x$ مقارب مائل لـ C عند $+\infty$

بما ان : $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) + x) = 0$ فإن $\Delta_2: y = -x$ مقارب مائل لـ C عند $-\infty$

b) ادرس الوضع النسبي للخط C وكل من المقاربين Δ_1, Δ_2

دراسة الوضع النسبي للمقارب $y = 3x$ مع C :

$$f(x) - 3x = 0$$

$$\sqrt{|4x^2 - 1|} - 2x = 0$$

$$\sqrt{|4x^2 - 1|} = 2x \quad : x > 0 \quad \text{نربع}$$

$$|4x^2 - 1| = 4x^2$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{مستحيلة} \\ 4x^2 - 1 = 4x^2 \Rightarrow -1 = 0 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{مرفوض} \\ 4x^2 - 1 = -4x^2 \Rightarrow 8x^2 = 1 \Rightarrow x^2 = \frac{1}{8} \Rightarrow \text{إما } x = \frac{1}{2\sqrt{2}} \text{ (مقبول) , او } x = \frac{-1}{2\sqrt{2}} \end{array} \right.$$

x	0	$\frac{1}{2\sqrt{2}}$	$+\infty$
$f(x) - y_{\Delta_1}$	+	0	-
الوضع النسبي	Δ_1 فوق C	$\frac{3}{2\sqrt{2}}$	Δ_1 تحت C

نقطة تقاطع C مع المقارب Δ_1 هي $(\frac{1}{2\sqrt{2}}, \frac{3}{2\sqrt{2}})$

$$f(x) + x = \sqrt{|4x^2 - 1|} + 2x = 0$$

$$\sqrt{|4x^2 - 1|} = -2x \quad : x < 0 \quad \text{نربع بشرط}$$

$$|4x^2 - 1| = 4x^2$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{مستحيلة} \\ 4x^2 - 1 = 4x^2 \Rightarrow -1 = 0 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{مرفوض} \\ 4x^2 - 1 = -4x^2 \Rightarrow 8x^2 = 1 \Rightarrow x^2 = \frac{1}{8} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{إما } x = \frac{1}{2\sqrt{2}} \\ \text{او } x = \frac{-1}{2\sqrt{2}} \end{array} \right. \end{array} \right.$$

x	$-\infty$	$\frac{-1}{2\sqrt{2}}$	0
$f(x) - y_{\Delta_2}$	-	0	+
الوضع النسبي	Δ_2 تحت C	$\frac{1}{2\sqrt{2}}$	Δ_2 فوق C

نقطة تقاطع C مع المقارب Δ_2 هي $(\frac{-1}{2\sqrt{2}}, \frac{1}{2\sqrt{2}})$

(22) ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على R وفق $f(x) = \sqrt{4x^2 - 4x + 3}$ و

1. ادرس نهاية f عند $+\infty$ وعند $-\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$$

2. اكتب $4x^2 - 4x + 3$ بالشكل القانوني.

$$\begin{aligned} 4x^2 - 4x + 3 &= 4(x^2 - x) + 3 = 4\left(x^2 - x + \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\right) + 3 = 4\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - 1 + 3 \\ &= 4\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + 2 = 2^2\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + 2 = (2x - 1)^2 + 2 \end{aligned}$$

(b) ادرس نهاية التابع h المعرف وفق $h(x) = f(x) - \sqrt{(2x - 1)^2}$ عند $-\infty$ وعند $+\infty$

$$h(x) = \sqrt{(2x - 1)^2 + 2} - \sqrt{(2x - 1)^2}$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow -\infty \\ x \rightarrow +\infty}} h(x) = ? \quad \text{حالة عدم تعيين من الشكل } \infty - \infty$$

$$h(x) = \frac{(2x - 1)^2 + 2 - (2x - 1)^2}{\sqrt{(2x - 1)^2 + 2} + \sqrt{(2x - 1)^2}}$$

$$h(x) = \frac{2}{\sqrt{(2x - 1)^2 + 2} + \sqrt{(2x - 1)^2}} \Rightarrow \begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = \frac{2}{+\infty} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = \frac{2}{+\infty} = 0 \end{cases}$$

(c) استنتج أن الخط C يقبل مستقيمين مقاربين مائلين يطلب إيجاد معادلتيهما.

$$h(x) = \sqrt{(2x - 1)^2 + 2} - \sqrt{(2x - 1)^2}$$

من (b) نلاحظ ما يلي:

$$h(x) = \sqrt{(2x - 1)^2 + 2} - |2x - 1|$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = 0 \Rightarrow \text{مقارب مائل لـ } C \text{ عند } -\infty$$

$$\boxed{y = -(2x - 1)}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = 0 \Rightarrow \text{مقارب مائل لـ } C \text{ عند } +\infty$$

$$\boxed{y = 2x - 1}$$

3. اثبت أن الخط C يقع فوق كل من هذين المقاربين.

$$h(x) = \sqrt{(2x - 1)^2 + 2} - \sqrt{(2x - 1)^2}$$

$$h(x) = 0 \Rightarrow \sqrt{(2x - 1)^2 + 2} - \sqrt{(2x - 1)^2} = 0$$

$$\sqrt{(2x - 1)^2 + 2} = \sqrt{(2x - 1)^2}$$

$$(2x - 1)^2 + 2 = (2x - 1)^2 \quad \text{نربع:}$$

$$2 = 0 \Rightarrow \text{مستحيلة}$$

نأخذ قيمة اختيارية ولتكن $x = 0$ ونعوضها في $h(x)$ فنجد أن $h(x) > 0$ إذاً C فوق المقاربين Δ_1, Δ_2

(23) ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على R وفق $f(x) = x + \frac{x}{\sqrt{x^2 + 9}}$ و

1. (a) اثبت أن المستقيم Δ الذي معادلته $y = x + 1$ مقارب للخط C في جوار $+\infty$

$$f(x) - y_\Delta = x + \frac{x}{\sqrt{x^2 + 9}} - (x + 1) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 9}} - 1 = \frac{x}{\sqrt{x^2 \left(1 + \frac{9}{x^2}\right)}} - 1$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{9}{x^2}}} - 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - y_\Delta] = 0$$

\Rightarrow

مقارب مائل لـ C في جوار $+\infty$

$$\boxed{\Delta: y = x + 1}$$

(b) ادرس الوضع النسبي للمقارب Δ والخط C

$$\left. \begin{aligned} f(x) - y_{\Delta} &= \frac{x}{\sqrt{x^2+9}} - 1 \\ f(x) - y_{\Delta} &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{x}{\sqrt{x^2+9}} - 1 = 0 \Rightarrow \frac{x}{\sqrt{x^2+9}} = 1$$

$$x = \sqrt{x^2+9} \quad (x > 0 \text{ بشرط } 0)$$

$$x^2 = x^2 + 9 \Rightarrow 0 = 9 \text{ مستحيلة}$$

بما ان $0 = 9$ مستحيلة فإن $(f(x) - y_{\Delta})$ لها إشارة واحدة فقط نأخذ قيمة اختيارية لتكن $x = 0$ ونعوضها فنجد

$(f(x) - y_{\Delta} < 0)$ إذا C تحت Δ

2. اصحح ان المستقيم Δ الذي معادلته $y = x - 1$ مقارب للخط C في جوار $-\infty$

$$f(x) - y_{\Delta} = x + \frac{x}{\sqrt{x^2+9}} - (x-1) = \frac{x}{\sqrt{x^2+9}} + 1 = \frac{x}{\sqrt{x^2(1+\frac{9}{x^2})}} + 1$$

$$= \frac{x}{-x\sqrt{1+\frac{9}{x^2}}} + 1 = \frac{-1}{\sqrt{1+\frac{9}{x^2}}} + 1$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - y_{\Delta}] = 0$$

مقارب مائل لـ C في جوار $-\infty$

$$\boxed{\Delta: y = x - 1}$$

(24) ليكن f التابع المعرف على R وفق $f(x) = x^3 + x + 1$ احسب $f(0), f(-1)$ ثم اثبت وجود عدد حقيقي وحيد c

من المجال $]-1, 0[$ يحقق $f(c) = 0$

$$f(-1) = -1 - 1 + 1 = -1$$

$$f(0) = 1$$

$$f'(x) = 3x^2 + 1 > 0$$

f معرف واشتقاقي على $]-1, 0[$

x	$] 0[$	$0[$
$f(x)$		$+$
$f(x)$	-1	1

تلاحظ ان:

f مستمر ومتزايد تماماً على المجال $]-1, 0[$

$$f(-1) \cdot f(0) < 0$$

فالمعادلة $f(c) = 0$ جذر وحيد c في R ينتمي للمجال $]-1, 0[$

(25) ليكن f التابع المعرف على $R \setminus \{-1\}$ وفق $f(x) = \frac{x^3}{x+1}$

1. اثبت ان f متزايد تماماً على المجال $[-\frac{3}{2}, -1[$

f معرف واشتقاقي على المجال $[-\frac{3}{2}, -1[$

$$f'(x) = \frac{3x^2(x+1) - 1(x^3)}{(x+1)^2} = \frac{3x^3 + 3x^2 - x^3}{(x+1)^2} = \frac{2x^3 + 3x^2}{(x+1)^2} = \frac{x^2(2x+3)}{(x+1)^2}$$

$$[-\frac{3}{2}, -1[$$

تلاحظ ان $f'(x) \geq 0$ المشتق موجب وينعدم عند قيمة $x = -\frac{3}{2}$ التي لا تشكل مجالاً في مجموعة التعريف

فالتابع متزايد تماماً على $[-\frac{3}{2}, -1[$

2. نظم جدولاً بتغيرات f على المجال $\left[\frac{-3}{2}, -1\right]$

$$f\left(\frac{-3}{2}\right) = \frac{27}{4}, \quad \lim_{x \rightarrow -1} f(x) = +\infty$$

f معرف واشتقاقي على $\left[\frac{-3}{2}, -1\right]$

$$\left. \begin{array}{l} \hat{f}(x) = \frac{x^2(2x+3)}{(x+1)^2} \\ \hat{f}(x) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow x^2(2x+3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \text{مرفوض (إما } x=0 \\ \text{أو } x = \frac{-3}{2} : f\left(\frac{-3}{2}\right) = \frac{27}{4} \end{cases}$$

	0	+
	$\frac{27}{4}$	$\rightarrow +\infty$

3. اوجد $f\left(\left[\frac{-3}{2}, -1\right]\right)$ واثبت أن للمعادلة $f(x) = 10$ حلاً وحيداً في المجال $\left[\frac{-3}{2}, -1\right]$

$$f\left(\left[\frac{-3}{2}, -1\right]\right) = \left[\frac{27}{4}, +\infty\right]$$

مستمر ومتزايد تماماً على المجال $\left[\frac{-3}{2}, -1\right]$ ومنه للمعادلة $f(x) = 10$ حلاً وحيداً في المجال $\left[\frac{-3}{2}, -1\right]$ و $10 \in f\left(\left[\frac{-3}{2}, -1\right]\right) = \left[\frac{27}{4}, +\infty\right]$

(26) ليكن f التابع المعرف على $I = [0, 3]$ وفق $f(x) = x^2 - 2x - 3$

1. ادرس تغيرات f ونظم جدولاً بها.

$$f(0) = -3, \quad f(3) = 0$$

f معرف واشتقاقي على $[0, 3]$

$$\left. \begin{array}{l} \hat{f}(x) = 2x - 2 \\ \hat{f}(x) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow 2x - 2 = 0$$

$$x = 1 : f(1) = -4$$

	0	-	0	+	3
$f(x)$		-	0	+	
$f(x)$	-3		-4		0

2. استنتج قيم x التي تحقق $f(x) = 0$

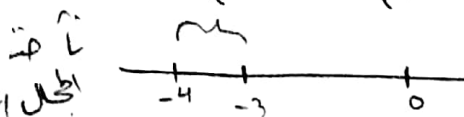
طريقة أولى: من جدول التغيرات نجد أن $f(x) = 0$ عندما $x = 3$

طريقة ثانية:

$$f(x) = 0 \Rightarrow x^2 - 2x - 3 = 0 \Rightarrow (x-3)(x+1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 3 & (\text{مقبول}) \\ x = -1 & (\text{مرفوض}) \end{cases}$$

3. عيّن $f([0, 3])$

$$f([0, 3]) = [-4, -3] \cup [-4, 0] = [-4, 0]$$



(27) ليكن f التابع المعرف على R وفق $f(x) = 1 - \frac{1}{x^2+1}$ واثبت أن f مستمر على R وعيّن $f(R)$. لاحظ: f اشتقاقي على R فهو مستمر على R .

$$x^2 \in [0, +\infty[\Rightarrow x^2 + 1 \in [1, +\infty[\Rightarrow \frac{1}{x^2+1} \in]0, 1]$$

$$\Rightarrow \frac{1}{x^2+1} \in]0, 1[\Rightarrow 1 - \frac{1}{x^2+1} \in [0, 1[\Rightarrow f(x) \in [0, 1[= f(R)$$

ملاحظة: يمكن إيجاد المطلوب عبر دراسة تغيرات f وتعيين $f(R)$

(28) ليكن f التابع المعرف على R وفق

$$f(x) = \begin{cases} \cos\left(\frac{1}{x}\right) & : x \neq 0 \\ 0 & : x = 0 \end{cases}$$

1. احسب نهاية f عند الصفر.

$$-1 \leq \cos \frac{1}{x} \leq 1 \quad : x \in R^* \quad \text{نعلم انه اياً كان}$$

$$\left| \cos \frac{1}{x} \right| \leq 1 \quad : \text{نضرب بـ } x^2$$

$$\left| x^2 \cos \frac{1}{x} \right| \leq x^2$$

$$|f(x) - 0| \leq x^2$$

بما ان $\lim_{x \rightarrow 0} (x^2) = 0$ حسب الإحاطة ② فإن $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$

2. هل f مستمر عند الصفر؟ هل هو مستمر على R علل إجابتك.

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) \quad : \text{لأن } x = 0 \text{ مستمر عند}$$

وبما ان f هو عبارة عن جداء دالتين $(x^2, \cos \frac{1}{x})$ مستمرتان على كلاً من المجالين $]-\infty, 0[$, $]0, +\infty[$

فيكون f مستمر على R

(29) ليكن f التابع المعرف على R وفق $f(x) = \begin{cases} \frac{1 - \sqrt{x^2 + 1}}{x} & : x \neq 0 \\ m & : x = 0 \end{cases}$ ما قيمة m التي تجعل f مستمراً على R

التابع f مستمر على كلاً من المجالين $]-\infty, 0[$, $]0, +\infty[$

حتى يكون f مستمر على R يجب ان يكون مستمر عند $x = 0$ اي يجب ان يتحقق:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = ? \quad \frac{0}{0} \quad \text{حصلنا على حالة عدم تعيين من الشكل}$$

$$f(x) = \frac{1 - \sqrt{x^2 + 1}}{x} = \frac{(1 - \sqrt{x^2 + 1})(1 + \sqrt{x^2 + 1})}{x(1 + \sqrt{x^2 + 1})} = \frac{1 - x^2 - 1}{x(1 + \sqrt{x^2 + 1})}$$

$$f(x) = \frac{-x^2}{x(1 + \sqrt{x^2 + 1})} = \frac{-x}{1 + \sqrt{x^2 + 1}}$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0 \\ f(0) = m \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{حسب تعريف الاستمرار}} \boxed{m = 0}$$

(30) يرمز $E(x)$ إلى الجزء الصحيح للعدد الحقيقي x . ليكن f التابع المعرف على المجال $[0, 2]$

$$f(x) = x - E(x)$$

1. اكتب f بعبارة مستقلة عن $E(x)$

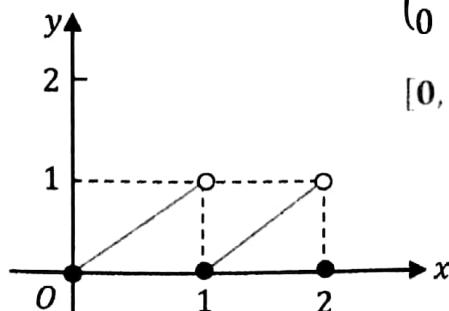
بما ان $E(x)$ هو الجزء الصحيح للعدد الحقيقي x , فإن $x \in [0, 2]$ فإن $E(x) \in \{0, 1, 2\}$

$$E(x) = \begin{cases} 0 & : x \in [0, 1[\\ 1 & : x \in [1, 2[\\ 2 & : x = 2 \end{cases} \Rightarrow f(x) = x - E(x) = \begin{cases} x & : x \in [0, 1[\\ x - 1 & : x \in [1, 2[\\ 0 & : x = 2 \end{cases}$$

2. ارسم الخط البياني للتابع f على المجال $[0, 2]$

نرسم الخط البياني لـ f على كل مجال

بأخذ نقاط مساعدة تنتمي لكل مجال



$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 1 \\ f(1) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) \neq f(1)$$

f غير مستمر عند $x = 1$ فهو غير مستمر على المجال $[0, 2]$

4. طلب إضافي : اوجد $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{E(x)}{x}$ ثم احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$

نعلم أن : $x - 1 < E(x) \leq x$: $x > 0$ نقسم على

$$\frac{x-1}{x} < \frac{E(x)}{x} \leq 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x-1}{x} \right) = 1 \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{حسب مبرهنة} \\ \text{الإحاطة ①} \end{array} \right. \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{E(x)}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (1) = 1$$

$$E(x) \leq x < E(x) + 1$$

$$0 \leq x - E(x) < 1$$

$$0 \leq f(x) < 1 \quad : x > 0 \text{ نقسم على}$$

$$0 \leq \frac{f(x)}{x} < \frac{1}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (0) = 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{حسب مبرهنة} \\ \text{الإحاطة ①} \end{array} \right. \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x} \right) = 0$$

31) يرمز $E(x)$ إلى الجزء الصحيح للعدد الحقيقي x ليكن f التابع المعرفة على المجال $[0, 2]$

وفق $f(x) = E(x) + (x - E(x))^2$

1. اكتب $f(x)$ بعبارة مستقلة عن $E(x)$ (لا تحوي $E(x)$).

بما أن $E(x)$ هي الجزء الصحيح للعدد الحقيقي x ، و $x \in [0, 2]$ فإن $E(x)$ تنتمي إلى $\{0, 1, 2\}$

$$E(x) = \begin{cases} 0 & : x \in [0, 1[\\ 1 & : x \in [1, 2[\\ 2 & : x = 2 \end{cases} \Rightarrow f(x) = E(x) + (x - E(x))^2 = \begin{cases} x^2 & : x \in [0, 1[\\ 1 + (x - 1)^2 & : x \in [1, 2[\\ 2 & : x = 2 \end{cases}$$

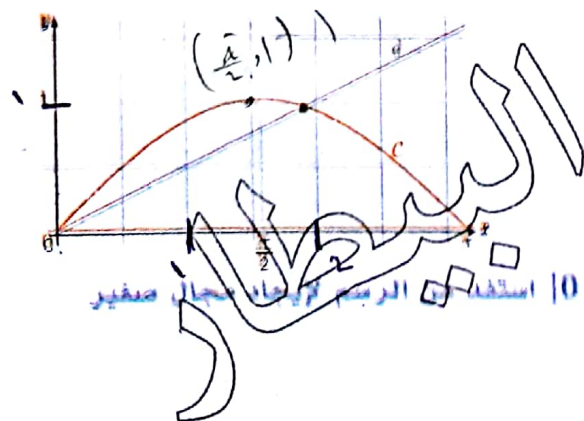
2. اثبت ان f مستمر على المجال $[0, 2]$

f تابع كثير الحدود على كل من المجالين $[0, 1[$, $[1, 2[$ وهذه التوابع مستمرة على مجالات تعريفها ولنتحقق من استمرار f عند كل من 1 و 2

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 1 \\ f(1) = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = f(1) = 1 \quad : x = 1 \text{ مستمر من أجل}$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 2 \\ f(2) = 2 \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = f(2) = 2 \quad : x = 2 \text{ مستمر من أجل}$$

إذاً التابع f مستمر على $[0, 2]$



32) في معلم متجانس C هو الخط البياني للتابع f المعرفة على $[0, \pi]$

وفق $f(x) = \sin x$ و d هو المستقيم الذي معادلته $y = \frac{1}{2}x$

1. ارسم شكلاً من d, C

يمكن رسم الخط C والمستقيم d نقطياً كما وضع بالشكل

(b) يبدو ان للمعادلة $\sin x = \frac{1}{2}x$ حلاً واحداً α في المجال $[0, \pi]$ استغل من الرسم لإيجاد مجال صغير

يلتصق إليه α

واضح من الرسم ان $\alpha \in]1, 2[$

2. نرمز بالرمز g إلى التابع المعرف على $[0, \pi]$ وفق $g(x) = \sin x - \frac{1}{2}x$ واثبت ان $g(x)$ يتعدم عند $x = \frac{\pi}{3}$ احسب $g(x)$ واشتقاقها على $[0, \pi]$

$$g(0) = 0 \quad , \quad g(\pi) = \frac{-\pi}{2}$$

$$\left. \begin{aligned} g(x) &= \cos x - \frac{1}{2} \\ g'(x) &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \cos x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{\pi}{3} \in [0, \pi] : g\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{6} = \frac{3\sqrt{3} - \pi}{6}$$

(b) نظم جدولاً بتغيرات g

	0	$\frac{\pi}{3}$	π
$g(x)$		+	0
$g'(x)$		-	
$g(x)$	0	$\frac{3\sqrt{3} - \pi}{6}$	$\frac{-\pi}{2}$

3. استنتج مما سبق ان المعادلة $\sin x = \frac{1}{2}x$ تقبل حلاً وحيداً α في المجال $]0, \pi[$ هذا يكافئ إثبات ان للمعادلة $g(x) = 0 \Leftrightarrow \sin x - \frac{1}{2}x = 0$ حل وحيد α في المجال $]0, \pi[$

♦ g تابع مستمر ومتزايد تماماً على المجال $]0, \frac{\pi}{3}[$ بحيث:

$$\left]0, \frac{\pi}{3}\right[\cap g^{-1}(0) = \left]0, \frac{3\sqrt{3} - \pi}{6}\right[$$

♦ g مستمر ومتناقص تماماً على $\left[\frac{\pi}{3}, \pi\right]$

$$\left. \begin{aligned} g\left(\frac{\pi}{3}\right) &= \frac{3\sqrt{3} - \pi}{6} > 0 \\ g(\pi) &= \frac{-\pi}{2} < 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow g\left(\frac{\pi}{3}\right) \times g(\pi) < 0$$

ومنه للمعادلة $g(x) = 0$ حل وحيد في المجال $\left[\frac{\pi}{3}, \pi\right]$

وبالتالي للمعادلة $\sin x = \frac{1}{2}x$ وحيداً α في المجال $]0, \pi[$

33) ليكن f تابعاً مستمراً ومعرفاً على المجال $I = [0, 1]$ ويحقق $f(x) \in I$ ايأ x يكن x من I نرمز بالرمز k إلى التابع المعرف على I وفق $k(x) = f(x) - x$

بتطبيق مبرهنة القيمة الوسطى على التابع k اثبت وجود عدد حقيقي a من I يحقق $f(a) = a$

$$k(x) = f(x) - x \quad : x \in I = [0, 1]$$

$$\left. \begin{aligned} x &\in [0, 1] \\ f(x) &\in [0, 1] \end{aligned} \right\} \Rightarrow k(x) = f(x) - x \text{ مستمر على المجال } [0, 1]$$

$$k(0) = f(0) \geq 0 \quad (f(x) \in [0, 1] \text{ لأن } f(x) \in [0, 1]) \Rightarrow k(0) \times k(1) < 0$$

$$k(1) = f(1) - 1 \leq 0 \quad (f(1) \in [0, 1]) \Rightarrow k(1) < 0$$

34) ليكن m عدداً حقيقياً وليكن C_m الخط البياني للتابع f_m المعرف على R وفق: $f_m(x) = x^3 + mx^2 - 8x -$

1. اثبت ان الخطين C_0 و C_1 يتقاطعان في نقطتين A, B اوجد إحداثيات هاتين النقطتين.

$$C_0: f_0(x) = x^3 - 8x$$

$$C_1: f_1(x) = x^3 + x^2 - 8x - 1$$

$$\Rightarrow f_1(x) = f_0(x) \Rightarrow x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x^2 = 1$$

$$\text{إما } x = 1 : f_0(1) = 1 - 8 = -7$$

$$\text{أو } x = -1 : f_0(-1) = -1 + 8 = 7$$

$$\Rightarrow A(1, -7), B(-1, 7)$$

وائل زعترية 0933699123

ياسر الساسة 0949198068

0952480990 علاء رحال

(b) استنتج ان جميع الخطوط البيانية C_m تمر بالنقطتين B, A

$$A(1, -7) : f_m(1) = 1 + m - 8 - m = -7 \xRightarrow{\text{محققة}} A \in C_m$$

$$B(-1, 7) : f_m(-1) = -1 + m + 8 - m = 7 \xRightarrow{\text{محققة}} B \in C_m$$

2. اوجد نهاية f_m عند $+\infty$ وعند $-\infty$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f_m(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f_m(x) = +\infty$$

3. استنتج مما سبق ان للمعادلة $f_m(x) = 0$ ثلاثة حلول متميزة في R ايا يكن العدد m مما سبق وجدنا ان C_m يمر بالنقطتين $A(1, -7), B(-1, 7)$

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
$f_m(x)$	$-\infty$	7	-7	$+\infty$

♦ f مستمر ومتزايد تماماً على $]-\infty, -1]$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -\infty} f_m(x) = -\infty \\ f(-1) = 7 \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} f_m(x) \times f(-1) < 0$$

إذاً للمعادلة $f_m(x) = 0$ حل وحيد في المجال $]-\infty, -1]$ ♦ f مستمر ومتزايد تماماً على $[1, +\infty[$

$$\left. \begin{array}{l} f(1) = -7 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} f_m(x) = +\infty \end{array} \right\} \Rightarrow f(1) \times \lim_{x \rightarrow +\infty} f_m(x) < 0$$

إذاً للمعادلة $f_m(x) = 0$ حل وحيد في المجال $[1, +\infty[$ ♦ f مستمر ومتناقص تماماً على $]-1, 1[$

$$\left. \begin{array}{l} f(-1) = 7 \\ f(1) = -7 \end{array} \right\} \Rightarrow f(-1) \times f(1) < 0$$

إذاً للمعادلة $f_m(x) = 0$ حل وحيد في المجال $]-1, 1[$ وبالتالي للمعادلة $f_m(x) = 0$ ثلاثة حلول مختلفة في R (35) ليكن f تابعاً مستمراً واشتقاقياً على المجال $I = [0, 1]$ ويحقق الشرطين:♦ اياً كان x من I كان $f(x)$ من I ♦ واياً كان x من $]0, 1[$ كان $\dot{f}(x) < 1$ اثبت ان للمعادلة $f(x) = x$ حلاً وحيداً في I

طريقة التفكير للحل: من الشرط الثاني:

الحل يكافئ ان نثبت ان للمعادلة $f(x) - x = 0$ حل وحيد في I , لنفرض ان: $x \in I = [0, 1]$: $g(x) = f(x) - x$ حسب الفرض: g مستمر على المجال $[0, 1]$ واشتقاقى على المجال $]0, 1[$ (لان $\dot{f}(x) < 1$)لان: $\dot{g}(x) = \dot{f}(x) - 1 < 0$, $(\dot{f}(x) < 1 \Rightarrow \dot{f}(x) - 1 < 0)$

$$g(0) = f(0)$$

$$g(1) = f(1) - 1$$

x	0	1
$\dot{g}(x)$	$ $	$-$
$g(x)$	$f(0)$	$f(1) - 1$

لاحظ: $g(x)$ مستمر ومتناقص على المجال $[0, 1]$

$$\left. \begin{array}{l} g(0) = f(0) \geq 0 \\ g(1) = f(1) - 1 \leq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow g(0) \times g(1) < 0$$

انتبه: لماذا $g(0) = f(0) \geq 0$ لان $f(x) \in [0, 1]$ وبالمثل $g(1) = f(1) - 1 \leq 0$ إذاً يوجد $\alpha \in [0, 1]$ بحيث للمعادلة $g(x) = 0$ اي $f(x) - x = 0$ وبالتالي $f(x) = x$ حل وحيد.

البيطار

رؤيه شامله في الامتحان
 (36) ليكن f التابع المعرف على R وفق $f(x) = \sqrt{1+x^2}$ وليكن C خطه البياني في معلم متجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$
 1. اثبت ان للخط C محور تناظر.

$$f(x) = \sqrt{1+x^2} \quad : D_f = R$$

$$\diamond x \in R \rightarrow -x \in R \quad (\text{محقق})$$

$$\diamond f(-x) = \sqrt{1+(-x)^2} = \sqrt{1+x^2} = f(x) \quad (\text{محقق})$$

ومن تحقق الشرطين السابقين نجد ان: f تابع زوجي ومنه فان خطه البياني C متناظر بالنسبة لمحور الترتيب yy الذي معادلته $x = 0$

2. ادرس نهاية f عند $+\infty$ وعند $-\infty$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

3. اثبت ان $f(x) - x = \frac{1}{x + \sqrt{1+x^2}}$ اي x يكن من R استنتج ان C يقبل مقارباً مائلاً d في جوار $+\infty$ عين الوضع النسبي للخط C ومقاربه d

$$f(x) - x = \sqrt{1+x^2} - x = \frac{(\sqrt{1+x^2} - x)(\sqrt{1+x^2} + x)}{\sqrt{1+x^2} + x} = \frac{1+x^2 - x^2}{\sqrt{1+x^2} + x}$$

$$f(x) - x = \frac{1}{\sqrt{1+x^2} + x}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x) = \frac{1}{+\infty} = 0 \Rightarrow \text{مقارب مائل للخط } C \text{ عند } +\infty$$

$x \in R$ كون $\sqrt{1+x^2} + x > 0$ اي x تكن $x \in R$ ومنه $f(x) - y = \frac{1}{\sqrt{1+x^2} + x} > 0$

4. ليكن \tilde{C} الخط البياني للتابع g المعرف على R وفق $g(x) = -f(x)$ وليكن $H = C \cup \tilde{C}$

اثبت ان معادلة H هي $y^2 - x^2 = 1$

لدينا $g(x) = -f(x)$

النقطة $M(x, y)$ تنتمي إلى H إذا وفقط إذا كان $y = f(x)$ او $y = g(x) = -f(x)$

$$y^2 = (f(x))^2 = (\sqrt{1+x^2})^2 = 1+x^2$$

$$\text{او } y^2 = (-f(x))^2 = (-\sqrt{1+x^2})^2 = 1+x^2$$

وهذا يكافئ قولنا ان $y^2 = 1+x^2$ ومنه معادلة H هي $y^2 - x^2 = 1$

5. نعلم معلماً جديداً $(O; \vec{u}, \vec{v})$ حيث $\vec{u} = \frac{\sqrt{2}}{2}(\vec{i} + \vec{j})$ و $\vec{v} = \frac{\sqrt{2}}{2}(-\vec{i} + \vec{j})$. لتكن M نقطة إحداثياتها (x, y)

في المعلم $(O; \vec{i}, \vec{j})$ وإحداثياتها (X, Y) في المعلم $(O; \vec{u}, \vec{v})$

اوجد x, y بدلالة X, Y ارسم الخط H في المعلم $(O; \vec{u}, \vec{v})$

$$\vec{v} = \frac{\sqrt{2}}{2}(-\vec{i} + \vec{j}) \quad , \quad \vec{u} = \frac{\sqrt{2}}{2}(\vec{i} + \vec{j})$$

$$M(x, y) : \vec{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}$$

$$M(X, Y) : \vec{OM} = X\vec{u} + Y\vec{v} = X \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{i} + \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{j} \right) + Y \left(\frac{-\sqrt{2}}{2}\vec{i} + \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{j} \right)$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}X\vec{i} + \frac{\sqrt{2}}{2}X\vec{j} - \frac{\sqrt{2}}{2}Y\vec{i} + \frac{\sqrt{2}}{2}Y\vec{j}$$

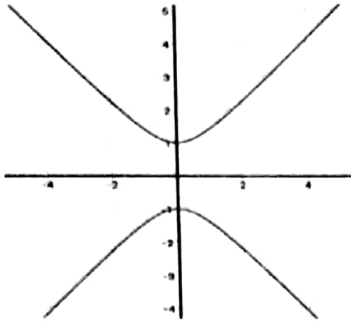
$$M(X, Y) : \vec{OM} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}X - \frac{\sqrt{2}}{2}Y \right) \vec{i} + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}X + \frac{\sqrt{2}}{2}Y \right) \vec{j}$$

ومنه: $y = \frac{\sqrt{2}}{2}X + \frac{\sqrt{2}}{2}Y$ و $x = \frac{\sqrt{2}}{2}X - \frac{\sqrt{2}}{2}Y$
 نموض في معادلة H : $y^2 - x^2 = 1$

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}X + \frac{\sqrt{2}}{2}Y\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}X - \frac{\sqrt{2}}{2}Y\right)^2 = 1$$

$$\frac{1}{2}X^2 + XY + \frac{1}{2}Y^2 - \left(\frac{1}{2}X^2 - XY + \frac{1}{2}Y^2\right) = 1$$

$2X.Y = 1 \Rightarrow X.Y = \frac{1}{2}$ وهي معادلة H في الجملة الجديدة :



يمثل الرسم الخط البياني لـ H حيث C باللون الأزرق و \hat{C} باللون الأحمر

(37) ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1, +1\}$ وفق $f(x) = |x+1| + \frac{x}{x^2-1}$ اكتب $f(x)$ بصيغة لا تحوي قيمة مطلقة.

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x) = -x - 1 + \frac{x}{x^2-1} & : x < -1 \\ f_2(x) = x + 1 + \frac{x}{x^2-1} & : x > -1 \quad ; x \neq 1 \end{cases}$$

(b) ادرس نهاية f عند حدود مجالات D_f ثم اوجد $\hat{f}(x)$ وادرس اشارته على كل من مجالات D_f

$$D =]-\infty, -1[\cup]-1, 1[\cup]1, +\infty[$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f_1(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} f_1(x) = \frac{-1}{0^+} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f_2(x) = \frac{1}{0^-} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f_2(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} f_2(x) = \frac{-1}{0^-} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f_2(x) = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

f اشتقاقي على كل من المجالات $]-\infty, -1[,]-1, 1[,]1, +\infty[$

$$\hat{f}(x) = \begin{cases} \hat{f}_1(x) = -1 + \frac{x^2 - 1 - 2x(x)}{(x^2 - 1)^2} & : x < -1 \\ \hat{f}_2(x) = 1 + \frac{x^2 - 1 - 2x(x)}{(x^2 - 1)^2} & : x > -1 \quad ; x \neq 1 \end{cases}$$

$$\hat{f}(x) = \begin{cases} \hat{f}_1(x) = -1 + \frac{-x^2 - 1}{(x^2 - 1)^2} = \frac{-x^4 + x^2 - 2}{(x^2 - 1)^2} & : x < -1 \\ \hat{f}_2(x) = 1 + \frac{-x^2 - 1}{(x^2 - 1)^2} = \frac{x^4 - 3x^2}{(x^2 - 1)^2} & : x > -1 \quad ; x \neq 1 \end{cases}$$

$$f_2(x) = \frac{x^4 - 3x^2}{(x^2 - 1)^2}$$

$$f_2(x) = 0 \Rightarrow x^4 - 3x^2 = 0$$

$$x^2(x^2 - 3) = 0$$

إما $x^2 = 0 \rightarrow x = 0 : f_2(0) = 1$

أو $x^2 = 3 \rightarrow$ إما $x = \sqrt{3} : f_2(\sqrt{3}) = \frac{3\sqrt{3}}{2} + 1$

أو $x = -\sqrt{3} \notin D_{f_2}$

x	-1	0	1	$\sqrt{3}$	$+\infty$
$f_2(x)$	-	0	-	-	0
					+

$$f_1(x) = \frac{-x^4 + x^2 - 2}{(x^2 - 1)^2}$$

$$f_1(x) = 0 \Rightarrow -x^4 + x^2 - 2 = 0$$

$$\Delta = 1 - 4(-1)(-2) = -7 < 0 \text{ (مستحيلة الحل)}$$

وبالتالي فإن إشارته توافق إشارة x^4 أي أنه سالب.

لاحظ: البسط سالب والمقام موجب فالكسر سالب أي:

$$x < -1 \text{ عندما } f_1(x) < 0$$

2. ادرس تغيرات f ونظم جدولاً بها.

x	$-\infty$	-1	0	1	$\sqrt{3}$	$+\infty$
$f(x)$	-		-	0	-	0
						+
$f(x)$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	1	$-\infty$	$+\infty$
						$\frac{3\sqrt{3}}{2} + 1$

3. (a) تحقق من أن المستقيمين اللذين معادلتاهما $y = -x - 1$, $y = x + 1$ هما بالترتيب مقاربان مائلان للخط البياني C عند $+\infty$ وعند $-\infty$ ادرس وضع C بالنسبة إلى هذين المقاربين.

$$f_2(x) - y_{\Delta_2} = x + 1 + \frac{x}{x^2 - 1} - (x + 1)$$

$$= \frac{x}{x^2 - 1}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f_2(x) - y_{\Delta_2}) = 0$$

Δ_2 مقارب مائل للخط C عند $+\infty$

$$f_1(x) - y_{\Delta_1} = -x - 1 + \frac{x}{x^2 - 1} - (-x - 1)$$

$$= \frac{x}{x^2 - 1}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (f_1(x) - y_{\Delta_1}) = 0$$

Δ_1 مقارب مائل للخط C عند $-\infty$

دراسة الوضع النسبي: بالعودة لقاعدة الربط الأساسية نجد:

$$f(x) - y = \frac{x}{x^2 - 1} \Rightarrow f(x) - y = 0 \Rightarrow \frac{x}{x^2 - 1} = 0 \Rightarrow x = 0 : (0, 1)$$

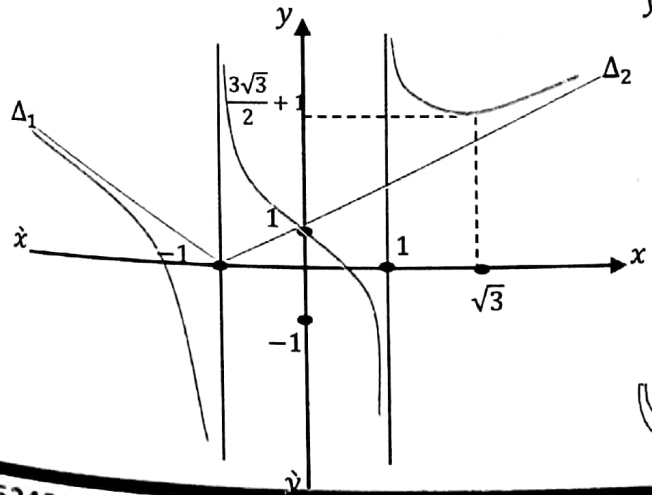
نقطة مشتركة

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
$f(x) - y$	-	+	0	-	+
الوضع النسبي	Δ_1 تحت C	Δ_2 فوق C	Δ_2 تحت C	Δ_2 فوق C	

(b) اوجد معادلة للمماس T للخط البياني C في النقطة A منه علماً أن فاصلة A تساوي الصفر.

$$A(0, 1), f_2(x) = \frac{x^4 - 3x^2}{(x^2 - 1)^2} \Rightarrow m = f_2'(0) = 0$$

معادلة المماس T هي: $y - 1 = 0(x - 0)$ أي $y = 1$
 ارسم T للخط البياني C ثم ارسم C



مكتبة هدايل

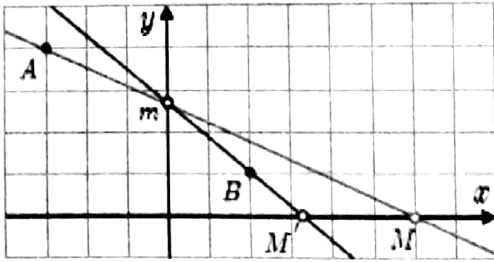
4. اثبت ان للمعادلة $f(x) = 0$ حلاً وحيداً α في المجال $|-1, 1|$ واوجد مجالاً طوله 10^{-1} تنتمي إليه α

$$f \text{ مستمر ومتناقص تماماً على المجال }]-1, 1[\\ \left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = -\infty \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) \times \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) < 0 \\ \text{إذا للمعادلة } f(x) = 0 \text{ حل وحيد في المجال }]-1, 1[$$

لدينا:

$$\left. \begin{array}{l} f(0.6) = 0.66 > 0 \\ f(0.8) = -0.42 < 0 \end{array} \right\} \Rightarrow f(0.6) \times f(0.8) < 0$$

إذا $\alpha \in]0.6, 0.8[$ الذي طوله 10^{-1}



(38) في معلم متجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$ لدينا النقطتان الثابتتان

$A(-3, 4)$ و $B(2, 1)$ والنقطة المتحركة $M(x, 0)$ نقرن

بالنقطة M النقطة \dot{M} التي نعرفها كما يلي:

◆ يقطع المستقيم AM المحور (O, \vec{j}) في m

◆ يقطع المستقيم BM المحور (O, \vec{i}) في \dot{M}

نرمز إلى فاصلة \dot{M} بالرمز $\dot{M}(f(x), 0)$

1. بدون حساب خمن نهاية f عند $+\infty$

نلاحظ أنه عندما $x \rightarrow +\infty$ فإن المستقيم AM سيوازي تقريباً المحور $x\dot{x}$

فتتحرك النقطة m لتستقر في النقطة $(0, 4)$

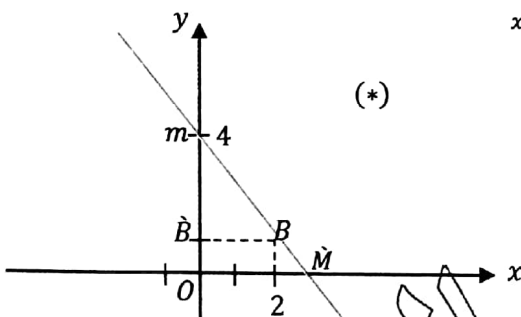
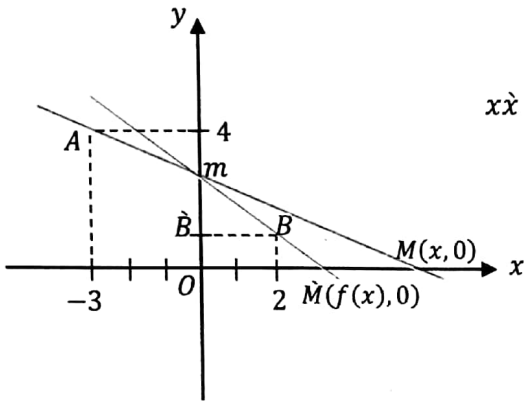
ومن المثلث القائم $Om\dot{M}$ في الشكل (*) نستفيد من نسبة التشابه

$$\frac{O\dot{M}}{\dot{B}\dot{B}} = \frac{Om}{\dot{B}m} \Rightarrow \frac{O\dot{M}}{\dot{B}\dot{B}} = \frac{4}{3}$$

لكن $\dot{B}\dot{B} = 2$ ومنه :

$$\frac{O\dot{M}}{2} = \frac{4}{3} \Rightarrow O\dot{M} = \frac{8}{3}$$

وبما أن فاصلة \dot{M} يمثلها $f(x)$ يمكننا أن نكتب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{8}{3}$



(*)

2. اثبت ان $f(x) = \frac{8x}{3x-3}$ عندما تختلف x عن 1 وعن -3 ثم استنتج نهاية f عند $+\infty$

نفرض أن a ميل المستقيم (AM) فتكون معادلته: $y - 4 = a(x + 3)$ ومنه $y = a(x + 3) + 4$

نقاط المستقيم مع محور الترتيب بوضع $x = 0$ فنتج النقطة $m(0, 3a + 4)$

نقاط المستقيم مع محور الفواصل بوضع $y = 0$ فنتج النقطة $M\left(-\left(3 + \frac{4}{a}\right), 0\right)$

ميل المستقيم (Bm) حيث $m(0, 3a + 4)$, $B(2, 1)$

$$\text{ميل}_{(Bm)} = \frac{3a + 4 - 1}{0 - 2} = \frac{-3}{2}(a + 1)$$

معادلة المستقيم (Bm)

$$y - 1 = \frac{-3}{2}(a + 1)(x - 2)$$

يقطع المستقيم (Bm) محور الفواصل في النقطة \dot{M}

بوضع $y = 0$ نجد ان فاصلة \dot{M} :

$$0 - 1 = \frac{-3}{2}(a + 1)x + 3(a + 1)$$

$$\frac{3}{2}(a + 1)x = 3a + 4 \Rightarrow x = \frac{2}{3} \cdot \frac{3a + 4}{a + 1} ; a \neq -1$$

أي $\dot{M}\left(\frac{2}{3} \cdot \frac{3a + 4}{a + 1}, 0\right)$

لدينا من فاصلة النقطة \dot{M} :

$$x = -\left(3 + \frac{4}{a}\right) \Rightarrow ax = -3a - 4 \Rightarrow a(x + 3) = -4 \Rightarrow a = \frac{-4}{x + 3} ; x \neq -3$$

نعوض قيمة a في فاصلة النقطة \dot{M} التي تمثل $f(x)$

$$f(x) = \frac{2}{3} \cdot \frac{3a + 4}{a + 1} = \frac{2}{3} \cdot \frac{3\left(\frac{-4}{x + 3}\right) + 4}{\frac{-4}{x + 3} + 1} = \frac{2}{3} \cdot \frac{4x}{x - 1} = \frac{8x}{3x - 3} ; x \neq -3, x \neq 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{8}{3}$$

3. ادرس نهاية f عند $-\infty$ ما التاويل الهندسي لهذه النتيجة؟

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \frac{8}{3} \Rightarrow \text{مقارب أفقي يوازي المحور } y = \frac{8}{3} \text{ المستقيم}$$

(b) ادرس نهاية f عند $x = 1$ ما التاويل الهندسي لهذه النتيجة؟

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty \Rightarrow \text{مقارب شاقولي يوازي المحور } y\hat{y} \text{ المستقيم}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty \Rightarrow \text{مقارب شاقولي يوازي المحور } y\hat{y} \text{ المستقيم}$$

4. عندما $x = -3$ يكون المستقيم AM موازياً (O, \hat{y}) وتكون m "في اللانهاية" يمكن ان نقول في هذه الحالة ان

Bm يوازي (O, \hat{y}) وان \dot{M} تقع في $(2, 0)$ نعرف عندئذ التابع g وفق $g(x) = f(x)$ عندما تختلف x عن 1

وعن -3 , $g(-3) = 2$ لماذا يكون g مستمراً عند -3

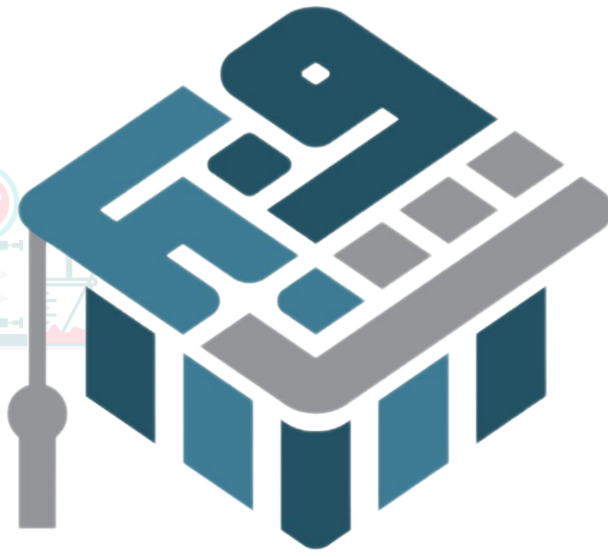
$$g(x) = \begin{cases} f(x) & : x \neq -3, x \neq 1 \\ 2 & : x = -3 \end{cases}$$

$$\text{ونلاحظ ان } \lim_{x \rightarrow -3} g(x) = \lim_{x \rightarrow -3} f(x) = 2 = g(-3)$$

وبالتالي يمكننا ان نكتب ان g مستمر عند $x = -3$

البيطار

شغف وفريقك خطوة بخطوة



شغف التعليمي
Educational passion

$2 > -3$
 $0.999... = 1$
 $\pi \approx 3.14$
 $\sqrt{2}$
 $1 + 2 \cdot 3$
 5^2
 $(1 - 2) + 3$
 $101_2 = 5_{10}$



القناة الرئيسية " فريق شغف التعليمي "



<https://t.me/alsh276>

مكتبة شغف " بوت الملفات "



https://t.me/passion_study_bot