شغف رفيقك خطوة بخطوة

شغف التعليمي

Educational passion

القناة الرئيسية " فريق شغف التعليمي "

https://t.me/alsh276

مكتبة شغف " بوت الملفات "

https://t.me/passion_study_bot

شيفرة الـ 600

للإعداد والتكوين والتأسيس في الرياضيات

إعداد: أ.خالد عامر

قسم التوابع

التابــــع الأســــي

دمشـــق

خالد عامر

0940 916 753

رمز التابع الأسي:

$e^{\text{مقدار يحوي متغير}}$

$exp(\text{مقدار يحوي متغير})$

شرط تعريف التابع الأسي:

هو نفسه شرط تعريف أسه.

خواص التابع الأسي:

	الخاصة	شرط التطبيق
أولاً	* $e^a.e^b = e^{a+b}$ * $\frac{e^a}{e^b} = e^{a-b}$ * $\frac{1}{e^a} = e^{-a}$ * $(e^a)^b = e^{a.b}$	
ثانياً	* $e^{\ln(a)} = a$ * $e^{n\ln(a)} = e^{\ln(a)^n} = a^n$ * $e^{\ln(a)+\ln(b)} = \begin{cases} \boxed{e^{\ln(a.b)} = a.b} \\ \boxed{e^{\ln(a)}.e^{\ln(b)} = a.b} \end{cases}$ * $e^{\ln(a)-\ln(b)} = \begin{cases} \boxed{e^{\ln\left(\frac{a}{b}\right)} = \frac{a}{b}} \\ \boxed{\frac{e^{\ln(a)}}{e^{\ln(b)}} = \frac{a}{b}} \end{cases}$	عدد اللوغاريتمات في الأس هو واحد أمثال اللوغاريتم هي الواحد حصراً
قيم مباشرة	* $e^0 = 1$ * $e^1 = e$	
قيم تقريبية	* $e \cong 2.7$ * $e^2 \cong 7.3$ * $\frac{1}{e} \cong 0.4$ * $\sqrt{e} \cong 1.6$ * $\ln(2) \cong 0.7$ * $\ln(3) \cong 1.1$ * $\ln(5) \cong 1.6$	تحفظ ولا تكتب

أنماط التمارين:

النمط الأول: الاختزال:

نص السؤال:

بسط (اختزل) المقادير

فكرة الحل:

نطبق ما يلزم من خواص

وعمليات وصولاً لأبسط شكل ممكن

تمرين:

بسط كتابة الأعداد الآتية:

اكتب بأبسط ما يمكن كلاً من لأعداد الآتية:

1. $A = e^{\ln(2)}$
2. $B = e^{\frac{1}{2}\ln(16)} + e^{\ln(3)}$
3. $C = \ln e^{-3} + e^{\ln(5)}$
4. $D = e^{-\ln\left(\frac{3}{2}\right)} + e^{\ln\left(\frac{1}{3}\right)}$
5. $E = e^{\ln(x)} - \ln(2e^{x})$
6. $F = e^{\ln(x-1)-\ln(x)} + \frac{1}{x}$
7. $G = \ln\left(e^{\frac{1}{x}}\right) + e^{-\ln(x)}$
8. $H = e^{2+\ln(8)}$
9. $I = \frac{e^{2}}{e^{1+\ln(2)}}$
10. $J = (e^{2x})(e^{-x})^{3}$
11. $K = \ln\sqrt{e^{5}}$
12. $L = \frac{e}{e^{2+\ln(3)}}$
13. $M = \frac{e^{2+\ln(8)}}{e^{3+\ln(4)}}$
14. $N = \frac{e^{4x}}{e\times(e^{x})^{2}}$
15. $O = (e^{2x})^{3} \times (e^{-x})^{6}$
16. $P = \frac{e^{3x}-e^{2x}}{e^{2x}-e^{x}}$
17. $Q = (32)^{\frac{3}{2}}$
18. $R = -\frac{1}{3^{\ln(3)}}$
19. $S = \sqrt[6]{27} \times 3^{\frac{1}{2}}$

1. $A = e^{\ln 2} = 2$

2. $B = e^{\frac{1}{2}\ln 16} + e^{\ln 3}$

$B = e^{\ln\sqrt{16}} + e^{\ln 3} = 4 + 3 = 7$

3. $C = \ln e^{-3} + e^{\ln 5} = -3 + 5 = 2$

4. $D = e^{-\ln\left(\frac{3}{2}\right)} + e^{\ln\left(\frac{1}{3}\right)}$

$D = e^{\ln\left(\frac{3}{2}\right)^{-1}} + e^{\ln\left(\frac{1}{3}\right)}$

$D = \frac{2}{3} + \frac{1}{3} = \frac{3}{3} = 1$

5. $E = e^{\ln x} - \ln(2e^{x})$

$E = e^{\ln x} - (\ln 2 + \ln e^{x})$

$E = x - \ln 2 - \ln e^{x}$

$E = \cancel{x} - \ln 2 - \cancel{x} = -\ln 2$

6. $F = e^{\ln(x-1)-\ln x} + \frac{1}{x}$

$F = e^{\ln\left(\frac{x-1}{x}\right)} + \frac{1}{x}$

$F = \frac{x-1}{x} + \frac{1}{x} = \frac{\cancel{x}}{\cancel{x}} = 1$

7. $G = \ln\left(e^{\frac{1}{x}}\right) + e^{-\ln x}$

$G = \ln e^{\frac{1}{x}} + e^{\ln(x)^{-1}}$

$G = \frac{1}{x} + \frac{1}{x} = \frac{2}{x}$

أنت بطل طريقك..

ما دمت تكافح للوصول

8. $H = e^{2+\ln 8} = e^{2} \times e^{\ln 8}$

$= e^{2} \times 8 = 8e^{2}$

9. $I = \dfrac{e^{2}}{e^{1+\ln 2}}$

$I = \dfrac{e^{2}}{e^{1} \times e^{\ln 2}} = \dfrac{e^{2} \times e^{-1}}{2}$

$I = \dfrac{e}{2}$

10. $J = (e^{2x})(e^{-x})^{3}$

$J = e^{2x} \times e^{-3x} = e^{2x-3x} = e^{-x}$

11. $K = \ln\sqrt{e^{5}} = \ln e^{\frac{5}{2}} = \dfrac{5}{2}$

12. $L = \dfrac{e}{e^{2+\ln 3}} = \dfrac{e}{e^{2} \times e^{\ln 3}}$

$= \dfrac{e \times e^{-2}}{e^{\ln 3}} = \dfrac{e^{-1}}{3} = \dfrac{1}{3e}$

13. $M = \dfrac{e^{2+\ln 8}}{e^{3+\ln 4}} = \dfrac{e^{2} \times e^{\ln 8}}{e^{3} \times e^{\ln 4}}$

$= \dfrac{8}{e^{1} \times 4} = \dfrac{2}{e}$

14. $N = \dfrac{e^{4x}}{e \times e^{2x}} = \dfrac{e^{4x-2x}}{e}$

$N = e^{2x-1}$

15. $O = (e^{2x})^{3} \times (e^{-x})^{6}$

$O = e^{6x} \times e^{-6x} = e^{0} = 1$

16. $P = \dfrac{e^{3x} - e^{2x}}{e^{2x} - e^{x}} = \dfrac{e^{x}\cancel{(e^{2x} - e^{x})}}{\cancel{e^{2x} - e^{x}}}$

$P = e^{x}$

17. $Q = (32)^{\frac{3}{2}} = \left((2)^{5}\right)^{\frac{3}{2}}$

$Q = (2)^{5 \times \frac{3}{2}} = (2)^{\frac{15}{2}}$

18. $R = 3^{-\frac{1}{\ln 3}} = e^{\ln 3^{-\frac{1}{\ln 3}}}$

$R = e^{-\frac{1}{\cancel{\ln 3}} \times \cancel{\ln 3}} = e^{-1}$

19. $S = \sqrt[6]{27} \times 3^{\frac{1}{2}} = \sqrt[6]{3^{3}} \times 3^{\frac{1}{2}}$

$S = 3^{\frac{3}{6}} \times 3^{\frac{1}{2}} = 3^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}} = 3^{1} = 3$

النمط الثاني: إثبات صحة مساواة:

نص السؤال:

أثبت صحة العلاقة (المساواة)

فكرة الحل:

لدينا أسلوبان:

الأسلوب الأول:

ننطلق من الطرفين وصولاً إلى نفس النتيجة

الأسلوب الثاني:

ننطلق من طرف وصولاً إلى الطرف الثاني

أثبت صحة كل مما يأتي:

1. $\frac{e^x}{1+e^x} = \frac{1}{1+e^{-x}}$
2. $ln(e^x+1) - ln(e^{-x}+1) = x$
3. $(e^x + e^{-x})^2 = \frac{e^{4x}+2e^{2x}+1}{e^{2x}}$
4. $e^{-x} - e^{-2x} = \frac{e^x-1}{e^{2x}}$
5. $\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}} = \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}$

---

1. $\underbrace{\frac{e^x}{1+e^x}}_{L_1} = \underbrace{\frac{1}{1+e^{-x}}}_{L_2}$

$L_1 = \frac{e^x}{1+e^x} = \frac{\cancel{e^x}}{\cancel{e^x}\left(\frac{1}{e^x}+1\right)}$

$L_1 = \frac{1}{e^{-x}+1} = L_2$

2. $\underbrace{Ln(e^x+1) - Ln(e^{-x}+1)}_{L_1} = \underbrace{x}_{L_2}$

$L_1 = Ln(e^x+1) - Ln(e^{-x}-1)$

$L_1 = Ln\left(\frac{e^x+1}{e^{-x}-1}\right)$

$$L_1 = \ln\left(\frac{e^{x}\left(1+\frac{1}{e^{x}}\right)}{(e^{-x}+1)}\right)$$

$$L_1 = \ln\left(\frac{e^{x}\cancel{(1+e^{-x})}}{\cancel{(e^{-x}+1)}}\right)$$

$$L_1 = \ln e^{x} = x = L_2$$

$$\boxed{3}\quad \underbrace{(e^{x}+e^{-x})^2}_{L_1} = \underbrace{\frac{e^{x}-1}{e^{2x}}}_{L_2}$$

$$L_1 = (e^{x}+e^{-x})^2$$

$$L_1 = e^{2x}+2(e^{x})(e^{-x})+e^{-2x}$$

$$L_1 = e^{2x}+2+\frac{1}{e^{2x}}$$

$$L_1 = \frac{e^{4x}+2e^{2x}+1}{e^{2x}} = L_2$$

4] $\underbrace{e^{-x} - e^{-2x}}_{L_1} = \underbrace{\dfrac{e^{x}-1}{e^{2x}}}_{L_2}$

$L_1 = e^{-x} - e^{-2x} = e^{-x} - \dfrac{1}{e^{2x}}$

$L_1 = \dfrac{e^{x}-1}{e^{2x}} = L_2$

5] $\underbrace{\dfrac{e^{x} - e^{-x}}{e^{x} + e^{-x}}}_{L_1} = \underbrace{\dfrac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}}_{L_2}$

$L_1 = \dfrac{e^{x} - e^{-x}}{e^{x} + e^{-x}} = \dfrac{\left(e^{x} - \frac{1}{e^{x}}\right)}{\left(e^{x} + \frac{1}{e^{x}}\right)}$

$L_1 = \dfrac{\dfrac{e^{2x}-1}{e^{x}}}{\dfrac{e^{2x}+1}{e^{x}}} = \dfrac{e^{2x}-1}{\cancel{e^{x}}} \times \dfrac{\cancel{e^{x}}}{e^{2x}+1}$

$L_1 = \dfrac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1} = L_2$

تمرين 2 : امتحاني .. ^^

أثبت أنّ التابع المعرف على $\mathbb{R}$ وفق:

$$f(x) = (e^{x} + e^{-x})^2 - (e^{x} - e^{-x})^2$$

تابع ثابت.

$$f(x) = \left((e^{x})^2 + 2(e^{x})(e^{-x}) + (e^{-x})^2\right)$$

$$- \left((e^{x})^2 - 2(e^{x})(e^{-x}) + (e^{-x})^2\right)$$

$$= \cancel{e^{2x}} + 2 + \cancel{e^{-2x}} - \cancel{e^{2x}} + 2 - \cancel{e^{-2x}}$$

$$= 2 + 2 = 4$$

إذاً التابع f تابع ثابت.

المعادلات الأسية:

تمهيد:

* حل المعادلة:
تعني إيجاد قيم المجهول x
* حل جملة المعادلات:
تعني إيجاد قيم جميع المجاهيل.
* الحل المقبول:
هو الحل الذي ينتمي إلى شرط الحل.
* الحل المرفوض :
هو الحل الذي لا ينتمي إلى شرط الحل.
* شرط الحل في المعادلات نضعه عندما تكون مجموعة التعريف تختلف عن $\mathbb{R}$

النمط الأول:

شكل المعادلة: $e^{\text{اس كذا}} = e^{\text{اس كذا}}$

نص السؤال: حل المعادلة الآتية

فكرة الحل:

* نحدد شرط الحل (عند اللزوم)
* نطبق إصلاحات وخواص مناسبة للوصول إلى الشكل:

$$e^a = e^b$$

وهي معادلة تكافئ:

$$a = b$$

* نحل هذه المعادلة
* نحدد الحلول المقبولة والمرفوضة

تمرين:

1. $e^{3x-1} = e^{x^2}$
2. $e^{\frac{1}{x}} = e^{x-3}$
3. $e^{x^2}.e^{5x} = (e^x)^3.e$

1] $e^{3x-1} = e^{x^2}$

$\Rightarrow 3x - 1 = x^2$

$x^2 - 3x + 1 = 0$

$a = 1 \ , \ b = -3 \ , \ c = 1$

$\Delta = b^2 - 4ac$

$= 9 - 4(1)(+1) = 5$

$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{+3-\sqrt{5}}{2}$

$x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$

2] $e^{\frac{1}{x}}$ معرفة على:

$E = R \setminus \{0\}$

لدينا:

$e^{\frac{1}{x}} = e^{x-3}$

$\Rightarrow \frac{1}{x} = x - 3$

$1 = x^2 - 3x$

$x^2 - 3x - 1 = 0$

$a = 1 \ , \ b = -3 \ , \ c = -1$

$\Delta = b^2 - 4ac$

$= 9 - 4(1)(-1) = 13$

$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{3-\sqrt{13}}{2}$

مقبول

$x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{3+\sqrt{13}}{2}$

مقبول

3] $e^{x^2}.e^{5x} = (e^x)^3.e$

$e^{x^2+5x} = e^{3x+1} \Rightarrow x^2 + 5x = 3x + 1$

$x^2 + 2x + 1 = 0$

$a = 1 \ , \ b = 2 \ , \ c = 1$

$\Delta = b^2 - 4ac = 8$

$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2-\sqrt{8}}{2}$

$x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2+\sqrt{8}}{2}$

النمط الثاني:

شكل المعادلة: عدد $= e^{\text{اس}}$ هكذا

نص السؤال: حل المعادلة الآتية

فكرة الحل:

- نحدد شرط الحل (عند اللزوم)
- نطبق إصلاحات وخواص مناسبة للوصول إلى الشكل:

$e^{\text{اس}} =$ عدد

← أي نعزل e ونميز:

← العدد سالب أو صفر:

تكون المعادلة مستحيلة الحل

العدد موجب:

1. نأخذ لوغاريتم الطرفين فنحصل على معادلة
2. نحل هذه المعادلة
3. نحدد الحلول المقبولة والمرفوضة

تمرين:

1. $e^{3x-1} = 0$
2. $e^{3x-1} = 2$
3. $e^{3x-1} = 1$
4. $e^{3x+1} + 5 = 7$
5. $-e^{2x+1} + 2 = 0$
6. $e^{x^2+1} = 2$
7. $e^{x+\ln(4)} = \frac{2}{3}$

[1]

$e^{3x-1} = 0$

مستحيلة الحل.

[2]

$e^{3x-1} = 2$

$3x - 1 = \ln 2$

$\Rightarrow 3x = \ln 2 + 1$

$\Rightarrow \boxed{x = \frac{\ln 2 + 1}{3}}$

[3]

$e^{3x-1} = 1$

$3x - 1 = 0$

$3x = 1 \Rightarrow \boxed{x = \frac{1}{3}}$

[4]

$e^{3x+1} + 5 = 7$

$e^{3x+1} = 2$

$3x + 1 = \ln 2$

$3x = \ln 2 - 1$

$\Rightarrow \boxed{x = \frac{\ln 2 - 1}{3}}$

[5]

$-e^{2x+1} + 2 = 0$

$-e^{2x+1} = -2$

$e^{2x+1} = 2$

$\Rightarrow 2x + 1 = \ln 2$

$\Rightarrow 2x = \ln 2 - 1$

$\Rightarrow \boxed{x = \frac{\ln 2 - 1}{2}}$

[6]

$e^{x^2+1} = 2$

$x^2 + 1 = \ln 2$

$x^2 = \ln 2 - 1$

مستحيلة الحل..

[7]

$e^{x+\ln(4)} = \frac{2}{3}$

$x + \ln(4) = \ln\left(\frac{2}{3}\right)$

$x + \ln(4) = \ln(2) - \ln(3)$

$x = \ln(2) - \ln(3) - \ln(4)$

$x = \ln\left(\frac{2}{3\times 4}\right) = \ln\left(\frac{1}{6}\right)$

$\boxed{x = -\ln 6}$

النمط الثالث:

شكل المعادلة:

- تكون من أحد الأشكال:
  - تحوي e^x و e^{2x} معاً
  - تحوي e^{-x} و e^{-2x} معاً
  - تحوي e^{2x} و e^{4x} معاً
  - تحوي e^{-2x} و e^{-4x} معاً
  - تحوي e^x و e^{3x} معاً
  - تحوي e^{-x} و e^{-3x} معاً

نص السؤال: حل المعادلة الآتية

فكرة الحل:

١. نضع الفرضية المناسبة مثلاً: المعادلة التي تحوي e^x و e^{2x} معاً تكون الفرضية $t = e^x$ فيكون $e^{2x} = t^2$ وهكذا بقية الحالات..

٢. نعوض في المعادلة

٣. نحصل على معادلة بدلالة t

٤. نحل المعادلة

٥. نوجد قيم x

تمرين 1 :

1. $e^{2x} - 5e^x + 4 = 0$
2. $e^{2x} - e^x - 6 = 0$
3. $e^{-2x} - 7e^{-x} + 6 = 0$
4. $4e^{2x} - e^x + 2 = 0$

[1] لتكن $t = e^x$ فتكون: $t^2 = e^{2x}$

إذاً: $t^2 - 5t + 4 = 0$

$(t-4)(t-1) = 0$

إما $t = 4 \Rightarrow e^x = 4$

مقبول $\Rightarrow \boxed{x = \ln 4}$

أو $t = 1 \Rightarrow e^x = 1$

مقبول $\Rightarrow \boxed{x = 0}$

النجاح يأتي من..

امتلاكك لـ أحلام أكبر من مخاوفك ♡

[2] لتكن $t = e^x$ فتكون: $t^2 = e^{2x}$

إذاً: $t^2 - t - 6 = 0$

$(t-3)(t+2) = 0$

إما $t = 3 \Rightarrow e^x = 3$

مقبول $\Rightarrow \boxed{x = \ln 3}$

أو $t = -2 \Rightarrow e^x = -2$

مستحيلة الحل..

[3] لتكن $t = e^{-x}$ فتكون: $t^2 = e^{-2x}$

إذاً: $t^2 - 7t + 6 = 0$

$(t-6)(t-1) = 0$

إما $t = 6 \Rightarrow e^{-x} = 6$

$\Rightarrow -x = \ln 6 \Rightarrow \boxed{x = -\ln 6}$

أو $t = 1 \Rightarrow e^{-x} = 1$

$\Rightarrow -x = 0 \Rightarrow \boxed{x = 0}$

[4] لتكن $t = e^x$ فتكون: $t^2 = e^{2x}$

إذاً: $4t^2 - t + 2 = 0$

$a = 4\ ,\ b = -1\ ,\ c = 2$

$\Delta = b^2 - 4ac$

$= 1 - 4(4)(2) = -31 < 0$

مستحيلة الحل..

ملاحظة هامة:

في المعادلات التي تحوي مجهول واحد أحياناً نحتاج للإصلاحات من أجل الوصول إلى أحد أنماطها التي وردت معنا والإصلاحات هي:

- النشر
- توحيد مقامات
- النقل
- الاختزال
- تطبيق خواص أسية
- إخراج عامل مشترك
- جداء الطرفين يساوي جداء الوسطين
- نضرب طرفي المعادلة بـ e^x
  عند وجود e^{-x} و e^x معاً
- نضرب طرفي المعادلة بـ e^{2x}
  عند وجود e^{-2x} و e^{2x} معاً

توضيح: في حال:

← كانت الأسس من نفس الإشارة نفرض t

← كانت الأسس مختلفة الإشارة نضرب

ملاحظة خاصة بالتحليل المباشر:

حصراً

1. $x^2 + (1-\sqrt{3})x - \sqrt{3} = 0$
   $(x+1)(x-\sqrt{3}) = 0$

2. $x^2 + (-1-\sqrt{3})x + \sqrt{3} = 0$
   $\rightarrow (x-1)(x-\sqrt{3}) = 0$

3. $x^2 + (-1+e)x - \mathrm{e} = 0$
   $\rightarrow (x-1)(x+e) = 0$

4. $x^2 + (-1-\mathrm{e}^2)x + \mathrm{e}^2 = 0$
   $\rightarrow (x-1)(x-\mathrm{e}^2) = 0$

5. $x^2 - (-1+\mathrm{e}^2)x - \mathrm{e}^2 = 0$
   $x^2 + (+1-\mathrm{e}^2)x - \mathrm{e}^2 = 0$
   $\rightarrow (x+1)(x-\mathrm{e}^2) = 0$

6. $x^2 - (1+e)x + e = 0$
   $x^2 + (-1-e)x + e = 0$
   $\rightarrow (x-1)(x-e) = 0$

تمرين:

حل المعادلات الآتية

1. $e^x - \frac{4}{e^x} = 0$
2. $\frac{e^x}{1-2e^x} = 5$
3. $2e^{-x} = \frac{1}{e^x+2}$
4. $\frac{e^{-x}-1}{e^x-1} = -2$
5. $(e^x-1)(e^x+4) = 1$
6. $e^{3x} - (e^2-1)e^{2x} = e^{x+2}$
7. $e^{2x} - 3e^{x+1} + 2e^2 = 0$
8. $e^{3x+1} + 4e^{2x+1} - 5e^{x+1} = 0$
9. $e^{3x} - (e^2-1)e^{2x} = e^{x+2}$
10. $e^x + \frac{e}{e^x} = 1 + e$
11. $4e^{2x} + e^{-2x} = 5$
12. $(e^x-2)e^x = 2(e^x-2)$
13. $e^{x+2} = \frac{3}{e^x}$
14. $\frac{e^x-1}{e^{2x}+1} = \frac{e^x-2}{e^x+2}$

$\boxed{1}$ $e^x - \frac{4}{e^x} = 0$

$E = R$

$\frac{e^{2x}-4}{e^x} = 0 \Rightarrow e^{2x} - 4 = 0$

$\Rightarrow e^{2x} = 4 \Rightarrow 2x = \ln 4$

$x = \frac{\ln(2)^2}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow x = \frac{2\ln 2}{2} \Rightarrow \boxed{x = \ln 2}$

مقبول

$e^{-x}-1=-2(e^{x}-1)$

$e^{-x}-1=-2e^{x}+2$

$e^{-x}+2e^{x}-3=0$

$e^{-x}\times e^{x}+2e^{x}\times e^{x}-3\times e^{x}=0$

$1+2e^{2x}-3e^{x}=0$

$2e^{2x}-3e^{x}+1=0$

لتكن $t=e^{x}$ فيكون: $t^{2}=e^{2x}$

إذاً: $2t^{2}-3t+1=0$

$a=2\ ,\ b=-3\ ,\ c=1$

$\Delta=b^{2}-4ac$

$=9-4(2)(1)=1$

$t_{1}=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{3-1}{4}=\frac{1}{2}$

$t=\frac{1}{2} \Rightarrow e^{x}=\frac{1}{2}$

$\Rightarrow x=\ln\frac{1}{2} \Rightarrow \boxed{x=-\ln 2}$

مقبول

$t_{2}=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{3+1}{4}=1$

$t=1 \Rightarrow e^{x}=1$

$\Rightarrow \boxed{x=0}$

مرفوض..

5] $(e^{x}-1)(e^{x}+4)=1$

$e^{2x}+4e^{x}-e^{x}-4=1$

$e^{2x}+3e^{x}-5=0$

لتكن $t=e^{x}$ فيكون: $t^{2}=e^{2x}$

2] شروط الحل:

$1-2e^{x}=0$

$-2e^{x}=-1 \Rightarrow e^{x}=\frac{1}{2}$

$x=\ln\left(\frac{1}{2}\right) \Rightarrow x=-\ln 2$

$\Rightarrow E=R/\{-\ln 2\}$

لدينا:

$\frac{e^{x}}{1-2e^{x}}=5$

$(1-2e^{x})5=e^{x}$

$5-10e^{x}-e^{x}=0$

$-11e^{x}=-5 \Rightarrow e^{x}=\frac{5}{11}$

$\Rightarrow x=\ln\frac{5}{11}$

$\Rightarrow \boxed{x=\ln(5)-\ln(11)}$ مقبول

3] $2e^{-x}=\frac{1}{e^{x}+2}$

$E=R$

$2e^{-x}(e^{x}+2)=1$

$2e^{0}+4e^{-x}=1$

$2+4e^{-x}=1 \Rightarrow 4e^{-x}=-1$

$\Rightarrow e^{-x}=-\frac{1}{4}$ مستحيلة الحل

4] شروط الحل:

$e^{x}-1=0$

$e^{x}=1 \Rightarrow x=0$

$\Rightarrow E=R/\{0\}$

لدينا:

$\frac{e^{-x}-1}{e^{x}-1}=-2$

إذاً:

$$t^2+3t-5=0$$

$$a=1\ ,\ b=3\ ,\ c=-5$$

$$\Delta=b^2-4ac$$

$$=9-4(1)(-5)=29$$

$$t_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-3-\sqrt{29}}{2} \simeq 5,3$$

$$t=\frac{-3-\sqrt{29}}{2} \Rightarrow e^x=\frac{-3-\sqrt{29}}{2}$$

مستحيلة الحل..

$$t_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-3+\sqrt{29}}{2}$$

$$t=\frac{-3+\sqrt{29}}{2} \Rightarrow e^x=\frac{-3+\sqrt{29}}{2}$$

$$\Rightarrow x=\ln\left(\frac{-3+\sqrt{29}}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{x=\ln(-3+\sqrt{29})-\ln(2)}$$

مقبول..

6] $e^{3x}-(e^2-1)e^{2x}=e^{x+2}$

$$e^{3x}-(e^2-1)e^{2x}-e^{x+2}=0$$

$$e^x\left(e^{2x}-(e^2-1)e^x-e^2\right)=0$$

إما $e^x=0$ مستحيلة الحل..

أو $e^{2x}-(e^2-1)e^x-e^2=0$

$$e^{2x}+(-e^2+1)e^x-e^2=0$$

نفرض $t=e^x$ فتكون: $t^2=e^{2x}$

$$t^2+(-e^2+1)t-e^2=0$$

$$(t-e^2)(t+1)=0$$

إما $t=e^2 \Rightarrow e^x=e^2$

$$\Rightarrow \boxed{x=2}$$

أو $t=-1 \Rightarrow e^x=-1$

مستحيلة الحل..

7] $e^{2x}-3e^{x+1}+2e^2=0$

$$e^{2x}-3e^x\times e+2e^2=0$$

نفرض $t=e^x$ فتكون: $t^2=e^{2x}$

$$t^2-3et+2e^2=0$$

$$a=1\ ,\ b=-3e\ ,\ c=2e^2$$

$$\Delta=b^2-4ac$$

$$=9e^2-4(1)(2e^2)$$

$$=9e^2-8e^2=e^2$$

$$t_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{3e-e}{2}=e$$

$$t=e \Rightarrow e^x=e$$

$$\Rightarrow \boxed{x=1}$$

$t_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{3e+e}{2} = 2e$

$\Rightarrow t = 2e \Rightarrow e^x = 2e$

$\Rightarrow x = \ln(2e)$

$\Rightarrow x = \ln(2) + \ln(e)$

$\Rightarrow \boxed{x = \ln 2 + 1}$

8] $e^{3x+1} + 4e^{2x+1} - 5e^{x+1} = 0$

$e^{x+1}(e^{2x} + 4e^x - 5) = 0$

إما $e^{x+1} = 0$ مستحيلة الحل..

أو $e^{2x} + 4e^x - 5 = 0$

بفرض $t = e^x$ ⇐ $t^2 = e^{2x}$

$t^2 + 4t - 5 = 0$

$(t+5)(t-1) = 0$

إما $t = -5$

$e^x = -5$ مستحيلة الحل..

أو $t = 1$

$e^x = 1 \Rightarrow \boxed{x = 0}$

9] $e^{3x} - (e^2-1)e^{2x} = e^{x+2}$

$e^{3x} - (e^2-1)e^{2x} - e^{x+2} = 0$

$e^x\left(e^{2x} + (-e^2+1)e^x - e^2\right) = 0$

إما $e^x = 0$ مستحيلة الحل..

أو $e^{2x} + (-e^2+1)e^x - e^2 = 0$

لتكن $t = e^x$ فتكون: $t^2 = e^{2x}$

$t^2 + (-e^2+1)t - e^2 = 0$

$(t - e^2)(t+1) = 0$

إما $t = e^2$

$e^x = e^2 \Rightarrow \boxed{x = 2}$

أو $t = -1$

$e^x = -1$ مستحيلة الحل..

10] $e^x + \frac{e}{e^x} = 1 + e$

$\frac{e^{2x} + e}{e^x} - (1+e) = 0$

$\frac{e^{2x} + e - e^x - e^{x+1}}{e^x} = 0$

$e^{2x} - e^x - e^x \times e + e = 0$

$e^{2x} + e^x(-1-e) + e = 0$

لتكن $t = e^x$ فتكون: $t^2 = e^{2x}$

$t^2 + t(-1-e) + e = 0$

$(t-1)(t-e) = 0$

إما $t = 1$

$e^x = 1 \Rightarrow x = 0$

أو $t = e$

0940916753

إعداد المدرس خالد سليمان عامر

12) $(e^x - 2)e^x = 2(e^x - 2)$

$e^{2x} - 2e^x = 2e^x - 4$

$e^{2x} - 4e^x + 4 = 0$

نفرض: $t = e^x \Rightarrow t^2 = e^{2x}$

$t^2 - 4t + 4 = 0$

$(t-2)(t-2) = 0$

$\Rightarrow t = 2$

$e^x = 2 \Rightarrow \boxed{x = \ln 2}$

13) $e^{x+2} = \dfrac{3}{e^x}$

$e^{2x+2} = 3$

$e^{2x} \times e^2 = 3$

$e^{2x} = 3e^2 \Rightarrow 2x = \ln(3e^2)$

$\Rightarrow 2x = \ln 3 + \ln e^2$

$2x = \ln 3 + 2(1)$

$\Rightarrow \boxed{x = \dfrac{\ln 3 + 2}{2}}$

14) $\dfrac{e^x - 1}{e^{2x} + 1} = \dfrac{e^x - 2}{e^x + 2}$

$(e^x - 1)(e^x + 2) = (e^x - 2)(e^{2x} + 1)$

$e^{2x} + 2e^x - e^x \cancel{-2} = e^{3x} + e^x - 2e^{2x} \cancel{-2}$

$e^{2x} + e^x - e^{3x} - e^x + 2e^{2x} = 0$

$e^x = e \Rightarrow \boxed{x = 1}$

11) $4e^{2x} + e^{-2x} = 5$

$4e^{4x} + 1 = 5e^{2x}$

$4e^{4x} - 5e^{2x} + 1 = 0$

نأخذ $t = e^{2x}$ فتكون: $t^2 = e^{4x}$

$4t^2 - 5t + 1 = 0$

$a = 4 \quad , b = -5 \; , c = 1$

$\Delta = b^2 - 4ac$

$= 25 - 4(4)(1) = 9$

$t_1 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{5-3}{8} = \dfrac{1}{4}$

$t = \dfrac{1}{4}$

$e^{2x} = \dfrac{1}{4} \Rightarrow 2x = \ln \dfrac{1}{4}$

$\Rightarrow 2x = -\ln 4$

$2x = -\ln(2)^2 \Rightarrow 2x = -2\ln 2$

$\Rightarrow \boxed{x = -\ln 2}$

$t_2 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{5+3}{8} = 1$

$t = 1$

$e^{2x} = 1 \Rightarrow 2x = 0$

$\Rightarrow \boxed{x = 0}$

0940916753

إعداد المدرس خالد سليمان عامر

$-e^{3x} + 3e^{2x} = 0$

$e^{2x}(-e^{x} + 3) = 0$

إما $e^{2x} = 0$ مستحيلة الحل..

أو $-e^{x} + 3 = 0$

$e^{x} = 3 \Rightarrow \boxed{x = \ln 3}$

النمط الرابع:

شكل المعادلة:

جملة معادلتين تحوي $e^{\text{اس}}$

نص السؤال: جد الحل المشترك لجملة المعادلتين

فكرة الحل:

* نحدد شرط الحل (عند اللزوم)
* نصلح باستخدام إصلاحات وخواص مناسبة للحصول على معادلتين بمجهولين نحلها إما بالحذف بالجمع أو الحذف بالتعويض

تمرين:

في كل حالة آتية جد الحل المشترك لجملة المعادلتين:

1. $\begin{cases} e^x - \frac{1}{e}e^y = 1 \\ 2e^x + e^y = 4 + e \end{cases}$

2. $\begin{cases} e^{4x}e^y = \frac{1}{e^2} \\ xy = -2 \end{cases}$

3. $\begin{cases} 3e^x - e^{y+3} - 2e^2 = 0 \\ x + y = 1 \end{cases}$

$1-\begin{cases} e^x - \frac{1}{e} e^y = 1 \quad .. \boxed{1} \\ 2e^x + e^y = 4 + e \quad .. \boxed{2} \end{cases}$

نضرب المعادلة $\boxed{1}$ بالعدد -2:

$-2e^x + \frac{2}{e} e^y = -2 \quad .. \boxed{1}'$

بجمع $\boxed{1}'$ و $\boxed{2}$ نجد:

$\frac{2}{e} e^y + e^y = 2 + e$

$e^y\left(\frac{2}{e} + 1\right) = 2 + e$

$e^y\left(\frac{2+e}{e}\right) = 2 + e$

$e^y = \frac{2+e}{\frac{2+e}{e}}$

$\Rightarrow e^y = e \Rightarrow \boxed{y = 1}$

نعوض في $\boxed{2}$ فنجد:

$2e^x + e = 4 + e$

$2e^x = 4 \Rightarrow e^x = 2$

$\Rightarrow \boxed{x = \ln 2}$

$2-\begin{cases} e^{4x} \times e^y = \frac{1}{e^2} \quad .. \boxed{1} \\ xy = -2 \quad .. \boxed{2} \end{cases}$

من المعادلة $\boxed{2}$ نجد:

$x = \frac{-2}{y}$ *

نعوض في المعادلة $\boxed{1}$:

$e^{-\frac{8}{y}} \times e^y = \frac{1}{e^2}$

$e^{-\frac{8}{y} + y} = \frac{1}{e^2}$

$-\frac{8}{y} + y = \ln\left(\frac{1}{e^2}\right)$

$\frac{-8 + y^2}{y} = \ln(1) - \ln(e)^2$

$\frac{-8 + y^2}{y} = -2\ln e$

$\frac{-8 + y^2}{y} = -2 \Rightarrow \frac{-8 + y^2 + 2y}{y} = 0$

$y^2 + 2y - 8 = 0$

$(y + 4)(y - 2) = 0$

أما $t_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{2e^2-4e^2}{6} = \frac{-e^2}{3}$

$t = \frac{-e^2}{3} \Rightarrow e^x = \frac{-e^2}{3}$

مستحيلة الحل...

أو $t_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{2e^2+4e^2}{6} = e^2$

$t = e^2 \Rightarrow e^x = e^2$

$\Rightarrow \boxed{x = 2}$

أما $y = -4$

نعوضها في $*$:

$x = \frac{-2}{-4} \Rightarrow \boxed{x = \frac{1}{2}}$

أو $y = 2$

نعوضها في $*$:

$x = \frac{-2}{2} \Rightarrow \boxed{x = -1}$

3] $\begin{cases} 3e^x - e^{y+3} - 2e^2 = 0 \ldots \boxed{1} \\ x + y = 1 \ldots \boxed{2} \end{cases}$

من $\boxed{2}$ نجد :

$y = 1 - x$ $(*)$

نعوضها في $\boxed{1}$:

$3e^x - e^{1-x+3} - 2e^2 = 0$

$3e^x - e^{-x+4} - 2e^2 = 0$

نضرب بـ e^x :

$3e^{2x} - e^4 - 2e^{x+2} = 0$

$3e^{2x} - 2e^2 e^x - e^4 = 0$

لتكن $t = e^x$ فتكون : $t^2 = e^{2x}$

$3t^2 - 2e^2 t - e^4 = 0$

$a = 3 \;,\; b = -2e^2 ,\; c = -e^4$

$\Delta = b^2 - 4ac = 4e^4 - 4(3)(-e^4)$

$= 4e^2 + 12e^4 = 16e^4$

المعادلات الأسية:

النمط الرابع	النمط الثالث	النمط الثاني	النمط الأول	الأنماط
جملة معادلتين تحوي $e^{\text{اس}}$	- تكون من أحد الأشكال: * تحوي e^{x} و e^{2x} معاً * تحوي e^{-x} و e^{-2x} معاً * تحوي e^{2x} و e^{4x} معاً * تحوي e^{-2x} و e^{-4x} معاً * تحوي e^{x} و e^{3x} معاً * تحوي e^{-x} و e^{-3x} معاً	عدد $= e^{\text{اس}}$كذا	$e^{\text{اس}}$ كذا $= e^{\text{اس}}$ كذا	شكل المعادلة
جد الحل المشترك لجملة المعادلتين	حل المعادلة الآتية			نص السؤال
* نحدد شرط الحل (عند اللزوم) * نصلح باستخدام إصلاحات وخواص مناسبة للحصول على معادلتين بمجهولين نحلها إما بالحذف بالجمع أو الحذف بالتعويض	١. نضع الفرضية المناسبة مثلاً: المعادلة التي تحوي e^{x} و e^{2x} معاً تكون الفرضية $t = e^{x}$ فيكون $e^{2x} = t^{2}$ وهكذا بقية الحالات.. ٢. نعوض في المعادلة ٣. نحصل على معادلة بدلالة t ٤. نحل المعادلة ٥. نوجد قيم x	* نحدد شرط الحل (عند اللزوم) * نطبق إصلاحات وخواص مناسبة للوصول إلى الشكل: $e^{\text{اس}} =$ عدد أي نعزل e ونميز: العدد سالب أو صفر: تكون المعادلة مستحيلة الحل العدد موجب: ١. نأخذ لوغاريتم الطرفين ٢. فنحصل على معادلة ٣. نحل هذه المعادلة ٤. نحدد الحلول المقبولة والمرفوضة	* نحدد شرط الحل (عند اللزوم) * نطبق إصلاحات وخواص مناسبة للوصول إلى الشكل: $e^{a} = e^{b}$ وهي معادلة تكافئ: $a = b$ * نحل هذه المعادلة * نحدد الحلول المقبولة والمرفوضة	فكرة الحل

المتراجحات الأسية

النمط الأول:

شكل المتراجحة: $e^{\text{اس}}$ كذا $e^{\text{اس}}$ كذا (إشارة تراجح)

نص السؤال: حل المتراجحة الآتية

فكرة الحل:

* نطبق إصلاحات وخواص مناسبة عند اللزوم للوصول إلى الشكل:

e^a (إشارة تراجح) e^b

وهي متراجحة تكافئ:

a (إشارة تراجح) b

* نحل هذه المتراجحة

تمرين 1 :

حل المتراجحات الآتية:

1. $e^{3x-1} > e^2$
2. $e^{2x+1} < e^{-x^2+4}$
3. $e^{x^2-2} \le e^{4-x}$
4. $e^{3x+1} > e^{\frac{1}{x}}$
5. $e^{x^2}.e^{-3} < (e^x)^2$
6. $e^{x^2}.e^{2x} \ge e^{5x}.e^4$
7. $\frac{e^{x^2}}{e^2} \le (e^x)^3.e$

(1 $e^{3x-1} > e^2$

$3x-1 > 2 \Rightarrow 3x > 3$

$\Rightarrow x > 1 \Rightarrow S =]1, +\infty[$

(2 $e^{2x+1} < -x^2+4$

$2x+1 < -x^2+4$

$+x^2+2x-3 < 0$

$x^2+2x-3=0$

$(x+3)(x-1)=0$

إما $x=-3$ أو $x=1$

x	$-\infty$ ... -3 ... 1 ... $+\infty$		
x^2+2x-3	+ 0	− 0	+
<0	غير محققة	محققة	غير محققة

$S =]-3, 1[$

(3 $e^{x^2-2} \le e^{4-x}$

$x^2-2 \le 4-x$

$x^2+x-6 \le 0$

$x^2+x-6=0$

$(x+3)(x-2)=0$

إما $x=-3$ أو $x=2$

x	$-\infty$ ... -3 ... 2 ... $+\infty$		
x^2+x-6	+ 0	− 0	+
≤ 0	غير محققة	محققة	غير محققة

$S = [-3, 2]$

(4 $e^{3x+1} > e^{\frac{1}{x}}$

$3x+1 > \frac{1}{x}$

$3x+1 - \frac{1}{x} > 0$

يا طالبي..

طمأنَ اللهُ روحك، وردَّ إليك قلبك، وباعدَ بينك والقلق، وجمع عليكَ نفسَك، وجعلَك أثراً لا يُمحى، وثبّت خطاكَ، وأحبَّك..

$$\frac{3x^2+x-1}{x} > 0$$

نعدم البسط :

$3x^2+x-1=0$

$a=3\ ,\ b=1\ ,\ c=-1$

$\Delta = b^2-4ac = 1-4(3)(-1)=13$

$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{+1-\sqrt{13}}{6}$

$x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{+1+\sqrt{13}}{6}$

نعدم المقام : $x=0$

x	$-\infty$ $\quad \frac{1-\sqrt{13}}{6} \quad$ 0 $\quad \frac{1+\sqrt{13}}{6} \quad$ $+\infty$			
$3x^2+x-1$	$+$ 0 $-$	$-$	$-$ 0	$+$
x	$-$	$-$ 0	$+$	$+$
الكسر	$-$ 0	$+$	$-$ 0	$+$
>0	غير محققة	محققة	غير محققة	محققة

$S = \left]\frac{1-\sqrt{13}}{6}, 0\right[\cup \left]\frac{1+\sqrt{13}}{6}, +\infty\right[$

(5 $e^{x^2} \times e^{-3} < (e^x)^2$

$e^{x^2-3} < e^{2x}$

$x^2-3 < 2x \Rightarrow x^2-2x-3<0$

$x^2-2x-3=0$

$(x-3)(x+1)=0$

إما $x=3$ أو $x=-1$

x	$-\infty$ $\quad -1 \quad$ 3 $\quad +\infty$		
x^2-2x-3	$+$ 0	$-$ 0	$+$
<0	غير محققة	محققة	غير محققة

$S =]-1, 3[$

(6 $e^{x^2} \times e^{2x} > e^{5x} \times e^4$

$e^{x^2+2x} > e^{5x+4}$

$x^2+2x > 5x+4$

$x^2-3x-4 \geq 0$

$(x^2-3x-4)=0$

$(x-4)(x+1)=0$

إما $x=4$ أو $x=-1$

x	$-\infty$ $\quad -1 \quad$ 4 $\quad +\infty$		
x^2-3x-4	$+$ 0	$-$ 0	$+$
≥ 0	محققة	غير محققة	محققة

$S =]-\infty, -1] \cup [4, +\infty[$

(7 $\frac{e^{x^2}}{e^2} \leq (e^x)^3 e$

$e^{x^2-2} \leq e^{3x+1}$

$x^2-2 \leq 3x+1$

0940916753

إعداد المدرس خالد سليمان عامر

$$x^2 - 3x - 3 \leq 0$$

$$x^2 - 3x - 3 = 0$$

$$a = 1 \ , \ b = -3 \ , \ c = -3$$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$= 9 - 4(1)(-3) = 21$$

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{3 - \sqrt{21}}{2}$$

$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{3 + \sqrt{21}}{2}$$

x	$-\infty$	$\frac{3-\sqrt{21}}{2}$		$\frac{3+\sqrt{21}}{2}$	$+\infty$
x^2-3x-3	$+$	0	$-$	0	$+$
≤ 0	غير محققة		محققة		غير محققة

$$S = \left[\frac{3-\sqrt{21}}{2} \ , \ \frac{3+\sqrt{21}}{2}\right]$$

النمط الثاني:

شكل المتراجحة: عدد إشارة $e^{\text{اس}}$ كذا تراجح

نص السؤال: حل المتراجحة الآتية:

فكرة الحل:

1. نطبق إصلاحات وخواص مناسبة للوصول إلى الشكل: عدد إشارة $e^{\text{اس}}$ موجب تراجح
2. نأخذ لوغاريتم الطرفين فنحصل على متراجحة
3. بحل هذه المتراجحة نحصل على المطلوب.

تمرين:

1. $e^{3-x} \geq 0$
2. $e^{3-x} \leq 1$
3. $e^{3x+1} \geq 2$
4. $e^{2x^2-1} \geq 3$ مهم
5. $e^{x+\ln(4)} > \frac{3}{2}$

1) $e^{3-x} \geq 0$

مستحيلة الحل..

$S =]-\infty, +\infty[$

2) $e^{3-x} \leq 1$

$3-x \leq 0 \Rightarrow -x \leq -3$

$\Rightarrow x \geq 3 \Rightarrow S = [3, +\infty[$

3) $e^{3x+1} \geq 2$

$3x+1 \geq \ln 2$

$3x \geq \ln 2 - 1 \Rightarrow x \geq \frac{\ln 2 - 1}{3}$

$\Rightarrow S = [\frac{\ln 2 - 1}{3}, +\infty[$

4) $e^{2x^2-1} \geq 3$

$2x^2 - 1 \geq \ln 3$

$2x^2 - 1 - \ln 3 \geq 0$

$2x^2 - 1 - \ln 3 = 0$

$2x^2 = \ln 3 + 1$

$x^2 = \frac{\ln 3 + 1}{2}$

إما $x = \sqrt{\frac{\ln 3 + 1}{2}}$

أو $x = -\sqrt{\frac{\ln 3 + 1}{2}}$

x	$-\infty$		$-\sqrt{\frac{\ln 3+1}{2}}$		$\sqrt{\frac{\ln 3+1}{2}}$		$+\infty$
المقدار		+	0	−	0	+	
≥ 0		محققة		غير محققة		محققة	

$S =]-\infty, -\sqrt{\frac{\ln 3+1}{2}}] \cup [\sqrt{\frac{\ln 3+1}{2}}, +\infty[$

5) $e^{x+\ln 4} > \frac{3}{2}$

$x + \ln 4 > \ln \frac{3}{2}$

$\Rightarrow x > \ln 3 - \ln 2 - \ln 4$

$x > \ln\left(\frac{3}{8}\right)$

$\Rightarrow S =]\ln \frac{3}{8}, +\infty[$

إضافي .. $e^{5-x} < 0$

$S = \emptyset$

النمط الثالث:

شكل المتراجحة:

- تكون المتراجحة من أحد الأشكال:
  - تحوي e^x و e^{2x} معاً
  - تحوي e^{-x} و e^{-2x} معاً
  - تحوي e^{2x} و e^{4x} معاً
  - تحوي e^{-2x} و e^{-4x} معاً
  - تحوي e^x و e^{3x} معاً

تحوي e^{-x} و e^{-3x} معاً

نص السؤال: حل المتراجحة الآتية

فكرة الحل:

1. ننقل جميع الحدود إلى الطرف الأيسر ونجعل الصفر في الطرف الأيمن
2. نحول إلى معادلة ونحلها وفق:
   - نضع الفرضية المناسبة مثلاً:
     المعادلة التي تحوي e^x و e^{2x} معاً تكون الفرضية $t = e^x$ فيكون $e^{2x} = t^2$
   - وهكذا بقية الحالات..
3. نعوض في المعادلة
4. نحل المعادلة بدلالة t
5. نوجد قيم x
6. ننظم جدول الإشارة (ثلاثة حقول، نصيحة ضع الإشارة باستخدام القيم الاختيارية)
7. نحدد S حلول المتراجحة

تمرين:

1. $e^{2x} - 5e^x > -4$
2. $e^{2x} + 5e^x - 6 > 0$
3. $(e^x - 1)(e^x - 4) < 0$
4. $(e^x - 2)e^x > 2(e^x - 2)$

(1 $e^{2x} - 5e^x > -4$

$e^{2x} - 5e^x + 4 > 0$

$e^{2x} - 5e^x + 4 = 0$

لتكن: $t = e^x$ فتكون: $t^2 = e^{2x}$

$t^2 - 5t + 4 = 0$

$(t-4)(t-1) = 0$

إما $t = 4$

$e^x = 4 \Rightarrow x = \ln 4$

أو $t = 1$

$e^x = 1 \Rightarrow x = 0$

x	$-\infty$ 0 $\ln 4$ $+\infty$		
$e^{2x} - 5e^x + 4$	$+$ 0 $-$ 0 $+$		
>0	محققة	غير محققة	محققة

$S =]-\infty, 0[\cup]\ln 4, +\infty[$

(2 $e^{2x} + 5e^x - 6 > 0$

$e^{2x} + 5e^x - 6 = 0$

لتكن: $t = e^x$ فتكون: $t^2 = e^{2x}$

$t^2 + 5t - 6 = 0$

$(t+6)(x-1) = 0$

إما $t = -6$

$e^x = -6$ مستحيلة الحل

أو $t = 1$

$e^x = 1 \Rightarrow x = 0$

x	$-\infty$ 0 $+\infty$	
$e^{2x} + 5e^x - 6$	$-$ 0 $+$	
>0	غير محققة	محققة

$S =]0, +\infty[$

(3 $(e^x - 1)(e^x - 4) < 0$

$e^{2x} - 4e^x - e^x + 4 < 0$

$e^{2x} - 5e^x + 4 < 0$

إعداد المدرس خالد سليمان عامر

$e^{2x}-5e^{x}+4=0$

لنفرض: $t=e^{x}$ فتكون: $t^2=e^{2x}$

$t^2-5t+4=0$

$(t-4)(t-1)=0$

إما $t=4 \Rightarrow e^{x}=4$

$\Rightarrow x=\ln 4$

أو $t=+1 \Rightarrow e^{x}=+1$

$\Rightarrow x=0$

x	$-\infty$	0	$\ln 4$	$+\infty$
$e^{2x}-5e^{x}+4$	$+$	0 $-$	0	$+$
<0	محققة	غير محققة		محققة

$S=]0,\ln 4[$

4) $(e^{x}-2)e^{x}>2(e^{x}-2)$

$e^{2x}-2e^{x}>2e^{x}-4$

$e^{2x}-4e^{x}+4>0$

$e^{2x}-4e^{x}+4=0$

لنفرض: $t=e^{x}$ فتكون: $t^2=e^{2x}$

$t^2-4t+4=0$

$(t-2)^2=0$

$t-2=0 \Rightarrow t=2$

$\Rightarrow x=\ln 2$

x	$-\infty$	$\ln 2$	$+\infty$
$e^{2x}-4e^{x}+4$	$+$	0	$+$
>0	محققة		محققة

$\Rightarrow S=]-\infty,\ln 2[\cup]\ln 2,+\infty[$

ملاحظة:

في النمط الثالث من المتراجحات الأسية وعند وضع الإشارات في الجدول نميز:

- المعادلة حلان ⇐ نضع الإشارات كما في الدرجة الثانية.
- غير ذلك ⇐ استخدم أسلوب القيم الاختيارية.

ملاحظة:

لتحديد إشارة $\ln(\alpha)$ نميز:

- $\alpha>1$ يكون $\ln\alpha$ موجب تماماً
- $\alpha=1$ يكون $\ln\alpha$ يساوي الصفر
- $\alpha<1$ يكون $\ln\alpha$ سالب تماماً.

0940916753

إعداد المدرس خالد سليمان عامر

ملاحظة هامة:
في المتراجحات التي تحوي مجهول واحد أحياناً نحتاج للإصلاحات من أجل الوصول إلى أحد أنماطها التي وردت معنا والإصلاحات هي:

- النشر
- توحيد مقامات
- النقل
- الاختزال
- تطبيق خواص أسية
- إخراج عامل مشترك
- نضرب طرفي المعادلة بـ e^x عند وجود e^{-x} و e^x معاً
- نضرب طرفي المعادلة بـ e^{2x} عند وجود e^{-2x} و e^{2x} معاً

توضيح: في حال:
← كانت الأسس من نفس الإشارة نفرض t
← كانت الأسس مختلفة الإشارة نضرب

تمرين 1 :

1. $e^x - 4e^{-x} \le 0$
2. $e^{2x} - 2e^{-x} - 3 < 0$
3. $e^{x+2} \ge \frac{3}{e^x}$
4. $e^x + 4e^{-x} \le 5$
5. $4e^{2x} + e^{-2x} \le 5$
6. $\frac{e^x-1}{e^{2x}+1} < \frac{e^x-2}{e^x+2}$

1) $e^x - 4e^{-x} \le 0$

نضرب بـ e^x :

$e^{2x} - 4 \le 0 \Rightarrow e^{2x} \le 4$

$\Rightarrow 2x \le \ln 4 \Rightarrow 2x \le 2\ln 2$

$x \le \ln 2$

$\Rightarrow S =]-\infty, \ln 2]$

2) $e^{2x} - 2e^{-x} - 3 < 0$

نضرب بـ e^x :

$e^{3x} - 2 - 3e^x < 0$

$e^{3x} - 3e^x - 2 < 0$

$e^{3x} - 3e^x - 2 = 0$

لتكن $t = e^x$ فتكون: $t^3 = e^{3x}$

$t^3 - 3t - 2 = 0$

نلاحظ أن $-1 = t$ تحقق المعادلة إذاً نقسم على $t+1$:

$$\begin{array}{r|l} & t^2 - t - 2 \\ \hline t+1 & t^3 - 3t - 2 \\ & -t^3 - t^2 \\ \hline & -t^2 - 3t - 2 \\ & \pm t^2 \pm t \\ \hline & -2t - 2 \\ & \pm 2t \pm 2 \\ \hline & 0 \quad 0 \end{array}$$

$(t+1)(t^2 - t - 2) = 0$

إما $t + 1 = 0 \Rightarrow t = -1$

$\Rightarrow e^x = -1$ مستحيلة الحل

أو $t^2 - t - 2 = 0$

$(t-2)(t+1) = 0$

إما $t = 2 \Rightarrow e^x = 2$

$\Rightarrow x = \ln 2$

أو $t = -1 \Rightarrow e^x = -1$

مستحيلة الحل

x	$-\infty$ $\ln 2$ $+\infty$	
$e^{3x}-3e^{x}-2$	$-$ 0	$+$
≤ 0	محققة	غير محققة

$S =]\ln 2, +\infty[$

3) $e^{x+2} \geq \frac{3}{e^{x}}$

$e^{x+2} \geq 3e^{-x}$

نضرب بـ e^{x} :

$e^{2x+2} \geq 3$

$2x+2 \geq 3 \Rightarrow 2x \geq 1$

ليس الأمر أني عبقري..
كل ما هنالك أني أجاهد مع المشاكل لفترة أطول

$\Rightarrow x \geq \frac{1}{2} \Rightarrow S = [\frac{1}{2}, +\infty[$

4) $e^{x} + 4e^{-x} \leq 5$

نضرب بـ e^{x} :

$e^{2x} + 4 \leq 5e^{x}$

$e^{2x} - 5e^{x} + 4 \leq 0$

$e^{2x} - 5e^{x} + 4 = 0$

لنأخذ: $t = e^{x}$ فيكون: $t^{2} = e^{2x}$

$t^{2} - 5t + 4 = 0$

$(t-4)(t-1) = 0$

إما $t = 4 \Rightarrow e^{x} = 4$

$\Rightarrow x = \ln 4$

أو $t = 1 \Rightarrow e^{x} = 1$

$\Rightarrow x = 0$

x	$-\infty$ 0	$\ln 4$	$+\infty$
$e^{2x}-5e^{x}+4$	$+$ 0	$-$ 0	$+$
≤ 0	غير محققة	محققة	غير محققة

$S = [0, \ln 4]$

6) $\frac{e^{x}-1}{e^{2x}+1} < \frac{e^{x}-2}{e^{x}+2}$

$\frac{e^{x}-1}{e^{2x}+1} - \frac{e^{x}-2}{e^{x}+2} < 0$

$(e^{x}+2) \quad (e^{2x}+1)$

$\frac{(e^{x}-1)(e^{x}+2) - (e^{x}-2)(e^{2x}+1)}{(e^{2x}+1)(e^{x}+2)} < 0$

$\frac{e^{2x} \cancel{+2e^{x}} \cancel{-e^{x}} \cancel{-2} - e^{3x} \cancel{-e^{x}} + 2e^{2x} \cancel{+2}}{(e^{2x}+1)(e^{x}+2)} < 0$

$\frac{-e^{3x} + 3e^{2x}}{(e^{2x}+1)(e^{x}+2)} < 0$

نعدم البسط :

$-e^{3x} + 3e^{2x} = 0$

$e^{2x}(-e^{x} + 3) = 0$

إما $e^{2x} = 0$

مستحيلة الحل

أو $-e^{x} + 3 = 0$

$e^x = 3 \Rightarrow x = \ln 3$

ندرس المقام:

$(e^{2x}+1)(e^x+2) = 0$

إما $e^{2x} = -1$ مستحيلة الحل..

أو $e^x = -2$ مستحيلة الحل..

x	$-\infty$		$\ln 3$		$+\infty$
البسط		$+$	0	$-$	
المقام		$+$		$+$	
الكسر		$+$	0	$-$	
ح		غير محققة		محققة	

$S =]\ln 3, +\infty[$

تمرين 2 :

اشرح لماذا تتفق إشارة $e^x - \frac{4}{e^x}$ مع إشارة $(e^x - 2)$ ؟ ثم حل المتراجحة $e^x - \frac{4}{e^x} < 0$

▪ دراسة إشارة : $e^x - \frac{4}{e^x}$:

$\frac{e^{2x} - 4}{e^x} = 0 \Rightarrow e^{2x} - 4 = 0$

$\Rightarrow e^{2x} = 4 \Rightarrow 2x = \ln 4$

$2x = 2\ln 2 \Rightarrow \boxed{x = \ln 2}$

x	$-\infty$ $\quad$ $\ln 2$ $\quad$ $+\infty$
$e^{2x} - 4$	$-$ $\quad$ 0 $\quad$ $+$

▪ دراسة إشارة : $e^x - 2$:

$e^x - 2 = 0 \Rightarrow e^x = 2$

$\Rightarrow \boxed{x = \ln 2}$

x	$-\infty$ $\quad$ $\ln 2$ $\quad$ $+\infty$
$e^x - 2$	$-$ $\quad$ 0 $\quad$ $+$

مما سبق نستنتج أن إشارة $e^x - \frac{4}{e^x}$

من إشارة $e^x - 2$.

▪ حل المتراجحة : $\frac{e^{2x} - 4}{e^x} < 0$

نعدم البسط : $e^{2x} - 4 = 0$

وهذه معادلة تم حلها سابقاً .

نعدم المقام : $e^x = 0$ مستحيلة الحل ..

x	$-\infty$		$\ln 2$		$+\infty$
البسط		$-$	0	$+$	
المقام		$+$		$+$	
الكسر		$-$	0	$+$	
<0		محققة		غير محققة	

$S =]-\infty , \ln 2[$

تمرين 3 :

حل كلاً من المعادلة $\ln(e^x - 2) = 3$

والمتراجحة $\ln(2 - e^x) \geq 3$

■ حل المعادلة :

$\ln(e^x - 2) = 3$

$e^x - 2 =$

$e^x = e^3 + 2$

$\Rightarrow \boxed{x = \ln(e^3 + 2)}$

■ حل المتراجحة :

$\ln(2 - e^x) \geq 3$

$2 - e^x \geq e^3$

$-e^x \geq e^3 - 2$

$e^x \leq -e^3 + 2$

مستحيلة الحل .. ^^

$\Rightarrow S =]-\infty, +\infty[$

المتراجحات الأسية:

الأنماط	النمط الأول	النمط الثاني	النمط الثالث
شكل المتراجحة	$e^{\text{اس}}$ كذا إشارة تراجح $e^{\text{اس}}$ كذا	عدد إشارة تراجح $e^{\text{اس}}$كذا	- تكون المتراجحة من أحد الأشكال: * تحوي e^x و e^{2x} معاً * تحوي e^{-x} و e^{-2x} معاً * تحوي e^{2x} و e^{4x} معاً * تحوي e^{-2x} و e^{-4x} معاً * تحوي e^x و e^{3x} معاً * تحوي e^{-x} و e^{-3x} معاً
نص السؤال	حل المتراجحة الآتية		
فكرة الحل	* تطبق إصلاحات وخواص مناسبة عند اللزوم للوصول إلى الشكل: e^a إشارة تراجح e^b وهي متراجحة تكافئ: a إشارة تراجح b * نحل هذه المتراجحة	* تطبق إصلاحات وخواص مناسبة للوصول إلى الشكل: عدد موجب إشارة تراجح $e^{\text{اس}}$ ١. نأخذ لوغاريتم الطرفين فنحصل على متراجحة ٢. بحل هذه المتراجحة نحصل على المطلوب.	١. ننقل جميع الحدود إلى الطرف الأيسر ونجعل الصفر في الطرف الأيمن ٢. نحول إلى معادلة ونحلها وفق: * نضع الفرضية المناسبة مثلاً: المعادلة التي تحويe^x و e^{2x} معاً تكون الفرضية $t = e^x$ فيكون $e^{2x} = t^2$ * وهكذا بقية الحالات.. ٣. نعوض في المعادلة ٤. نحل المعادلة بدلالة t ٥. نوجد قيم x ٦. ننظم جدول الإشارة (ثلاثة حقول, نصيحة ضع الإشارة باستخدام القيم الاختيارية) ٧. نحدد S حلول المتراجحة

لا يمكنك عبور البحر فقط عن طريق الوقوف والتحديق في الماء

مجموعة تعريف التابع الأسي:

التابع الأسي معرف على مجموعة تعريف أسه	
أوجد D_f مجموعة تعريف التابع f	نص السؤال
نوجد مجموعة تعريف الأس فتكون: $D_f =$ مجموعة تعريف الأس	فكرة الحل

ملاحظات:

أوجد D_f مجموعة تعريف التابع f			نص السؤال
التابع f مؤلف من كسر و e^a و e^b	التابع f مؤلف من كسر و e^a	التابع f مؤلف من e^a و e^b	شكل التابع
* نوجد D_1 مجموعة تعريف e^a * نوجد D_2 مجموعة تعريف e^b * نعدم المقام * تكون: $D_f = D_1 \cap D_2 \setminus \{$القيم التي تعدم المقام$\}$	* نوجد D_1 مجموعة تعريف e^a * نعدم المقام * تكون: $D_f = D_1 \setminus \{$القيم التي تعدم المقام$\}$	* نوجد D_1 مجموعة تعريف e^a * نوجد D_2 مجموعة تعريف e^b * تكون: $D_f = D_1 \cap D_2$	فكرة الحل

تمرين:

أوجد مجموعة تعريف التابع f :

1. $f(x) = e^x$
2. $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$
3. $f(x) = e^{\sqrt{x}}$
4. $f(x) = e^x - x$
5. $f(x) = e^x - x^2$
6. $f(x) = e^x - \ln x$
7. $f(x) = e^{2x} - e^x$
8. $f(x) = \frac{2e^x+1}{1+e^x}$
9. $f(x) = \frac{2e^x+1}{1-e^x}$
10. $f(x) = \frac{e^x-1}{e^x+1}$
11. $f(x) = \frac{e^x+1}{e^x-1}$
12. $f(x) = \frac{e^x+1}{2x}$
13. $f(x) = \frac{e^x-1}{2x}$
14. $f(x) = \frac{2e^x-3}{e^x+1}$
15. $f(x) = (3-x)e^x$
16. $f(x) = (x^2-2x)e^x$
17. $f(x) = \frac{e^{\frac{2}{x}+1}}{x}$
18. $f(x) = \frac{e^{\sqrt{x}-1}}{3-e^x}$

1. $f(x) = e^x$

$D_f = \mathbb{R}$

2. $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$

$D_f = \mathbb{R}^*$

3. $f(x) = e^{\sqrt{x}}$

$D_f = [0,+\infty[$

4. $f(x) = e^x - x$

$D_f = \mathbb{R}$

5. $f(x) = e^x - x^2$

$D_f = \mathbb{R}$

6. $f(x) = e^x - \ln x$

$D_f =]0,+\infty[$

7. $f(x) = e^{2x} - e^x$

$D_f = \mathbb{R}$

8. $f(x) = \dfrac{2e^x+1}{1+e^x}$

نعدم المقام:

مستحيل الحل $e^x = -1 \Leftarrow 1 + e^x = 0$

$D_f = \mathbb{R}$

9. $f(x) = \dfrac{2e^x+1}{1-e^x}$

نعدم المقام:

$x = 0 \Leftarrow e^x = 1 \Leftarrow 1 - e^x = 0$

$D_f = \mathbb{R}^*$

10. $f(x) = \dfrac{e^x-1}{e^x+1}$

نعدم المقام:

مستحيل الحل $e^x = -1 \Leftarrow e^x + 1 = 0$

$D_f = \mathbb{R}$

11. $f(x) = \dfrac{e^x+1}{e^x-1}$

نعدم المقام:

$x = 0 \Leftarrow e^x = 1 \Leftarrow e^x - 1 = 0$

$D_f = \mathbb{R}^*$

12. $f(x) = \dfrac{e^x+1}{2x}$

نعدم المقام:

$D_f = \mathbb{R}^* \Leftarrow x = 0 \Leftarrow 2x = 0$

13. $f(x) = \dfrac{e^x-1}{2x}$

نعدم المقام:

$D_f = \mathbb{R}^* \Leftarrow x = 0 \Leftarrow 2x = 0$

14. $f(x) = \dfrac{2e^x-3}{e^x+1}$

نعدم المقام:

مستحيل الحل $e^x = -1 \Leftarrow e^x + 1 = 0$

$D_f = \mathbb{R}$

15. $f(x) = (3-x)e^x$

$D_f = \mathbb{R}$

16. $f(x) = (x^2-2x)e^x$

$D_f = \mathbb{R}$

17. $f(x) = \dfrac{e^{\frac{2}{x}+1}}{x}$

نعدم المقام:

$D_f = \mathbb{R}^* \Leftarrow x = 0$

18. $f(x) = \dfrac{e^{\sqrt{x}}-1}{3-e^x}$

نعدم المقام:

$x = \ln 3 \Leftarrow e^x = 3 \Leftarrow 3 - e^x = 0$

$D_f = \mathbb{R} / \{\ln 3\}$

الـ e بيكبرتث..

نهايات التابع الأسي

مبرهنات:

	المبرهنة	تعميمها	ملاحظات
الأولى	* $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{x} = 0$ * $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{x} = +\infty$		قيم تكتب تجاوزا لسهولة الحفظ: * $e^{+\infty} = +\infty$ * $e^{1} = e$ * $e^{0} = 1$ * $e^{-\infty} = 0$
الثانية	* $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^{x}}{x} = +\infty$ * $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x}{e^{x}} = 0$	تعميم 1 : * $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^{x}}{x^{n}} = +\infty$ * $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^{n}}{e^{x}} = 0$ تعميم 2 : * $\lim\limits_{\text{مقدار}\to+\infty} \frac{e^{\text{مقدار}}}{(\text{مقدار})^{n}} = +\infty$ * $\lim\limits_{\text{مقدار}\to+\infty} \frac{(\text{مقدار})^{n}}{e^{\text{مقدار}}} = 0$	لدينا: * x صغير * e^{x} كبير ونعلم أن: * $\frac{\text{صغير}}{\text{كبير}} = 0$ * $\frac{\text{كبير}}{\text{صغير}} = +\infty$
الثالثة	* $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^{x} = 0$	تعميم 1: * $\lim\limits_{x\to-\infty} x^{n}e^{x} = 0$ تعميم 2 : * $\lim\limits_{x\to-\infty} \text{مقدار}\, e^{\text{مقدار}} = 0$	
الرابعة	* $\lim\limits_{x\to0} \frac{e^{x}-1}{x} = 1$ * $\lim\limits_{x\to0} \frac{x}{e^{x}-1} = 1$	تعميم 1: $\lim\limits_{\text{شغلة}\to0} \frac{e^{\text{شغلة}}-1}{\text{شغلة}} = 1$ تعميم 2: $\lim\limits_{\text{شغلة}\to0} \frac{\text{شغلة}}{e^{\text{شغلة}}-1} = 1$	

المبرهنات نفذ ثم لا تعترض

اعمل بدائرة تأثيرك، بالثغر الذي تُبدِع فيه، استثمر كل لحظة..
التحسينات البسيطة التي فيك، هي عالمك، افرح بها كأنها كلّ انتصاراتك

ملاحظات هامة جداً:

١. يتم إيجاد النهايات عند أطراف مجالات مجموعة التعريف المفتوحة.

٢. الأصل في إيجاد النهايات هو التعويض إلّا في حال وجود مبرهنة فإننا نطبق مباشرةً أي:

- يوجد مبرهنة ← تعويض مباشر
- لا يوجد مبرهنة ← تعويض

٣. التعويض هو استبدال x بالمسعى

٤. في المبرهنة نحفظ:

- شكل التابع
- المسعى
- ونضع الناتج فوراً
- وعند اختلال أحدها فهذا يعني: عدم وجود مبرهنة إنما تعويض

٥. تحذف كلمة $\lim$ عند التعويض أي عند اختفاء x

٦. عند ظهور الصفر في المقام يلزم تحديد إشارته ومن أجل ذلك نأخذ قيمة اختيارية من المجال الموافق ونعوضها في المقام فقط

٧. عند ظهور حالة عدم تعيين يجب إزالتها ومن أجل ذلك نصلح التابع باستخدام الإصلاح المناسب , حيث الإصلاحات:

- النشر
- إخراج عامل مشترك
- تفريق الكسور
- توحيد المقامات
- الضرب والقسمة
- التباعد الاجتماعي
- خواص لوغاريتمية (مناسبة)

تمرين:

أوجد D_f واحسب النهايات:

1. $f(x) = e^x - x$
2. $f(x) = e^x - x^2$
3. $f(x) = e^x - \ln(x)$
4. $f(x) = e^{2x} - e^x$
5. $f(x) = \frac{2e^x+1}{1+e^x}$
6. $f(x) = \frac{2e^x+1}{1-e^x}$
7. $f(x) = \frac{e^x-1}{e^x+1}$
8. $f(x) = \frac{e^x+1}{e^x-1}$
9. $f(x) = \frac{e^x+1}{2x}$
10. $f(x) = \frac{e^x-1}{2x}$ نكشف..
11. $f(x) = \frac{2e^x-3}{e^x+1}$
12. $f(x) = (3-x)e^x$
13. $f(x) = (x^2-2x)e^x$
14. $f(x) = (x-1)e^x$
15. ~~$f(x) = (x^2+2x-3)e^x$~~ مكرر..
16. $f(x) = (x^2+2x-3)e^x$
17. $f(x) = (x^3+1)e^x$
18. $f(x) = e^{2x} + e^x - 3$
19. $(x) = e^{2x} - e^x + 3$
20. $f(x) = e^{2x} - x + 3$
21. $f(x) = x + 1 + xe^x$
22. $f(x) = 2e^x - x + 1$
23. $f(x) = 2x - 1 + e^{-x}$ نكشف..
24. $f(x) = 2e^{-x} + x - 2$
25. $f(x) = (x^2 - x + 1)e^{-x}$
26. $f(x) = \frac{e^x-1}{1+e^{-x}}$
27. $f(x) = x - 1 + e^{-2x}$ نكشف..
28. $f(x) = x + 1 + 4e^{-x}$

I. $f(x) = e^x - x \; ; D_f = \mathbb{R}$

- $\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$

- $\lim_{x \to +\infty} f(x) \; \infty - \infty$ حالة عدم تعيين

$f(x) = e^x - x$

علماً بأن:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$$

4] $f(x) = e^{2x} - e^x \; ; D_f = \mathbb{R}$

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) \quad \infty - \infty$ حالة عدم تعيين

$f(x) = e^{2x} - e^x = e^x(e^x - 1)$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

5] $f(x) = \dfrac{2e^x + 1}{1 + e^x} \; ; D_f = \mathbb{R}$

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 1$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) \quad \dfrac{\infty}{\infty}$ حالة عدم تعيين

$f(x) = \dfrac{2e^x + 1}{1 + e^x} = \dfrac{\cancel{e^x}\left(2 + \frac{1}{e^x}\right)}{\cancel{e^x}\left(\frac{1}{e^x} + 1\right)}$

$f(x) = \dfrac{2 + \frac{1}{e^x}}{\frac{1}{e^x} + 1}$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 2$

6] $f(x) = \dfrac{2e^x + 1}{1 - e^x}$

$D_f =]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$

$f(x) = x\left(\dfrac{e^x}{x} - 1\right)$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

علماً أن:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$$

2] $f(x) = e^x - x^2 \; ; D_f = \mathbb{R}$

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) \quad \infty - \infty$ حالة عدم تعيين

$f(x) = e^x - x^2 = e^x\left(1 - \dfrac{x^2}{e^x}\right)$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

علماً أن:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2}{e^x} = 0$$

3] $f(x) = e^x - \ln x \; ; D_f =]0, +\infty[$

$\lim_{x \to 0} f(x) = +\infty$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) \quad \infty - \infty$ حالة عدم تعيين

$f(x) = e^x - \ln x$

$f(x) = x\left(\dfrac{e^x}{x} - \dfrac{\ln x}{x}\right)$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 1$

$\lim\limits_{x\to0^-} f(x) = \frac{3}{0^+} = +\infty$

$\lim\limits_{x\to0^+} f(x) = \frac{3}{0^-} = -\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ $\frac{\infty}{\infty}$ حالة عدم تعيين

$f(x) = \frac{2e^x+1}{1-e^x} = \frac{\cancel{e^x}(2+\frac{1}{e^x})}{\cancel{e^x}(\frac{1}{e^x}-1)}$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -2$

8) $f(x) = \frac{e^x+1}{e^x-1}$; $D_f = \mathbb{R}^*$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -1$

$\lim\limits_{x\to0^-} f(x) = \frac{2}{0^-} = -\infty$

$\lim\limits_{x\to0^+} f(x) = \frac{2}{0^+} = +\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ $\frac{\infty}{\infty}$ حالة عدم تعيين

$f(x) = \frac{e^x+1}{e^x-1} = \frac{\cancel{e^x}(1+\frac{1}{e^x})}{\cancel{e^x}(1-\frac{1}{e^x})}$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$

دائماً..

التّعب يرحل، يزول.. وتبقى كلّ بذرةٍ غرستها وأنتَ مُتعب، تلك الثمرة التي كُنتَ تقول لها: ذاتَ يومٍ نَصِل

7) $f(x) = \frac{e^x-1}{e^x+1}$; $D_f = \mathbb{R}$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \frac{0-1}{0+1} = -1$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ $\frac{\infty}{\infty}$ حالة عدم تعيين

$f(x) = \frac{e^x-1}{e^x+1} = \frac{\cancel{e^x}(1-\frac{1}{e^x})}{\cancel{e^x}(1+\frac{1}{e^x})}$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$

9) $f(x) = \frac{e^x+1}{2x}$; $D_f = \mathbb{R}^*$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \frac{1}{-\infty} = 0$

$\lim\limits_{x\to0^-} f(x) = \frac{2}{0^-} = -\infty$

$\lim\limits_{x\to0^+} f(x) = \frac{2}{0^+} = +\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ $\frac{\infty}{\infty}$ حالة عدم تعيين

$$f(x) = \frac{e^x+1}{2x} = \frac{e^x}{2x} + \frac{1}{2x}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \frac{1}{2}(+\infty)+0 = +\infty \,,$$

علماً أن:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$$

$\boxed{10}$ ▪ $f(x) = \dfrac{e^x-1}{2x} \;;\; D_f = \mathbb{R}^*$

▪ $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$

▪ $\displaystyle\lim_{x\to 0} f(x) \quad \frac{0}{0}$ حالة عدم تعيين

$$f(x) = \frac{e^x-1}{2x} = \frac{1}{2}\,\frac{e^x-1}{x}$$

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \frac{1}{2}(1) = \frac{1}{2}$$

علماً أن:

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} = 1$$

▪ $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = \frac{\infty}{\infty}$ حالة عدم تعيين

$$f(x) = \frac{e^x-1}{2x} = \frac{\cancel{x}\left(\frac{e^x}{x} - \frac{1}{x}\right)}{2\cancel{x}}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

علماً أن: $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$

$\boxed{11}$ ▪ $f(x) = \dfrac{2e^x-3}{e^x+1} \;;\; D_f = \mathbb{R}$

▪ $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} f(x) = -3$

▪ $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) \quad \frac{\infty}{\infty}$ حالة عدم تعيين

$$f(x) = \frac{2e^x-3}{e^x-1} = \frac{e^x\left(2-\frac{3}{e^x}\right)}{e^x\left(1-\frac{1}{e^x}\right)}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 2$$

$\boxed{12}$ ▪ $f(x) = (3-x)e^x \;;\; D_f = \mathbb{R}$

▪ $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} f(x) \; (\infty)(0)$ حالة عدم تعيين

$$f(x) = (3-x)e^x = 3e^x - xe^x$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0-0 = 0$$

علماً أن:

$$\lim_{x\to-\infty} xe^x = 0$$

▪ $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$

$f(x) = (x^2+2x-3)e^x$

$f(x) = x^2e^x + 2xe^x - 3e^x$

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0 + 2(0) - 3(0) = 0$

علماً أنّ:

$\lim_{x\to-\infty} x^2 \cdot e^x = 0 , \lim_{x\to-\infty} xe^x = 0$

• $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

16 نفس 15 مكرر

17 ▪ $f(x) = (x^3+1)e^x ; D_f = R$

• $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ $(\infty)(0)$ حالة عدم تعيين

$f(x) = (x^3+1)e^x$

$f(x) = x^3e^x + e^x$

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0 + 0 = 0$

علماً أنّ:

$\lim_{x\to-\infty} x^3e^x = 0$

• $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

18 ▪ $f(x) = e^{2x} + e^x - 3 ; D_f = R$

• $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -3$

• $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

13 ▪ $f(x) = (x^2-2x)e^x ; D_f = R$

• $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ $(\infty)(0)$ حالة عدم تعيين

$f(x) = (x^2-2x)e^x = x^2e^x - 2xe^x$

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0 - 0 = 0$

علماً أنّ:

$\lim_{x\to-\infty} x^2e^x = 0 , \lim_{x\to-\infty} xe^x = 0$

• $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

14 ▪ $f(x) = (x-1)e^x ; D_f = R$

• $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ $(\infty)(0)$ حالة عدم تعيين

$f(x) = (x-1)e^x = xe^x - e^x$

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0 - 0 = 0$

علماً أنّ:

$\lim_{x\to -} xe^x$

• $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

15 ▪ $f(x) = (x^2+2x-3)e^x ; D_f = R$

• $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ $(\infty)(0)$ حالة عدم تعيين

22 $f(x)=2e^{x}-x+1\ ;D_f=\mathbb{R}$

$\lim_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$

$\lim_{x\to+\infty} f(x)$ $\infty-\infty$ حالة عدم تعيين

$f(x)=2e^{x}-x+1=x\left(\frac{2e^{x}}{x}-1+\frac{1}{x}\right)$

$\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

علماً أن:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{x}}{x}=+\infty$$

23 $f(x)=2x-1+e^{-x}\ ;D_f=\mathbb{R}$

$\lim_{x\to-\infty} f(x)$ $\infty-\infty$ حالة عدم تعيين

$f(x)=2x-1+e^{-x}=2x-1+\frac{1}{e^{x}}$

$f(x)=\frac{2xe^{x}-e^{x}+1}{e^{x}}$

$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\frac{0-0+1}{0^{+}}=+\infty$

علماً أن:

$$\lim_{x\to-\infty} xe^{x}=0$$

$\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

19 $f(x)=e^{2x}-e^{x}+3\ ;D_f=\mathbb{R}$

$\lim_{x\to-\infty} f(x)=3$

$\lim_{x\to+\infty} f(x)$ $\infty-\infty$ حالة عدم تعيين

$f(x)=e^{2x}-e^{x}+3=e^{x}\left(e^{x}-1+\frac{3}{e^{x}}\right)$

$\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty(+\infty)=+\infty$

20 $f(x)=e^{2x}-x+3\ ;D_f=\mathbb{R}$

$\lim_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$

$\lim_{x\to+\infty} f(x)$ $\infty-\infty$ حالة عدم تعيين

$f(x)=e^{2x}-x+3=e^{x}\left(e^{x}-\frac{x}{e^{x}}+\frac{3}{e^{x}}\right)$

$\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty(+\infty)=+\infty$

علماً أن:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{e^{x}}=0$$

21 $f(x)=x+1+xe^{x}\ ;D_f=\mathbb{R}$

$\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$

$\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

27 $f(x) = x - 1 + e^{-2x}$; $D_f = R$

$\lim_{x \to -\infty} f(x)$ $\infty - \infty$ حالة عدم تعيين

$f(x) = x - 1 + e^{-2x} = x - 1 + \frac{1}{e^{2x}}$

$f(x) = \frac{x e^{2x}}{e^{2x}} - \frac{e^{2x}}{e^{2x}} + \frac{1}{e^{2x}}$

$f(x) = \frac{2x e^{2x}}{2e^{2x}} - 1 + \frac{1}{e^{2x}}$

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0 - 1 + 0 = -1$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

28 $f(x) = x + 1 + 4e^{-x}$; $D_f = R$

$\lim_{x \to -\infty} f(x)$ $\infty - \infty$ حالة عدم تعيين

$f(x) = x + 1 + \frac{4}{e^x} = \frac{xe^x + e^x + 4}{e^x}$

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \frac{4}{0^+} = +\infty$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

24 $f(x) = 2e^{-x} + x - 2$; $D_f = R$

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty - \infty$ حالة عدم تعيين

$f(x) = 2e^{-x} + x - 2 = x\left(\frac{2}{xe^x} + 1 - \frac{2}{x}\right)$

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty(+\infty) = -\infty$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$

25 $f(x) = (x^2 - x + 1)e^{-x}$; $D_f = R$

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty(+\infty) = +\infty$

$\lim_{x \to +\infty} f(x)$ $\infty(0)$ حالة عدم تعيين

$f(x) = (x^2 - x + 1)e^{-x}$

$f(x) = \frac{x^2 - x + 1}{e^x} = \frac{x^2}{e^x} - \frac{x}{e^x} + \frac{1}{e^x}$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0 - 0 + 0 = 0$

26 $f(x) = \frac{e^x - 1}{1 - e^{-x}}$; $D_f = R$

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \frac{-1}{+\infty} = 0$

0940916753

إعداد المدرس خالد سليمان عامر

ملاحظة هامة:

أحياناً يكون التابع f عبارة عن أسي أسه تابع آخر $g(x)$ فإننا لإيجاد نهاية التابع f نتبع الخطوات:

* نوجد نهاية التابع الآخر $g(x)$
* نعوض ناتج النهاية بدلاً من الأس

تمرين:

أوجد D_f واحسب النهايات:

1. $f(x) = e^{x^2-2x}$
2. $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$
3. $f(x) = e^{\frac{x+1}{x-2}}$
4. $f(x) = e^{\sqrt{x^2+1}-x}$
5. $f(x) = e^{x\ln(x)}$
6. $f(x) = -x + ln(e^x + 1)$ نشاط..
7. $f(x) = 2x + ln(1 - e^{-x} + e^{-2x})$
8. $f(x) = x + ln(x^2 - 1)$
9. $f(x) = ln(e^x + 3)$
10. $f(x) = ln(e^{2x} - e^x + 1)$
11. $f(x) = ln(e^{-x} + 1)$

1] $f(x) = e^{x^2-2x}$; $D_f = \mathbb{R}$

• عند $-\infty$:

لما كان: $\lim_{x \to -\infty} (x^2 - 2x) = +\infty$

فإن:

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = e^{+\infty} = +\infty$

• عند $+\infty$:

لما كان: $\lim_{x \to +\infty} (x^2 - 2x) = +\infty$

فإن:

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = e^{+\infty} = +\infty$

2] $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$; $D_f = \mathbb{R}^*$

• عند $-\infty$:

لما كان: $\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = 0$

فإن:

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = e^0 = 1$

• عند 0^- :

لما كان: $\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$

فإن:

$\lim_{x \to 0^-} f(x) = e^{-\infty} = 0$

• عند 0^+ :

لما كان: $\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$

فإن:

$\lim_{x \to 0^+} f(x) = e^{+\infty} = +\infty$

• عند $+\infty$:

لما كان: $\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$

فإن:

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = e^0 = 1$

3] $f(x) = e^{\frac{x+1}{x-2}}$; $D_f = \mathbb{R} \setminus \{2\}$

• عند $-\infty$:

لما كان: $\lim_{x \to -\infty} \frac{x+1}{x-2} = 1$

فإن:

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = e^1 = e$

- عند 2^-:

بما أن: $\lim_{x\to 2^-}\frac{x+1}{x-2}=\frac{3}{0^-}=-\infty$

فإن:

$\lim_{x\to 2^-}f(x)=e^{-\infty}=0$

- عند 2^+:

بما أن: $\lim_{x\to 2^+}\frac{x+1}{x-2}=\frac{3}{0^+}=+\infty$

فإن:

$\lim_{x\to 2^+}f(x)=e^{+\infty}=+\infty$

- عند $+\infty$:

بما أن: $\lim_{x\to+\infty}\frac{x+1}{x-2}=1$

فإن:

$\lim_{x\to+\infty}f(x)=e^{1}=e$

$\boxed{4}$ $f(x)=e^{\sqrt{x^2+1}-x}$; $D_f=\mathbb{R}$

- عند $-\infty$:

بما أن: $\lim_{x\to-\infty}\sqrt{x^2+1}-x=+\infty$

فإن:

$\lim_{x\to-\infty}f(x)=e^{+\infty}=+\infty$

- عند $+\infty$:

بما أن: $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+1}-x$

حالة عدم تعيين $\infty-\infty$

$g(x)=\sqrt{x^2+1}-x$

$g(x)=\frac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1}+x^2}=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x^2}$

$\lim_{x\to+\infty}g(x)=0$

فإن:

$\lim_{x\to+\infty}f(x)=e^{0}=1$

$\boxed{5}$ $f(x)=e^{x\ln x}$; $D_f=]0,+\infty[$

- عند 0:

بما أن:

$\lim_{x\to 0}x\ln x=0$

فإن:

$\lim_{x\to 0}f(x)=e^{0}=1$

- عند $+\infty$:

بما أن:

$\lim_{x\to+\infty}x\ln x=+\infty$

فإن:

$\lim_{x\to+\infty}f(x)=e^{+\infty}=+\infty$

$\boxed{6}$ $f(x)=-x+\ln(e^x+1)$; $D_f=\mathbb{R}$

- عند $-\infty$:

$\lim_{x\to-\infty}\ln(e^x+1)=0$:بما أن

فإن:

$\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty+0=+\infty$

- عند $+\infty$:

$\lim_{x\to+\infty}\ln(e^x+1)=+\infty$:بما أن

فإن:

$\lim_{x\to+\infty}f(x)$ حالة عدم تعيين $-\infty+\infty$

0940916753

إعداد المدرس خالد سليمان عامر

$f(x) = -x + \ln(e^{x}+1)$

$f(x) = \ln e^{-x} + \ln(e^{x}+1)$

$f(x) = \ln(e^{-x}(e^{x}+1))$

$f(x) = \ln(1+e^{-x})$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$

ملاحظة .. ^^

خاصية التوحيد : $x = \ln e^{x}$

7 • $f(x) = 2x + \ln(1-e^{-x}+e^{-2x})$

; $D_f = \mathbb{R}$

• عند $-\infty$:

لما كان : $\lim (1-e^{-x}+e^{-2x})$

حالة عدم تعيين $\infty - \infty$

$g(x) = 1 - e^{-x} + e^{-2x}$

$= e^{-x}\left(\frac{1}{e^{-x}} - 1 + e^{-x}\right)$

$\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = +\infty\,(+\infty) = +\infty$

فإن :

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ حالة عدم تعيين $\infty - \infty$

$f(x) = 2x + \ln(1 - e^{-x} + e^{-2x})$

$f(x) = 2x + \ln(e^{-2x}(e^{2x} - e^{x} + 1))$

$f(x) = 2x + \ln e^{-2x} + \ln(e^{2x} - e^{x} + 1)$

$f(x) = 2x - 2x + \ln(e^{2x} + e^{x} + 1)$

$f(x) = \ln(e^{2x} + e^{x} + 1)$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \ln(1) = 0$

• عند $+\infty$:

لما كان : $\lim\limits_{x \to +\infty}(1 - e^{-x} + e^{-2x}) = 1$

فإن :

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty + \ln(1) = +\infty$

8 • $f(x) = x + \ln(x^{2}-1)$

; $D_f =]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[$

• عند $-\infty$:

لما كان : $\lim\limits_{x \to -\infty}(x^{2}-1) = +\infty$

فإن :

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ حالة عدم تعيين $-\infty + \infty$

$f(x) = x + \ln(x^{2}-1)$

$f(x) = \ln e^{x} + \ln(x^{2}-1)$

$f(x) = \ln(e^{x}(x^{2}-1))$

$f(x) = \ln(x^{2}e^{x} - e^{x})$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \ln(0) = -\infty$

عند -1 :

لما كان : $\lim\limits_{x \to -1} (x^2-1) = 0$

فإن :

$\lim\limits_{x \to -1} f(x) = -1 + \ln(0) = -\infty$

عند 1 :

لما كان : $\lim\limits_{x \to 1} (x^2-1) = 0$

فإن :

$\lim\limits_{x \to 1} f(x) = -1 + \ln(0) = -\infty$

عند $+\infty$:

لما كان : $\lim\limits_{x \to +\infty} (x^2-1) = +\infty$

فإن :

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

9. $f(x) = \ln(e^x+3) \,;\, D_f = \mathbb{R}$

عند $-\infty$:

لما كان : $\lim\limits_{x \to -\infty} (e^x+3) = 3$

فإن :

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \ln 3$

عند $+\infty$: $\lim\limits_{x \to +\infty} (e^x+3) = +\infty$

فإن :

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

10. $f(x) = \ln(e^{2x} - e^x + 1)$

$; D_f =]-\infty, +\infty[$

عند $-\infty$:

لما كان : $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{2x} - e^x + 1 = 1$

فإن :

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \ln(1) = 0$

عند $+\infty$:

لما كان : $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{2x} - e^x + 1$

حالة عدم تعيين $\infty - \infty$

$g(x) = e^{2x} - e^x + 1$

$g(x) = e^x \left(e^x - 1 + \frac{1}{e^x}\right)$

$\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty(+\infty) = +\infty$

فإن :

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \ln(+\infty) = +\infty$

11. $f(x) = \ln(e^{-x}+1) \,;\, D_f = \mathbb{R}$

عند $-\infty$:

لما كان : $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{-x} + 1 = +\infty$

فإن :

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \ln(+\infty) = +\infty$

عند $+\infty$:

لما كان : $\lim_{x \to +\infty} e^{-x} + 1 = 1$

فإننا :

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \ln(+\infty) = +\infty$

ملاحظة هامة:

أحياناً نحتاج إلى استخدام طريقة تغيير المتحول لإزالة حالة عدم التعيين.

تمرين:

أوجد D_f واحسب النهايات ناقشة.. ^^

$$f(x) = x(e^{\frac{1}{x}} - 1)$$

$D_f =]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$

• $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ $(\infty)(0)$ حالة عدم تعيين

$f(x) = x(e^{\frac{1}{x}} - 1)$

نأخذ: $t = \frac{1}{x} \Leftarrow x = \frac{1}{t}$

لما كانت $x \to +\infty$ فإن $t \to 0$:

$f(x) = x(e^{\frac{1}{x}} - 1)$

$= \frac{1}{t}(e^t - 1) = \frac{e^t - 1}{t}$

$\Rightarrow \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{t \to 0} \frac{e^t - 1}{t} = 1$

علماً أن:

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^t - 1}{t} = 1$

• $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = 0(e^{\frac{1}{0^-}} - 1) = 0$

• $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$ $(0)(\infty)$ حالة عدم تعيين

$f(x) = x(e^{\frac{1}{x}} - 1)$

$f(x) = \frac{e^{\frac{1}{x}} - 1}{x^{-1}} = \frac{e^{\frac{1}{x}} - 1}{\frac{1}{x}}$

$\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 1$

علماً أن: $\lim\limits_{t \to 0^+} \frac{e^{\frac{1}{x}} - 1}{\frac{1}{x}} = 1$

يُمكن الحل بأسلوب ثاني... ♥

• $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ $(\infty)(0)$ حالة عدم تعيين

$f(x) = x(e^{\frac{1}{x}} - 1)$

نأخذ: $t = \frac{1}{x} \Leftarrow x = \frac{1}{t}$

لما كانت $x \to -\infty$ فإن $t \to 0$:

$f(x) = x(e^{\frac{1}{x}} - 1)$

$= \frac{1}{t}(e^t - 1) = \frac{e^t - 1}{t}$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{t \to 0} \frac{e^t - 1}{t} = 1$

علماً أن:

$\lim\limits_{t \to 0} \frac{e^t - 1}{t} = 1$

ملاحظة.. ^^ خاصة بالتابع ^^

إذا كان لدينا التابع f من الشكل:

$f(x) = \text{مشتقة} \left(e^{\frac{1}{\text{مشتقة}}} - 1\right)$

فإننا لإزالة حالة عدم التعيين نستخدم طريقة تغيير المتحول: $t = \frac{1}{\text{مشتقة}}$

ونميز:

مسعى t هو صفر	مسعى t هو $+\infty$

فإننا نظهر الشكل: $\frac{e^t - 1}{t}$

فإننا نظهر الشكل: $\frac{e^t}{t}$

تمرين:

جد نهاية التابع f عند قيمة a الموافقة:

1. $f(x) = \dfrac{e^{5x}-1}{\sin 3x} \; ; a = 0$
2. $f(x) = \dfrac{e^{2x}-e^{x}}{x\cos x} \; ; a = 0$
3. $f(x) = \dfrac{1-\cos(2x)}{xe^{x}-x} \; ; a = 0$
4. $f(x) = \dfrac{e^{7x}-1}{\ln(x+1)} \; ; a = 0$
5. $f(x) = \dfrac{x\cos e^{x}}{x^{2}+1} \; ; a = +\infty$
6. $f(x) = e^{x-\sin x}$ $\; ; a = +\infty$
7. $|f(x)-5| \le -x + \ln(e^{x}+1) \; ; a = +\infty$
8. $|3f(x)-6| \le 3x\left(e^{\frac{1}{x}}-1\right) - 3 \; ; a = +\infty$
9. $f(x) = \dfrac{e^{2x}-3e^{x}+2}{\sin 2x} \; ; a = 0$
10. $f(x) = \dfrac{e^{2x}-3e^{x}+2}{1-\cos 2x} \; ; a = 0^{+}$

1] $f(x) = \dfrac{e^{5x}-1}{\sin 3x} \; ; a = 0$

$\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ $\dfrac{0}{0}$ حالة عدم تعيين

$f(x) = \dfrac{e^{5x}-1}{\sin 3x} = \dfrac{e^{5x}-1}{1} \times \dfrac{1}{\sin 3x}$

$= \dfrac{e^{5x}-1}{x} \times \dfrac{x}{\sin 3x}$

$= 5\,\dfrac{e^{5x}-1}{5x} \times \dfrac{3x}{\sin 3x} \times \dfrac{1}{3}$

$\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 5(1)(1)\dfrac{1}{3} = \dfrac{5}{3}$

علماً أن:

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{5x}-1}{5x} = 1 \; , \; \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{3x}{\sin 3x} = 1$

2] $f(x) = \dfrac{e^{2x}-e^{x}}{x\cos x} \; ; a = 0$

$\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ $\dfrac{0}{0}$ حالة عدم تعيين

$f(x) = \dfrac{e^{2x}-e^{x}}{x\cos x} = \dfrac{e^{x}(e^{x}-1)}{x\cos x}$

$= \dfrac{e^{x}-1}{x} \times \dfrac{e^{x}}{\cos x}$

$\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 1 \times \dfrac{1}{1} = 1$

علماً أن:

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{x}-1}{x} = 1$

3] $f(x) = \dfrac{1-\cos 2x}{xe^{x}-x} \; ; a = 0$

$\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ $\dfrac{0}{0}$ حالة عدم تعيين

$f(x) = \dfrac{1-\cos 2x}{xe^{x}-x} = \dfrac{2\sin^{2}x}{xe^{x}-x}$

$= \dfrac{2\sin^{2}x}{1} \times \dfrac{1}{xe^{x}-x}$

$= 2\,\dfrac{\sin^{2}x}{x^{2}} \times \dfrac{x^{2}}{xe^{x}-x}$

$= 2\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^{2} \times \dfrac{x^{2}}{x(e^{x}-1)}$

$= 2\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^{2} \times \dfrac{x}{e^{x}-1}$

$\lim\limits_{x\to0} f(x) = 2(1)(1) = 2$

علماً أن:

$\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1$, $\lim\limits_{x\to0}\frac{x}{e^x-1}=1$

4. $f(x)=\frac{e^{7x}-1}{\ln(x+1)}$; $a=0$

$\lim\limits_{x\to0} f(x)$ $\frac{0}{0}$ حالة عدم تعيين

$f(x)=\frac{e^{7x}-1}{\ln(x+1)}=\frac{e^{7x}-1}{1}\times\frac{1}{\ln(x+1)}$

$=\frac{e^{7x}-1}{x}\times\frac{x}{\ln(x+1)}$

$=7\,\frac{e^{7x}-1}{x}\times\frac{x}{\ln(x+1)}$

$\lim\limits_{x\to0} f(x)=7\times1\times1=7$

علماً أن:

$\lim\limits_{x\to0}\frac{e^{7x}-1}{x}=1$, $\lim\limits_{x\to0}\frac{x}{\ln(x+1)}=1$

5. $f(x)=\frac{x\cos e^x}{x^2+1}$; $a=+\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ نحتاج إلى إحاطة .. ؟

نعلم أن: $-1\le\cos e^x\le1$

$-x\le x\cos e^x\le x$

$\frac{-x}{x^2+1}\le f(x)\le\frac{x}{x^2+1}$

إذا سقطت بالأمس، قف اليوم.

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{-x}{x^2+1}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{x^2+1}\right)=0$

استناداً إلى مبرهنة الإحاطة يكون:

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$

6. $f(x)=e^{x-\sin x}$; $a=+\infty$

ليكن: $g(x)=x-\sin x$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

نحتاج إحاطة .. ؟

نعلم أن: $-1\le\sin x\le1$

$1\ge-\sin x\ge-1$

$x+1\ge g(x)\ge x-1$

$g(x)\ge x-1$

$\lim\limits_{x\to+\infty}(x-1)=+\infty$

استناداً إلى مبرهنة المقارنة يكون:

$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$

إذاً:

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=e^{+\infty}=+\infty$

7. $|f(x)-5|\le-x+\ln(e^x+1)$; $a=+\infty$

$g(x)=-x+\ln(e^x+1)$

$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$ $\infty-\infty$ حالة عدم تعيين

$g(x)=-x+\ln(e^x+1)$

$g(x)=\ln e^{-x}+\ln(e^x+1)$

$g(x) = \ln\left(e^{-x}(e^{x}+1)\right)$

$g(x) = \ln(1 + e^{-x})$

$\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = \ln(1) = 0$

إذاً استناداً إلى مبرهنة الإحاطة

يكون:

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 5$

8. $|3f(x) - 6| \leq 3x(e^{\frac{1}{x}} - 1) - 3$

$; a = +\infty$

$g(x) = 3x(e^{\frac{1}{x}} - 1) - 3$

$\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) \quad (\infty)(0)$ حالة عدم تعيين

$g(x) = 3x(e^{\frac{1}{x}} - 1) - 3$

ليكن $t = \frac{1}{x} \Leftarrow x = \frac{1}{t}$

$g(x) = 3\frac{1}{t}(e^{t} - 1) - 3$

$g(x) = 3\,\frac{e^{t} - 1}{t} - 3$

لما كانت $x \to +\infty$ فإن $t \to 0$:

$\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = \lim\limits_{t \to 0} 3\,\frac{e^{t} - 1}{t} - 3$

$= 3 - 3 = 0$

علماً أن: $\lim\limits_{t \to 0} \frac{e^{t} - 1}{t} = 1$

استناداً إلى مبرهنة الإحاطة يكون:

$\lim\limits_{x \to +\infty} 3f(x) = 6$

$\Rightarrow \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 2$

9. $f(x) = \frac{e^{2x} - 3e^{x} + 2}{\sin 2x} \; ; a = 0$

$\lim\limits_{x \to 0} f(x) \quad \frac{0}{0}$ حالة عدم تعيين

$f(x) = \frac{e^{2x} - 3e^{x} + 2}{\sin 2x}$

$= \frac{e^{2x} - 3e^{x} + 2}{1} \times \frac{1}{\sin 2x}$

$= \frac{(e^{x} - 2)(e^{x} - 1)}{x} \times \frac{x}{\sin 2x}$

$= (e^{x} - 2)\,\frac{(e^{x} - 1)}{x} \times \frac{1}{2}\,\frac{2x}{\sin 2x}$

$\lim\limits_{x \to 0} f(x) = -1\,(1) \times \frac{1}{2}\,(1) = -\frac{1}{2}$

علماً أن:

$\lim\limits_{x \to 0} \frac{2x}{\sin 2x} = 1$

و

$\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^{x} - 1}{x} = 1$

10. $f(x) = \frac{e^{2x} - 3e^{x} + 2}{1 - \cos 2x} \; ; a = 0^{+}$

$\lim\limits_{x \to 0^{+}} f(x) \quad \frac{0}{0}$ حالة عدم تعيين

$f(x) = \frac{e^{2x} - 3e^{x} + 2}{1 - \cos 2x}$

$$f(x) = \frac{(e^x-2)(e^x-1)}{2\sin^2 x}$$

$$f(x) = \frac{1}{2}\,\frac{x^2}{\sin^2 x} \times \frac{e^x-2}{x} \times \frac{e^x-1}{x}$$

$$f(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{x}{\sin x}\right)^2 \times \frac{e^x-2}{x} \times \frac{e^x-1}{x}$$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \frac{1}{2}(1)^2 \times \frac{-1}{0^+} \times 1 = -\infty$$

علماً أنّ:

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{x}{\sin x} = 1$$

و

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{e^x-1}{x} = 1$$

تمرين:

ابحث عن نهاية كل من المتتاليات $(u_n)_{n\geq 0}$ الآتية

1. $u_n = \frac{e^{-n}+1}{e^{-n}+3}$
2. $u_n = \frac{e^{2n}}{(1+n)^2}$
3. $u_n = \ln(2+e^{-n})$
4. $u_n = e^{1-\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}}$
5. $u_n = n\left(e^{\frac{1}{n}}-1\right)$
6. $u_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{2n}$

1 $u_n = \frac{e^{-n}+1}{e^{-n}+3}$

$\lim_{n\to+\infty} u_n = \frac{0+1}{0+3} = \frac{1}{3}$

2 $u_n = \frac{e^{2n}}{(1+n)^2}$

$\lim_{n\to+\infty} u_n \quad \frac{\infty}{\infty}$ حالة عدم تعيين

$u_n = \frac{e^{2n}}{(1+n)^2} = \frac{e^{2n}}{1+2n+n^2}$

$= \frac{e^{2n}}{n^2\left(\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n}+1\right)} = \frac{e^{2n}}{n^2} \cdot \frac{1}{\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n}+1}$

$= \left(\frac{e^n}{n}\right)^2 \frac{1}{\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n}+1}$

$\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty\,(1) = +\infty$

علماً أن: $\lim_{n\to+\infty} \frac{e^n}{n} = +\infty$

3 $u_n = \ln(2+e^{-n})$

$\lim_{n\to+\infty} u_n = \ln(2)$

4 $u_n = e^{1-\frac{1}{n}}$

$\lim_{n\to+\infty} u_n = e$

5 $u_n = n\left(e^{\frac{1}{n}}-1\right)$

$\lim_{n\to+\infty} u_n \quad (\infty)(0)$ حالة عدم تعيين

$u_n = n\left(e^{\frac{1}{n}}-1\right)$

لتكن $t = \frac{1}{n} \Rightarrow n = \frac{1}{t}$

لما كانت $n\to+\infty$ فإن $t\to 0$:

$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{t\to 0} \frac{e^t-1}{t} = 1$

علماً أن:

$\lim_{t\to 0} \frac{e^t-1}{t} = 1$ سهلة.. ^^

6 $u_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{2n}$

$\lim_{n\to+\infty} u_n = (1)^{\infty}$ زوبعة صغيرة.. ^-^

لتكن:

$t = \frac{1}{n} \Rightarrow n = \frac{1}{t} \Leftarrow 1+t = 1+\frac{1}{n}$

لما كانت $n\to+\infty$ فإن $t\to 0$:

$u_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{2n} = (1+t)^{\frac{2}{t}}$

$\Rightarrow = \left(e^{\frac{1}{t}\ln(1+t)}\right)^2 = \left(e^{\frac{\ln(1+t)}{t}}\right)^2$

$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{t\to 0}\left(e^{\frac{\ln(1+t)}{t}}\right)^2 = (e^1)^2 = e^2$

علماً أن: $\lim_{t\to 0} \frac{\ln(1+t)}{t} = 1$

النهايات المميزة: لم تأتي مسابقاً.. ^^

نص السؤال:

أوجد نهاية التابع f عند a :

فكرة الحل:

بعد التعويض نصدم من ظهور 1^{∞}
طول بالك وخود نفس, القصة بسيطة صديقي المهم هي اسمها (نهاية مميزة) ونحنا هون لنتعلم كيف ممكن نزيلها بس ركز بالخطوات:

1. نفرض متحول جديد وفق:
$1+t=$ ما داخل الأقواس
2. نعزل t , أي نكتب t بدلالة x
3. نعزل x , أي نكتب x بدلالة t
4. نوجد المسعى الجديد وذلك بتعويض المسعى القديم في علاقة t
5. نعوض في التابع f أي نكتب التابع f بدلالة t
6. باستخدام إصلاحات مناسبة نظهر $\frac{1}{t}$ في الأس
7. عند ظهور $\frac{1}{t}$ في الأس نستخدم الخاصة:
$e^{x}=e^{\ln(a)^{x}}$

تذكر:
$a^{n\times m}=(a^{n})^{m}$
$a^{n+m}=a^{n}\cdot a^{m}$

8. نصلح ثم نوجد النهاية
شايف ما أحلاها وما أبسطها..

تمرين:

أوجد نهاية التابع f عند a :

1. $f(x)=(1+x)^{\frac{1}{x}}$	$a=0$
2. $f(x)=\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}$	$a=+\infty$
3. $f(x)=(2-x)^{\frac{3}{x-1}}$	$a=1$
4. $f(x)=(4+x)^{\frac{2}{x+3}}$	$a=-3$
5. $f(x)=\left(\frac{x-2}{x+1}\right)^{\frac{x+1}{3}}$	$a=+\infty$
6. $f(x)=\left(\frac{x+3}{x-1}\right)^{\frac{x}{2}}$	$a=+\infty$
7. $f(x)=\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{x+1}$	$a=+\infty$
8. $f(x)=(x-3)^{\frac{2}{x-4}}$	$a=4$
9. $f(x)=(x+2)^{\frac{2}{x+1}}$	$a=-1$
10. $f(x)=\left(\frac{x}{x+1}\right)^{x}$	$a=+\infty$

1. $f(x)=(1+x)^{\frac{1}{x}}$; $a=0$

وجود نهاية مميزة ^^

ليكن: $1+t=1+x$

$\Rightarrow t=x \Rightarrow x=t$

لما كان $x\to 0$ فإن $t\to 0$:

$f(x)=(1+x)^{\frac{1}{x}}=(1+t)^{\frac{1}{t}}$

$f(x)=e^{\ln(1+t)^{\frac{1}{t}}}=e^{\frac{1}{t}\ln(1+t)}$

$f(x)=e^{\frac{\ln(1+t)}{t}}$

$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{t\to 0}\left[e^{\frac{\ln(1+t)}{t}}\right]$

$=e^{1}=e$

علماً أن:

$\lim_{t\to 0}\frac{\ln(1+t)}{t}=1$

2. $f(x)=\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}$; $a=+\infty$

وجود نهاية مميزة ^^

ليكن: $1+t=1+\frac{1}{x}$

$\Rightarrow t=\frac{1}{x} \Rightarrow x=\frac{1}{t}$

لما كان $x\to +\infty$ فإن $t\to 0$:

$f(x) = (1+\frac{1}{x})^{x}$

$f(x) = (1+t)^{\frac{1}{t}}$

$f(x) = e^{\ln(1+t)^{\frac{1}{t}}} = e^{\frac{1}{t}\ln(1+t)}$

$f(x) = e^{\frac{\ln(1+t)}{t}}$

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{t\to 0} e^{\frac{\ln(1+t)}{t}} = e$

علماً أن: $\lim_{t\to 0}\frac{\ln(1+t)}{t} = 1$

3] $f(x) = (2-x)^{\frac{3}{x-1}}$; $a = 1$

وجود نهاية مميزة ^^

ليكن: $1+t = 2-x$

$t = 1-x \Rightarrow x = 1-t$

لما كان $x \to 1$ فإن $t \to 0$

$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{t\to 0}\left(e^{\frac{\ln(1+t)}{t}}\right)^{-3} = e^{-3}$

علماً أن: $\lim_{t\to 0}\frac{\ln(1+t)}{t} = 1$

4] $f(x) = (4+x)^{\frac{2}{x+3}}$; $a = -3$

وجود نهاية مميزة ^^

ليكن $1+t = 4+x$

$\Rightarrow t = 3+x$

$\Rightarrow x = t-3$

لما كان $x \to 3$ فإن $t \to 0$:

$f(x) = (4+x)^{\frac{2}{x+3}} = (1+t)^{\frac{2}{t-3+3}}$

$f(x) = (1+t)^{\frac{2}{t}} = \left((1+t)^{\frac{1}{t}}\right)^{2}$

$f(x) = \left(e^{\ln(1+t)^{\frac{1}{t}}}\right)^{2}$

الثغر الذي تجد فيه نفسك، خذه بقوّة..

إيّاك أن تتراخى يداك عنه، إيّاك أن تتركه في المنتصف، إيّاك أن تكون أشتاتاً هنا وهناك، خذ من المُمكِن كل شيء! .. ♡

$f(x) = (2-x)^{\frac{3}{x-1}}$

$f(x) = (1+t)^{\frac{3}{1-t-1}} = (1+t)^{\frac{-3}{t}}$

$f(x) = \left((1+t)^{\frac{1}{t}}\right)^{-3}$

$f(x) = \left(e^{\frac{\ln(1+t)}{t}}\right)^{-3}$

$f(x) = \left(e^{\frac{\ln(1+t)}{t}}\right)^{2}$

$\lim_{x\to 3} f(x) = \lim_{t\to 0}\left(e^{\frac{\ln(1+t)}{t}}\right)^{2} = e^{2}$

علماً أن: $\lim_{t\to 0}\frac{\ln(1+t)}{t} = 1$

5] $f(x) = \left(\frac{x-2}{x+1}\right)^{\frac{x+1}{3}}$; $\alpha = +\infty$

نوجد نهاية مميزة .. ^^

ليكن: $1+t = \frac{x-2}{x+1}$

$\Rightarrow t = \frac{-3}{x+1} \Rightarrow x+1 = \frac{-3}{t}$

$\Rightarrow x = \frac{-3}{t} - 1$

لما كانت $x \to +\infty$ فإن $t \to 0$;

$f(x) = \left(\frac{x-2}{x+1}\right)^{\frac{x+1}{3}} = (1+t)^{\frac{\frac{-3}{t} - 1 + 1}{3}}$

$f(x) = (1+t)^{-\frac{1}{t}} = \left((1+t)^{\frac{1}{t}}\right)^{-1}$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{t \to 0} \left(e^{\frac{\ln(1+t)}{t}}\right)^{-1}$

$= e^{-1}$

علماً أن:

$\lim\limits_{t \to 0} \frac{\ln(1+t)}{t} = 1$

6] $f(x) = \left(\frac{x+3}{x-1}\right)^{\frac{x}{2}}$; $\alpha = +\infty$

نوجد نهاية مميزة .. ^^

ليكن: $1+t = \frac{x+3}{x-1}$

$t = \frac{4}{x-1} \Rightarrow x-1 = \frac{4}{t}$

$\Rightarrow x = \frac{4}{t} + 1$

لما كانت $x \to +\infty$ فإن $t \to 0$;

$f(x) = \left(\frac{x+3}{x-1}\right)^{\frac{x}{2}} = (1+t)^{\frac{\frac{4}{t}+1}{2}}$

$= (1+t)^{\frac{4+t}{2t}} = (1+t)^{\frac{2}{t}} \times (1+t)^{\frac{1}{2}}$

$f(x) = \left(e^{\ln(1+t)^{\frac{1}{t}}}\right)^2 (1+t)^{\frac{1}{2}}$

$f(x) = \left(e^{\frac{\ln(1+t)}{t}}\right)^2 (1+t)^{\frac{1}{2}}$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{t \to 0} \left[\left(e^{\frac{\ln(1+t)}{t}}\right)^2 (1+t)^{\frac{1}{2}}\right]$

$= e^2 \, (1)^{\frac{1}{2}} = e^2$

علماً أن:

$\lim\limits_{t \to 0} \frac{\ln(1+t)}{t} = 1$

7] $f(x) = \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{x+1}$; $\alpha = +\infty$

نوجد نهاية مميزة .. ^^

ليكن: $1+t = \frac{x+1}{x-1}$

$t = \frac{2}{x-1} \Rightarrow x-1 = \frac{2}{t}$

$\Rightarrow x = \frac{2}{t} + 1$

$$=\left((1+t)^{\frac{1}{t}}\right)^2=\left(e^{\ln(1+t)^{\frac{1}{t}}}\right)^2$$

$$=\left(e^{\frac{\ln(1+t)}{t}}\right)^2$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{t\to 0}\left[\left(e^{\frac{\ln(1+t)}{t}}\right)^2\right]=e^2$$

علماً أن:

$$\lim_{t\to 0}\frac{\ln(1+t)}{t}=1$$

7. $f(x)=(x+2)^{\frac{2}{x+1}}$; $a=-1$

وجد نهاية مميزة ..

ليكن: $1+t=x+2$

$$\Rightarrow t=x+1$$

$$\Rightarrow x=t-1$$

لما كان: $x\to -1$ فإن: $t\to 0$:

$$f(x)=(x+2)^{\frac{2}{x+1}}$$

$$=(1+t)^{\frac{2}{t-1+1}}=(1+t)^{\frac{2}{t}}$$

$$=\left((1+t)^{\frac{1}{t}}\right)^2$$

$$=\left(e^{\frac{\ln(1+t)}{t}}\right)^2$$

$$\lim_{x\to -1} f(x)=\lim_{t\to 0}\left[\left(e^{\frac{\ln(1+t)}{t}}\right)^2\right]=e^2$$

علماً أن:

$$\lim_{t\to 0}\frac{\ln(1+t)}{t}=1$$

لما كان: $x\to+\infty$ فإن $t\to 0$:

$$f(x)=\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{x+1}=(1+t)^{\frac{2}{t}+1+1}$$

$$=(1+t)^{\frac{2}{t}+2}=(1+t)^{\frac{2}{t}}(1+t)^2$$

$$=\left(e^{\ln(1+t)^{\frac{1}{t}}}\right)^2(1+t)^2$$

$$=\left(e^{\frac{\ln(1+t)}{t}}\right)^2(1+t)^2$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{t\to 0}\left[\left(e^{\frac{\ln(1+t)}{t}}\right)^2(1+t)^2\right]$$

$$=e^2(1)^2=e^2$$

علماً أن:

$$\lim_{t\to +0}\frac{\ln(1+t)}{t}=1$$

8. $f(x)=(x-3)^{\frac{2}{x-4}}$; $a=4$

وجود نهاية مميزة ..

ليكن: $1+t=x-3\Rightarrow t=x-4$

$$\Rightarrow x=t+4$$

لما كان: $x\to 4$ فإن: $t\to 0$

$$f(x)=(x-3)^{\frac{2}{x-4}}$$

$$=(1+t)^{\frac{2}{t+4-4}}=(1+t)^{\frac{2}{t}}$$

10 ■ $f(x) = \left(\dfrac{x}{x+1}\right)^x \; ; \; a = +\infty$

علماً أن:

$$\lim_{t \to 0} \frac{\ln(1+t)}{t} = 1$$

نجد نهاية مميزة ..

ليكن: $1 + t = \dfrac{x}{x+1}$

$$t = \frac{-1}{x+1} \Rightarrow x + 1 = \frac{-1}{t}$$

$$x = -\frac{1}{t} - 1$$

لما كان $x \to +\infty$ فإن: $t \to 0$:

$$f(x) = \left(\frac{x}{x+1}\right)^x = (1+t)^{-\frac{1}{t} - 1}$$

$$= (1+t)^{-\frac{1}{t}} \, (1+t)^{-1}$$

$$= \left((1+t)^{\frac{1}{t}}\right)^{-1} (1+t)^{-1}$$

$$= \left(e^{\ln(1+t)^{\frac{1}{t}}}\right)^{-1} (1+t)^{-1}$$

$$= \left(e^{\frac{\ln(1+t)}{t}}\right)^{-1} . \, (1+t)^{-1}$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{t \to 0} \left[\left(e^{\frac{\ln(1+t)}{t}}\right)^{-1} (1+t)^{-1}\right]$$

$$= e^{-1} \, (1)^{-1} = e^{-1}$$

اشتقاق التابع الأسي:

التابع الأسي اشتقاقي على مجموعة تعريفه ومشتقه هو مشتق أسه بنفسه وفق:

$$f(x) = e^{\text{اس}} \to f'(x) = (\text{اس})'\left(e^{\text{اس}}\right)$$

تمرين 1 :

أوجد التابع المشتق للتابع f :

1. $f(x) = e^{5x}$
2. $f(x) = e^{\sqrt{2}x-3}$
3. $f(x) = e^{x^2-x+3}$
4. $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$
5. $f(x) = e^{\cos x}$
6. $f(x) = e^{\frac{2x^2+3}{1-x}}$
7. $f(x) = e^{\frac{\sin x}{x^2+1}}$
8. $f(x) = (x^2-2x)e^x$
9. $f(x) = (x^2-x+1)e^{-x}$
10. $f(x) = \frac{e^x-1}{1+e^{-x}}$
11. $f(x) = \ln(1+e^x)$
12. $f(x) = (\sin x + \cos x)e^x$
13. $f(x) = e^{-x}\ln(x)$
14. $f(x) = \frac{1}{x}e^x$
15. $f(x) = xe^{\frac{1}{x}}$
16. $f(x) = e^{x\ln(x)}$
17. $f(x) = \ln(e^{2x}-e^x+1)$
18. $f(x) = e^{2x} + \frac{1}{x}$
19. $f(x) = xe^x - x$

1. $f(x) = e^{5x}$

$f'(x) = 5e^{5x}$

2. $f(x) = e^{\sqrt{2}x-3}$

$f'(x) = \sqrt{2}\, e^{\sqrt{2}x-3}$

3. $f(x) = e^{x^2-x+3}$

$f'(x) = (2x-1)e^{x^2-x+3}$

4. $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$

$f'(x) = \frac{-1}{x^2} e^{\frac{1}{x}}$

5. $f(x) = e^{\cos x}$

$f'(x) = -\sin x\, e^{\cos x}$

6. $f(x) = e^{\frac{2x^2+3}{1-x}}$

$f'(x) = \frac{4x(1-x)-(-1)(2x^2+3)}{(1-x)^2} e^{\frac{2x^2+3}{1-x}}$

$f'(x) = \frac{-2x^2+4x+3}{(1-x)^2} e^{\frac{2x^2+3}{1-x}}$

7. $f(x) = e^{\frac{\sin x}{x^2+1}}$

$f'(x) = \frac{\cos x(x^2+1)-2x(\sin x)}{(x^2+1)^2} e^{\frac{\sin x}{x^2+1}}$

$f'(x) = \frac{x^2\cos x+\cos x-2x\sin x}{(x^2+1)^2} e^{\frac{\sin x}{x^2+1}}$

8. $f(x) = (x^2-2x)e^x$

$f'(x) = (2x-2)e^x + e^x(x^2-2x)$

$f'(x) = 2xe^x - 2e^x + x^2e^x - 2xe^x$

$f'(x) = -2e^x + x^2e^x$

9. $f(x) = (x^2-x+1)e^{-x}$

$f'(x) = (2x-1)e^{-x} - e^{-x}(x^2-x+1)$

$f'(x) = 2xe^{-x} - e^{-x} - x^2e^{-x} + xe^{-x} - e^{-x}$

$f'(x) = -x^2e^{-x} + 3xe^{-x} - 2e^{-x}$

$\boxed{10}$ $f(x) = \dfrac{e^x - 1}{1 + e^{-x}}$

$f'(x) = \dfrac{e^x(1+e^{-x}) - (-e^{-x})(e^x - 1)}{(1+e^{-x})^2}$

$f'(x) = e^x + 1 + 1 + e^{-x}$

$f'(x) = 2 + e^x + e^{-x}$

$\boxed{11}$ $f(x) = \ln(1+e^x)$

$f'(x) = \dfrac{e^x}{1+e^x}$

$\boxed{12}$ $f(x) = (\sin x + \cos x)e^x$

$f'(x) = (\cos x - \sin x)e^x +$
$e^x(\sin x + \cos x)$

$f'(x) = e^x \cos x - \cancel{e^x \sin x} +$
$\cancel{e^x \sin x} + e^x \cos x$

$f'(x) = 2e^x \cos x$

$\boxed{13}$ $f(x) = e^{-x} \ln x$

$f'(x) = -e^{-x} \ln x + \frac{1}{x} e^{-x}$

$\boxed{14}$ $f(x) = \frac{1}{x} e^x$

$f'(x) = \frac{-1}{x^2} e^x + e^x \frac{1}{x}$

$\boxed{15}$ $f(x) = x e^{\frac{1}{x}}$

$f'(x) = e^{\frac{1}{x}} + \frac{-1}{x^2} e^{\frac{1}{x}} \cancel{x}$

$f'(x) = e^{\frac{1}{x}} - \frac{1}{x} e^{\frac{1}{x}}$

$\boxed{16}$ $f(x) = e^{x \ln x}$

$f'(x) = \ln x + \cancel{\frac{1}{x}} \cancel{x} \; e^{x \ln x}$

$f'(x) = \ln x + 1 \; e^{x \ln x}$

$\boxed{17}$ $f(x) = \ln (e^{2x} - e^{x} + 1)$

$$f'(x) = \frac{2e^{2x} - e^{x}}{e^{2x} - e^{x} + 1}$$

$\boxed{18}$ $f(x) = e^{2x} + \frac{1}{x}$

$f'(x) = 2e^{2x} - \frac{1}{x^2}$

$\boxed{19}$ $f(x) = xe^{x} - x$

$f'(x) = e^{x} + e^{x}x - 1$

$f'(x) = xe^{x} + e^{x} - 1$

تمرين 2 : امتحاني .. ^^

f و g هما التابعان المعرفان على $\mathbb{R}$ وفق:

$$f(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$$

$$g(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$$

و h هو التابع المعرف على $\mathbb{R}$ وفق: $h = \frac{g}{f}$

احسب $f'(x)$ و $g'(x)$ وأثبت أنّ $h' = \frac{1}{f^2}$

- إيجاد $f'(x)$:

$$f'(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$$

- إيجاد $g'(x)$:

$$g'(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$$

- إثبات أن:

$$\underbrace{h'}_{L_1} = \underbrace{\frac{1}{f^2}}_{L_2}$$

$$L_1 = h' = \left(\frac{g}{f}\right)' = \frac{g'(f) - f'(g)}{f^2}$$

$$= \frac{\frac{1}{2}(e^x + e^{-x})\frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) - \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})\frac{1}{2}(e^x - e^{-x})}{f^2}$$

$$= \frac{\frac{1}{4}(e^{2x} + 2 + e^{-2x}) - \frac{1}{4}(e^{2x} - 2 + e^{-2x})}{f^2}$$

$$= \frac{\cancel{\frac{1}{4}e^{2x}} + \frac{1}{2} + \cancel{\frac{1}{4}e^{-2x}} - \cancel{\frac{1}{4}e^{2x}} + \frac{1}{2} - \cancel{\frac{1}{4}e^{-2x}}}{f^2}$$

$$= \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}}{f^2} = \frac{1}{f^2} = L_2$$

دراسة تغيرات التابع الأسي:

تمرين:

ادرس في كل حالة مما يأتي تغيرات التابع f على المجال I وارسم خطه البياني:

1 $f(x) = (3-x)e^x$	$I = \mathbb{R}$
2 $f(x) = e^x - ex$	$I = \mathbb{R}$
3 $f(x) = exp\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$	$I = \mathbb{R}\backslash\{1\}$
4 $f(x) = \frac{e^x}{e^x+1}$	$I = \mathbb{R}$
5 $f(x) = e^{-x} + x - 2$	$I = \mathbb{R}$
6 $f(x) = (x-1)e^x$	$I = \mathbb{R}$
7 $f(x) = e^x - x$	$I = \mathbb{R}$

1] $f(x) = (3-x)e^x$; $I = R$

• $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ $(\infty)(0)$ حالة عدم تعيين

$f(x) = (3-x)e^x$

$f(x) = 3e^x - xe^x$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0 - 0 = 0$

علماً أن:

$\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x = 0$

$y=0$ مقارب أفقي في جوار $-\infty$

• $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

التابع f اشتقاقي على R ولدينا:

$f'(x) = -e^x + e^x(3-x)$

$f'(x) = -e^x + 3e^x - xe^x$

$f'(x) = 2e^x - xe^x$

$f'(x) = 0 \Rightarrow 2e^x - xe^x = 0$

$e^x(2-x) = 0$

إما $e^x = 0$ مستحيلة الحل

أو $2 - x = 0 \Rightarrow x = 2$

$f(2) = e^2$

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	e^2	$\searrow$	$-\infty$

• التحضير للرسم:

$y=0$ مقارب أفقي في جوار $-\infty$.

$f(2) = e^2$ قيمة حدية كبرى.

التقاطع مع المحاور: مع محور التراتيب: $(0,3)$

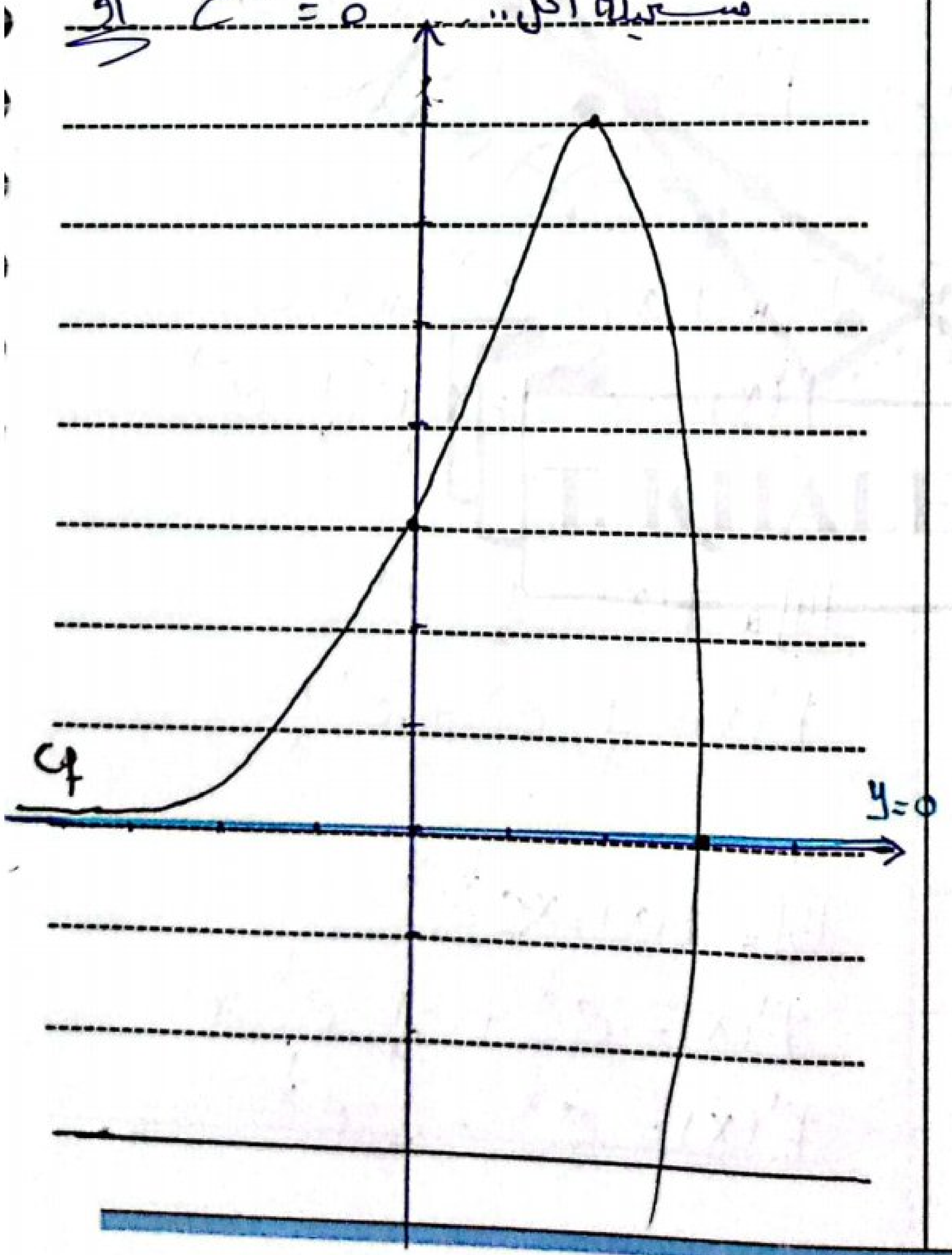
مع محور الفواصل: $f(x) = 0$

$(3-x)e^x = 0$

إما $3 - x = 0 \Rightarrow x = 3$

$\Rightarrow (3,0)$

أو $e^x = 0$ مستحيلة الحل.



2 ■ $f(x) = e^{x} - ex \quad ; \quad I = \mathbb{R}$

• $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$

• $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ $\infty - \infty$ حالة عدم تعيين

$f(x) = e^{x} - ex$

$= x\left(\frac{e^{x}}{x} - e\right)$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty(+\infty) = +\infty$

علماً أنّ:

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^{x}}{x} = +\infty$

التابع f اشتقاقي على $\mathbb{R}$ ولدينا:

$f'(x) = e^{x} - e$

$f'(x) = 0 \Rightarrow e^{x} - e = 0$

$e^{x} = e \Rightarrow x = 1$

$f(1) = 0$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

■ التحضير للرسم:

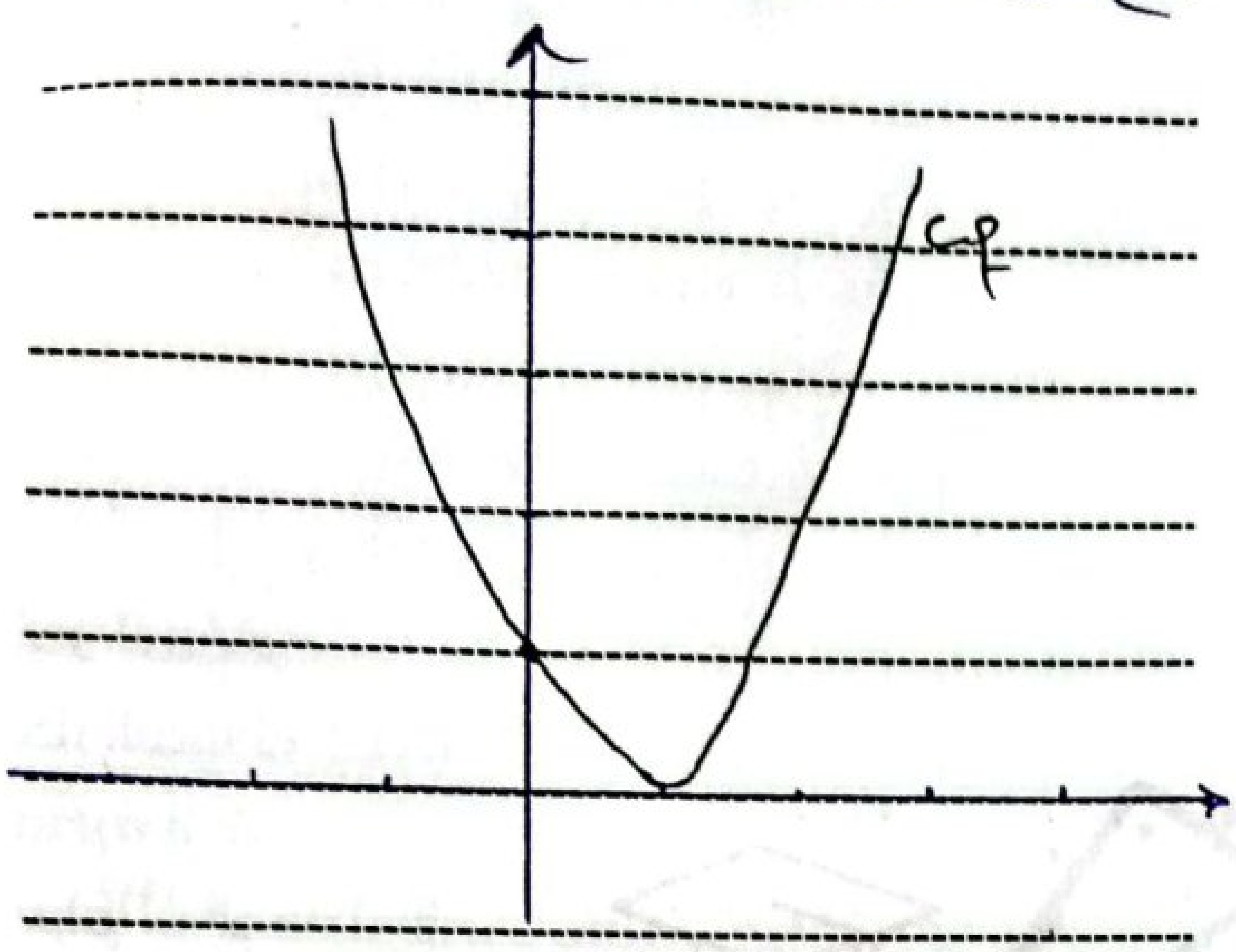
$f(1) = 0$ قيمة حدية صغرى.

التقاطع مع المحاور:

مع محور التراتيب: $(0,1)$

> أكبر ضعف هو الاستسلام، وأفضل طريقة للنجاح هي المحاولة أكثر من مرة واحدة.

مع محور الفواصل: بالـها..



3 ■ $f(x) = exp\left(\frac{1+x}{1-x}\right) ; I = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

$f(x) = e^{\frac{1+x}{1-x}}$

• $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = e^{-1}$

$y = e^{-1}$ مقارب أفقي في جوار $+\infty$.

• $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = e^{-1}$

$y = e^{-1}$ مقارب أفقي في جوار $-\infty$.

• $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = e^{\frac{1}{0^+}} = +\infty$

$x = 1$ مقارب شاقولي من اليسار نحو $+\infty$

• $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = e^{\frac{1}{0^-}} = 0$

التابع f اشتقاقي على $]-\infty, 1[$ و $]1, +\infty[$ ولدينا:

$f'(x) = \frac{2}{(1-x)^2} e^{\frac{1+x}{1-x}}$

$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{2}{(1-x)^2} e^{\frac{1+x}{1-x}} = 0$

إما $\frac{2}{(1-x)^2} = 0 \Rightarrow 2 \neq 0$

مستحيلة الحل..

أو $e^{\frac{1+x}{1-x}}=0$

مستحيلة الحل.

$f'(x)$ لا ينعدم.

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	‖	$+$	
$f(x)$	e^{-1}	$\nearrow$	$+\infty$ ‖ 0	$\nearrow$	e^{-1}

التحضير للرسم:

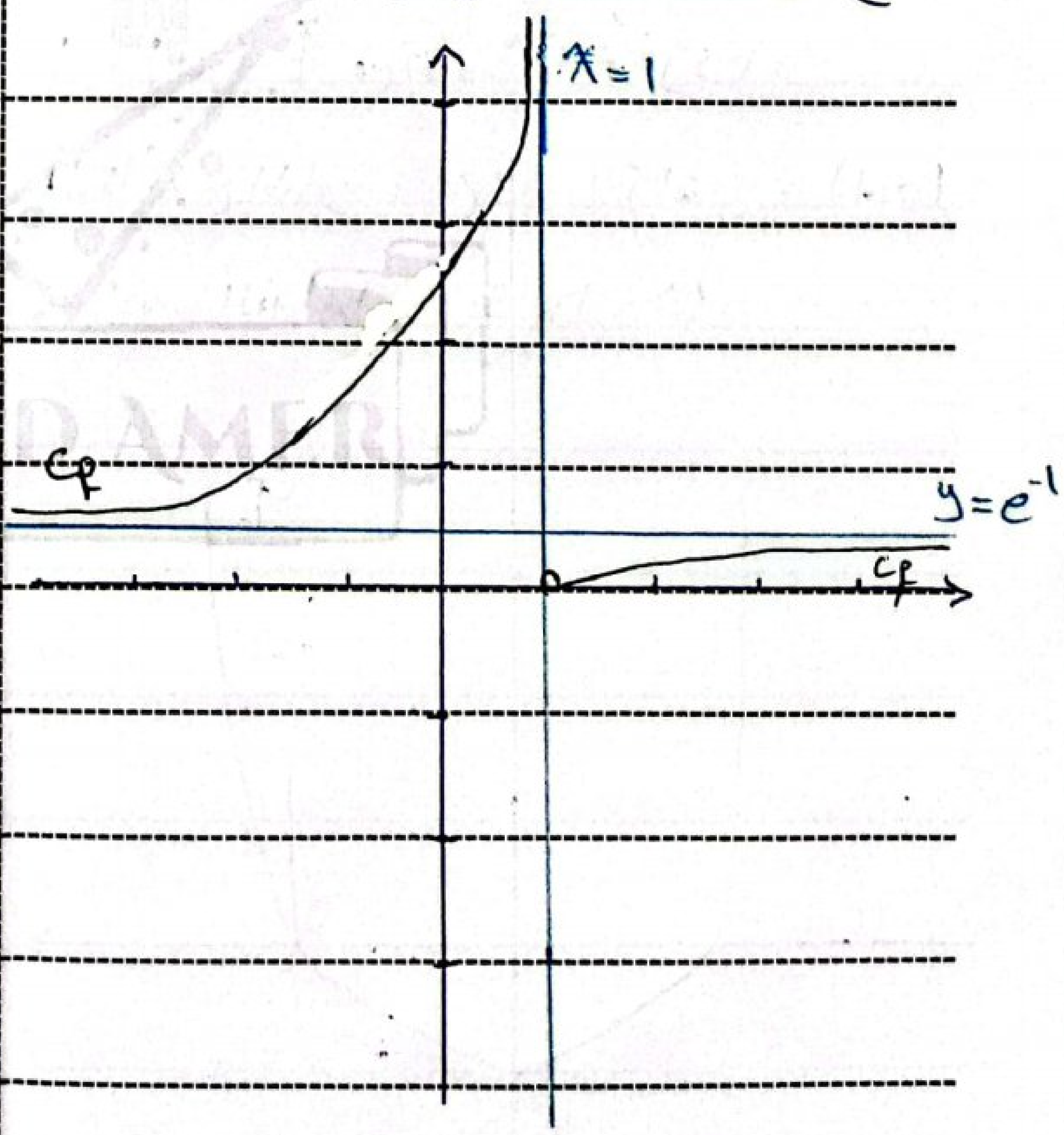
$y=e^{-1}$ مقارب أفقي في جوار $-\infty$ ، $+\infty$.

$x=1$ مقارب شاقولي من اليسار، نحو oy^+.

$(1,0)$ نقطة مفرغة

التقاطع مع المحاور: مع محور التراتيب: $(0,e)$

مع محور الفواصل: لا يوجد.



4] $f(x)=\frac{e^x}{e^x+1}$ ، $I=\mathbb{R}$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ $\frac{\infty}{\infty}$ حالة عدم تعيين

$f(x)=\frac{e^x}{e^x+1}=\frac{e^x}{e^x\left(1+\frac{1}{e^x}\right)}$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1$

$y=1$ مقارب أفقي في جوار $+\infty$.

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0$

التابع f اشتقاقي على R ولدينا:

$f'(x)=\frac{e^x(e^x+1)-e^x(e^x)}{e^x+1}$

$f'(x)=\frac{e^{2x}+e^x-e^{2x}}{e^x+1}=\frac{e^x}{e^x+1}$

$f'(x)=0 \Rightarrow \frac{e^x}{e^x+1}=0$

$e^x=0$ مستحيلة الحل.

$f'(x)$ لا ينعدم.

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	1

■ التفسير للرسم:

$y=0$ مقارب أفقي في جوار $-\infty$

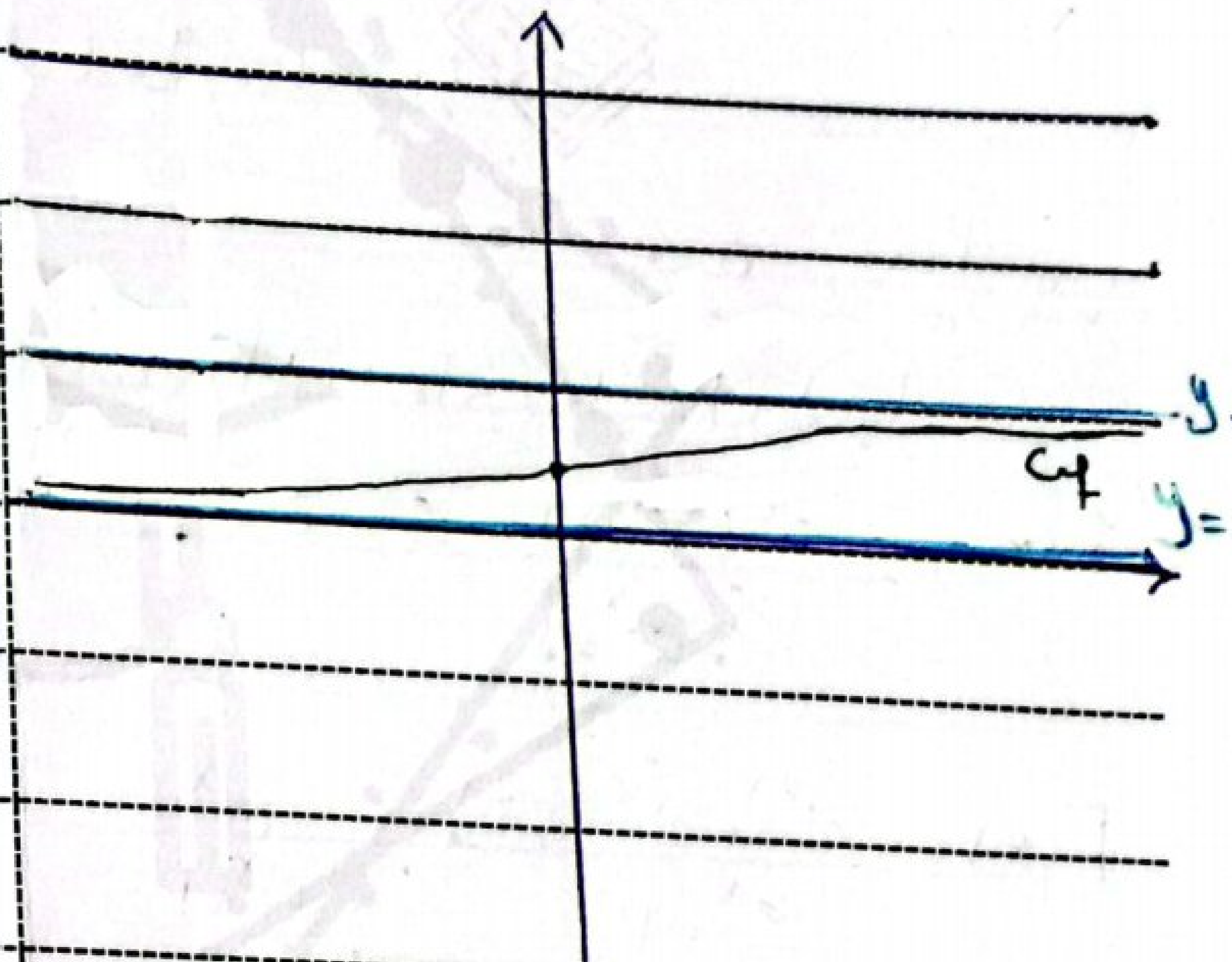
$y=1$ مقارب أفقي في جوار $+\infty$

التقاطع مع المحاور: مع محور التراتيب:

$(0, \frac{1}{2})$

مع محور الفواصل: $f(x)=0$

$e^x = 0$ مستحيلة الحل



5 ■ $f(x) = e^{-x} + x - 2 \; ; I=R$

■ $\lim_{x \to -\infty} f(x) \quad \infty - \infty$ حالة عدم تعيين

$f(x) = e^{-x} + x - 2 = \frac{1}{e^x} + x - 2$

$f(x) = \frac{1 + xe^x - 2e^x}{e^x}$

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \frac{1}{0^+} = +\infty$

علماً أن: $\lim_{x \to -\infty} x e^x = 0$

■ $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

التابع f اشتقاقي على R ولدينا:

$f'(x) = -e^{-x} + 1$

$f'(x) = 0 \Rightarrow -e^{-x} + 1 = 0$

$e^{-x} = +1 \Rightarrow -x = 0$

$\Rightarrow x = 0 \Rightarrow f(0) = -1$

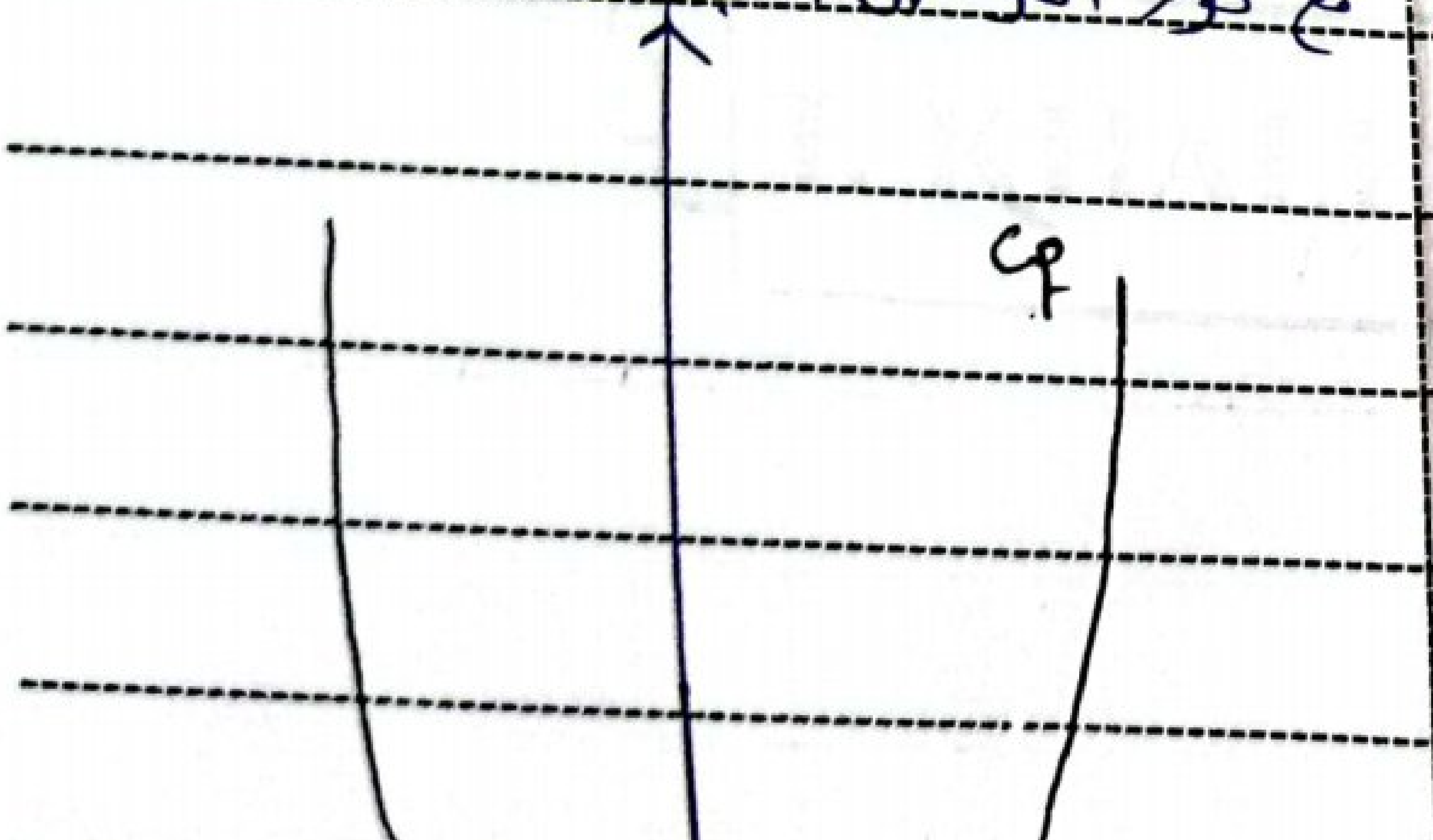
x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

■ التفسير للرسم:

$f(0) = -1$ قيمة حدية صغرى

التقاطع مع المحاور: مع محور التراتيب: $(0,-1)$

مع محور الفواصل: بالإهمال ^^



6. $f(x) = (x-1)e^x \; ; \; I = \mathbb{R}$

• $\lim_{x \to -\infty} f(x)$ $(\infty)(0)$ حالة عدم تعيين

$f(x) = (x-1)e^x = xe^x - e^x$

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0 - 0 = 0$

علماً أننا:

$\lim_{x \to -\infty} xe^x = 0$

• $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

التابع f اشتقاقي على R ولدينا:

$f'(x) = e^x + xe^x - e^x = xe^x$

$f'(x) = 0 \Rightarrow xe^x = 0$

إما $x = 0 \Rightarrow f(0) = -1$

أو $e^x = 0$ مستحيلة الحل..

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

■ التوضيح للرسم:

$y = 0$ مقارب أفقي في جوار $-\infty$.

$f(0) = -1$ قيمة حدية صغرى.

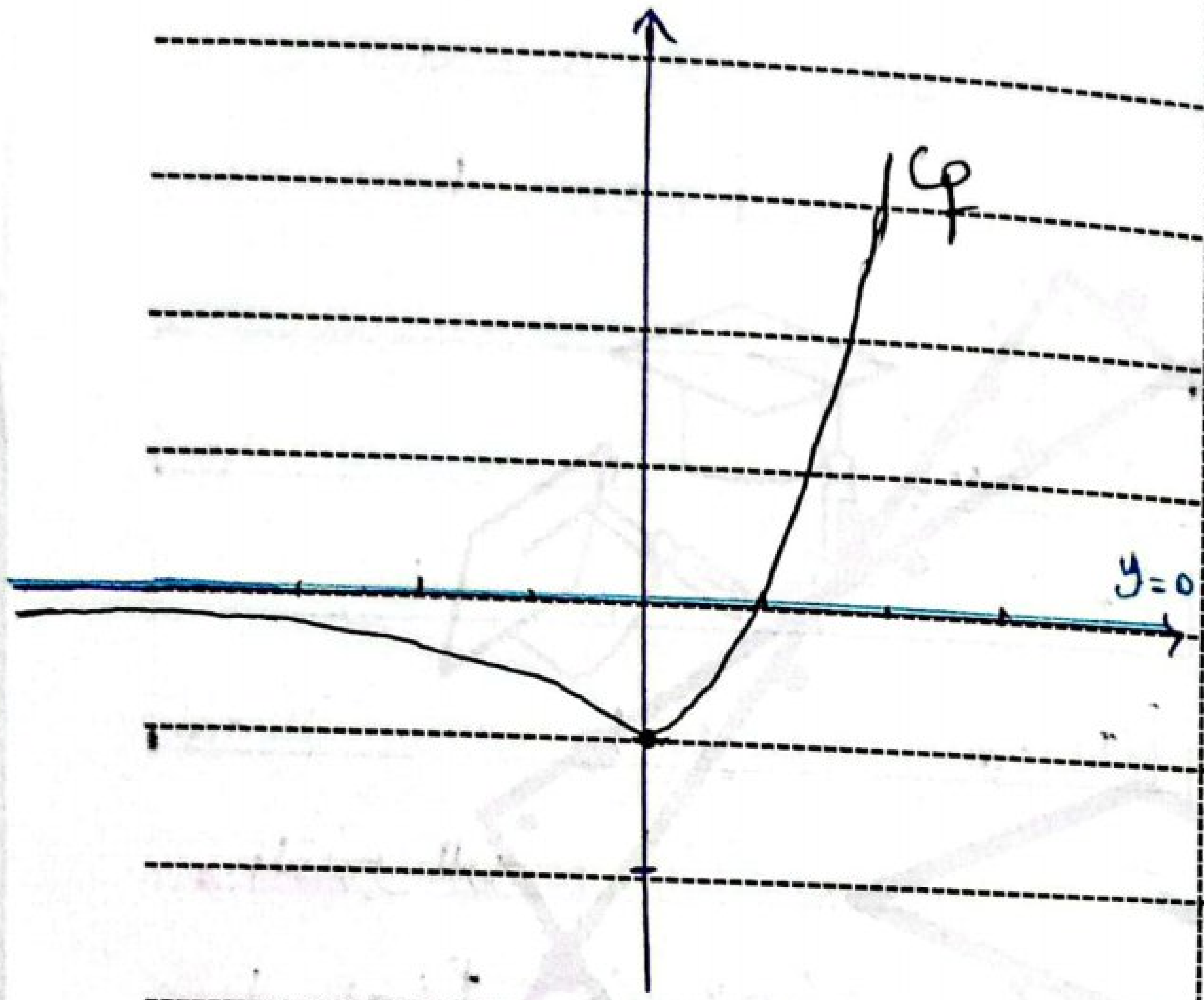
التقاطع مع المحاور: مع محور التراتيب $(0,-1)$

مع محور الفواصل: $f(x) = 0$

$(x-1)e^x = 0$

إما $x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow (1,0)$

أو $e^x = 0$ مستحيلة الحل..



7. $f(x) = e^x - x \; ; \; I = \mathbb{R}$

• $\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$

• $\lim_{x \to +\infty} f(x)$ $\infty - \infty$ حالة عدم تعيين

$f(x) = e^x - x \Rightarrow = x\left(\frac{e^x}{x} - 1\right)$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty(+\infty) = +\infty$

علماً أننا:

$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$

التابع f اشتقاقي على R ولدينا:

$f'(x) = e^x - 1$

$f'(x) = 0 \Rightarrow e^x - 1 = 0$

$e^x = 1 \Rightarrow x = 0$

$f(0) = 1$

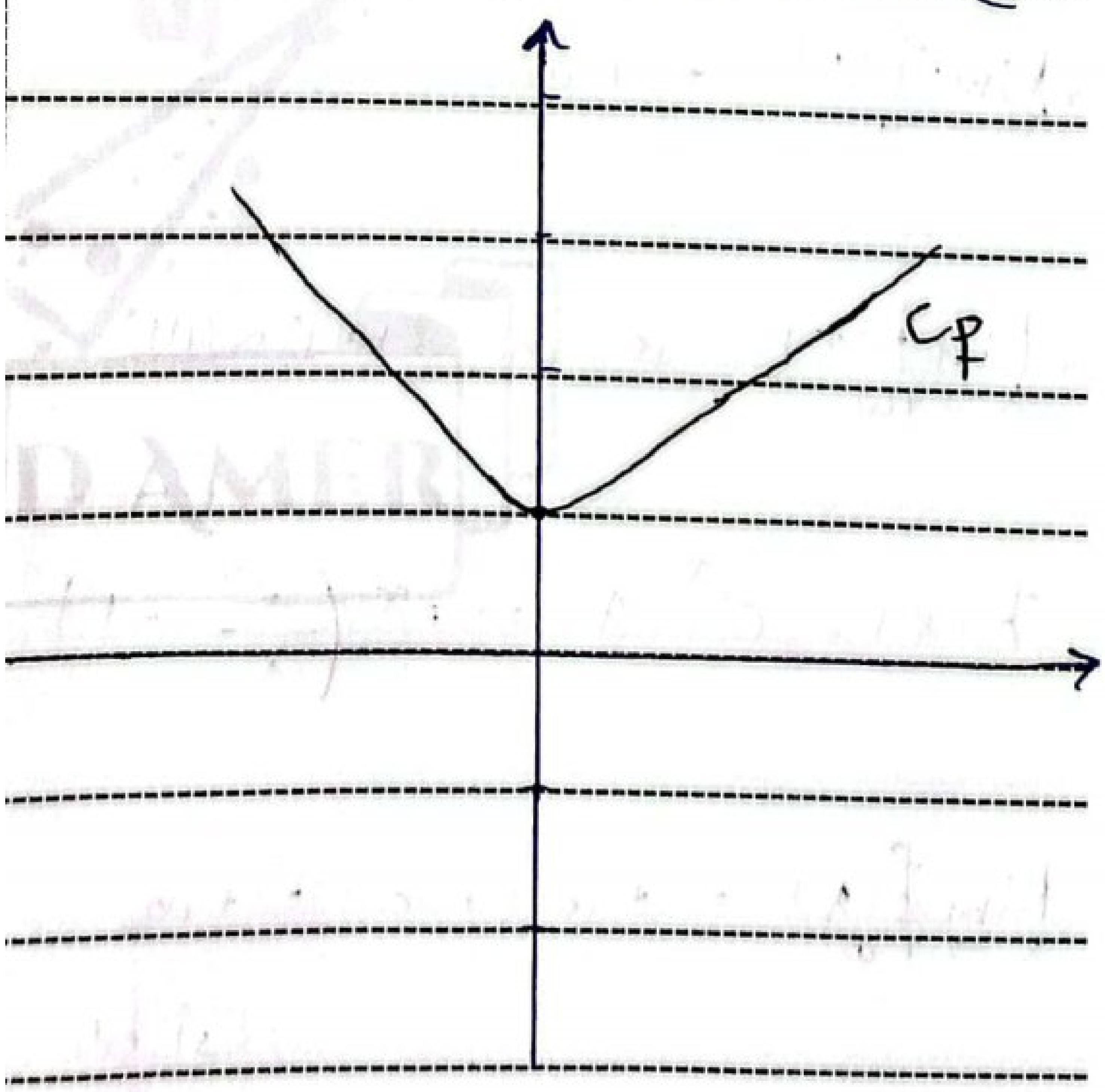
x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

التحضير للرسم:

$f(0) = 1$ قيمة حدية صغرى:

التقاطع مع المحاور: مع محور التراتيب: $(0,1)$

مع محور الفواصل: بلاها.. ^^



دراسة تابع لحل معادلة (مختلطة):

تمهيد:

$$x^2 + 1 - e^3 = 0$$

معادلة من الدرجة الثانية

$$x^2 + 1 - e^x = 0$$

معادلة مختلطة

أيّ موقع الـ x يحدد نوع المعادلة.

نص السؤال:

حل المعادلة الآتية:

فكرة الحل:

نعلم أن المعادلة المختلطة لا يمكن حلها بالطرق التقليدية ومن أجل ذلك فإننا نتبع الخطوات الآتية:

٥. ننقل جميع الحدود إلى الطرف الأيسر ونجعل الصفر في الطرف الأيمن

٦. نأخذ التابع $g(x)$ حيث:

$g(x) =$ الطرف الأيسر

٧. ندرس تغيرات التابع $g(x)$ وننظم جدولاً بها

٨. بالاعتماد على جدول التغيرات نسأل نفسنا

السؤال: هل ينعدم $g(x)$؟

أي: هل يوجد للمعادلة $g(x) = 0$ حل؟

* الحل: ننظر إلى حقل $g(x)$ ونتحقق من انتماء الصفر له ونميز:

① إذا كان الصفر ينتمي إلى حقل $g(x)$ يكون $g(x)$ ينعدم ولتحديد حل المعادلة نعوض قيم تجريبية

② إذا كان الصفر لا ينتمي إلى حقل $g(x)$ يكون $g(x)$ لا ينعدم والمعادلة مستحيلة الحل

تمرين:

حل المعادلات الآتية:

1. $\frac{2e^x-3}{e^x+1} - \frac{5}{4}x + \frac{1}{2} = 0$
2. $e^{\frac{1}{2}-x^2} + \sqrt{2}x - 2 = 0$
3. $\frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) = x$
4. $e^{\frac{x}{x^2+1}} = x + 1$

1] $\frac{2e^x-3}{e^x+1} - \frac{5}{4}x + \frac{1}{2} = 0$

مختلطة لا يمكن حلها بالطرق التقليدية لذلك

ليكن لدينا التابع g المعرف والمستمر على R وفق:

$g(x) = \frac{2e^x-3}{e^x+1} - \frac{5}{4}x + \frac{1}{2}$

$\lim_{x \to -\infty} g(x) = +\infty$

$\lim_{x \to +\infty} g(x) \quad \frac{\infty}{\infty}$ حالة عدم تعيين

$g(x) = \frac{2e^x-3}{e^x+1} - \frac{5}{4}x + \frac{1}{2}$

$g(x) = \frac{e^x(2-\frac{3}{e^x})}{e^x(1+\frac{1}{e^x})} - \frac{5}{4}x + \frac{1}{2}$

$\lim_{x \to +\infty} g(x) = \frac{2}{1} - \infty + \frac{1}{2} = -\infty$

$g'(x) = \frac{2e^{2x}+2e^x-2e^{2x}+3e^x}{(e^x+1)^2} - \frac{5}{4}$

$g'(x) = \frac{5e^x}{(e^x+1)^2} - \frac{5}{4}$

$4 \qquad (e^x+1)^2$

$g'(x) = \frac{20e^x - 5(e^x+1)^2}{4(e^x+1)^2}$

$g'(x) = \frac{-5e^{2x}+10e^x-5}{4(e^x+1)^2}$

$$g(x) = \frac{e^{2x} - 1 - 2xe^{x}}{2e^{x}}$$

$$\lim_{x \to -\infty} g(x) = \frac{-1}{0^+} = -\infty$$

علماً أن:

$$\lim_{x \to -\infty} xe^{x} = 0$$

• $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x)$ حالة عدم تعيين $\infty - \infty$

$$g(x) = \frac{1}{2}(e^{x} - e^{-x}) - x$$

$$g(x) = \frac{1}{2}e^{x} - \frac{1}{2e^{x}} - x$$

$$g(x) = e^{x}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2e^{2x}} - \frac{x}{e^{x}}\right)$$

$$\lim_{x \to +\infty} g(x) = +\infty\left(\frac{1}{2}\right) = +\infty$$

علماً أن:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x}{e^{x}} = 0$$

$$g'(x) = \frac{1}{2}(e^{x} + e^{-x}) - 1$$

$$g'(x) = 0 \Rightarrow \frac{1}{2}(e^{x} + e^{-x}) - 1 = 0$$

$$\frac{1}{2}(e^{x} + e^{-x}) = 1$$

$$\Rightarrow e^{x} + e^{-x} = 2$$

نضرب بـ e^{x}:

$$e^{2x} + 1 = 2e^{x}$$

$$g'(x) = 0 \Rightarrow \frac{-5e^{2x} + 10e^{x} - 5}{4(e^{x}+1)^2} = 0$$

$$-5e^{2x} + 10e^{x} - 5 = 0$$

$$-5(e^{2x} - 2e^{x} + 1) = 0$$

لنفرض: $t = e^{x}$

$$t^2 - 2t + 1 = 0$$

$$(t-1)(t-1) = 0 \Rightarrow (t-1)^2 = 0$$

$$t - 1 = 0 \Rightarrow t = 1$$

$$e^{x} = 1 \Rightarrow x = 0$$

$$g(0) = 0$$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$-$	
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

نلاحظ أن: $0 \in g(x)$ ومنه للمعادلة $g(x) = 0$ حل، والحل هو $x = 0$

3. $\frac{1}{2}(e^{x} - e^{-x}) = x$

معادلة لا يمكن حلها بالطرق التقليدية ...

ليكن لدينا التابع g المعرف على R وفق:

$$g(x) = \frac{1}{2}(e^{x} - e^{-x}) - x$$

• $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x)$ حالة عدم تعيين $\infty - \infty$

$$g(x) = \frac{1}{2}(e^{x} - e^{-x}) - x$$

$$g(x) = \frac{1}{2}e^{x} - \frac{1}{2e^{x}} - x$$

$$e^{2x}-2e^{x}+1=0$$

لتكن: $t=e^{x}$

$$t^{2}-2t+1=0$$

$$(t-1)(t-1)=0$$

$$(t-1)^{2}=0 \Rightarrow (t-1)=0$$

$$t=1 \Rightarrow e^{x}=1$$

$$\Rightarrow x=0 \Rightarrow g(0)=0$$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$+$	
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

نلاحظ أن $0\in g(x)$ ومنه المعادلة

$g(x)=0$ حل، والحل هو $x=0$.

حكمة:
لا تخلّي المختلطة تاخدك بالعبطة.

نص السؤال:
ادرس تغيرات التابع f دورة .. ^^

فكرة الحل:
٥. نحدد مجموعة تعريف التابع
٦. نوجد النهايات والصور
٧. نوجد $f'(x)$
٨. نعدم $f'(x)$ أي نحل المعادلة $f'(x) = 0$ فنصدم أن المعادلة مختلطة ومن أجل تفادي الصدمة نتبع الخطوات الآتية:

نكتب:
سنعود بعد قليل (سبيستون قناة المستقبل)

٤. نأخذ التابع $g(x)$ حيث: $g(x) = f'(x)$
٥. ندرس تغيرات التابع $g(x)$ وننظم جدولاً بها
٦. بالاعتماد على جدول التغيرات نسأل نفسنا
السؤال: هل ينعدم $g(x)$ ؟
أي: هل يوجد للمعادلة $g(x) = 0$ حل؟

* الحل: ننظر إلى حقل $g(x)$ ونتحقق من انتماء الصفر له ونميز:

① إذا كان الصفر لا ينتمي إلى حقل $g(x)$ يكون $g(x)$ لا ينعدم والمعادلة مستحيلة الحل
② إذا كان الصفر ينتمي إلى حقل $g(x)$ يكون $g(x)$ ينعدم ولتحديد حل المعادلة نستخدم قيم تجريبية.

نكتب: عدنا ونميز:
حالة 1 : يوجد للمعادلة حل α أي ينعدم $f'(x)$ عند α نوجد $f(\alpha)$ وننظم جدول تغيرات التابع f

حالة 2 : لا يوجد للمعادلة حل أي $f'(x)$ لا ينعدم ثم ننظم جدول تغيرات التابع f

تمرين:
في كل من الحالتين الآتيتين ادرس تغيرات التابع f المعرف على $\mathbb{R}$ ونظم جدولاً بها.

1. $f(x) = e^x - \frac{1}{2}ex^2$
2. $f(x) = xe^{-x} + x - 2$

I. $f(x) = e^x - \frac{1}{2}ex^2$

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

$\lim_{x\to+\infty} f(x)$ $\infty-\infty$ حالة عدم تعيين

$f(x) = e^x - \frac{1}{2}ex^2$

$f(x) = x^2\left(\frac{e^x}{x^2} - \frac{1}{2}e\right)$

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty(+\infty) = +\infty$

علماً أن:

$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^2} = +\infty$

$f'(x) = e^x - ex$

$f'(x) = 0 \Rightarrow e^x - ex = 0$

هنا خليط لا يمكن حله بالطرق التقليدية..

سنعود بعد قليل.. ^^

ليكن لدينا التابع g المعرف على R وفق:

$g(x) = e^x - ex$

$\lim_{x\to-\infty} g(x) = +\infty$

حالة عدم تعيين $\infty - \infty$: $\lim_{x \to +\infty} g(x)$

$g(x) = e^x - ex = x\left(\frac{e^x}{x} - e\right)$

$\lim_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$

$g'(x) = e^x - e$

$g'(x) = 0 \Rightarrow e^x - e = 0$

$e^x = e \Rightarrow x = 1$

$g(1) = 0$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

نلاحظ أن $g(x) \geq 0$ ومنه المعادلة لها حل

والحل هو $x = 1$.

عندنا

$f'(x)$ ينعدم عند $x = 1$

$f(1) = \frac{e}{2}$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{e}{2}$	$\nearrow$	$+\infty$

لا تأتي الأمور على قدر حلمك..

إنما على قدر سعيك لها

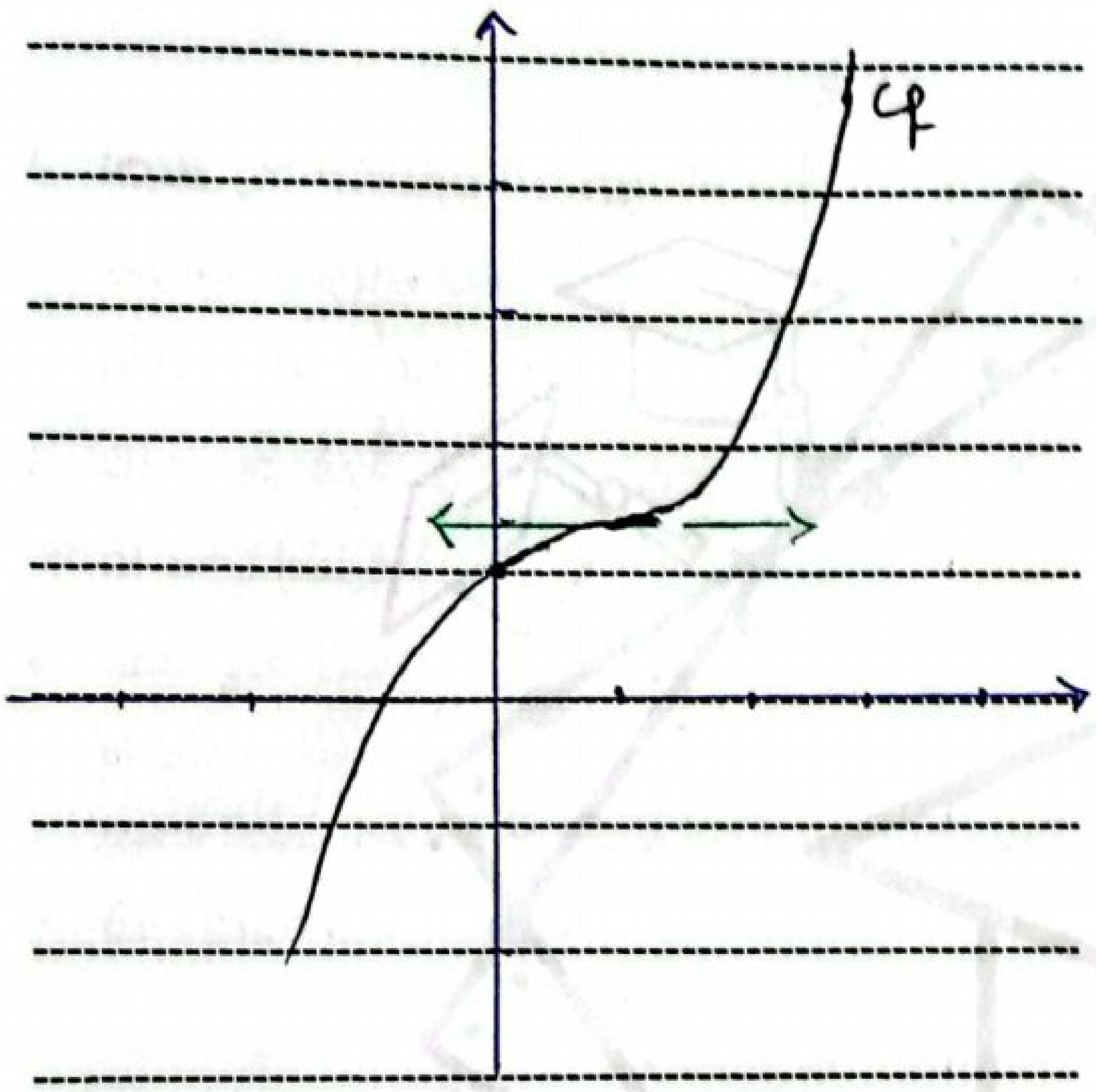
التفسير للرسم:

لدينا مماس أفقي: $y = \frac{e}{2} \simeq 1,4$

التقاطع مع المحاور:

مع محور التراتيب: $(0,1)$

مع محور الفواصل: بلا حل ^^



2] $f(x) = xe^{-x} + x - 2$

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

حالة عدم تعيين $(\infty)(0)$: $\lim_{x \to +\infty} f(x)$

$f(x) = xe^{-x} + x - 2$

$f(x) = \frac{x}{e^x} + x - 2$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

علماً أن:

$\lim_{x \to +\infty} \frac{x}{e^x} = 0$

$$f'(x) = e^{-x} - x e^{-x} + 1$$

$$f'(x) = \frac{1}{e^x} - \frac{x}{e^x} + 1 = \frac{1 - x + e^x}{e^x}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{1 - x + e^x}{e^x} = 0$$

$$1 - x + e^x = 0$$

هذا خليط لا يمكن حله بالطرق التقليدية..

سنعود بعد قليل..

ليكن لدينا التابع g المعرف على R وفق:

$$g(x) = 1 - x + e^x$$

• $\lim_{x \to -\infty} g(x) = +\infty$

• $\lim_{x \to +\infty} g(x)$ $\infty - \infty$ حالة عدم تعيين

$$g(x) = 1 - x + e^x = e^x\left(\frac{1}{e^x} - \frac{x}{e^x} + 1\right)$$

$$\lim_{x \to +\infty} g(x) = +\infty(1) = +\infty$$

علماً أن:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x}{e^x} = 0$$

$$g'(x) = -1 + e^x$$

$$g'(x) = 0 \Rightarrow -1 + e^x = 0$$

$$e^x = 1 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow g(0) = 2$$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	2	$\nearrow$	$+\infty$

$0 \notin g(x)$ ومنه المعادلة مستحيلة الحل

عدنا..

$f'(x)$ لا ينعدم..

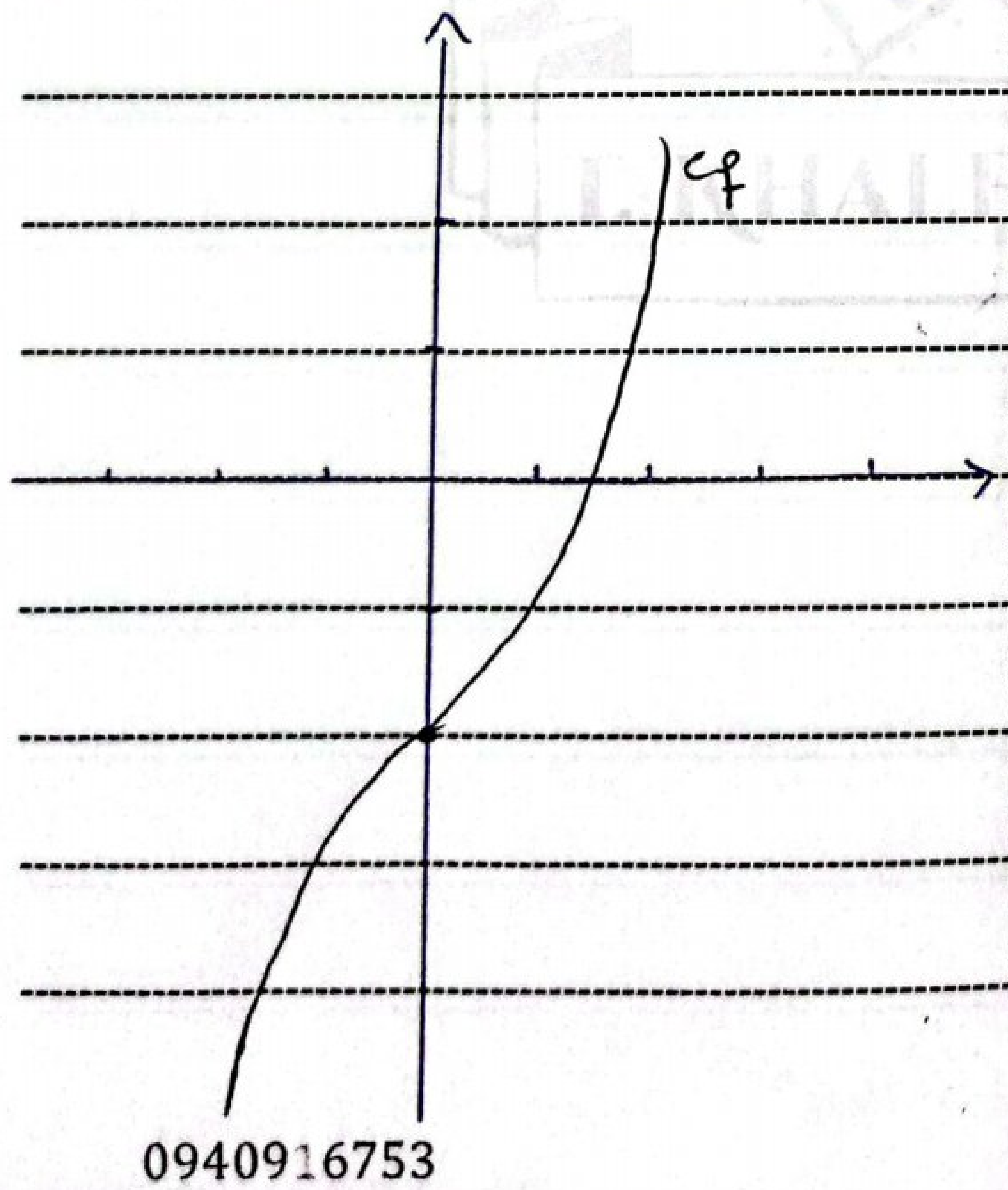
x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

• التحضير للرسم:

نقاط التقاطع مع المحاور:

مع محور التراتيب: $(0, -2)$

مع محور الفواصل: بلاها..



دراسة تابع لحل متراجحة (مختلطة):

نص السؤال:

أثبت صحة المتراجحة

فكرة الحل:

٦. ننقل جميع الحدود إلى الطرف الأيسر ونجعل الصفر في الطرف الأيمن

٧. نأخذ التابع $g(x)$ حيث:

$$g(x) = \text{الطرف الأيسر}$$

٨. ندرس إطراد التابع $g(x)$ (دراسة تغيرات دون نهايات) وننظم جدولاً بها بحيث نحدد إشارة $g'(x)$

٩. بالاعتماد على حق $g(x)$ نجري المناقشة الآتية:

- ما هي إشارة $g(x)$
- الحل: يتم تحديدها من حقل $g(x)$ بالاعتماد على قيم $g(x)$ وليس عبر الأسهم يمكن تحديد الإشارة باستخدام أسلوب السرقة حلال)

١٠. نثبت صحة المتراجحة

تمرين 1 :

أثبت صحة المتراجحة الآتية من أجل $x \geq 0$

$$e^{\sqrt{x}} \geq \sqrt{x} + 1$$

$e^{\sqrt{x}} - \sqrt{x} - 1 \geqslant 0$

ليكن لدينا التابع g المعرف على $[0,+\infty[$ وفق:

$g(x) = e^{\sqrt{x}} - \sqrt{x} - 1$

التابع g اشتقاقي على $]0,+\infty[$ وفق:

$g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} e^{\sqrt{x}} - \frac{1}{2\sqrt{x}}$

$g'(x) = 0 \Rightarrow \frac{1}{2\sqrt{x}} e^{\sqrt{x}} - \frac{1}{2\sqrt{x}} = 0$

$\frac{1}{2\sqrt{x}} (e^{\sqrt{x}} - 1) = 0$

إما

$\frac{1}{2\sqrt{x}} = 0 \Rightarrow$ مستحيلة الحل

أو

$e^{\sqrt{x}} - 1 = 0 \Rightarrow e^{\sqrt{x}} = 1$

$\Rightarrow \sqrt{x} = 0 \Rightarrow x = 0$

$g(0) = 0$

ننظم جدول اطراد التابع:

x	0	$+\infty$
$g'(x)$	0	$+$
$g(x)$	0	$\nearrow$

نلاحظ أن:

$g(x) \geqslant 0$

$e^{\sqrt{x}} - \sqrt{x} - 1 \geqslant 0$

$e^{\sqrt{x}} \geqslant \sqrt{x} + 1$

تمرين 2 :

أثبتْ أنّ $e^x \geq x - 1$ وذلك مهما كانت x من $\mathbb{R}$

$e^x - x + 1 \geqslant 0$

ليكن لدينا التابع g المعرف على $]-\infty,+\infty[$ وفق:

$g(x) = e^x - x + 1$

التابع g اشتقاقي على $\mathbb{R}$ وفق:

$g'(x) = e^x - 1$

$g'(x) = 0 \Rightarrow e^x - 1 = 0$

يجب أن تثق بنفسك، وإذا لم تثق بنفسك فمن ذا الذي سيثق بك وبأفكار الجديدة.

دراسة تابع لدراسة الوضع النسبي:

حكمة:

لا تخلي المختلطة تاخدك بالعبطة:

نص السؤال:

ادرس الوضع النسبي للخط البياني والمستقيم Δ

فكرة الحل:

① نشكل الفرق: $h(x) = f(x) - y_\Delta$

② نعدم الفرق أي نحل المعادلة $h(x) = 0$

فنصدم أنّ الفرق خليط لا يمكن حلّه بالطرق التقليدية ومن أجل تفادي الصدمة نتبع الخطوات الآتية:

* نكتب:

سنعود بعد قليل (سيبستون قناة المستقبل)

٥. نأخذ التابع $g(x)$ حيث: $g(x) = h(x)$

٦. ندرس تغيرات التابع $g(x)$ وننظم جدولاً بها.

٧. بالاعتماد على جدول التغيرات نسأل نفسنا السؤال: ما هي إشارة $g(x)$ ؟

٨. الحل:

نحدد من حقل $g(x)$ من جدول تغيرات $g(x)$

نكتب: عدنا ونميز:

③ ننظم جدول الوضع النسبي

بالاعتماد على جدول تغيرات التابع $g(x)$

تمرين 1 :

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $\mathbb{R}$

$$f(x) = \frac{2e^x - 3}{e^x + 1}$$

والمستقيم Δ الذي معادلته $\Delta: y = \frac{5}{4}x - \frac{1}{2}$

ادرس الوضع النسبي بين المستقيم Δ والخط البياني C_f

نشكل الفرق:

$h(x) = f(x) - y_\Delta$

$= \frac{2e^x - 3}{e^x + 1} - \frac{5}{4}x + \frac{1}{2}$

$h(x) = 0$

$\frac{2e^x - 3}{e^x + 1} - \frac{5}{4}x + \frac{1}{2} = 0$

$e^x = 1 \Rightarrow x = 0$

$g(0) = 1$

ننظم جدول اطراد التابع:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$		$\nearrow$	1	$\nearrow$	

نلاحظ أن:

$g(x) \geq 0$

$e^x - x + 1 \geq 0$

$e^x \geq x - 1$

بس ... شوي بعد قليل ^^

ليكن لدينا التابع g المعرف على R وفق:

$$g(x) = \frac{2e^x - 3}{e^x + 1} - \frac{5}{4}x + \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \to -\infty} g(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} g(x) \quad \frac{\infty}{\infty}$$ حالة عدم تعين

$$g(x) = \frac{2e^x - 3}{e^x + 1} - \frac{5}{4}x + \frac{1}{2}$$

$$g(x) = \frac{\cancel{e^x}\left(2 + \frac{3}{e^x}\right)}{\cancel{e^x}\left(1 + \frac{1}{e^x}\right)} - \frac{5}{4}x + \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \to +\infty} g(x) = -\infty$$

التابع g اشتقاقي على R ولدينا:

$$g'(x) = \frac{5e^x}{e^{2x} + 2e^x + 1} - \frac{5}{4}$$

$(4) \qquad (e^{2x} + 2e^x + 1)$

$$g'(x) = \frac{-5e^{2x} + 10e^x - 5}{4(e^{2x} + 2e^x + 1)}$$

$$g'(x) = 0 \Rightarrow \frac{-5e^{2x} + 10e^x - 5}{4(e^{2x} + 2e^x + 1)} = 0$$

$$-5e^{2x} + 10e^x - 5 = 0$$

$$-5(e^{2x} - 2e^x + 1) = 0$$

$$-5(e^x - 1)^2 = 0$$

إما $e^x - 1 = 0 \Rightarrow e^x = 1 \Rightarrow x = 0$

$$g(0) = 0$$

x	$-\infty$ 0 $+\infty$
$g'(x)$	− 0 −
$g(x)$	$+\infty$ ↘ 0 ↘ $-\infty$

نلاحظ أن المعادلة لها حل وحيد $x=0$

ومنه الفرق ينعدم عند $x=0$

عُدنا.. ^^ ينعدم الفرق عند $x=0$

ننظم جدول الوضع النسبي:

x	$-\infty$ 0 $+\infty$
$h(x)$	+ 0 −
الوضع النسبي	C فوق Δ $\frac{-1}{2}$ C تحت Δ

ملاحظة.. ^^

في طلب دراسة الوضع النسبي عندما يكون الفرق خليط يمكن تحديد إشارة الفرق وفق:

قيم تجريبية اختيارية

من جدول التغيرات التابع g وتحديداً من حقل g(x) يكون إشارة الفرق ذاتها إشارة g(x)

تمرين 3 :

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $\mathbb{R}$

$$f(x) = \frac{1}{2}(e^{x} - e^{-x})$$

ولكن المماس T الذي معادلته $T: y = x$

ادرس الوضع النسبي بين المماس T والخط البياني C_f

- $h(x) = f(x) - y_T$

$h(x) = \frac{1}{2}(e^{x} - e^{-x}) - x$

$h(x) = \frac{1}{2}e^{x} - \frac{1}{2}e^{-x} - x$

$h(x) = 0 \Rightarrow \frac{1}{2}e^{x} - \frac{1}{2}e^{-x} - x = 0$

هنا خليط لا يمكن حله بالطرق التقليدية..

^^ سنعود بعد قليل..

ليكن لدينا $g(x)$ المعرف على R وفق:

$g(x) = \frac{1}{2}e^{x} - \frac{1}{2}e^{-x} - x$

- $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x)$ $\infty - \infty$ حالة عدم تعيين

$g(x) = \frac{1}{2}e^{x} - \frac{1}{2}e^{-x} - x$

$g(x) = \frac{1}{2}e^{x} - \frac{1}{2e^{x}} - x$

$g(x) = \frac{e^{2x} - 1 - xe^{x}}{2e^{x}}$

$\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = \frac{-1}{0^{+}} = -\infty$

حالة عدم تعيين $\infty - \infty$ • $\lim_{x \to +\infty} g(x)$

$$g(x) = \frac{1}{2}e^x - \frac{1}{2e^x} - x$$

$$g(x) = e^x\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2e^{2x}} - \frac{x}{e^x}\right)$$

$$\lim_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$$

علماً أن:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x}{e^x} = 0$$

$$g'(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) - 1$$

$$g'(x) = 0 \Rightarrow \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) - 1 = 0$$

$$\frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) = 1$$

$$e^x + e^{-x} = 2$$

نضرب بـ: e^x

$$e^{2x} + 1 - 2e^x = 0$$

$$e^{2x} - 2e^x + 1 = 0$$

ليكن: $t = e^x$

$$t^2 - 2t + 1 = 0$$

$$(t-1)(t-1) = 0$$

$$(t-1)^2 = 0 \Rightarrow t - 1 = 0$$

$$\Rightarrow t = 1$$

$$e^x = 1 \Rightarrow x = 0$$

$$g(0) = 0$$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$+$	
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

نلاحظ أن: $0 \in g(x)$ ومنه المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حل، والحل هو $x = 0$

عُدنا :: حـ

إذاً $h(x)$ يتغير عند $x = 0$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$h(x)$		$-$	0	$+$	
وضع نسبي		C تحت Δ		C فوق Δ	

ملاحظة:

دراسة الوضع النسبي تكون بين الخط البياني و:

- خط بياني
- مستقيم
  - أفقي أو مائل
  - مقارب أفقي
  - مقارب مائل
  - مماس أفقي أو مائل

المماس المشترك:

نص السؤال:

أثبت أنّ C_f و C_g يقبلان مماساً مشتركاً في النقطة التي فاصلتها x_0

فكرة الحل:

٣. نثبت أنّ $f(x_0) = g(x_0)$

٤. نثبت أنّ $f'(x_0) = g'(x_0)$

تمرين 1 :

في معلم متجانس C_f و C_g هما على التوالي الخطان البيانيان للتابعين f و g المعرفين على المجال $I =]-1, +\infty[$ وفق:

$$f(x) = \ln(x+1)\;;\; g(x) = e^x - 1$$

١. أثبت أنّ C_f و C_g يقبلان مماساً مشتركاً في النقطة التي فاصلتها $x = 0$

٢. اكتب معادلة المماس المشترك T

1. الشرط الأول:

$f(0) = 0$, $g(0) = 0$

$\Rightarrow f(0) = g(0)$

الشرط الثاني:

$f'(x) = \frac{1}{x+1} \Rightarrow f'(0) = 1$

$g'(x) = e^x \Rightarrow g'(0) = 1$

$\Rightarrow f'(0) = g'(0)$

مما سبق نجد أن C_f , C_g يقبلان مماساً مشتركاً في النقطة التي فاصلتها $x = 0$.

2. النقطة $(0,0)$:

الميل: $m = 1$

تمرين 2 :

ليكن C_f الخط البياني للتابع f المعرف على المجال $]-1,1[$ وفق:

$$f(x) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{x+1}{1-x}\right)$$

وليكن C_g الخط البياني للتابع g المعرف على $\mathbb{R}$

$$g(x) = \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}$$

1. أثبت أنّ C_f و C_g يقبلان مماساً مشتركاً T في النقطة $(0,0)$
2. اكتب معادلة للمماس T

I. الشرط الأول:

$f(0) = 0 \quad , \quad g(0) = 0$

$\Rightarrow f(0) = g(0) = 0$

▪ الشرط الثاني:

$$f'(x) = \frac{1}{2}\,\frac{\left(\frac{x+1}{1-x}\right)'}{\left(\frac{x+1}{1-x}\right)}$$

$$f'(x) = \frac{1}{2}\,\frac{2}{(x+1)(1-x)} = \frac{1}{(x+1)(1-x)}$$

$f'(0) = 0$

$$g'(x) = \frac{2e^{2x}(e^{2x}+1) - 2e^{2x}(e^{2x}-1)}{(e^{2x}+1)^2}$$

$$g'(x) = \frac{4e^{2x}}{(e^{2x}+1)^2}$$

$$g'(0) = \frac{4}{4} = 1$$

$\Rightarrow f'(0) = g'(0) = 1$

$\Rightarrow \boxed{T : y = x}$

ملاحظة ^^

لتحديد النقطة المشتركة بين C_f و C_g

فإننا نحل المعادلة : $f(x) = g(x)$

تمرين 3 : خارجي .. + هام..

C_f و C_g هما الخطان البيانيان للتابعين المعرفين وفق:

$$f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \; ; \; g(x) = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}$$

1. أثبت أن C_f و C_g يقبلان مماساً مشتركاً في نقطة يطلب تعيين إحداثياتها
2. اكتب معادلة المماس المشترك T

1] ايجاد النقطة المشتركة: نحل المعادلة:

$$f(x) = g(x)$$

$$\frac{e^x - e^{-x}}{2} = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}$$

$$(e^x - e^{-x})(e^{2x} + 1) = (e^{2x} - 1)(2)$$

$$e^{3x} + \cancel{e^x} - \cancel{e^x} - e^{-x} = 2e^{2x} - 2$$

$$e^{3x} - 2e^{2x} - e^{-x} + 2 = 0$$

نضرب بـ e^x :

$$e^{4x} - 2e^{3x} + 2e^x - 1 = 0$$

لتكن: $t = e^x$:

$$t^4 - 2t^2 + 2t - 1 = 0$$

نلاحظ أن $t = 1$ تعدم المقدار:

$$t^3 - t^2 - t + 1$$

$$t - 1 \;\Big|\; t^4 - 2t^3 + 2t - 1$$

$$-t^4 \pm t^3$$

$$-t^3 + 2t - 1$$

$$\pm t^3 \mp t^2$$

$$-t^2 + 2t - 1$$

$$\pm t^2 \mp t$$

$$t - 1$$

$$\pm t \pm 1$$

$$0$$

مما سبق نجد أن C_f و C_g يقبلان مماساً مشتركاً في النقطة $(0,0)$.

2] النقطة: $A(0,0)$

$$m = 1$$

$$T : y = m(x - x_A) + y_A$$

$$T : y = 1(x - 0) + 0$$

$$\boxed{T : y = x}$$

حياتك عبارة عن قصة من عدّةِ فصول. فإذا كان فيها فصلًا سيئًا فلا يعني ذلك نهايتها. لذلك، توقّف عن إعادة قراءة هذا الفصل، وافتح صفحة جديدة.

إذاً: $(t-1)(t^3-t^2-t+1)=0$

إما $t-1=0 \Rightarrow t=1$

$e^x=1 \Rightarrow x=0$

أو $t^3-t^2-t+1=0$

نلاحظ أن $t=1$ تعدم المقدار:

$$
\begin{array}{r|l}
 & t^2-1 \\
\hline
t-1 & t^3-t^2-t+1 \\
 & \mp t^3 \pm t^2 \\
\hline
 & -t+1 \\
 & \pm t \mp 1 \\
\hline
 & 0 \quad 0
\end{array}
$$

$(t-1)(t^2-1)=0$

إما $t-1=0 \Rightarrow t=1$

$e^x=1 \Rightarrow x=0$

أو $t^2-1=0 \Rightarrow t^2=1$

إما $t=-1 \Rightarrow e^x=-1$

مستحيلة الحل.

أو $t=1 \Rightarrow e^x=1$

$\Rightarrow x=0$

إذاً فاصلة نقطة تماس C_f, C_g هي:

$x=0$.

- الشرط الأول:

$f(0)=0 \quad , g(0)=0$

$\Rightarrow f(0)=g(0)=0$

- الشرط الثاني:

$f'(x)=\frac{1}{2}(e^x+e^{-x})$

$f'(0)=1$

$$g'(x) = \frac{4e^{2x}}{(e^{2x}+1)^2}$$

$$g'(0) = 1$$

$$\Rightarrow f'(0) = g'(0) = 1$$

مما سبق نجد أن C_f , C_g يقبلان مماساً مشتركاً في النقطة التي فاصلتها $x=0$.

2 • النقطة : $A(0,0)$.

• $m = 1$

$$T: y = m(x - x_A) + y_A$$

$$T: y = 1(x-0) + 0$$

$$\boxed{T: y = x}$$

ملاحظة .. ^^

المختلطة :

معادلة ⇐ دراسة تغيرات ، الوضع النسبي (نستخدم تغيرات)

متراجحة ⇐ إثبات صحة متراجحة (نستخدم الاطراد)

معادلات تفاضلية بسيطة:

تمهيد:

أن نحل على مجال I المعادلة التفاضلية $y' = ay$, $(a \neq 0)$ بالتابع المجهول y هو أن نعثر على جميع التوابع f الاشتقاقية على I , والتي تحقق في حالة x من I , العلاقة $f'(x) = af(x)$ يسمى مثل هذا التابع حلاً للمعادلة التفاضلية $y' = ay$

تعاريف:

* إنّ حلول المعادلة التفاضلية $(a \neq 0)$, $y' = ay$ على $\mathbb{R}$ هي التوابع $f_{(k)}(x) = ke^{ax}$ حيث k عدد حقيقي
* إنّ حلول المعادلة التفاضلية $y' = ay + b$, $(a \neq 0 , b \in \mathbb{R})$ على $\mathbb{R}$ هي التوابع $f_{(k)}(x) = ke^{ax} - \frac{b}{a}$ حيث k عدد حقيقي.

أيّ أنّ:

شكل المعادلة	حلولها
$y' = ay$	$f_k(x) = \mathrm{k}e^{ax}$
$y' = ay + b$	$f_k(x) = \mathrm{k}e^{ax} - \frac{b}{a}, \mathrm{k} \in R$

رموز:

$y = f(x)$	$y' = f'(x)$

أنماط التمارين:

النمط الأول: دورة ..

نص السؤال:

أثبت أن التابع $f(x)$ (معطى)

هو حل للمعادلة التفاضلية (معطاة)

فكرة الحل:

نعوض في المعادلة التفاضلية

ونستبدل كل y بـ $f(x)$ وكل y' بـ $f'(x)$

ونميز:

المعادلة محققة: إذاً $f(x)$ هو الحل

المعادلة غير محققة: إذاً $f(x)$ ليس حل للمعادلة

تمرين 1 :

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $\mathbb{R}$ وفق:

$$f(x) = \frac{2x}{e^x}$$

أثبت أن $f(x)$ هو حل للمعادلة التفاضلية

$$\underbrace{y' + y}_{L_1} = \underbrace{2e^{-x}}_{L_2}$$

إيجاد $f'(x)$:

$$f'(x) = \frac{2e^x - 2xe^x}{e^{2x}} = \frac{e^x(2-2x)}{(e^x)^2}$$

$$L_1 = y' + y = \frac{2-2x}{e^x} + \frac{2x}{e^x}$$

$$= \frac{2-2x+2x}{e^x} = \frac{2}{e^x} = 2e^{-x} = L_2$$

إذاً f هو حل المعادلة التفاضلية.

تمرين 2 :

أثبت أن التابع $f(x) = xe^x$ حل المعادلة التفاضلية $y' - y = e^x$ ثم استنتج أن:

$$(f'' - 2f' + 2f)e^{-x} = x$$

لدينا:

$$f'(x) = e^x + xe^x$$

$$f''(x) = e^x + e^x + xe^x = 2e^x + xe^x$$

لتكن:

$$\underbrace{y' - y}_{L_1} = \underbrace{e^x}_{L_2}$$

$$L_1 = y' - y = e^x + xe^x - xe^x$$

$$= e^x = L_2$$

استنتاج أن:

$$\underbrace{(f'' - 2f' + 2f)e^{-x}}_{L_1} = \underbrace{x}_{L_2}$$

$$L_1 = (\cancel{2e^x} + xe^x - \cancel{2e^x} - \cancel{2xe^x} + \cancel{2xe^x})e^{-x}$$

$$= (xe^x)e^{-x} = x = L_2$$

النمط الثاني: دورة .. ^^

نص السؤال:

عين قيمة المجهول m ليكون التابع $f(x)$ (معطى) هو حل للمعادلة التفاضلية (معطاة)

فكرة الحل:

نعوض في المعادلة التفاضلية بحيث نستبدل كل y بـ $f(x)$ وكل y' بـ $f'(x)$ فنحصل على معادلة بهذا المجهول وبحل هذه المعادلة نحصل على المطلوب

تمرين:

لتكن E المعادلة التفاضلية

$$(E): y' + 3y = 2e^{-x}$$

عين العدد a ليكون التابع:

$$f(x) = ae^{-x}$$

حلاً للمعادلة التفاضلية

▪ إيجاد $f'(x)$:

$f'(x) = -ae^{-x}$

▪ لدينا: $y' + 3y = 2e^{-x}$

$-ae^{-x} + 3ae^{-x} = 2e^{-x}$

$2ae^{-x} = 2e^{-x}$

$\Rightarrow a = \frac{2e^{-x}}{2e^{-x}}$

$\Rightarrow \boxed{a = 1}$

النمط الثالث: دورة .. ^^

نص السؤال:

حل المعادلة التفاضلية

فكرة الحل:

١. نعزل y'
٢. نحدد قيمة a
٣. نحدد قيمة b عند وجود حل
٤. نطبق التعريف المناسب

تمرين 1 :

حل المعادلات التفاضلية الآتية:

1. $y' = 3y$
2. $3y' = 5y$
3. $y' + 2y = 0$
4. $2y' + 3y = 0$
5. $y' = 2y + 1$
6. $y + 3y' = 2$
7. $2y' = y - 1$
8. $2y + 3y' - 1 = 0$

1 ▪ $y' = 3y$

$a = 3$

حلول المعادلة هي التوابع من الشكل:

$f_K(x) = Ke^{aK} \; ; K \in R$

$f_K(x) = Ke^{3K} \; ; \; K \in R$

2 ▪ $3y' = 5y \Rightarrow y' = \frac{5}{3}y$

$a = \frac{5}{3}$

حلول المعادلة هي التوابع من الشكل:

$f_K(x) = Ke^{aK} \; ; K \in R$

$f_K(x) = Ke^{\frac{5}{3}K} \; ; K \in R$

3] $y' + 2y = 0$

$y' = -2y$

$a = -2$

حلول المعادلة هي التوابع من الشكل:

$f_k(x) = Ke^{ax} \; ; K \in R$

$f_k(x) = Ke^{-2x} \; ; K \in R$

4] $2y' + 3y = 0$

$2y' = -3y \Rightarrow y' = -\frac{3}{2}y$

$a = -\frac{3}{2}$

حلول المعادلة هي التوابع من الشكل:

$f_k(x) = Ke^{ax} \; ; K \in R$

$f_k(x) = Ke^{-\frac{3}{2}x} \; ; K \in R$

5] $y' = 2y + 1$

$a = 2 \quad , b = 1$

حلول المعادلة هي التوابع من الشكل:

$f_k(x) = Ke^{ax} - \frac{b}{a} \; ; K \in R$

$f_k(x) = Ke^{2x} - \frac{1}{2} \; ; K \in R$

6] $y + 3y' = 2$

$3y' = 2 - y \Rightarrow y' = \frac{2}{3} - \frac{y}{3}$

$a = -\frac{1}{3} \quad , b = \frac{2}{3}$

حلول المعادلة هي التوابع من الشكل:

$f_k(x) = Ke^{ax} - \frac{b}{a} \; ; K \in R$

$f_k(x) = Ke^{-\frac{1}{3}x} - \frac{\frac{2}{3}}{-\frac{1}{3}} \; ; K \in R$

$f_k(x) = Ke^{-\frac{1}{3}x} + 2 \; ; K \in R$

7] $2y' = y - 1$

$y' = \frac{y}{2} - \frac{1}{2}$

$a = \frac{1}{2} \quad , b = -\frac{1}{2}$

حلول المعادلة هي التوابع من الشكل:

$f_k(x) = Ke^{ax} - \frac{b}{a} \; ; K \in R$

$f_k(x) = Ke^{\frac{1}{2}x} + 1 \; ; K \in R$

8] $2y + 3y' - 1 = 0$

$3y' = 1 - 2y \Rightarrow y' = \frac{1}{3} - \frac{2}{3}y$

$a = -\frac{2}{3} \quad , b = \frac{1}{3}$

حلول المعادلة هي التوابع من الشكل:

$f_k(x) = Ke^{ax} - \frac{b}{a} \; ; K \in R$

$f_k(x) = Ke^{-\frac{2}{3}x} + \frac{1}{2} \; ; K \in R$

النمط الرابع: دورة .. ٢٢

نص السؤال:

عين حل المعادلة التفاضلية (معطاة) الذي يحقق الشرط (معطى)

فكرة الحل: (النمط الثالث + تعيين قيمة K)

١. نحل المعادلة كما ورد في النمط الثالث
٢. بالاعتماد على الشرط نضع الترجمة المناسبة
٣. نعوض ونصلح وصولاً إلى K

قاموس:

الترجمة	الشرط
$f(x_A) = y_A$	الخط البياني للحل يمر بالنقطة $A(x_A, y_A)$
$f(a) = b$	الحل f يحقق $f(a) = b$
$f'(x_A) = m$	ميل المماس في النقطة التي فاصلتها x_A للخط C من الحل يساوي m

تمرين 1 :

في كل حالة عين حل المعادلة التفاضلية الذي يحقق الشرط المعطى:

١. $y' = 2y$ والحل f يحقق الشرط $f(0) = 1$
٢. $y' + 5y = 0$ والخط البياني C للحل يمر بالنقطة $A(-2,1)$
٣. $y' + 2y = 0$ وميل المماس في النقطة التي فاصلتها -2 من الخط البياني للحل يساوي $\frac{1}{2}$

١ • $\alpha = 2$:

حلول المعادلة هي التوابع من الشكل:

$f_K(x) = Ke^{\alpha x}$; $K \in R$

$f_K(x) = Ke^{2x}$; $K \in R$

• إيجاد قيمة K :

بما أن f يحقق الشرط: $f(0) = 1$

إذاً حل المعادلة:

$f(x) = e^{2x}$

$\boxed{2}$

$y' + 5y = 0$

$y' = -5y \Rightarrow a = -5$

حلول المعادلة هي التوابع من الشكل :

$f_k(x) = Ke^{ax} \; ; K \in R$

$f_k(x) = Ke^{-5x} \; ; K \in R$

• تعين قيمة K :

الحل يمر بالنقطة A(-2,1) :

$f(-2) = 1 \Rightarrow Ke^{10} = 1$

$\Rightarrow K = \frac{1}{e^{10}} \Rightarrow K = e^{-10}$

إذا حلول المعادلة هو :

$f(x) = e^{-10} \times e^{-5x} = e^{-5x-10}$

3

$y' + 2y = 0$

$y' = -2y \Rightarrow a = -2$

حلول المعادلة هي التوابع من الشكل:

$f_k(x) = ke^{ax}$; $k \in R$

$f_k(x) = ke^{-2x}$; $k \in R$

• إيجاد قيمة k:

وبما أن ميل المماس في النقطة التي فاصلتها

-2 من الخط البياني للحل يساوي $\frac{1}{2}$ فإن:

$f'(-2) = \frac{1}{2}$

لدينا:

$f'(x) = -2ke^{-2x}$; $k \in R$

إذاً:

$-2ke^{4} = \frac{1}{2}$

$k = \frac{\frac{1}{2}}{-2e^{4}} \Rightarrow k = \frac{-1}{4}e^{-4}$

إذاً حل المعادلة هي:

$f(x) = \frac{-1}{4}e^{-4} \times e^{-2x}$

$f(x) = \frac{-1}{4}e^{-2x-4}$

تمرين 2 :

حل المعادلة التفاضلية $2y' + y = 1$ ثم عين k بحيث يكون ميل المماس في النقطة التي فاصلتها 0 يساوي -2

- $2y' + y = 1$

$y' = \frac{1}{2} - \frac{y}{2} \Rightarrow a = -\frac{1}{2}\ ,\ b = \frac{1}{2}$

حلول المعادلة هي التوابع من الشكل :

$f_k(x) = ke^{ax} - \frac{b}{a}\ ;\ k \in R$

$f_k(x) = ke^{-\frac{1}{2}x} + 1\ ;\ k \in R$

- ايجاد قيمة k :

بما أن ميل المماس في النقطة التي فاصلتها 0 يساوي -2 فإننا :

$f'(0) = -2$

لدينا :

$f'(x) = -\frac{1}{2}ke^{-\frac{1}{2}x}\ ;\ k \in R$

إذاً :

$$-\frac{1}{2} k e^{-\frac{1}{2}(0)} = -2$$

$$-\frac{1}{2} K = -2 \Rightarrow K = 4$$

إذاً حل المعادلة هي :

$$f(x) = 4 e^{-\frac{1}{2}x} + 1$$

لم يأتِ سابقاً..

النمط الخامس:

نص السؤال:

عين تابعاً من الدرجة الثانية
يحقق المعادلة التفاضلية (معطاة)

فكرة الحل:

١. نفرض تابعاً من الدرجة الثانية من الشكل:
$$f(x) = ax^2 + bx + c$$
٢. نشتق التابع $f(x)$
٣. نعوض في المعادلة التفاضلية كلاً من:
$f(x)$ و $f'(x)$ فنحصل على معادلة بالمجاهيل a و b و c
٤. نطابق بينها وبين المعادلة التفاضلية (المعطاة)
٥. فنحصل على جملة معادلات بالمجاهيل a و b و c نحلها إما بالحذف بالجمع أو الحذف بالتعويض
٦. نحصل على قيم a و b و c وبتعويضها في:
$$f(x) = ax^2 + bx + c$$
نكون قد حصلنا على التابع

تمرين 1 :

عين تابعاً من الدرجة الثانية f
بحيث يحقق المعادلة التفاضلية
$$2y' - y = -x^2 + x$$

• ليكن لدينا التابع: $f(x) = ax^2+bx+c$

$f'(x) = 2ax + b$

• وبما أن التابع f يحقق المعادلة فإن:

$2y' - y = -x^2+x$

$2(2ax+b)-(ax^2+bx+c) = -x^2+x$

$4ax+2b-ax^2-bx-c = -x^2+x$

$-ax^2+(4a-b)x+2b-c = -x^2+x$

• وبالمقارنة نجد:

$$\begin{cases} -a = -1 \quad .. \boxed{1} \\ 4a-b = 1 \quad .. \boxed{2} \\ 2b-c = 0 \quad .. \boxed{3} \end{cases}$$

من $\boxed{1}$ نجد: $\boxed{a=1}$

نعوض في $\boxed{2}$

$4-b=1$

$\Rightarrow \boxed{b=3}$

نعوض في $\boxed{3}$: $\boxed{c=6}$

• إذاً التابع:

$f(x) = x^2+3x+6$

تمرين 2 :

لتكن (E') المعادلة التفاضلية
$$2y' + 3y = x^2 + 1$$
عين كثير حدود من الدرجة الثانية f
يحقق المعادلة (E')

• ليكن لدينا التابع: $f(x) = ax^2+bx+c$

$f'(x) = 2ax+b$

• وبما أن التابع f يحقق المعادلة فإن:

$2y'+3y = x^2+1$

$2(2ax+b)+3(ax^2+bx+c) = x^2+1$

$4ax+2b+3ax^2+3bx+3c = x^2+1$

$3ax^2+(4a+3b)x+2b+3c = x^2+1$

• وبالمقارنة نجد:

$$\begin{cases} 3a = 1 \quad .. \boxed{1} \\ 4a+3b = 0 \quad .. \boxed{2} \\ 2b+3c = 1 \quad .. \boxed{3} \end{cases}$$

من $\boxed{1}$ نجد: $\boxed{a=\frac{1}{3}}$ نعوض في $\boxed{2}$

$4\times\frac{1}{3}+3b=0 \Rightarrow \boxed{b=-\frac{4}{9}}$

نعوض في $\boxed{3}$: $2\times -\frac{4}{9}+3c=1$

$\Rightarrow \boxed{c=\frac{17}{27}}$

• إذاً التابع:

$f(x) = \frac{1}{3}x^2 - \frac{4}{9}x + \frac{17}{27}$

	النمط الأول	النمط الثاني	النمط الثالث	النمط الرابع	النمط الخامس
نص السؤال	أثبت أن التابع $f(x)$ (معطى) هو حل للمعادلة التفاضلية (معطاة)	عين قيمة المجهول m ليكون التابع $f(x)$ (معطى) هو حل للمعادلة التفاضلية (معطاة)	حل المعادلة التفاضلية	عين حل المعادلة التفاضلية (معطاة) الذي يحقق الشرط (معطى)	عين تابعاً من الدرجة الثانية يحقق المعادلة التفاضلية (معطاة)
فكرة الحل	نعوض في المعادلة التفاضلية ونستبدل كل y بـ $f(x)$ وكل y' بـ $f'(x)$ ونميز: المعادلة محققة: إذاً $f(x)$ هو الحل المعادلة غير محققة: إذاً $f(x)$ ليس حل للمعادلة	نعوض في المعادلة التفاضلية بحيث نستبدل كل y بـ $f(x)$ وكل y' بـ $f'(x)$ فنحصل على معادلة بهذا المجهول وبحل هذه المعادلة نحصل على المطلوب	١. نعزل y' ٢. نحدد قيمة a ٣. نحدد قيمة b عند وجود حل ٤. نطبق التعريف المناسب	١. نحل المعادلة كما ورد في النمط الثالث ٢. بالاعتماد على الشرط نضع الترجمة المناسبة ٣. نعوض ونصلح وصولاً إلى K	١. نفرض تابعاً من الدرجة الثانية من الشكل: $f(x) = ax^2 + bx + c$ ٢. نشتق التابع $f(x)$ ٣. نعوض في المعادلة التفاضلية كلاً من $f'(x)$ و $f(x)$ فنحصل على معادلة بالمجاهيل a و b و c ٤. نطابق بينها وبين المعادلة التفاضلية (المعطاة) ٥. فنحصل على جملة معادلات بالمجاهيل a و b و c نحلها إما بالحذف بالجمع أو الحذف بالتعويض ٦. نحصل على قيم a و b و c وبتعويضها في: $f(x) = ax^2 + bx + c$ نكون قد حصلنا على التابع

التابع الأسي بالأساس a :

تمهيد:

التابع الأسي هو حالة خاصة من التابع a^x

حيث: $a = e$

الرمز:

$$a^x \text{ حيث: } a > 0$$

الخاصة:

$$a^x = e^{\ln(a)^x} = e^{x\ln(a)}$$

كيفية التعامل مع:

المعادلات والمتراجحات:

لدينا ثلاثة أنماط كما في المعادلات الأسية وتتعامل معها بذات الأسلوب.

النهايات والاشتقاق ودراسة التغيرات:

نستفيد من الخاصة $a^x = e^{\ln(a)^x} = e^{x\ln(a)}$

ثم نتابع كما ورد معنا في التابع الأسي

تمرين 1 :

بسط كل من العددين:

1. $A = 3^{-\frac{1}{Ln3}}$
2. $B = 2^{\frac{1}{Ln4}}$

1) $A = 3^{\frac{-1}{Ln3}} = e^{Ln3^{-\frac{1}{Ln3}}}$

$= e^{\frac{-1}{\cancel{Ln3}}\cancel{Ln3}} = e^{-1} = \frac{1}{e}$

$\boxed{2}$ • $B = 2^{\frac{1}{\ln 4}} = e^{\ln 2^{\frac{1}{\ln 4}}} = e^{\frac{1}{\ln 4} \times \ln 2}$

$= e^{\frac{1}{2\cancel{\ln 2}} \times \cancel{\ln 2}} = e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}$

تمرين 2 :

حل في كل حالة المعادلة أو المتراجحة المعطاة:

1. $7^{x-1} = 3^{x}$
2. $3^{x} = 4^{2x+1}$
3. $3^{x} > 4$
4. $\left(\frac{1}{3}\right)^{x} > 4$
5. $5^{-x} < 5^{2x}$
6. $\frac{2^{x}}{2^{x}+1} < \frac{1}{3}$

1] $7^{x-1} = 3^x$

$\ln 7^{x-1} = \ln 3^x$

$(x-1)\ln 7 = x\ln 3$

$x\ln 7 - \ln 7 = x\ln 3$

$x\ln 7 - x\ln 3 = \ln 7$

$x(\ln 7 - \ln 3) = \ln 7$

$\Rightarrow \boxed{x = \dfrac{\ln 7}{\ln 7 - \ln 3}}$

2] $3^x = 4^{2x+1}$

$\ln 3^x = \ln 4^{2x+1}$

$x\ln 3 = (2x+1)\ln 4$

$x\ln 3 = 2x\ln 4 + \ln 4$

$x\ln 3 - 2x\ln 4 = \ln 4$

$x(\ln 3 - 2\ln 4) = \ln 4$

$\Rightarrow \boxed{x = \dfrac{\ln 4}{\ln 3 - 2\ln 4}}$

3] $3^x > 4$

$\ln 3^x > \ln 4$

$x\ln 3 > \ln 4$

$x > \dfrac{\ln 4}{\ln 3}$

$\Rightarrow S = \left]\dfrac{\ln 4}{\ln 3}, +\infty\right[$

6. $\frac{2^x}{2^x+1} < \frac{1}{3}$

$2^x \times 3 < 2^x + 1$

$2^x \times 3 - 2^x < 1$

$2^x(3-1) < 1$

$2^x \times 2 < 1$

$2^{x+1} < 1$

$\ln 2^{x+1} < \ln 1$

$(x+1)\ln 2 < 0$

$x \ln 2 + \ln 2 < 0$

$x \ln 2 < -\ln 2$

$x < \frac{-\ln 2}{\ln 2} \Rightarrow x < -1$

$\Rightarrow S =]-\infty, -1[$

تذكرة

- $a^x = b^x$ ⇐ نأخذ لوغاريتم الطرفين
- $a^x =$ عدد ⇐
  - سالب أو صفر ⇐ مستحيلة الحل
  - موجب ⇐ نأخذ لوغاريتم الطرفين
- وجود a^{2x}, a^x معاً ⇐ فرضية t أي: $t = a^x$

4. $\left(\frac{1}{3}\right)^x > 4$

$\ln\left(\frac{1}{3}\right)^x > \ln 4$

$x \ln\left(\frac{1}{3}\right) > \ln 4$

$x(\ln(1) - \ln(3)) > \ln 4$

$-x \ln(3) > \ln 4$

$-x > \frac{\ln 4}{\ln 3} \Rightarrow x < -\frac{\ln 4}{\ln 3}$

$S = \left]-\infty, -\frac{\ln 4}{\ln 3}\right[$

5. $5^{-x} < 5^{2x}$

$\ln 5^{-x} < \ln 5^{2x}$

$-x \ln 5 < 2x \ln 5$

$-x \ln 5 - 2x \ln 5 < 0$

$-3x \ln 5 < 0 \Rightarrow x > 0$

$\Rightarrow S =]0, +\infty[$

تمرين 3 :

فيما يأتي حل كلاً من المعادلات والمتراجحات المعطاة:

1. $4^x + 2^{x+1} - 3 = 0$ مشابهة دورة 2020
2. $2^{x+1} - 10 \times 2^x + 12 = 0$
3. $3^{x+1} + 2 \times 3^{-x} = 7$
4. $4^x + 2^{x+1} - 3 \leq 0$
5. $2^{x+1} - 10 \times 2^x + 12 \geq 0$
6. $3^{x+1} + 2 \times 3^{-x} \geq 7$

$\boxed{1}$ $4^x + 2^{x+1} - 3 = 0$

$(2^2)^x + 2^x \times 2 - 3 = 0$

$2^{2x} + 2^x \times 2 - 3 = 0$

لتكن: $t = 2^x$ إذاً:

$t^2 + 2t - 3 = 0$

$(t+3)(t-1) = 0$

إما $t = -3 \Rightarrow 2^x = -3$

مستحيلة الحل..

أو $t = 1 \Rightarrow 2^x = 1$

$\ln 2^x = \ln(1)$

$x \ln 2 = 0 \Rightarrow \boxed{x = 0}$

$\boxed{2}$ $2^{x+1} - 10 \times 2^x + 12 = 0$

$2 \times 2^x - 10 \times 2^x + 12 = 0$

$-8 \times 2^x + 12 = 0$

$-8\, 2^x = -12 \Rightarrow 2^x = \frac{12}{8}$

$\Rightarrow 2^x = \frac{3}{2}$

$\Rightarrow \ln 2^x = \ln \frac{3}{2}$

$$\Rightarrow x \ln 2 = \ln 3 - \ln 2$$

$$\boxed{x = \frac{\ln 3 - \ln 2}{\ln 2}}$$

[3] $3^{x+1} + 2 \times 3^{-x} = 7$

نضرب بـ 3^x :

$3^{2x} \times 3 + 2 - 7\,3^x = 0$

$3 . 3^{2x} - 7\,3^x + 2 = 0$

لتكن : $t = 3^x$ فتكون :

$3t^2 - 7t + 2 = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac$

$= 49 - 4(3)(2) = 25$

إما $t_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{7-5}{6} = \frac{1}{3}$

$\Rightarrow t = \frac{1}{3} \Rightarrow 3^x = \frac{1}{3}$

$\ln 3 x = \ln \frac{1}{3} \Rightarrow \boxed{x = -1}$

أو $t_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{7+5}{6} = 2$

$t = 2 \Rightarrow 3^x = 2$

$\Rightarrow \ln 3\, x = \ln 2 \Rightarrow \boxed{x = \frac{\ln 2}{\ln 3}}$

[4] $4^x + 2^{x+1} - 3 \leq 0$

$(2^2)^x + 2\,2^x - 3 \leq 0$

$2^{2x} + 2\,2^x - 3 \leq 0$

لتكن $t = 2^x$ فتكون :

$t^2 + 2t - 3 \leq 0$

$t^2 + 2t - 3 = 0$

نفس المعادلة رقم [1] ،،

إذاً :

x	$-\infty$ 0 $+\infty$	
$2^{2x} + 2\,2^x - 3$	$-$ 0	$+$
≤ 0	محققة	غير محققة

$S =]-\infty, 0]$

[5] $2^{x+1} - 10 \times 2^x + 12 \geq 0$

$2^x \times 2 - 10 \times 2^x + 12 \geq 0$

$-8 \times 2^x + 12 \geq 0$

$-8\,2^x \geq -12 \Rightarrow 2^x \leq \frac{3}{2}$

$\Rightarrow x \ln 2 \leq \ln 3 - \ln 2$

$\Rightarrow x \leq \frac{\ln 3 - \ln 2}{\ln 2}$

$S =]-\infty, \frac{\ln 3 - \ln 2}{\ln 2}]$

6] $3^{x+1} + 2 \times 3^{-x} \geq 7$

$3^{x} \cdot 3 + 2 \times 3^{-x} - 7 \geq 0$

نضرب بـ 3^{x} :

$3^{2x} \cdot 3 + 2 - 7 \, 3^{x} \geq 0$

لتكن: $t = 3^{x}$ فنكون:

$3t^2 - 7t + 2 \geq 0$

$3t^2 - 7t + 2 = 0$

نفس المعادلة رقم $\boxed{3}$ .. 😊😊

إذاً:

x	$-\infty$ $\quad$ -1 $\quad$ $\frac{\ln 2}{\ln 3}$ $\quad$ $+\infty$		
$3 \, 3^{2x} - 7 \, 3^{x} + 2$	$+$ $\quad$ 0	$-$ $\quad$ 0	$+$
≥ 0	محققة	غير محققة	محققة

$S = \left]-\infty, -1\right] \cup \left[\frac{\ln 2}{\ln 3}, +\infty\right[$

تمرين 4 :

حل في $\mathbb{R}$ جملة المعادلتين

$$\begin{cases} 3^x \times 3^y = 9 \quad \cdots \boxed{1} \\ 3^x + 3^y = 4\sqrt{3} \quad \cdots \boxed{2} \end{cases}$$

من $\boxed{2}$ نجد :

$3^x = 4\sqrt{3} - 3^y$ *

نعوض في $\boxed{1}$:

$(4\sqrt{3} - 3^y)\, 3^y = 9$

$4\sqrt{3}\, 3^y - 3^{2y} = 9$

$3^{2y} - 4\sqrt{3}\, 3^y + 9 = 0$

لتكن $t = 3^y$ فتكون $t^2 = 3^{2y}$

$t^2 - 4\sqrt{3}\, t + 9 = 0$

$a = 1 \quad , b = -4\sqrt{3} \quad , c = 9$

$\Delta = b^2 - 4ac = 48 - 36 = 12$

$\sqrt{\Delta} = 2\sqrt{3}$

$t_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{4\sqrt{3} - 2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$

$3^y = \sqrt{3} \Rightarrow 3^y = 3^{\frac{1}{2}} \Rightarrow \boxed{y = \frac{1}{2}}$

نعوض في * :

$3^x = 4\sqrt{3} - \sqrt{3}$

$\Rightarrow 3^x = 3\sqrt{3} \Rightarrow 3^x = 3 \times 3^{\frac{1}{2}}$

$\Rightarrow 3^x = 3^{\frac{3}{2}} \Rightarrow \boxed{x = \frac{3}{2}}$

$t_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{4\sqrt{3} + 2\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$

$3^y = 3\sqrt{3} \Rightarrow 3^y = 3 \times 3^{\frac{1}{2}} \Rightarrow \boxed{y = \frac{3}{2}}$

نعوض في * :

$3^x = \sqrt{3}$

$\Rightarrow 3^x = 3^{\frac{1}{2}} \Rightarrow \boxed{x = \frac{1}{2}}$

تمرين 5 : امتحاني .. ^^

جد التابع المشتق لكل من التوابع الآتية:

1. $f(x) = x^x$
2. $f(x) = 3^{x^2}$
3. $f(x) = \pi^{\ln(x)}$

1. $f(x) = x^x = e^{\ln(x)^x}$

$f(x) = e^{x\ln x}$

$f'(x) = (x\ln x)' \cdot e^{x\ln x}$

$= (\ln x + 1)\, e^{x\ln x}$

$= (\ln x + 1)\, x^x$

2. $f(x) = 3^{x^2} = e^{\ln 3^{x^2}} = e^{x^2\ln 3}$

$f'(x) = (x^2\ln 3)'\, e^{x^2\ln 3}$

$f'(x) = (2x\ln 3)\, e^{x^2\ln 3}$

$f'(x) = (2x\ln 3)\, 3^{x^2}$

$\boxed{3}$ $f(x) = \pi^{\ln x} = e^{\ln\pi^{\ln x}}$

$= e^{\ln x \cdot \ln\pi}$

$\Rightarrow f'(x) = (\ln x \cdot \ln\pi)' \, e^{\ln x \cdot \ln\pi}$

$f'(x) = \frac{\ln\pi}{x} \, e^{\ln x \cdot \ln\pi}$

$f'(x) = \frac{\ln\pi}{x} \cdot \pi^{\ln x}$

تمرين 6 :

في كل من الحالات الآتية ادرس تغيرات التابع f المعرف على $\mathbb{R}$ وارسم خطه البياني:

1	$f(x) = x\,2^{x}$
2	$f(x) = x\,2^{-x}$
3	$f(x) = (1-x)2^{x}$
4	$f(x) = 4^{x} - 2^{x+2}$

1 - $f(x) = x\,2^{x} = x\,e^{\ln 2^{x}}$

$f(x) = x\,e^{x\ln 2}$

التابع f معرف ومستمر على R ولدينا:

حالة عدم تعيين $(0)(\infty)$. $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$

$f(x) = x\,e^{x\ln 2}$

$= \frac{1}{\ln 2}\, x\ln 2 \,.\, e^{x\ln 2}$

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$

$y = 0$ مقارب أفقياً في جوار $-\infty$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

التابع f اشتقاقي على R

ولدينا:

$f'(x) = (1) e^{x \ln 2} + (x \ln 2)' e^{x \ln 2} . x$

$f'(x) = e^{x \ln 2} + x \ln 2 \, e^{x \ln 2}$

$f'(x) = 0$

$e^{x \ln 2} + x \ln 2 \, e^{x \ln 2} = 0$

$e^{x \ln 2} (1 + x \ln 2) = 0$

إما $e^{x \ln 2} = 0$

مستحيلة الحل

أو $1 + x \ln 2 = 0$

$\Rightarrow x \ln 2 = -1$

$\Rightarrow x = \frac{-1}{\ln 2}$

$f\left(\frac{-1}{\ln 2}\right) = \frac{-1}{\ln 2} e^{\frac{-1}{\ln 2} \ln 2}$

$= \frac{-1}{\ln 2} e^{-1} = \frac{-1}{e \ln 2}$

x	$-\infty$		$\frac{-1}{\ln 2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\searrow$	$\frac{-1}{e \ln 2}$	$\nearrow$	$+\infty$

■ التمثيل للرسم :

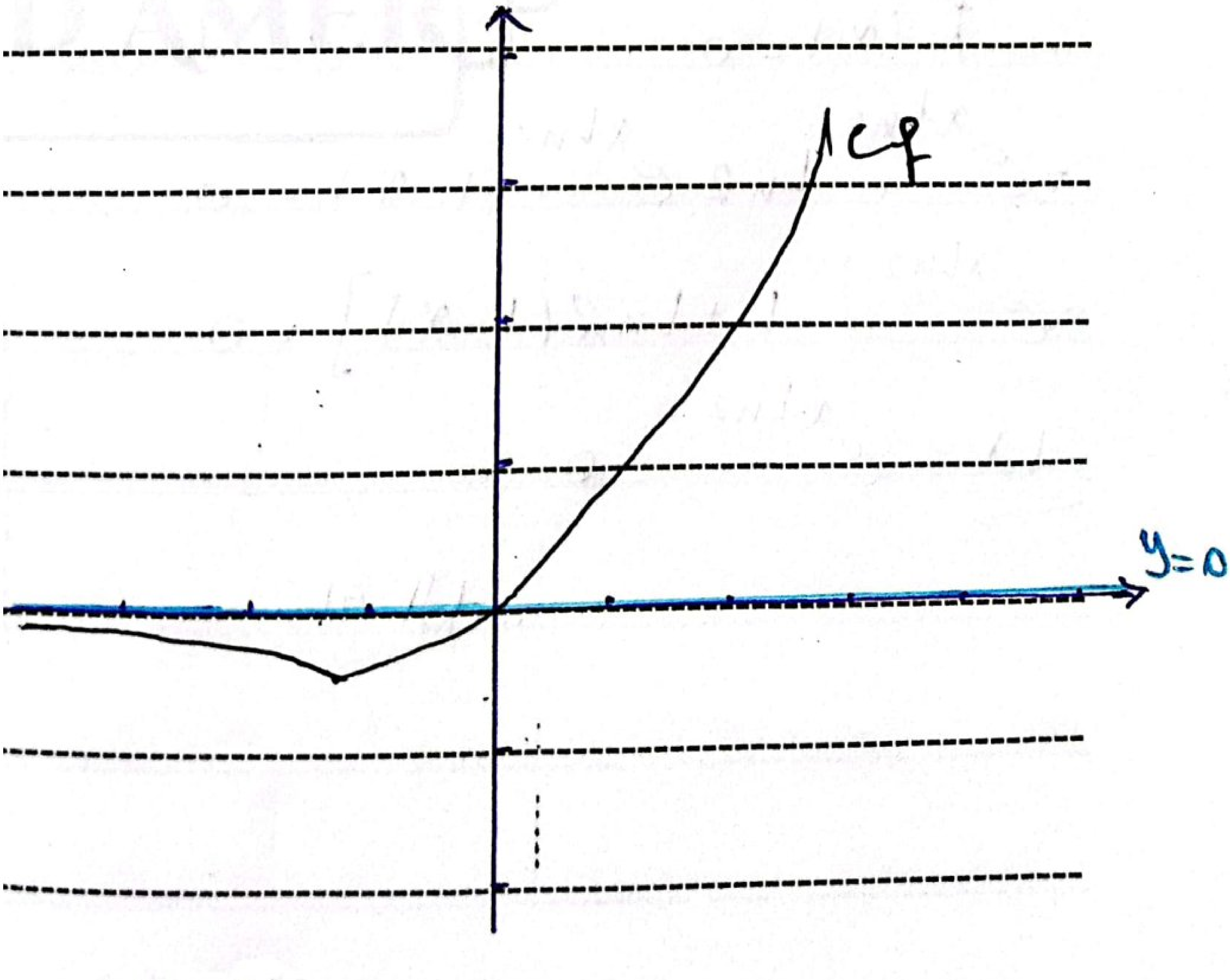
$y = 0$ مقارب أفقي في جوار $-\infty$.

$f\left(-\frac{1}{\ln 2}\right) = \frac{-1}{e \ln 2}$ قيمة حدية صغرى

$\simeq -0,5$ ، $\simeq -1,4$

التقاطع مع محور التراتيب : $(0,0)$

مع محور الفواصل : لا يوجد .



إعداد المدرس خالد سليمان عامر

2 $f(x) = x\,2^{-x} = x\,e^{\ln 2^{-x}}$

$f(x) = x\,e^{-x\ln 2}$

التابع f معرف ومستمر على R ولدينا:

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ $(\infty)(0)$ حالة عدم تعيين

$f(x) = x\,e^{-x\ln 2} = \dfrac{x}{e^{x\ln 2}}$

$= \dfrac{1}{\ln 2} \times \dfrac{x\ln 2}{e^{x\ln 2}}$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$

علماً أن:

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x\ln 2}{e^{x\ln 2}} = 0$

$y = 0$ مقارب أفقي في جوار $+\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

التابع f اشتقاقي على R ولدينا:

$f'(x) = e^{-x\ln 2} - x\ln 2\, e^{-x\ln 2}$

$f'(x) = 0$

$e^{-x\ln 2} - x\ln 2\, e^{-x\ln 2} = 0$

$e^{-x\ln 2}(1 - x\ln 2) = 0$

إما $e^{-x\ln 2} = 0$

مستحيلة الحل

أو $1 - x\ln 2 = 0$

$x\ln 2 = 1 \Rightarrow x = \dfrac{1}{\ln 2}$

3 ■ $f(x) = (1-x)2^x = (1-x)e^{Ln2^x}$

$f(x) = (1-x)e^{xLn2}$

التابع f معرف ومستمر على R ولدينا:

$\lim_{x \to -\infty} f(x)$ $(\infty)(0)$ حالة عدم تعين

$f(x) = (1-x)e^{xLn2}$

$f(x) = e^{xLn2} - x\,e^{xLn2}$

$f(x) = e^{xLn2} - \frac{1}{Ln2}\,xLn2\,e^{xLn2}$

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0 - 0 = 0$

علماً أن:

$\lim_{x \to -\infty} xLn2\,e^{xLn2} = 0$

$y = 0$ مقارب أفقي في جوار $-\infty$.

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$

التابع f اشتقاقي على R ولدينا:

$f'(x) = -e^{xLn2} + Ln2\,e^{xLn2}(1-x)$

$f'(x) = 0$

$-e^{xLn2} + Ln2\,e^{xLn2}(1-x) = 0$

$e^{xLn2}[-1 + Ln2(1-x)] = 0$

إما $e^{xLn2} = 0$

مستحيلة الحل..

$f\left(\frac{1}{Ln2}\right) = \frac{1}{Ln2}\,e^{-\frac{1}{Ln2} \times Ln2}$

$f\left(\frac{1}{Ln2}\right) = \frac{1}{e\,Ln2}$

x	$-\infty$	$\frac{1}{Ln2}$	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	−
$f(x)$	$-\infty$ ↗	$\frac{1}{e\,Ln2}$	↘ 0

■ التحضير للرسم:

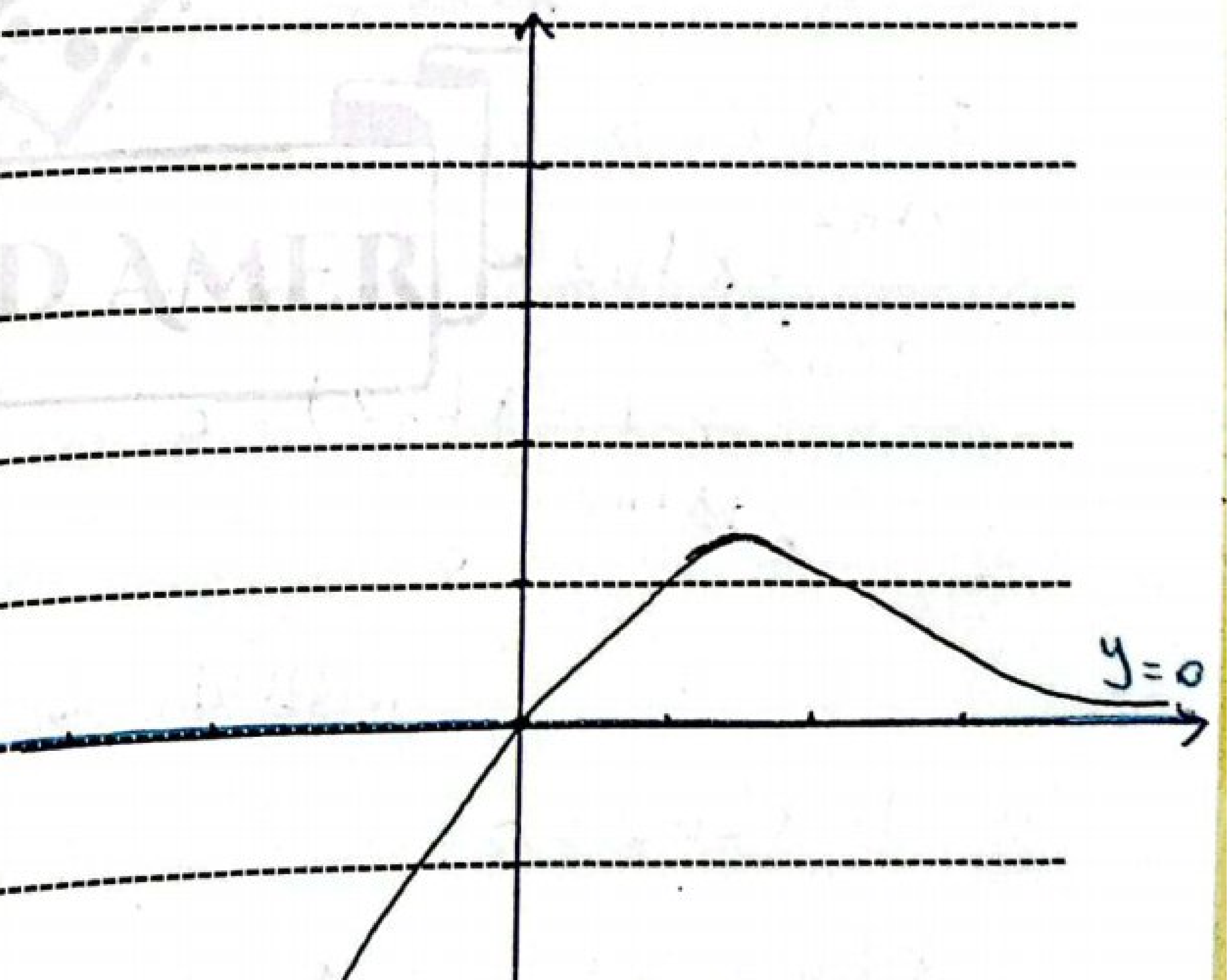
$y = 0$ مقارب أفقي في جوار $+\infty$.

$f\left(\frac{1}{Ln2}\right) = \frac{1}{e\,Ln2}$ قيمة حدية كبرى.

$\simeq 1,4$ $\simeq 1,5$

التقاطع مع المحاور: مع محور التراتيب: $(0,0)$

مع محور الفواصل: بلا حل.. ثمّ



أي $-1+\ln 2(1-x)=0$

$-1+\ln 2-x\ln 2=0$

$-x\ln 2=1-\ln 2$

$\Rightarrow x=\frac{-1+\ln 2}{\ln 2}$

$f'\left(\frac{-1+\ln 2}{\ln 2}\right)=\left(1-\frac{-1+\ln 2}{\ln 2}\right)e^{\left(\frac{-1+\ln 2}{\ln 2}\right)\ln 2}$

$=\frac{1}{\ln 2}e^{-1+\ln 2}=\frac{e^{-1}\times e^{\ln 2}}{\ln 2}$

$=\frac{2}{e\ln 2}$

x	$-\infty$	$\frac{-1+\ln 2}{\ln 2}$	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	0 ↗	$\frac{2}{e\ln 2}$	↘ $-\infty$

التمهيد للرسم:

$y=0$ مقارب أفقي في جوار $-\infty$

قيمة حدية كبرى $f\left(\frac{-1+\ln 2}{\ln 2}\right)=\frac{2}{e\ln 2}$

التقاطع مع المحاور:

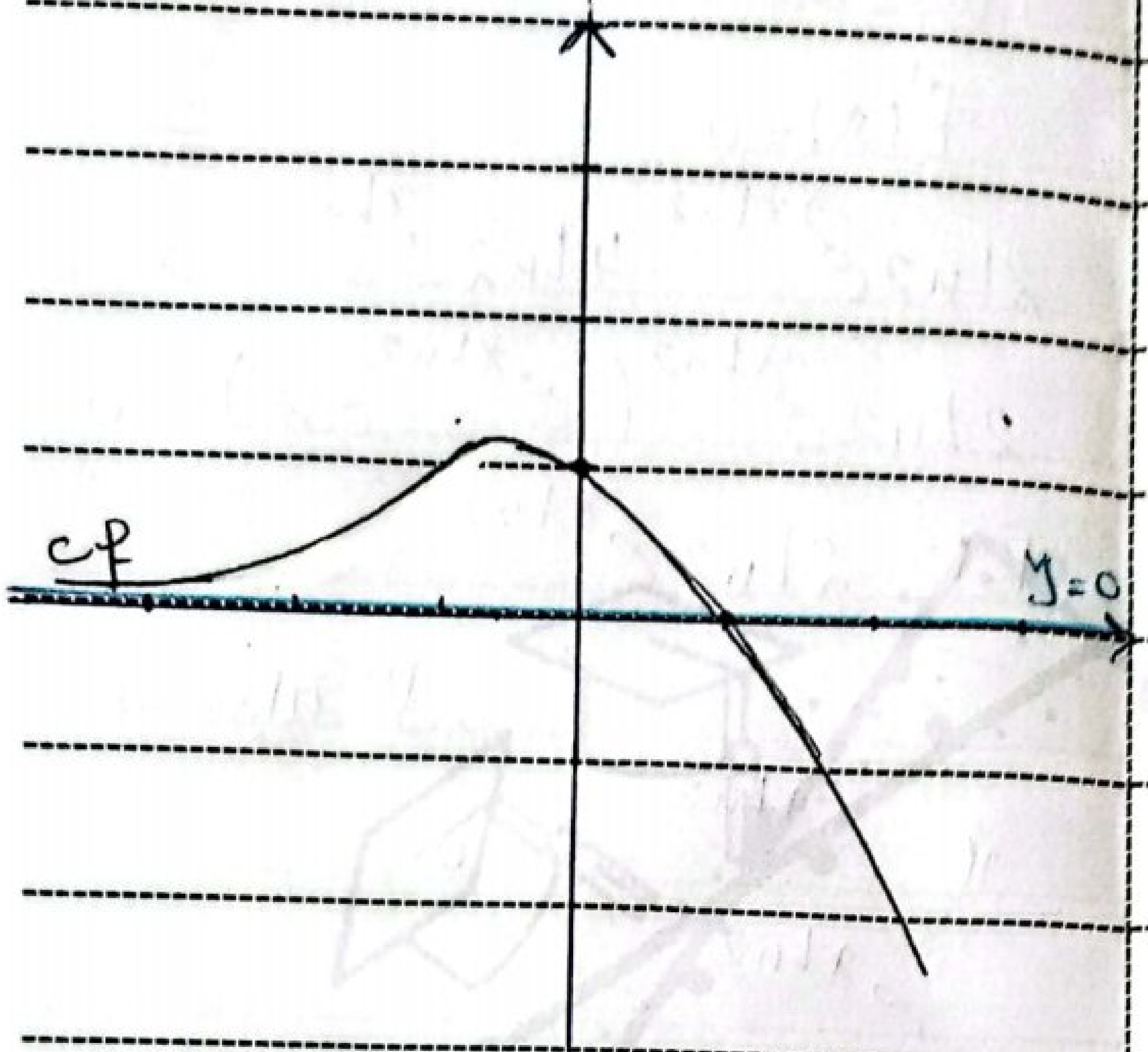
مع محور التراتيب: $(0,1)$

مع محور الفواصل: $f(x)=0$

$(1-x)e^{x\ln 2}=0$ إما $1-x=0$

$\Rightarrow x=1 \Rightarrow (0,1)$

أو $e^{x\ln 2}=0$ مستحيل الحل



4. $f(x)=4^x-2^{x+2}=(2^2)^x-2^x\times 2^2$

$f(x)=2^{2x}-2^x\times 4$

$f(x)=e^{\ln 2^{2x}}-4e^{\ln 2^x}$

$f(x)=e^{2x\ln 2}-4e^{x\ln 2}$

التابع f معرف ومستمر على R ولدينا:

$\lim_{x\to-\infty}f(x)=0$

$y=0$ مقارب أفقي في جوار $-\infty$.

$\lim_{x\to+\infty}f(x)$ $\infty-\infty$ حالة عدم تعيين

$f(x)=e^{2x\ln 2}-4e^{x\ln 2}$

$f(x)=e^{x\ln 2}\left(e^{x\ln 2}-4\right)$

$\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$

التابع f اشتقاقي على R ولدينا:

$$f'(x) = 2\ln 2\, e^{2x\ln 2} - 4\ln 2\, e^{x\ln 2}$$

$$f'(x) = 0$$

$$2\ln 2\, e^{2x\ln 2} - 4\ln 2\, e^{x\ln 2} = 0$$

$$2\ln 2\, e^{x\ln 2}\left(e^{x\ln 2} - 2\right) = 0$$

إما $2\ln 2\, e^{x\ln 2} = 0$

مستحيلة الحل.

أو $e^{x\ln 2} - 2 = 0$

$$e^{x\ln 2} = 2$$

$$x\ln 2 = \ln 2 \Rightarrow x = 1$$

$$f(1) = -4$$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\searrow$	-4	$\nearrow$	$+\infty$

التحضير للرسم:

$y = 0$ مقارب أفقي في جوار $-\infty$.

$f(1) = -4$ قيمة حدية صغرى.

التقاطع مع المحاور:

مع محور التراتيب: $(0,-3)$

مع محور الفواصل: $f(x) = 0$

$$e^{2x\ln 2} - 4e^{x\ln 2} = 0$$

$$e^{x\ln 2}\left(e^{x\ln 2} - 4\right) = 0$$

إما $e^{x\ln 2} = 0$ مستحيلة الحل.

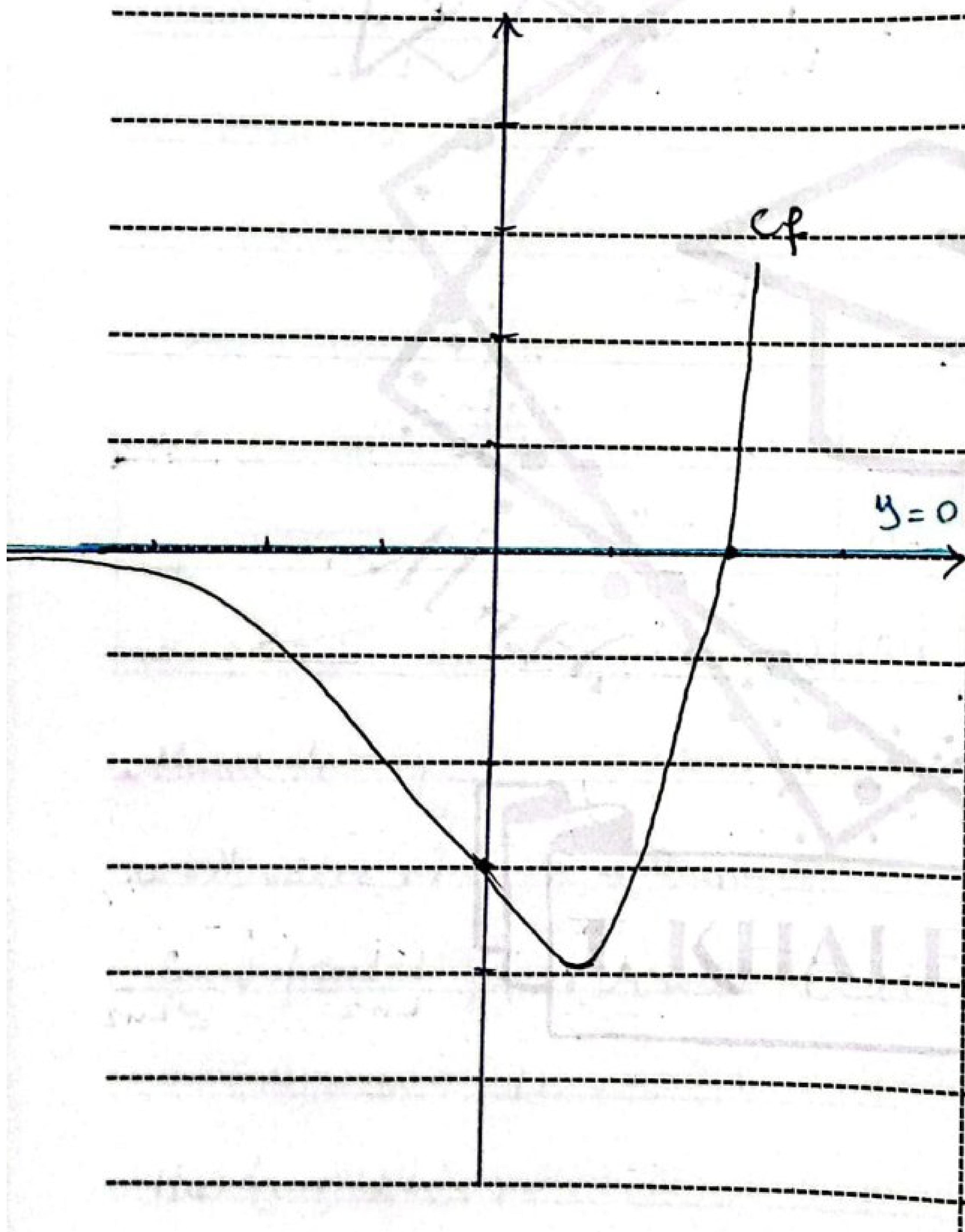
أو $e^{x\ln 2} - 4 = 0$

$$e^{x\ln 2} = 4$$

$$x\ln 2 = \ln 4$$

$$x = \frac{\ln 4}{\ln 2} \Rightarrow x = \frac{2\cancel{\ln 2}}{\cancel{\ln 2}}$$

$$\Rightarrow x = 2 \Rightarrow (2,0)$$



تمرين 7 :

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على R وفق:

$$f(x) = 2^{x^2-2x}$$

1. ادرس تغيرات التابع f
2. اكتب معادلة d مماس الخط C في النقطة التي فاصلتها تعدم $f'(x)$
3. ارسم في معلم واحد المماس d ثم الخط C

1] التابع f معرف ومستمر على R :

$$f(x) = 2^{x^2-2x} = e^{\ln 2^{x^2-2x}}$$

$$f(x) = e^{(x^2-2x)\ln 2}$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

التابع f اشتقاقي على R ولدينا :

$$f'(x) = (2x-2)\ln 2\, e^{(x^2-2x)\ln 2}$$

$$f'(x) = 0$$

$$(2x-2)\ln 2\, e^{(x^2-2x)\ln 2} = 0$$

إما $2x - 2 = 0 \Rightarrow x = 1$

$$f(1) = \frac{1}{2}$$

أو $\ln 2\, e^{(x^2-2x)\ln 2} = 0$

مستحيلة الحل..

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$\frac{1}{2}$	$\nearrow$	$+\infty$

2] كتابة معادلة المماس في النقطة التي فاصلتها تعدم $f'(x)$:

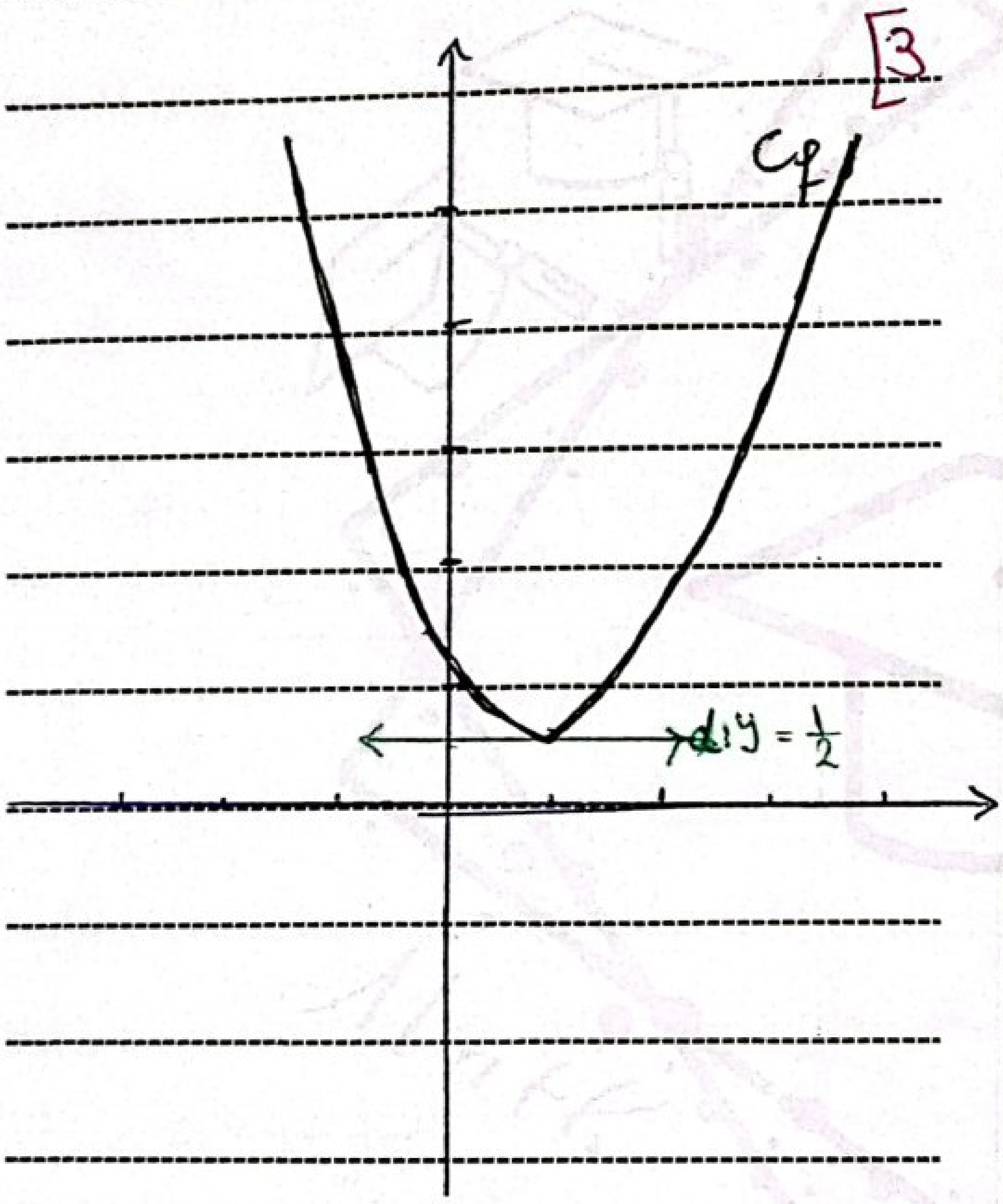
$$\begin{cases} m = 0 \\ A\left(1, \frac{1}{2}\right) \end{cases}$$

من جدول التغيرات.. ^^

$$d : y = m(x - x_A) + y_A$$

$$\boxed{d : y = \frac{1}{2}}$$

3]



إذا لعبت ، فالعب بجدية .. و إذا عملت ، فإياك أن تلعب

اعمل..

يا فتاي، بخطواتك الصغيرة، أودع في جوفها حُسن ظنك باللّٰه، إنها على ضآلة ما ستُحدثه في الآن واللحظة، ترِيك نفسها كبيرة الشأن غداً، ممزوجة بالسعد والمجد..

الفكرة يا فتى، بخروجك من منطقة الراحة، وبقطعك الأميال باللهفة، وصبرك على النتائج حتى ترى الثمرات..

ألم تسمع قول الشاعر:

أثر الفراشة لا يُرى.. أثر الفراشة لا يزول !🤍

التوابع

التابع الأسي

شيفرة الـ 600

- أوراق تم ترتيب الكتاب فيها بهيئة أسئلة بالصيغ المحتملة لورودها "وفقاً للتوصيف الوزاري" وخطوات الإجابة عنها
- مخططات وجداول لخصت الأفكار بطريقة احترافية مساعدة
- مسائل امتحانية جزئية ومسائل امتحانية شاملة

2023

إعداد: أ.خالد عامر

by:Hisham Labanieh

أ.خالد عامر 0940 916 753

شغف رفيقك خطوة بخطوة

شغف التعليمي

Educational passion

القناة الرئيسية " فريق شغف التعليمي "

https://t.me/alsh276

مكتبة شغف " بوت الملفات "

https://t.me/passion_study_bot