Me En Math Team

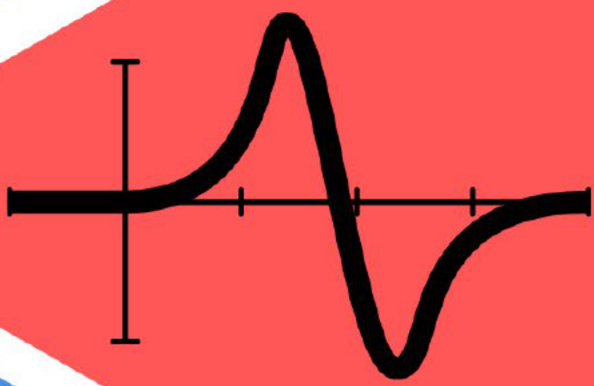
@Ch_X_MathBac

الرُسوم البيانيّة

محتوى الملف :

- ✓ جميع رُسوم أسئلة الدورات مع طلبات إضافية مُرفقة بالحل .
- ✓ رُسوم إضافية داعمة مُرفقة بالحل .
- ✓ شرح مفصّل لكامل الحلول على قناتنا التّيلغرام .
- ✓ دراسة هذا الملف يضمن 40 درجة بإذن الله .

x	0	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	$+$
$f(x)$	0	600

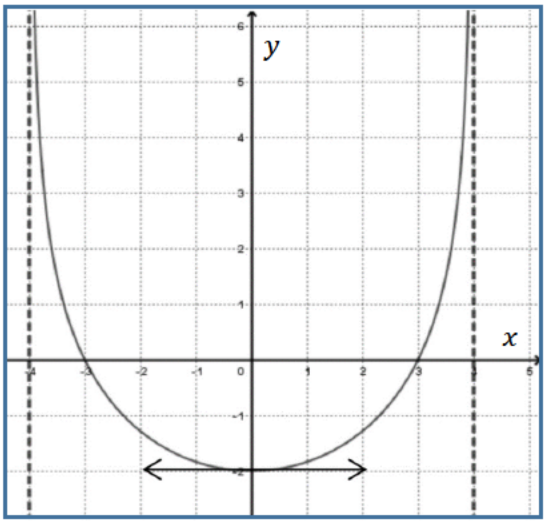


إعداد : محمود المحمود 276 838 0936 ـ رهف عبد المُنعم

التمرين الأول

في الشكل المجاور C هو الخط البياني للتابع f المُعرَّف على $]-4\,,4[$. **المطلوب :**

1) احسبْ $\lim\limits_{x\to(-4)^+} f(x)$ وَ $\lim\limits_{x\to 4^-} f(x)$ ، واستنتج معادلة كلّ مقارب للخط C .



2) أوجدْ $f(0)$ وَ $f'(0)$ ،
واكتب معادلة المماس للخط C في النقطة التي فاصلتها 0 .

3) جدْ حلول المعادلتين $f(x)=0$ وَ $f(x)=-2$.

4) هلْ التابع فردي أم زوجي ؟

5) جدْ $f(]-3\,,3[)$.

6) ما حلول المتراجحتين $f(x)\le 0$ وَ $f'(x)\le 0$ ؟

7) جدْ مجموعة تعريف التابع g الذي يُحقّق $g(x)=\ln(f(x))$.

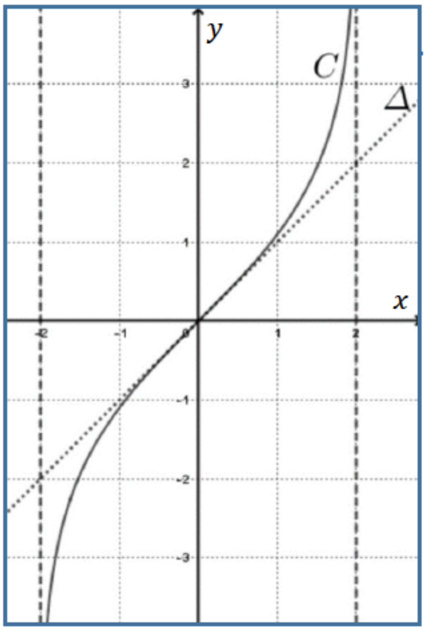
8) ناقش بيانياً بحسب قيم $m\in R$ عدد حلول المعادلة $f(x)=m$.

حــل التمرين الأول

1) $\lim\limits_{x\to 4^-} f(x)=+\infty$ وَ $\lim\limits_{x\to(-4)^-} f(x)=+\infty$ $x=4$ وَ $x=-4$ مقاربات شاقوليّة .	6) حلول $f(x)\le 0$: $x\in[-3\,,3]$. حلول $f'(x)\le 0$: $x\in]-4\,,0]$.
2) $f(0)=-2$ وَ $f'(0)=0$ مماس أفقي : $y=y_o=-2$.	7) g مُعرَّف بشرط : $f(x)>0$ $\Rightarrow D_g=]-4\,,-3[\cup]3\,,4[$
3) حلول $f(x)=0$: $x=-3$ وَ $x=3$. حلول $f(x)=-2$: $x=0$.	8) $m\in]-\infty\,,-2[$: ليس للمعادلة أيّ حل . $m=-2$: للمعادلة حل وحيد . $m\in]-2,+\infty[$: للمعادلة حلّان .
4) زوجي . (لأنَّ الخط C متناظر بالنسبة لـ yy')	
5) $f(]-3\,,3[)=[-2\,,0\,[$.	

التمرين الثاني

نتأمَّل C_f الخط البياني للتابع f المُعرَّف على $I =]-2\,,2[$. **المطلوب :**



1) احسب $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)$ وَ $\lim\limits_{x\to(-2)^+} f(x)$ ، واكتب معادلة كلّ مقارب للخط C_f .

2) جِدْ $f(0)$ وَ $f'(0)$ ، واكتب معادلة المماس Δ .

3) هلْ التابع فردي أم زوجي ؟

4) ما عدد حلول المعادلة $f(x) = 0$.

5) ما حلول المتراجحة $f'(x) > 0$.

6) أوجدْ مجموعة تعريف التابع g الذي يُحقّق $g(x) = \ln(f(x))$.

7) استنتج رسم التابع h الذي يُحقّق $h(x) = -f(x)$.

8) ناقش بيانياً بحسب قيم $m \in \mathbf{R}$ عدد حلول المعادلة $f(x) = m$.

حـل التمرين الثاني

1) $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = +\infty$ وَ $\lim\limits_{x\to(-2)^+} f(x) = -\infty$

$x = 2$ وَ $x = -2$ مقاربات شاقوليّة .

2) $f(0) = 0$ وَ $f'(0) = m_\Delta$

Δ يمر من $A(0\,,0)$ وَ $B(1\,,1)$

$$m_\Delta = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{1-0}{1-0} = 1$$

$\Rightarrow f'(0) = m_\Delta = 1$

$\Rightarrow y - y_0 = m(x - x_0) \Rightarrow y = x$

3) فردي . (لأنّ الخط C متناظر بالنسبة للمبدأ O)

4) حل وحيد . $(x = 0)$

5) $x \in]-2\,,2[$.

6) g مُعرَّف بشرط : $f(x) > 0$

$\Rightarrow D_g =]0\,,2[$

7) كلّ $(x\,,\ y)$ تُصبح $(x\,,-y)$ $\Leftarrow$

C_h نظير C_f بالنسبة لمحور الفواصل .

8) $m \in R$: للمعادلة حل وحيد .

♥ تذكَّر :

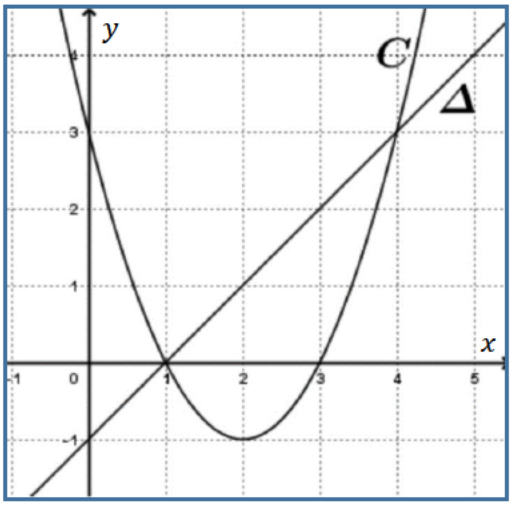
➢ $h(x) = -f(x) \Leftarrow$ كلّ $(x\,,\ y)$ تُصبح $(x\,,-y) \Leftarrow C_h$ نظير C_f بالنسبة لمحور الفواصل.

➢ $h(x) = f(-x) \Leftarrow$ كلّ $(x\,,\ y)$ تُصبح $(-x\,,y) \Leftarrow C_h$ نظير C_f بالنسبة لمحور التراتيب.

➢ $h(x) = -f(-x) \Leftarrow$ كلّ $(x\,,\ y)$ تُصبح $(-x\,,-y) \Leftarrow C_h$ نظير C_f بالنسبة للمبدأ.

التمرين الثالث

نتأمَّل الشكل المرسوم جانباً ، وليكن C الخط البياني للتابع f المُعرَّف على R . **المطلوب :**



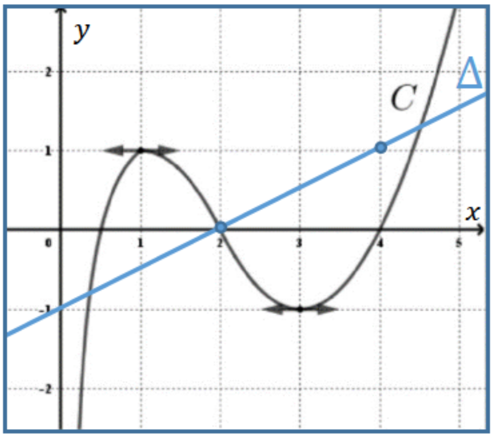
1) دلّ على القيمة الحديّة للتابع f ، وبيّن نوعها .
2) جدْ $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ وَ $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ ، وهلْ يقبل التابع مقاربات أفقيّة ؟
3) ما حلول المعادلة $f(x) = y_\Delta$ ؟
4) اكتب معادلة المستقيم Δ .
5) ما حلول المتراجحة $f(x) > 0$ ؟
6) جدْ مجموعة تعريف التابع g الذي يُحقّق $g(x) = \ln(-f'(x))$.
7) ناقش بيانيّاً بحسب قيم $m \in R$ عدد حلول المعادلة $f(x) = m$.

حـل التمرين الثالث

1) $f(2) = -1$ قيمة حديّة صُغرى محليّاً .	5) $x \in]-\infty, 1[\cup]3, +\infty[$.
2) $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ وَ $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ لا ، التابع لا يقبل أيّ مقارب أفقي .	6) g مُعرَّف بشرط : $-f'(x) > 0$ $\Rightarrow f'(x) < 0 \Rightarrow D_g =]-\infty, 2[$
3) $x = 1$ وَ $x = 4$.	
4) Δ يمر من $A(1,0)$ وَ $B(0,-1)$ $m_\Delta = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{-1-0}{0-1} = 1$ $\Rightarrow y - y_A = m(x - x_A)$ $\Rightarrow y - 0 = 1(x-1) \Rightarrow y = x - 1$	7) $m \in]-\infty, -1[$: ليس للمعادلة أيّ حل . $m = -1$: للمعادلة حل وحيد . $m \in]-1, +\infty[$: للمعادلة حلّان .

التمرين الرابع

في الشكل المرسوم جانباً ليكن C الخط البياني للتابع f المُعرّف على المجال $]0\,,+\infty[$. المطلوب :



1) جدْ $\lim_{x\to 0^+} f(x)$ وَ $\lim_{x\to +\infty} f(x)$ ، واكتب معادلة كلّ مقارب للتابع f .

2) دلْ على القيم الحديّة محليّاً مبيّناً نوعها .

3) جدْ حلول المتراجحة $f'(x) \leq 0$.

4) جدْ $f([1\,,3])$.

5) ما عدد حلول المعادلات $f(x) = 1$ وَ $f(x) = 0$ وَ $f(x) = y_\Delta$.

6) ناقش بيانيّاً بحسب قيم $m \in R$ عدد حلول المعادلة $f(x) = m$.

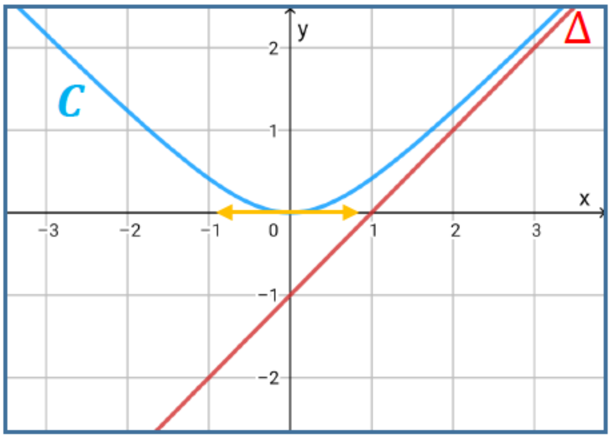
7) اكتب معادلة المستقيم Δ .

حـل التمرين الرابع

1) $\lim_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$ وَ $\lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$ $x = 0$ مقارب شاقولي .	6) $m \in]-\infty\,,-1[$: المعادلة حل وحيد . $m = -1$: للمعادلة حلّان . $m \in]-1\,,1[$: للمعادلة ثلاثة حلول . $m = 1$: للمعادلة حلّان . $m \in]1\,,+\infty[$: للمعادلة حل وحيد .
2) $f(1) = 1$ قيمة حديّة كُبرى محليّاً . $f(3) = -1$ قيمة حديّة صُغرى محليّاً .	
3) $x \in [1\,,3]$.	
4) $f([1\,,3]) = [-1\,,1]$.	7) Δ يمر من $A(2\,,0)$ وَ $B(4\,,1)$ $m_\Delta = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{1-0}{4-2} = \frac{1}{2}$ $\Rightarrow y - y_A = m(x - x_A)$ $\Rightarrow y - 0 = \frac{1}{2}(x-2) \Rightarrow y = \frac{1}{2}x - 1$
5) عدد حلول $f(x) = 1$: حلّان . عدد حلول $f(x) = 0$: ثلاثة حلول . عدد حلول $f(x) = y_\Delta$: ثلاثة حلول .	

التمرين الخامس

نتأمّل جانباً الخط البياني للتابع f المُعرَّف على R ، والمستقيم Δ مقارب مائل للخط C . **المطلوب :**



1) جِدْ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ وَ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

2) اكتب معادلة المقارب Δ .

3) جِدْ $f(0)$ وَ $f'(0)$ ، واكتب معادلة المماس الأفقي للخط البياني .

4) جِدْ حلول المتراجحة $f'(x) < 0$.

5) عيِّنْ القيمة الحديّة للتابع وبيِّن نوعها .

6) ناقش بيانيّاً بحسب قيم $m \in R$ عدد حلول المعادلة $f(x) = m$.

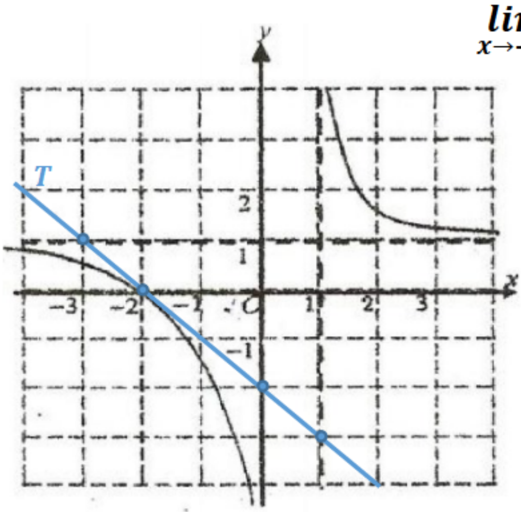
7) جِدْ مجموعة تعريف التابع h الذي يحقّق : $h(x) = ln(f(x))$.

حـل التمرين الخامس

1) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ وَ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$	4) $x \in]-\infty\,,0[$.
2) Δ يمر من $A(0\,,-1)$ وَ $B(1\,,0)$ $m_\Delta = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \dfrac{0+1}{1-0} = 1$ $\Rightarrow y - y_B = m(x - x_B)$ $\Rightarrow y - 0 = 1(x-1)$ $\Rightarrow y = x - 1$	5) $f(0) = 0$ قيمة حديّة صُغرى محليّاً . 6) $m \in]-\infty\,,0[$: ليس للمعادلة أيّ حل . $m = 0$: للمعادلة حل وحيد . $m \in]0\,,+\infty[$: للمعادلة حلّان .
3) $f(0) = 0$ وَ $f'(0) = 0$ مماس أفقي : $y = y_o = 0$.	7) h مُعرَّف بشرط $f(x) > 0$: $\Rightarrow D_h = R \setminus \{0\}$

التمرين السادس

نتأمَّل الخط البياني C للتابع f المُعرَّف على $]-\infty\,,0[\cup]1\,,+\infty[$. المطلوب :



1) جدْ نهاية التابع عند أطراف مجموعة تعريفه ، واستنتج $\lim\limits_{x\to+\infty} f[f(x)]$

2) اكتب معادلة كلّ مقارب أفقي ومعادلة كلّ مقارب شاقولي للخط C .

3) جدْ حلول المتراجحتين $f'(x)<0$ وَ $f(x)>0$.

4) جدْ حل المعادلة $f(x)=0$.

5) جدْ $E(f(-2))$.

6) ناقش بيانياً بحسب قيم $m\in R$ عدد حلول المعادلة $f(x)=m$.

7) نفترض أنَّ T مماس للخط C في النقطة $(-2\,,0)$.
احسب $f'(-2)$ ، واكتب معادلة T .

حـل التمرين السادس

1) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=1$ وَ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1$

$\lim\limits_{x\to0^-} f(x)=-\infty$ وَ $\lim\limits_{x\to1^+} f(x)=+\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f[f(x)]=\lim\limits_{x\to1} f(x)=+\infty$

2) $x=0$ وَ $x=1$ مقاربات شاقوليّة .

$y=1$ مقارب أفقي في الجوارَين $-\infty$ وَ $+\infty$.

3) حلول $f'(x)<0$: $x\in]-\infty,0[\cup]1,+\infty[$.

حلول $f(x)>0$: $x\in]-\infty,-2[\cup]1,+\infty[$.

4) $x=-2$.

5) $E(f(-2))=E(0)=0$.

6) $m\in]-\infty\,,1[$: للمعادلة حل وحيد .

$m=1$: ليس للمعادلة أيّ حل .

$m\in]1\,,+\infty[$: للمعادلة حل وحيد .

7) T يمر من $A(-2\,,0)$ وَ $B(0\,,-2)$

$$m_T=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\frac{-2-0}{0+2}=-1$$

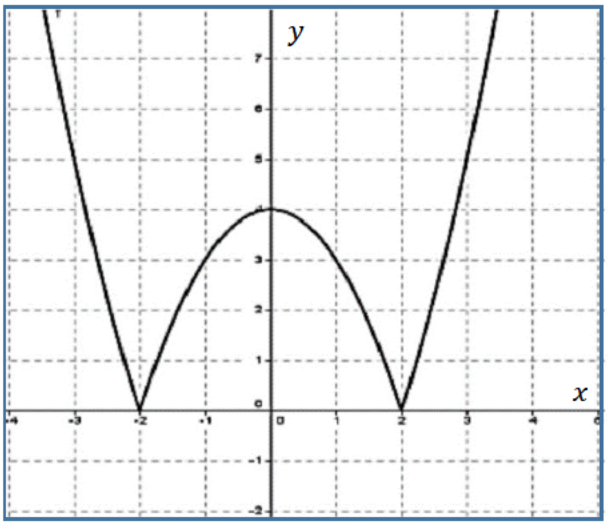
$f'(0)=m_T=-1$

$\Rightarrow y-y_A=m(x-x_A)$

$\Rightarrow y-0=-1(x+2)$

$\Rightarrow y=-x-2$

التمرين السابع



نتأمّل الخط البياني C للتابع f المُعرَّف على R . **المطلوب :**

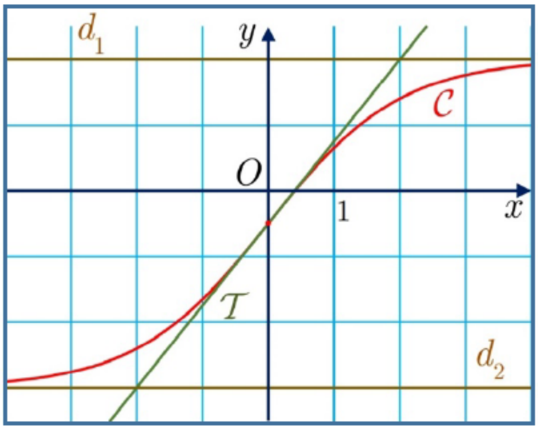
1) كم حلّاً للمعادلة $f(x) = 2$ ؟
2) احسب قيمة المشتق عند الصفر .
3) عيّنْ صورة المجال $I = [-2\,,2]$ وفق f .
4) كم قيمة حديّة صُغرى أو كُبرى للتابع f ؟
5) جِدْ نهاية التابع عند أطراف مجموعة تعريفه .
6) هلْ f اشتقاقي عند $x = -2$ ؟
7) جِدْ مجموعة تعريف التابع g الذي يُحقّق : $g(x) = ln(f(x))$.
8) ما حلول المتراجحة $f'(x) > 0$.
9) ناقش بيانياً بحسب قيم $k \in R$ عدد حلول المعادلة $f(x) = k$.

حـل التمرين السابع

1) **أربعة** حلول .	6) لا . (لأنّ التابع مبوّز - مُنكسر 😄)
2) $f'(0) = 0$. (لأنَّ المماس عندها أفقي)	7) g مُعرَّف بشرط : $f(x) > 0$ $\Rightarrow Dg = R\backslash\{-2\,,2\}$
3) $f([-2\,,2]) = [0\,,4]$.	8) $x \in]-2\,,0[\cup]2\,,+\infty[$.
4) **ثلاث** قيم حديّة ، هي : $f(-2) = 0$ قيمة حديّة صُغرى محليّاً . $f(2) = 0$ قيمة حديّة صُغرى محليّاً . $f(0) = 4$ قيمة حديّة كُبرى محليّاً .	9) $k \in]-\infty\,,0[$: ليس للمعادلة أيّ حل . $k = 0$: للمعادلة حلّان . $k \in]0\,,4[$: للمعادلة أربعة حلول . $k = 4$: للمعادلة ثلاثة حلول . $k \in]4\,,+\infty[$: للمعادلة حلّان .
5) $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ و $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$	

التمرين الثامن

إذا كان C الخط البياني للتابع f والمستقيمين d_1 و d_2 مقاربين للخط C والمستقيم T مماس للخط C . **المطلوب :**



1) احسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ وَ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

2) اكتب معادلة كلّ من المقاربين d_1 وَ d_2 .

3) إذا علمت أنَّ المستقيم T المائل المرسوم في الشكل يمسّ المنحني في النقطة $(0,-\frac{1}{2})$. احسب $f'(0)$ ، واكتب معادلته .

4) عيّنْ الوضع النسبي بين الخط C والمماس T .

5) ما عدد حلول المعادلة $5f(x)+10=0$ ؟

6) ما حلول المتراجحة $f'(x)>0$ ؟

حـل التمرين الثامن

1) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-3$ وَ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=2$

2) $d_1: y=2$ مقارب أفقي للخط C في جوار $+\infty$.
$d_2: y=-3$ مقارب أفقي للخط C في جوار $-\infty$.

3) T يمر من $A(0\,,\,-\frac{1}{2})$ وَ $B(2\,,2)$

$$f'(0)=m_T=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\frac{2+\frac{1}{2}}{2-0}$$

$$f'(0)=m_T=\frac{5}{4}\Rightarrow f'(0)=\frac{5}{4}$$

$$\Rightarrow y-y_A=\ m(x-x_A)\Rightarrow$$

$$y+\frac{1}{2}=\frac{5}{4}(x-0)\Rightarrow T: y=\frac{5}{4}x-\frac{1}{2}$$

4) عندما $x\in\,]-\infty\,,0[$ $\Leftarrow$ C فوق المماس T .

عندما $x\in\,]0\,,+\infty[$ $\Leftarrow$ C تحت المماس T .

عندما $x=0$ $\Leftarrow$ C يقطع المماس T .

أو بأسلوب آخر :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
وضع نسبي	C فوق T		C تحت T

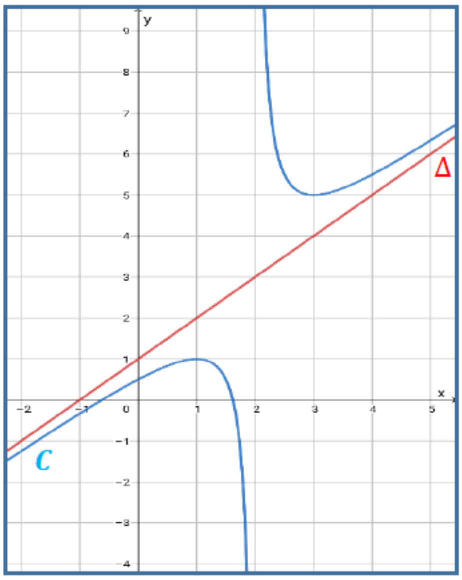
C يقطع T في النقطة $(0\,,\,-\frac{1}{2})$

5) $5f(x)+10=0\Rightarrow 5f(x)=-10\Rightarrow$
$f(x)=-2$ $\Leftarrow$ للمعادلة حل وحيد .

6) $x\in R$.

التمرين التاسع

في الشكل المرسوم جانباً ، ليكن C_f الخط البياني للتابع f المُعرَّف على $R\backslash\{2\}$. **المطلوب :**



1) جِدْ نهاية التابع عند أطراف مجموعة تعريفه ، واستنتج $\lim\limits_{x\to2^+} f[f(x)]$.

2) اكتب معادلة المقارب الشاقولي للخط C_f .

3) دلّ على القيم الحديّة للتابع ، وبيّن نوعها .

4) جِدْ $f'(1)$ وَ $f'(3)$ ، واكتب معادلة كلّ مماس أفقي يقبله الخط C_f .

5) ما عدد حلول المعادلات
$f(x)=0$ وَ $f(x)=1$ وَ $10f(x)-55=0$ ؟

6) اكتب معادلة المقارب المائل Δ .

7) اذكر احداثيّات النقطة I مركز تناظر الخط البياني C_f .

8) ناقش بيانيّاً بحسب قيم $m\in R$ عدد حلول المعادلة $f(x)=m$.

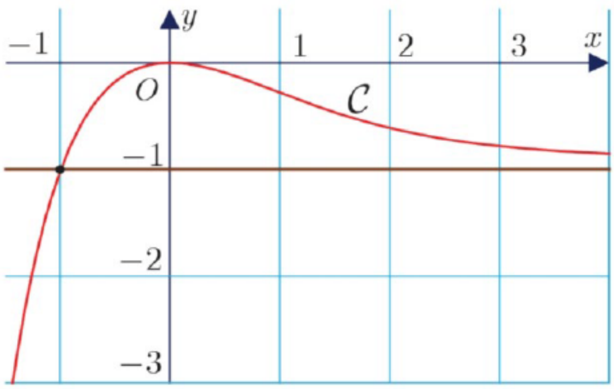
9) جِدْ $E(f(1))$ وَ $E(f(0))$.

10) جِدْ مجموعة تعريف التابع g الذي يُحقّق $g(x)=\ln(f'(x))$.

حل التمرين التاسع

1) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ وَ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ $\lim\limits_{x\to2^-} f(x)=-\infty$ وَ $\lim\limits_{x\to2^+} f(x)=+\infty$ $\lim\limits_{x\to2^+} f[f(x)]=\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$	6) المقارب Δ يمر من $A(0,1)$ وَ $B(-1,0)$ $m=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\frac{0-1}{-1-0}=1$ $\Rightarrow y-y_B=m(x-x_B)$ $\Rightarrow y-0=1(x+1)\Rightarrow y=x+1$
2) $x=2$ مقارب شاقولي .	7) $I(2,3)$ نقطة تقاطع المقاربين . (الشاقولي والمائل)
3) $f(1)=1$ قيمة حديّة كُبرى محليّاً . $f(3)=5$ قيمة حديّة صُغرى محليّاً . 4) $f'(1)=0$ وَ $f'(3)=0$ (أميال مماسات أفقيّة) مماسات أفقيّة $y=y_0$: $y_1=1$ وَ $y_2=5$.	8) $m\in]-\infty,1[$: للمعادلة حلّان. $m=1$: للمعادلة حل وحيد . $m\in]1,5[$: ليس للمعادلة أيّ حل . $m=5$: للمعادلة حل وحيد . $m=]5,+\infty[$: للمعادلة حلّان .
5) عدد حلول $f(x)=0$ حلّان . عدد حلول $f(x)=1$ حل وحيد . $10f(x)-55\Rightarrow10f(x)=55\Rightarrow$ $f(x)=5.5$ وعدد حلولها حلّان .	9) $E(f(1))=E(1)=1$ وَ $E(f(0))=0$ 10) g مُعرَّف بشرط : $f'(x)>0$ $\Longrightarrow D_g=]-\infty,1[\cup]3,+\infty[$

التمرين العاشر



نتأمَّل الخط البياني C للتابع f المُعرَّف على R . **المطلوب :**

1) ما معادلة المستقيم المقارب للخط C ؟
وما الوضع النسبي للخط C مع هذا المقارب ؟

2) يقبل f قيمة حديّة محليّاً . عيّنها وعيّن نوعها .

3) في حالة عدد حقيقي k ، عيّن بدلالة k عدد حلول المعادلة $f(x) = k$.

4) احسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ وَ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ، واستنتج $\lim\limits_{x\to+\infty} f[f(x)]$.

5) ما عدد حلول المعادلتين $2f(x) + 3 = 0$ وَ $2f(x) + 1 = 0$.

6) ما مجموعة تعريف التابع g الذي يُحقّق $g(x) = \ln(f(x) + 1)$.

7) ما مجموعة تعريف التابع h الذي يحقق $h(x) = \ln(f'(x))$.

حــل التمرين العاشر

1) $y = -1$ مقارب افقي للخط C في جوار $+\infty$.

عندما $x \in]-\infty, -1[\Leftarrow$ C تحت المقارب .

عندما $x \in]-1, +\infty[\Leftarrow$ C فوق المقارب .

عندما $x = -1 \Leftarrow$ C يقطع المقارب .

أو بأسلوب آخر :

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
وضع نسبي	C تحت المقارب		C فوق المقارب

C يقطع المقارب في النقطة $(-1\,,\ -1)$

2) $f(0) = 0$ قيمة حديّة كُبرى محليّاً .

3) $k \in]-\infty, -1]$: للمعادلة حل وحيد .
$k \in]-1, 0[$: للمعادلة حلّان .
$k = 0$: للمعادلة حل وحيد .
$k \in]0, +\infty[$: ليس للمعادلة أيّ حل .

4) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ وَ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -1$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f[f(x)] = \lim\limits_{x\to-1} f(x) = f(-1) = -1$

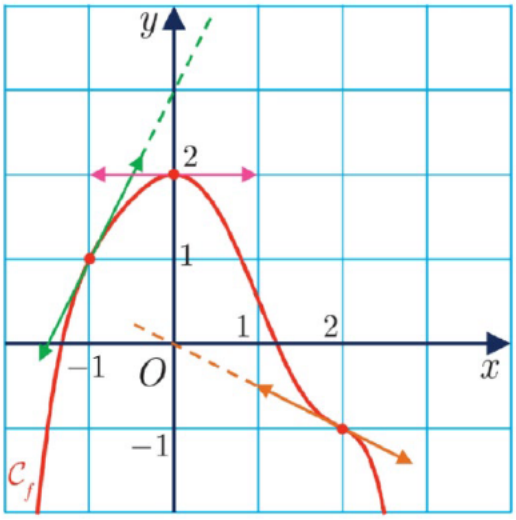
5) $2f(x) + 3 = 0 \Rightarrow f(x) = -\frac{3}{2}$
$\Leftarrow$ للمعادلة حل وحيد .

$2f(x) + 1 = 0 \Rightarrow f(x) = -\frac{1}{2}$
$\Leftarrow$ للمعادلة حلّان .

6) g مُعرَّف بشرط : $f(x) + 1 > 0$
$\Rightarrow f(x) > -1 \Rightarrow D_g =]-1, +\infty[$

7) h مُعرَّف بشرط : $f'(x) > 0$
$\Rightarrow Dh =]-\infty, 0[$

التمرين الحادي عشر



في الشكل المرافق C_f هو الخط البياني لتابعٍ f . المطلوب :

1) جِدْ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ وَ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

2) عيِّنْ كلّاً من
$f(0)$ وَ $f(2)$ وَ $f(-1)$ وَ $f'(0)$ وَ $f'(2)$ وَ $f'(-1)$.

3) اكتب معادلة كلّ من المماسات المرسومة .

4) ما عدد حلول المعادلة $f(x) = 0$ ؟ أعطِ عددين صحيحين متتاليين يحصران كلّاً من حلول المعادلة $f(x) = 0$.

5) ما حلول المتراجحة $f'(x) < 0$ ؟

6) إذا علمت أنَّ α وَ β هما حلّا المعادلة $f(x) = 0$. (حيث $\alpha < \beta$). عيّن إشارة $f(x)$.

حـل التمرين الحادي عشر

1) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ وَ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$

2) $f(0) = 2$ وَ $f(2) = -1$ وَ $f(-1) = 1$

$f'(0) = 0 = m_1$ (لأنَّ المماس عندها أفقي)

$f'(2) = m_2 \Leftarrow A(0\,,0)\ ,\ B(2\,,-1)$

$$m_2 = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{-1-0}{2-0} = -\frac{1}{2} = f'(2)$$

$f'(-1) = m_3 \Leftarrow A(0\,,3)\ ,\ B(-1\,,1)$

$$m_3 = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{1-3}{-1-0} = 2 = f'(-1)$$

3) $m_1 = 0 \Rightarrow y_1 = 2$ (مماس أفقي)

$m_2 = f'(2) = -\frac{1}{2} \Rightarrow y - y_A = m(x - x_A)$

$$\Rightarrow y_2 - 0 = -\frac{1}{2}(x-0) \Rightarrow y_2 = -\frac{1}{2}x$$

$m_3 = f'(-1) = 2 \Rightarrow y - y_A = m(x - x_A)$

$$\Rightarrow y_3 - 3 = 2(x-0) \Rightarrow y_3 = 2x + 3$$

4) حلّان : $x_1 \in\,]-2\,,-1[$ وَ $x_2 \in\,]1\,,2[$

5) $x \in\,]0\,,+\infty[$.

6) عندما $x \in\,]\alpha\,,\beta[\Rightarrow f(x) > 0$.

عندما $x \in\,]-\infty\,,\alpha[\, \cup\,]\beta\,,+\infty[\Rightarrow f(x) < 0$

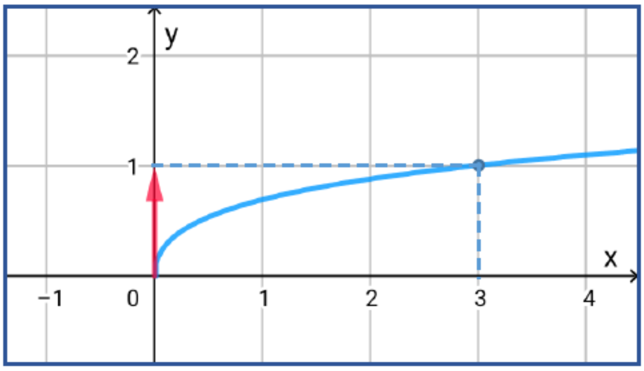
عندما $x = \beta$ وَ $x = \alpha \Rightarrow f(x) = 0$.

أو بأسلوب آخر :

x	$-\infty$		α		β		$+\infty$
$f(x)$		$- - - -$	0	$+ +$	0	$- - - -$	

التمرين الثاني عشر

نتأمّل في الشكل المجاور الخط البياني للتابع f المُعرَّف على R_+ . المطلوب :



1) جدْ $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ وَ $f(3)$.

2) عيّنْ حل المعادلة $f(x) = 0$.

3) هلْ f اشتقاقي عند $x = 0$ ؟
واكتب معادلة المماس الشاقولي للتابع (عند $x = 0$) .

4) جدْ حلول المتراجحتين : $f(x) < 1$ وَ $f'(x) > 0$.

حـل التمرين الثاني عشر

1) $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ وَ $f(3) = 1$	3) لا (لأنّه يقبل مماس شاقولي) $x = x_0 = 0$.
2) $x = 0$.	4) حلول $f(x) < 1$: $x \in [0\,,3[$. حلول $f'(x) > 0$: $x \in]0\,,+\infty[$.

♥ تذكّر :

➢ قراءة الخط البياني تكون من اليسار إلى اليمين .

➢ لإيجاد حلول $f'(x) > 0$ ⇐ نبحث عن تزايد التابع .

➢ لإيجاد حلول $f'(x) < 0$ ⇐ نبحث عن تناقص التابع .

ونعيّن مجال الإكسات .

➢ لإيجاد حلول $f(x) = 0$ ⇐ نبحث عن تقاطع التابع C_f مع xx' $(y = 0)$.

➢ لإيجاد حلول $f(x) = k$ ⇐ نبحث عن تقاطع التابع C_f مع $y = k$.

➢ لإيجاد حلول $f(x) > k$ ⇐ نعيّن إكسات عندما يقع C_f فوق المستقيم $y = k$.

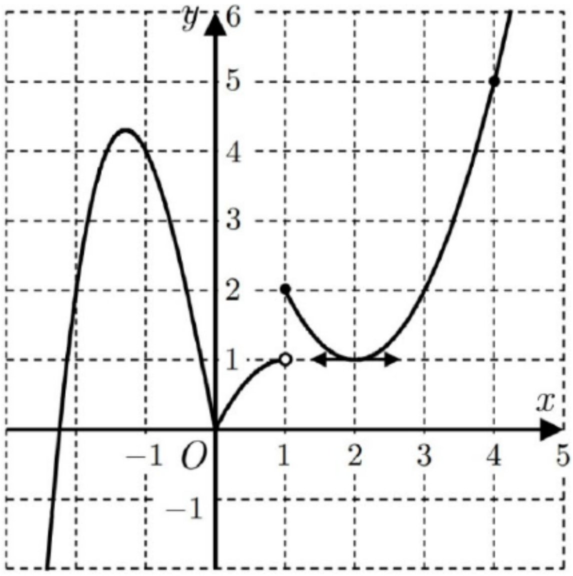
➢ لإيجاد حلول $f(x) < k$ ⇐ نعيّن إكسات عندما يقع C_f تحت المستقيم $y = k$.

➢ قيمة المُشتق في الرُسوم = ميل المماس المرسوم 😎 😏 .

➢ عندما يكون طرف مجموعة التعريف **عدد ينتمي لمجموعة التعريف** ⇐ يكون عنده **قيمة حديّة** .

التمرين الثالث عشر

نتأمَّل الخط البياني C للتابع f المُعرَّف على R . **المطلوب :**



1) ما عدد حلول المعادلة $f(x) = 5$ ؟

2) ما مجموعة حلول المتراجحة $f(x) \geq 5$ ؟

3) هلْ $f(1)$ قيمة حديّة كُبرى أو صُغرى محليّاً للتابع ؟ علّل ذلك .

4) ما عدد القيم الحديّة للتابع f ؟

5) ما قيمة المشتق في النقطة التي فاصلتها $x = 2$ ؟

6) أيكون التابع f اشتقاقيّاً عند $x = 1$ ؟

7) احسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ وَ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ وَ $\lim\limits_{x\to1} f(x)$.

حــل التمرين الثالث عشر

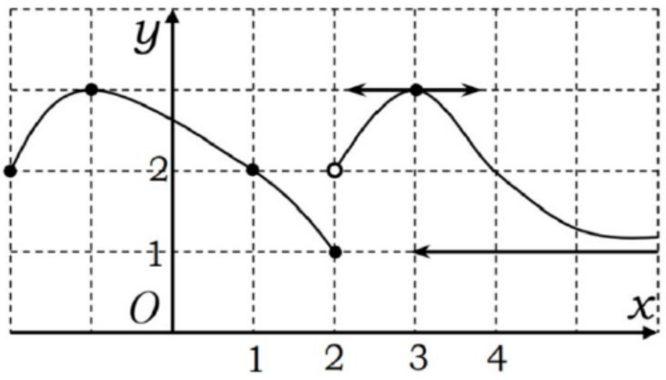
1) حل وحيد . (هو $x = 4$)	4) أربعة قيم حديّة .
2) $x \in [4\,,+\infty[$.	5) $f'(2) = 0$. (لأنَّ المماس عندها أفقي)
3) $f(1) = 2$ قيمة حديّة كُبرى محليّاً ، **لأنه يوجد جوار** $I \in \left]\frac{1}{2}\,,\frac{3}{2}\right[$ يُحقّق : $\forall x \in I \cap D_f = \left]\frac{1}{2}\,,\frac{3}{2}\right[$ $\Rightarrow f(x) \leq f(1)$ $\Rightarrow f(x) \leq 2$ احفظ طريقة إثبات القيمة الحديّة أيْ $f(x) = 2$ قيمة حديّة كُبرى محليّاً .	6) لا . (التابع مبوّز- مُنكسر 😄) 7) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ $\lim\limits_{x\to1} f(x) = 1$

♥ عندما نُصادف عند الفاصلة a نقطة مُفرّغة وأخرى **مُغمّقة** فتكون :

- **صورة a $(f(a))$ هي ترتيب النقطة المُغمّقة •** .
- النهاية عند a $(\lim\limits_{x\to a} f(x))$ هي ترتيب النقطة المُفرّغة ○ .

التمرين الرابع عشر

ليكن C الخط البياني للتابع f المرسوم جانباً . **المطلوب :**



1) جدْ $\lim_{x\to 2} f(x)$ وَ $\lim_{x\to +\infty} f(x)$ وَ $\lim_{x\to +\infty} f[f(x)]$.

2) هلْ f اشتقاقي عند الـ 2 ؟ علّل .

3) جدْ $f(3)$ وَ $f'(3)$ ، و جدْ معادلة المماس عند $x = 3$.

4) ما عدد القيم الحديّة للتابع f ؟ عيّنها .

5) علّل لماذا $f(2) = 1$ قيمة حديّة صُغرى محليّاً ؟

حـل التمرين الرابع عشر

1) $\lim_{x\to 2} f(x) = 2$ وَ $\lim_{x\to +\infty} f(x) = 1$

$\lim_{x\to +\infty} f[f(x)] = \lim_{x\to 1} f(x) = f(1) = 2$

2) لا ; لأنَّ التابع غير مستمر عند $x = 2$.

3) $f(3) = 3$ وَ $f'(3) = 0$

مماس أفقي : $y = y_0 = 3$.

4) أربعة قيم حديّة

$f(-2) = 2$ قيمة حديّة صُغرى محليّاً .

$f(-1) = 3$ قيمة حديّة كُبرى محليّاً .

$f(2) = 1$ قيمة حديّة صُغرى محليّاً .

$f(3) = 3$ قيمة حديّة كُبرى محليّاً .

5) لأنّه **يوجد جوار** $I \in \left]\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right[$

يُحقّق : $\forall x \in I \cap D_f = \left]\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right[$

$\Rightarrow f(x) \geq f(2)$

$\Rightarrow f(x) \geq 1$

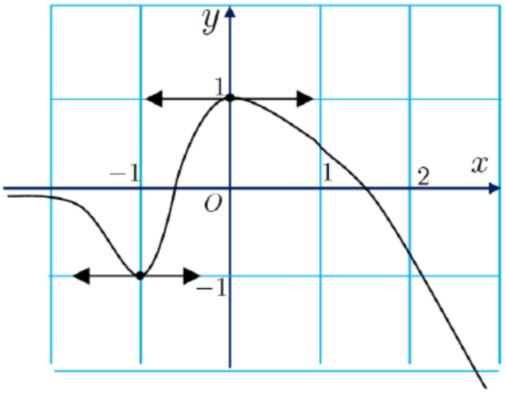
أيْ $f(2) = 1$ قيمة حديّة صُغرى محليّاً .

♥ تذكّر :

➢ عندما يكون طرف مجموعة التعريف <u>عدد</u> ينتمي لمجموعة التعريف⇐يكون عنده قيمة حديّة .

التمرين الخامس عشر

نتأمّل جانباً C_f الخط البياني للتابع f المُعرَّف على R . المطلوب :



1) جِدْ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ وَ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ وَ $\lim\limits_{x\to-\infty} f[f(x)]$.

2) اكتب معادلة كلّ مقارب أفقي للخط C_f .

3) اكتب مجموعة حلول المتراجحتين $f'(x) > 0$ وَ $f(x) < 1$.

4) عيّن القيم الحديّة للتابع f مبيّناً نوع كلّ منها .

5) جِدْ $f'(0)$ وَ $f'(-1)$ ، واكتب معادلة المماس عند $x = -1$.

6) إذا علمت أنَّ حلول المعادلة $f(x) = 0$ هما α وَ β (حيث $\alpha < \beta$) .
أعطِ عددَين صحيحَين متتاليَين يحصران كلّاً منهما ، ثمَّ عيّن إشارة $f(x)$.

7) عيّن الوضع النسبي للخط C_f مع مقاربه الأفقي . 8) ناقش بيانيّاً بحسب قيم $\lambda \in R$ عدد حلول المعادلة $f(x) = \lambda$.

حـل التمرين الخامس عشر

1) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$ وَ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f[f(x)] = \lim\limits_{x\to 0} f(x) = f(0) = 1$

2) $y = 0$ مقارب أفقي في جوار $-\infty$.

3) حلول $f'(x) > 0$: $x \in]-1\,,1[$.

حلول $f(x) < 1$: $x \in R \setminus \{0\}$.

4) $f(-1) = -1$ قيمة حديّة صُغرى محليّاً .

$f(0) = 1$ قيمة حديّة كُبرى محليّاً .

5) $f'(-1) = 0$ وَ $f'(0) = 0$ (أميال مماسات أفقيّة)

مماس أفقي : $y = y_0 = -1$.

6) $\alpha \in]-1\,,0[$ وَ $\beta \in]1\,,2[$

عندما $x \in]\alpha\,,\beta[\Leftarrow f(x) > 0$.

عندما $x \in]-\infty\,,\alpha[\cup]\beta\,,+\infty[\Leftarrow f(x) < 0$.

عندما $x = \beta$ وَ $x = \alpha \Leftarrow f(x) = 0$.

أو بأسلوب آخر :

x	$-\infty$ α β $+\infty$
$f(x)$	$- - - -$ 0 $+ +$ 0 $- - - -$

7) عندما $x \in]\alpha\,,\beta[\Leftarrow C$ فوق المقارب .

عندما $x \in]-\infty, \alpha[\cup]\beta, +\infty[\Leftarrow C$ تحت المقارب .

عندما $x = \beta$ وَ $x = \alpha \Leftarrow C$ يقطع المقارب .

أو بأسلوب آخر :

x	$-\infty$	α	β	$+\infty$
الوضع النسبي	C تحت المقارب		C فوق المقارب	C تحت المقارب

C يقطع المقارب في النقطتين $(\alpha\,,0)$ وَ $(\beta\,,0)$

8) $\lambda \in]-\infty, -1[$: للمعادلة حل وحيد .

$\lambda = -1$: للمعادلة حلّان .

$\lambda \in]-1\,,0[$: للمعادلة ثلاثة حلول .

$\lambda = 0$: للمعادلة حلّان .

$\lambda \in]0\,,1[$: للمعادلة حلّان .

$\lambda = 1$: للمعادلة حل وحيد .

$\lambda \in]1, +\infty[$: ليس للمعادلة أيّ حل .

(ملاحظاتي)