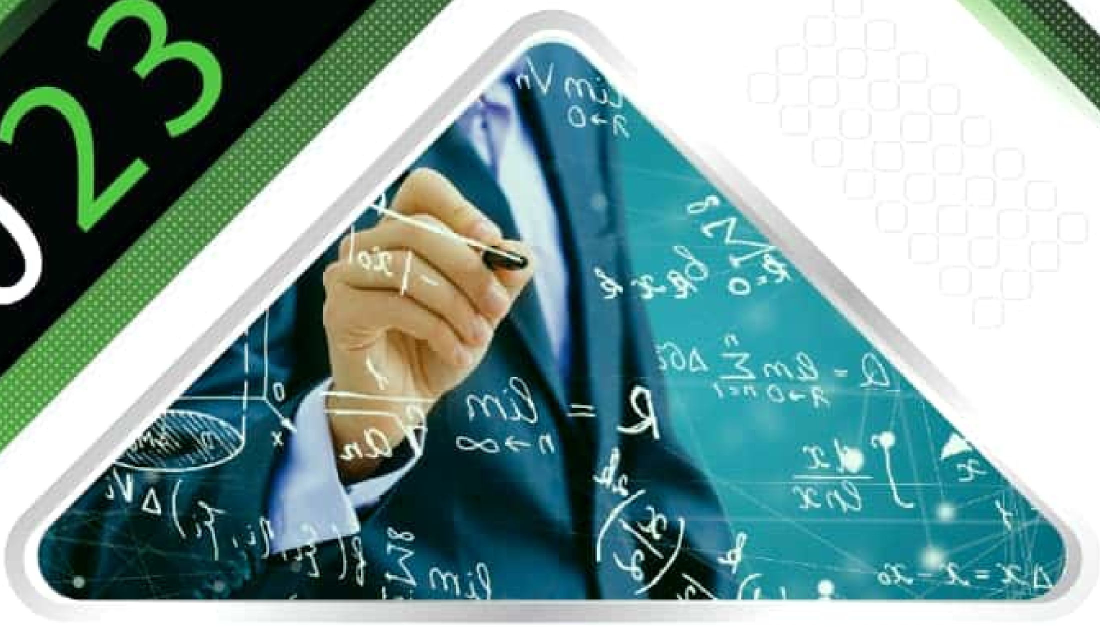
مكثفة

المتتاليات ونهاية المتتالية

2023



إعداد المدرس

محمد أحمد

0964848890

المتتاليات:

المتتالية: هي تابع منطلقه (مجموعة تعريفه) N ومستقره R.

$N = \{0, 1, 2, 3, ...\}$

$N^* = N / \{0\} = \{1, 2, 3, 4, ...\}$

بشكل عام نرمز للمتتالية $(U_n)_{n \geq n_0}$ حيث n_0 من N وتقتضيه نص المسألة ونسمي الـ U_n الحد ذو الدليل n.

*** طرق تعريف المتتالية:**

أولاً: تعريف صريح: $U_n = f(U_n)$.

مثال: لتكن لدينا المتتالية $(U_n)_{n \geq 0}$ وفق:

$$U_n = \frac{2n}{n+3}$$

$$U_0 = \frac{2(0)}{0+3} = 0$$

$$U_5 = \frac{2(5)}{5+3} = \frac{5}{4}$$

ثانياً: تعريف بالتدرج: $U_{n+1} = f(U_n)$ و U_0 حد البدء

مثال: لتكن لدينا المتتالية الآتية $(U_n)_{n \geq 0}$

$U_0 = 3 , U_{n+1} = 2U_n + 3$

الحل: $U_1 = 2U_0 + 3 = 2(3) + 3 = 9$

$U_2 = 2U_1 + 3 = 2(9) + 3 = 21$

$U_3 = 2U_2 + 3 = 2(21) + 3 = 45$.

"أنواع المتتاليات"

المتتالية الحسابية:

كل حد ينتج عن سابقه بإضافة عدد حقيقي r ونسميه أساس المتتالية.

$2, 5, 8, 11, 14$

الحد الأول هو 2 والأساس $r = 3$

سؤال امتحاني:

لإثبات متتالية حسابية:

$U_{n+1} - U_n =$ عدد ثابت

أي: $U_{n+1} = U_n +$ عدد ثابت

القانون الأساسي:

$U_m - U_p = (m - p) \times r$

أي: $U_m = U_p + (m - p) \times r$

U_m: حد ما ذو دليل m

U_p: حد ما ذو الدليل p

r: أساس المتتالية.

فائدة القانون الأساسي:

1. كتابة U_n بدلالة n
2. حساب حد ما لمعرفة حد آخر وأساس
3. حساب الأساس r لمعرفة أي حد.

Mohammed Ahmed
Math Teacher
0964848890

قانون المجموع:

$$S = \frac{n}{2}(a + l)$$

a : هو الحد الأول في المجموع
l : هو الحد الأخير في المجموع
n : هو عدد الحدود ويساوي
الدليل الأخير − الدليل الأول + 1 .

"المتتالية الهندسية"

كل حد ينتج عن سابقه بضربه بعدد حقيقي q ويسمى أساس المتتالية.

3 , 6 , 12 , 24

الحد الأول 3 ، الأساس $q = 2$.

لإثبات أن المتتالية هندسية:

$$\frac{U_{n+1}}{U_n} = \text{عدد ثابت ("حقيقي")}$$

إذن: $U_{n+1} = U_n \times q$

القانون الأساسي:

$$\frac{U_m}{U_p} = q^{m-p}$$

إذن: $U_m = U_p \cdot q^{m-p}$

U_m : حد ما ذو الدليل m
U_p : حد ما ذو الدليل p
q : أساس المتتالية.

فائدة القانون الأساسي:

[1] كتابة U_n بدلالة n.
[2] حساب حد ما بمعرفة حد آخر وأساس.
[3] حساب الأساس بمعرفة أي حدين.

قانون المجموع:

$$S = a \times \frac{1 - q^n}{1 - q}$$

a : هو الحد الأول في المجموع
q : أساس المتتالية.
n : هو عدد الحدود ويساوي
الدليل الأخير − الدليل الأول + 1 .

(المتتالية المطردة)

$U_{n+1} > U_n$ متزايدة تماماً.
$U_{n+1} \geq U_n$ متزايدة.
$U_{n+1} < U_n$ متناقصة تماماً.
$U_{n+1} \leq U_n$ متناقصة.
$U_{n+1} = U_n$ ثابتة.

كيف ندرس جهة اطراد المتتالية:

(1) معيار الطرح (نحسب الفرق):

$U_{n+1} - U_n =$ عدد

العدد:

(a) عدد < 0 (موجب) متتالية متزايدة تماماً.
(b) عدد > 0 (سالب) متتالية متناقصة تماماً.
(c) عدد = 0 متتالية ثابتة

مكثفة المتتاليات ونهاية المتتالية

② معيار القسمة : $\frac{U_{n+1}}{U_n} =$ عدد

العدد:

a) $1 <$ عدد $\Leftarrow$ متتالية متزايدة تماماً.

b) $1 >$ عدد $\Leftarrow$ متتالية متناقصة تماماً.

c) $1 =$ عدد $\Leftarrow$ متتالية ثابتة.

③ معيار الاشتقاق : $U_n = f(U_n)$

مثال $U_n = n + 2 \Rightarrow f(x) = x + 2$

وهنا نشتق $f'(x)$.

a) $f'(x) > 0$ التابع متزايد تماماً وبالتالي متتالية متزايدة.

b) $f'(x) < 0$ التابع متناقص تماماً وبالتالي متتالية متناقصة.

(البرهان بالتدريج)

① نثبت أن القضية صحيحة من أجل $n = n_0$

حيث n_0 تذكر بالمسألة إما: $n_0 = 0$ أو $n_0 = 1$ أو ......

② نفرض أن القضية صحيحة من أجل n أي $E(n)$

③ نبرهن أن القضية صحيحة من أجل $n+1$ أي $E(n+1)$

ملاحظة: (١)

إذا كانت c و b و a ثلاثة حدود متعاقبة من متتالية حسابية فإن:

$$b = \frac{a + c}{2}$$

ملاحظة: (٢)

إذا كانت c و b و a ثلاث حدود متعاقبة من متتالية هندسية فإن:

$$b^2 = a \cdot c$$

"بنك مسائل المتتاليات"

السؤال الأول:

لتكن لدينا المتتالية $U_n = 3n + 1$

① أثبت أن المتتالية حسابية ثم أوجد حدها الأول وأساسها.

② احسب $S = U_3 + U_4 + \dots + U_8$

الحل: $U_{n+1} = 3(n+1) + 1 = 3n + 4$

$\Rightarrow U_{n+1} - U_n = 3n + 4 - 3n - 1 = 3$

فالمتتالية $U_n = 3n + 1$ حسابية.

و $U_0 = 1$ ، $r = 3$

$S = \frac{n}{2}(a + l)$

$a = u_3 = 3(3)+1 = 10$

$\ell = u_8 = 3(8)+1 = 25$

$S = \frac{n}{2}(a+\ell)$

عدد الحدود $n = 8-3+1 = 6$

$S = \frac{6}{2}[10+25] = 105$

السؤال الثاني :

أي المتتاليتان $(u_n)_{n\geq 0}$ و $(v_n)_{n\geq 0}$ الآتيتين حسابية.

(1) $u_n = 3n+1$

(2) $v_n = n^2+1$

الحل :

(1) $u_{n+1} - u_n =$

$\Rightarrow = 3(n+1)+1-(3n+1)$

$= 3 \in \mathbb{R}$

فالمتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ حسابية

حدها الأول (1) وأساسها 3

(2) $v_{n+1} - v_n = (n+1)^2+1-(n^2+1)$

$= 2n+1$ ليس ثابت

فالمتتالية $(v_n)_{n\geq 0}$ ليست متتالية حسابية.

السؤال الثالث : (2) (2018)

$(u_n)_{n\geq 0}$ متتالية هندسية أساسها $q = 2$ وحدها $u_0 = 1$

احسب u_3

ثم احسب المجموع

$S = u_3 + u_4 + u_5 + u_6 + u_7$

الحل :

$u_n = u_p . q^{n-p}$

$u_3 = u_0 . q^{3-0}$

$\Rightarrow u_3 = (1)(2)^3 = 8$

$S = a \times \frac{1-q^n}{1-q} = u_3 \times \frac{1-q^n}{1-q}$

$n = 7-3+1 = 5$, $u_3 = 8$

$S = 8 . \frac{1-(2)^5}{1-2} = \frac{8}{-1}(1-32)$

$= 248$

السؤال الرابع : (نموذج وزاري 5)

لتكن المتتالية $u_n = 4n+1$ أثبت أن المتتالية حسابية وعين أساسها واحسب

$u_0 + u_1 + \dots + u_{10}$

الحل : $u_{n+1} = 4(n+1)+1 = 4n+5$

$u_{n+1} - u_n = 4n+5-4n-1 = 4$

وهي متتالية حسابية أساسها $r = 4$

وحدها الأول $u_0 = 1$

$S = \frac{n}{2}(a+\ell)$

$n = 10-0+1 = 11$

$a = u_0 = 4(0)+1 = 1$

$l = u_{10} = 4(10)+1 = 41$

$S = \frac{n}{2}(a+l) = \frac{11}{2}(1+41)$

$= 231.$

السؤال الخامس: (اختبار 2).

نعرف المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ كما يأتي:

$u_{n+1} = \sqrt{12+u_n}$ ، $u_0 = 1$.

① أثبت أن $0 \leq u_n \leq 4$ أياً كان العدد الطبيعي n.

② أثبت أن المتتالية متزايدة.

الحل: ①

نرمز للقضية $E(n): 0 \leq u_n \leq 4$

نبرهن صحة القضية $E(0)$ أي:

$0 \leq u_0 = 1 \leq 4$ محققة

نفرض أن القضية $E(n)$ صحيحة:

$0 \leq u_n \leq 4$ ......(*)

لنبرهن صحة القضية $E(n+1)$.

أي سنبرهن:

$0 \leq u_{n+1} \leq 4$ ......(**)

من (*) $0 \leq u_n \leq 4$

$\Rightarrow (+12) \Rightarrow 12 \leq 12+u_n \leq 16$

$\Rightarrow$ نجذر $\Rightarrow \sqrt{12} \leq \sqrt{12+u_n} \leq 4$

$\Rightarrow 0 \leq u_{n+1} \leq 4$

فالقضية $E(n+1)$ صحيحة وبالتالي

بالتدريج وجدنا: $0 \leq u_n \leq 4$

محققة وذلك أياً كان العدد الطبيعي n

② $E(n): u_{n+1} \geq u_n$

نبرهن صحة القضية $E(0)$ أي:

$u_1 \geq u_0$

$\Rightarrow u_1 = \sqrt{12+1} = \sqrt{13}$

$\Rightarrow \sqrt{13} \geq 1$ محققة

نفرض أن القضية $E(n)$ صحيحة أي:

$u_{n+1} \geq u_n$ ....(*)

لنبرهن صحة القضية $E(n+1)$

$u_{n+2} \geq u_{n+1}$ ....(**)

من (*) $u_{n+1} \geq u_n$

$(+12) \Rightarrow 12+u_{n+1} \geq 12+u_n$

نجذر $\Rightarrow \sqrt{12+u_{n+1}} \geq \sqrt{12+u_n}$

$\Rightarrow u_{n+2} \geq u_{n+1}$

$(u_n)_{n\geq 0}$ متزايدة.

T. Mohammed Ahmed
0964848890

السؤال السادس: (اختبار (1))

أثبت أن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرفة تدريجياً بالعلاقات:
$u_0 = 0$
$u_{n+1} = \sqrt{1+u_n^2}$
متزايدة تماماً.

الحل: نرمز للقضية $E(n): u_{n+1} > u_n$

نبرهن صحة القضية من أجل $E(0)$:
$u_1 > u_0$
$u_0 = 0$, $u_1 = \sqrt{1+u_0^2} = 1$
$\Rightarrow 1 > 0$ محققة.....

نفرض أن القضية صحيحة من أجل $E(n)$:
$u_{n+1} > u_n$ -----(*)

نبرهن صحة القضية من أجل $E(n+1)$
$u_{n+2} > u_{n+1}$ -----(**)

من *: $u_{n+1} > u_n$
$\Rightarrow$ (نربع) $u_{n+1}^2 > u_n^2$
$\Rightarrow$ نضيف واحد $\Rightarrow 1+u_{n+1}^2 > 1+u_n^2$
$\Rightarrow$ نجذر $\Rightarrow \sqrt{1+u_{n+1}^2} > \sqrt{1+u_n^2}$
$u_{n+2} > u_{n+1}$
القضية صحيحة من أجل $n+1$
وبالتالي صحيحة من أجل $n \geq 0$
ومنه المتتالية متزايدة تماماً

السؤال السابع: (وزاري 1)

لتكن $(x_n)_{n\geq 0}$ المتتالية المعطاة وفق:
$x_0 = 4$
$x_{n+1} = \frac{3}{4}x_n + 2$
في حالة $n \geq 0$

① نعرف $(y_n)_{n\geq 0}$ بالعلاقة: $y_n = x_n - 8$
أثبت أن $(y_n)_{n\geq 0}$ متتالية هندسية واكتب y_n بدلالة n واحسب $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n$

الحل:

$y_{n+1} = x_{n+1} - 8 = \frac{3}{4}x_n + 2 - 8$
$= \frac{3}{4}x_n - 6$
$\Rightarrow y_{n+1} = \frac{3}{4}(y_n + 8) - 6$
$= \frac{3}{4}y_n + 6 - 6 = \frac{3}{4}y_n$

$y_{n+1} = \frac{3}{4}y_n$ هندسية $(y_n)_{n\geq 0}$
أساسها $\frac{3}{4}$
وحدها الأول $y_0 = x_0 - 8$
$= 4 - 8 = -4$
$y_n = y_0 \cdot q^{n-0} = -4 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^n$
بما أن: $-1 < \frac{3}{4} < 1$
$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^n = 0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} y_n = -4 \times 0 = 0$. M-Ah .

Scanned by CamScanner

السؤال الثامن:

لتكن المتتالية $(U_n)_{n\geq 0}$ معرفة وفق:

$$U_0 = 1 \quad , \quad U_{n+1} = \frac{3U_n + 2}{2U_n + 6}$$

عند كل $n \geq 0$

① أثبت أن التابع $f(x) = \frac{3x+2}{2x+6}$ متزايد تماماً.

واستنتج أن $\frac{1}{2} \leq U_n \leq 1$ أياً كان العدد الطبيعي n

② أثبت أن المتتالية $(U_n)_{n\geq 0}$ متناقصة تماماً.

الحل:

① $f(x) = \frac{3x+2}{2x+6}$

$$f'(x) = \frac{3(2x+6) - (2)(3x+2)}{(2x+6)^2}$$

$$f'(x) = \frac{14}{(2x+6)^2} > 0$$

⇐ التابع متزايد تماماً.

$$\Longrightarrow \frac{1}{2} \leq U_n \leq 1$$

نرمز للقضية $E(n): \frac{1}{2} \leq U_n \leq 1$

نثبت صحة القضية من أجل $n=0$

$E(0): \frac{1}{2} \leq U_0 \leq 1$

$U_0 = 1$

$$\frac{1}{2} \leq 1 \leq 1$$

ومنه القضية صحيحة من أجل $n=0$

نفرض صحة القضية من أجل n.

$E(n): \frac{1}{2} \leq U_n \leq 1$ ....(*) صحيحة.

نثبت صحة القضية من أجل $n+1$

أي نريد إثبات:

$E(n+1): \frac{1}{2} \leq U_{n+1} \leq 1$ ...(**)

من (*) ⇐

$$\frac{1}{2} \leq U_n \leq 1$$

نطبق الأطراف:

$$f\left(\frac{1}{2}\right) \leq f(U_n) \leq f(1)$$

$$\frac{3(\frac{1}{2})+2}{2(\frac{1}{2})+6} \leq U_{n+1} \leq \frac{3(1)+2}{2(1)+6}$$

$$\frac{1}{2} \leq U_{n+1} \leq \frac{5}{8} < 1$$

$$\Longrightarrow \frac{1}{2} \leq U_{n+1} \leq 1$$

ومنه القضية صحيحة من أجل $n+1$

ومنه القضية محققة أياً كانت n

② نرمز للقضية: $E(n): U_{n+1} < U_n$

نثبت صحة القضية من أجل $n=0$

$E(0): U_1 < U_0$

$$\left.\begin{array}{l} U_0 = 1 \\ U_1 = \frac{5}{8} \end{array}\right\} \frac{5}{8} < 1$$

محققة

نفرض صحة القضية من أجل n أي :

$E(n): U_{n+1} < U_n$ ----(*)

نثبت صحة القضية من أجل n+1

$E(n+1): U_{n+2} < U_{n+1}$ ----(**)

من * : $U_{n+1} < U_n$

- نضرب الأطراف :

$f(U_{n+1}) < f(U_n)$

$U_{n+2} < U_{n+1}$

ومنه القضية محققة من أجل n+1

ومنه القضية محققة أياً كان $n \in N$

"نهاية المتتالية"

$$\lim_{n \to +\infty} U_n$$

① $\lim_{n \to +\infty} U_n = b$

هنا نقول أن المتتالية متقاربة من b

② $\lim_{n \to +\infty} U_n = \mp\infty$

هنا نقول أن $(U_n)_{n \geq n_0}$ متباعدة .

نهاية المتتالية الهندسية : q^n

$\boxed{1}$ $\lim_{n \to +\infty} q^n = 0$ عندما $-1 < q < 1$

$\boxed{2}$ $\lim_{n \to +\infty} q^n = +\infty$ $q > 1$

$\boxed{3}$ $\lim_{n \to +\infty} q^n =$ "غير موجودة" $q \leq -1$

$\boxed{4}$ $\lim_{n \to +\infty} q^n = 1$ $q = 1$

(المتتالية ثابتة).

نهاية المتتالية عندما $n \to +\infty$

كيف نوجد نهاية متتالية ؛

أولاً: إذا كانت المتتالية مكتوبة بشكل صريح نطبق نفس قواعد نهاية التابع :

مثال : $U_n = \dfrac{2n+3}{3n-1}$

الحل : $\lim_{n \to +\infty} U_n = \dfrac{2}{3}$

ثانياً: إذا كانت المتتالية بشكل مجموع ؛

نحول المجموع إلى شكل صريح باستخدام قانون المجموع في المتتالية الهندسية .

$$S = a \cdot \frac{1-q^n}{1-q}$$

"كن مع الله ولا تبالي"

مكثفة المتتاليات ونهاية المتتالية

مثال: ليكن $-1 < q < 1$ ولنعرف المتتالية $(U_n)_{n\geq 0}$ بالعلاقة:

$U_n = 1 + q + q^2 + \dots\dots + q^n$

أعط صيغة أخرى تفيد في حساب U_n واستنتج $\Leftarrow S = \lim\limits_{n \to +\infty} U_n$

الحل: نلاحظ أنها متتالية هندسية أساسها q وحدها الأول واحد.

عدد الحدود $n+1$

أول حد هو 1

والأساس q

$S = a \cdot \dfrac{1 - q^n}{1 - q}$

$= 1 \times \dfrac{1 - q^{n+1}}{1 - q} = \dfrac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$

$\Rightarrow -1 < q < 1 \Rightarrow \lim\limits_{n \to +\infty} q^n = 0$

$\Rightarrow \lim\limits_{n \to +\infty} q^{n+1} = 0$

$\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = \dfrac{1 - 0}{1 - q} = \dfrac{1}{1 - q}$

لا تيأس .... ♡

M.Ah

ثالثاً: إذا كانت بشكل تدريجي نظيمي

إذا كانت متزايدة ومحدودة من الأعلى أو إذا كانت متناقصة ومحدودة من الأدنى فإن نهاية المتتالية هي حل المعادلة $f(x) = x$

مبرهنات الإحاطة

1) $W_n \leq U_n \leq V_n$ ، $W_n \to \ell$ ، $V_n \to \ell$ ، $U_n \to \ell$

2) $|U_n - \ell| \leq e_n$ ، $e_n \to 0$

مثال: $|U_n - 4| \leq \dfrac{1}{n} \to 0$

$\lim U_n = 4$

3)

$U_n \leq V_n$ ، $V_n \to -\infty \Rightarrow U_n \to -\infty$

$U_n \leq V_n$ ، $U_n \to +\infty \Rightarrow V_n \to +\infty$

قاعدة: إذا كانت نهاية المتتالية عدد حقيقي ℓ نقول عن المتتالية (متقاربة)

ملاحظة: إذا كانت المتتالية مكتوبة بشكل مجموع وطلب نهايتها فغالباً ما تكون هندسية.

* إذا كانت نهاية المتتالية $\mp\infty$ نقول عنها (متباعدة)

(المتتاليات المحدودة)

$u_n \le M \iff$ محدودة من الأعلى

(M) عنصر راجح

$u_n \ge m \iff$ محدودة من الأدنى

(m عنصر قاصر).

u_n محدودة من الأعلى والأدنى

$\iff$ محدودة.

مبرهنة (1): كل متتالية متزايدة وغير محدودة من الأعلى تسعى إلى $+\infty$

* وكل متتالية متناقصة وغير محدودة من الأدنى تسعى إلى $-\infty$

مبرهنة (2): كل متتالية متزايدة ومحدودة من الأعلى تكون متقاربة.

ب) كل متتالية متناقصة ومحدودة من الأدنى تكون متقاربة.

* ملاحظة:

1) إذا كان M عنصراً راجحاً على $(u_n)_{n\ge 0}$ فإن أي عدد أكبر من M هو عنصر راجح عليها.

2) إذا كان m عنصراً قاصراً عن $(u_n)_{n\ge 0}$ فإن أي عدد أصغر من m هو عنصر قاصر عنها.

"بنك مسائل المتتاليات ونهاية المتتالية"

السؤال الأول: دورة (2017) أولى.

لتكن المتتالية $(u_n)_{n\ge 0}$ المعرفة وفق:

$u_0 = 1$ و $u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n - 2$

ولتكن المتتالية $(v_n)_{n\ge 0}$ وفق:

$v_n = u_n + 3$

1) أثبت أن $(v_n)_{n\ge 0}$ متتالية هندسية أوجد أساسها.

2) اكتب عبارة v_n بدلالة n ثم استنتج u_n بدلالة n.

3) إذا كانت:

$S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$

عبر عن S_n بدلالة n واستنتج نهاية المتتالية $(S_n)_{n\ge 0}$

الحل:

1) $$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{u_{n+1}+3}{u_n+3}$$

$$= \frac{\frac{1}{3}u_n - 2 + 3}{u_n+3} = \frac{\frac{1}{3}u_n + 1}{u_n+3}$$

$$= \frac{\frac{1}{3}\cancel{(u_n+3)}}{\cancel{u_n+3}} = \frac{1}{3} \rightarrow \text{عدد ثابت}$$

v_n متتالية هندسية أساسها $q = \frac{1}{3}$

(2) $v_n = v_p \cdot q^{n-p}$

$\Rightarrow v_n = v_0 \cdot q^{n-0}$

$v_0 = u_0 + 3 = 1 + 3 = 4$

$v_n = 4 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^n = \frac{4}{3^n}$

$\Rightarrow v_n = u_n + 3$

$\Rightarrow u_n = v_n - 3 = \frac{4}{3^n} - 3$

(3) $S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$

هي مجموع متتاليات هندسية حدها الأول v_0

وأساسها $q = \frac{1}{3}$

وعدد حدودها $n+1$

$S = a \cdot \frac{1-q^n}{1-q}$

$= v_0 \left(\frac{1-q^{n+1}}{1-q}\right) = 4 \times \frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{3}}$

$= 4 \times \frac{3}{2}\left(1-\left(\frac{1}{3}\right) \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^n\right)$

$= 6\left(1-\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\right)^n\right) = 6 - 2\left(\frac{1}{3}\right)^n$

$S_n = 6 - \frac{2}{3^n}$

لما أن: $q = 3 > 1$ $\lim_{n \to +\infty} (3)^n = +\infty$

$\Rightarrow \lim_{n \to +\infty} S_n = 6 - 0 = 6$

السؤال الثاني:

لتكن $(u_n)_{n \geq 0}$ متتالية معرفة تدريجياً وفق:

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{u_n}{1+u_n} \end{cases}$$

① أثبت أن $u_n > 0$ بالتدريج أياً كان العدد الطبيعي n.

② أثبت أن المتتالية $(v_n)_{n \geq 0}$ المعرفة بالعلاقة: $v_n = \frac{1}{u_n}$ متتالية حسابية.

واكتب عبارة v_n بدلالة n ثم استنتج عبارة u_n بدلالة n.

الحل: ① نرمز للقضية $E(n): u_n > 0$

نبرهن صحة القضية من أجل $n = 0$

$u_0 > 0 \Rightarrow 1 > 0$ محققة

نفرض صحة القضية من أجل n أي:

$u_n > 0$ ......(*)

نبرهن صحة القضية من أجل $n+1$

$u_{n+1} > 0$ ......(**)

$f(x) = \frac{x}{1+x} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{(1+x)^2} > 0$

f متزايدة تماماً.

$u_n > 0$

* من

$f(u_n) > f(0)$

وهو المطلوب: $u_{n+1} > 0$

(2) $v_n = \frac{1}{u_n}$

لإثبات أن المتتالية حسابية يجب أن يكون: $v_{n+1} - v_n =$ عدد ثابت

$= \frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_n} = \frac{1}{\frac{u_n}{1+u_n}} - \frac{1}{u_n}$

$= \frac{1+u_n}{u_n} - \frac{1}{u_n} = \frac{u_n}{u_n} = 1$

فالمتتالية حسابية أساسها $r = 1$

ولكتابة v_n بدلالة n:

$v_0 = \frac{1}{u_0} = \frac{1}{1} = 1$

$v_n = v_0 + (n-0) \times r$

$v_n = 1 + (n-0) \times 1$

$v_n = n+1$

ولنستنتج عبارة u_n بدلالة n:

$v_n = \frac{1}{u_n} \Rightarrow u_n = \frac{1}{v_n} = \frac{1}{n+1}$

M. Ah

المتتاليات المتجاورة:

تعريف:

نقول إن المتتاليتين $(t_n)_{n\geq 0}$ ، $(S_n)_{n\geq 0}$ متجاورتان إذا وفقط إذا كانت إحداهما متزايدة والأخرى متناقصة وكانت:

$\lim(S_n - t_n)$ تساوي الصفر.

أي $\lim S_n = \lim t_n$

السؤال الثالث: تمرين وزاري (5)

لتكن المتتاليتين $(x_n)_{n\geq 0}$ و $(y_n)_{n\geq 0}$ المعرفتين:

$x_n = \frac{4n+5}{n+1}$ ، $y_n = \frac{4n+1}{n+2}$

نبرهن أنهما متجاورتين.

الحل: نفرض تابع:

$f(x) = \frac{4x+5}{x+1}$

نشتق: $f'(x) = \frac{4(x+1) - (1)(4x+5)}{(x+1)^2}$

$= \frac{-1}{(x+1)^2} < 0$

f متناقص تماماً فالمتتالية متناقصة تماماً

$$g(x)=\frac{4x+1}{x+2}$$

$$g'(x)=\frac{4(x+2)-1(4x+1)}{(x+2)^2}$$

$$=\frac{7}{(x+2)^2}>0$$

g متزايدة تماماً فالمتتالية متزايدة تماماً

$$\lim_{n\to\infty}(X_n-Y_n)=$$

$$\lim_{n\to+\infty}\left[\frac{4n+5}{n+1}_{(n+2)}-\frac{4n+1}{n+2}_{(n+1)}\right]$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\left[\frac{8n+9}{(n+1)(n+2)}\right]=0$$

إذاً المتتاليتان $(X_n)_{n\geq 0}$ و $(Y_n)_{n\geq 0}$ "متجاورتان"

السؤال الرابع: (مهم):

لتكن المتتالية $(X_n)_{n\geq 1}$ و $(Y_n)_{n\geq 1}$

بحيث: $X_n=2-\frac{1}{n}$

$$Y_n=2+\frac{1}{n^2}$$

أثبت أن هاتين المتتاليتين متجاورتين.

الحل: $X_{n+1}-X_n=2-\frac{1}{n+1}-2+\frac{1}{n}$

$$=\frac{1}{n}_{(n+1)}-\frac{1}{n+1}_{(n)}=\frac{n+1-n}{n(n+1)}$$

$$=\frac{1}{n(n+1)}>0$$ $(X_n)_{n\geq 1}$ متزايدة تماماً.

$$X_{n+1}>X_n$$

$$Y_{n+1}-Y_n=2+\frac{1}{(n+1)^2}-2-\frac{1}{n^2}$$

$$=\frac{1}{(n+1)^2}_{(n)^2}-\frac{1}{n^2}_{(n+1)^2}=\frac{n^2-(n+1)^2}{n^2(n+1)^2}$$

$$=\frac{n^2-n^2-2n-1}{n^2(n+1)^2}=\frac{-2n-1}{n^2(n+1)^2}<0$$

$(Y_n)_{n\geq 1}$ متناقصة تماماً.

$$Y_{n+1}<Y_n$$

$$\lim_{n\to+\infty}(X_n-Y_n)=\lim_{n\to+\infty}\left[2-\frac{1}{n}-2-\frac{1}{n^2}\right]$$

$$=\lim\left(-\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}\right)=0$$

$(X_n)_{n\geq 1}$ و $(Y_n)_{n\geq 1}$ متجاورتان

التقدم البسيط في كل يوم يؤدي
إلى نتائج أكبر ...

T. Mohammed Ahmed.

السؤال الخامس: "وزاري (3)"

لتكن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرفة بالعلاقة التدريجية: $u_0=\frac{1}{2}$ ، $u_{n+1}=\frac{u_n}{2-u_n}$

① أثبت أن $0<u_n<1$ أيا كانت n من $\mathbb{N}$.

② نعرف $(v_n)_{n\geq 0}$ حيث: $v_n=\frac{1}{u_n}-1$.
أثبت أن $(v_n)_{n\geq 0}$ متتالية هندسية واستنتج v_n بدلالة n

③ اكتب u_n بدلالة n واحسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

الحل ① نرمز للقضية:

$E(n):\ 0<u_n<1 \quad \forall n\in\mathbb{N}$

نبرهن صحة القضية من أجل $E(0)$: أي $0<u_0<1 \Rightarrow u_0=\frac{1}{2}$

$\Rightarrow 0<\frac{1}{2}<1$.

نفرض أن $E(n)$ صحيحة؛

$0<u_n<1$ ....(*)

نبرهن صحة القضية $E(n+1)$:

$0<u_{n+1}<1$ ....(**)

ليكن لدينا التابع: $f(x)=\frac{x}{2-x}$

f معرف ومستمر واشتقاقي على $\mathbb{R}\setminus\{2\}$

$f'(x)=\frac{1(2-x)-(-1)(x)}{(2-x)^2}$

$=\frac{2}{(2-x)^2}>0$ ، f متزايد تماماً على $\mathbb{R}\setminus\{2\}$

من (*) $0<u_n<1$

$f(0)<f(u_n)<f(1)$

(لأن f متزايد تماماً ...)

$0<u_{n+1}<1$ ....(**)

$E(n+1)$ محققة.

ومنه نستنتج أن $E(n)$ محققة مهما يكن $n\in\mathbb{N}$

② $v_{n+1}=\frac{1}{u_{n+1}}-1=\frac{1}{\frac{u_n}{2-u_n}}-1$

$=\frac{2-u_n}{u_n}-1$

$v_{n+1}=\frac{2-u_n-u_n}{u_n}=\frac{2-2u_n}{u_n}$

$v_{n+1}=2\times\frac{1-u_n}{u_n}=2\left(\frac{1}{u_n}-1\right)$

$=2v_n$

$(v_n)_{n\geq 0}$ هندسية

أساسها 2 وحدها الأول $v_0=\frac{1}{u_0}-1$

مكثفة المتتاليات ونهـاية المتتالية

$= \frac{1}{\frac{1}{2}} - 1 = 2 - 1 = 1$

$v_n = v_0 \cdot q^{n-0}$

$v_n = 1 \times 2^n = 2^n$

③ $v_n = \frac{1}{u_n} - 1$

$\Rightarrow \frac{1}{u_n} = v_n + 1 \Rightarrow u_n = \frac{1}{v_n + 1}$

$= \frac{1}{2^n + 1}$

وبما أن $2 > 1$ فإن :

$\lim_{n \to +\infty} 2^n = +\infty$

$\lim_{n \to +\infty} u_n = \frac{1}{+\infty} = 0$

السؤال السادس :

ادرس تقارب المتتالية :

① $x_n = \frac{3^n - 2^n}{3^n - 1}$

② $y_n = \frac{10^n - 1}{10^n + 1} \Rightarrow$ وظيفة

الحل :

$3 > 1 \Rightarrow \lim 3^n = +\infty$

$2 > 1 \Rightarrow \lim 2^n = +\infty$

$\lim x_n = \frac{+\infty - \infty}{+\infty}$ ع.ت

$x_n = \frac{3^n\left(1 - \frac{2^n}{3^n}\right)}{3^n\left(1 - \frac{1}{3^n}\right)} = \frac{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n}{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n}$

$-1 < \frac{2}{3} < 1 \Rightarrow \lim \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$

$-1 < \frac{1}{3} < 1 \Rightarrow \lim \left(\frac{1}{3}\right)^n = 0$

$\lim_{n \to +\infty} x_n = \frac{1 - 0}{1 - 0} = 1$

حل الوظيفة :

كُنْ مَعَ اللّهِ وَلا تُبالي ....

مكثفة المتتاليات ونهاية المتتالية

السؤال السابع:

لتكن المتتالية $(U_n)_{n\geq 0}$ المعرفة بالعلاقة: $U_n = \frac{4n+1}{2}$ والمطلوب.

① برهن أن المتتالية حسابية عين أساسها وحدها الأول.

② احسب المجموع $U_1+U_2+\dots+U_{50}$

③ أثبت أن المتتالية $(U_n)_{n\geq 0}$ متباعدة.

الحل: ①

$U_n = \frac{4n+1}{2}$

$U_{n+1} = \frac{4n+5}{2}$

$U_{n+1}-U_n = \frac{4n+5}{2} - \frac{4n+1}{2} = \frac{4}{2} = 2$

متتالية حسابية أساسها $r=2$ حدها الأول $U_0=\frac{1}{2}$

② $S=\frac{n}{2}(a+l)$

$U_{50} = \frac{4(50)+1}{2} = \frac{201}{2}$

$U_1 = \frac{4(1)+1}{2} = \frac{5}{2}$

$n = 50-1+1 = 50$

$S = \frac{50}{2}\left(\frac{5}{2}+\frac{201}{2}\right) = 2575$

③ $\lim_{n\to+\infty} U_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{4n+1}{2} = +\infty$

فهي متباعدة

السؤال الثامن: دورة 2019 / ثانية

لتكن المتتالية $(U_n)_{n\geq 0}$ المعرفة كما يأتي:

$U_n = \frac{2n-1}{n+1}$

① ادرس إطراد المتتالية $(U_n)_{n\geq 0}$

② أثبت أن العدد 2 راجح على $(U_n)_{n\geq 0}$

③ احسب $\lim U_n$ ثم جد عدداً حقيقياً n_0 يحقق أنّ $n\geq n_0$ كان U_n في المجال $]1.9, 2.1[$

الحل: نفرض: ① $f(x) = \frac{2x-1}{x+1}$

حيث: $U_n = f(U_n)$

$f'(x) = \frac{2(x+1)-(1)(2x-1)}{(x+1)^2}$

$= \frac{2x+2-2x+1}{(x+1)^2} = \frac{3}{(x+1)^2} > 0$

والتابع متزايد تماماً فالمتتالية $(U_n)_{n\geq 0}$ متزايدة تماماً.

(2) $U_n - 2 = \frac{2n-1}{n+1} - 2$

$= \frac{\cancel{2n}-1-\cancel{2n}-2}{n+1} = \frac{-3}{n+1} < 0$

$\Rightarrow U_n < 2$

(3) $\lim_{n\to+\infty} U_n = \lim \frac{2n-1}{n+1} = \lim \frac{2n}{n}$

$= 2$

$c = \frac{a+b}{2} = \frac{1.9+2.1}{2} = 2$

$r = \frac{b-a}{2} = \frac{2.1-1.9}{2} = 0,1$

$|U_n - c| < r \Rightarrow |U_n - 2| < 0.1$

$\Rightarrow \left|\frac{2n-1}{n+1} - 2\right| < \frac{1}{10}$

$\left|\frac{2n-1-2n-2}{n+1}\right| < \frac{1}{10}$

$\left|\frac{-3}{n+1}\right| < \frac{1}{10}$

$\frac{3}{n+1} < \frac{1}{10} \Rightarrow n+1 > 30$

$\Rightarrow n > 29$ وبالتالي يمكن اختيار $n_0 \geq 29$

السؤال التاسع:

أثبت أن المتتالية $(U_n)_{n\geq1}$ حيث: $U_n = 1 - e^{\frac{1}{n}}$ متزايدة.

وأن المتتالية $(V_n)_{n\geq1}$ حيث: $V_n = 1 - e^{n}$ متناقصة.

ثم أحسب $\lim_{n\to+\infty} U_n$ و $\lim_{n\to+\infty} V_n$

هل المتتاليتان متجاورتان؟ علل ذلك؟

الحل:

$U_{n+1} - U_n = 1 - e^{\frac{1}{n+1}} - 1 + e^{\frac{1}{n}}$

$= e^{\frac{1}{n}} - e^{\frac{1}{n+1}}$

$\Rightarrow n+1 > n \Rightarrow \frac{1}{n} > \frac{1}{n+1}$

$\Rightarrow e^{\frac{1}{n}} > e^{\frac{1}{n+1}}$

$\Rightarrow U_{n+1} - U_n > 0$ متزايدة تماماً

$V_{n+1} - V_n = 1 - e^{n+1} - 1 + e^{n}$

$= e^{n} - e^{n+1}$

$n+1 > n \Rightarrow e^{n+1} > e^{n}$

$\Rightarrow V_{n+1} - V_n < 0$ متناقصة تماماً.

$\lim_{n\to+\infty} U_n = 1 - e^{0} = 1 - 1 = 0$

أي أن: $\lim_{n\to+\infty} V_n \neq \lim_{n\to+\infty} U_n$

$\lim_{n\to+\infty} V_n = -\infty$

المتتاليتان غير متجاورتان

السؤال العاشر: دورة (دامج) أولى
لتكن المتتالية $(S_n)_{n\geq 0}$ المعرفة وفق:
$$S_n = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{3^n}$$

① أثبت أن المتتالية متزايدة تماماً.
② أثبت أن S_n يكتب بالشكل:
$$S_n = \frac{1}{2}\left(3 - \frac{1}{3^n}\right).$$

ثم استنتج عنصراً راجحاً على المتتالية $(S_n)_{n\geq 0}$ بين أنها متقاربة.

الحل:
$$S_{n+1} - S_n = 1 + \dots + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{3^{n+1}}$$
$$-\left(1 + \dots + \frac{1}{3^n}\right) = \frac{1}{3^{n+1}}$$
$$S_{n+1} - S_n = \frac{1}{3^{n+1}} > 0$$
فالمتتالية $(S_n)_{n\geq 0}$ متزايدة تماماً.

② حدود متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{3}$
عدد حدودها $n - 0 + 1 = n+1$
وحدها الأول 1
$$S_n = a \times \frac{1-q^n}{1-q}$$
$$= 1 \cdot \frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{3}} = \frac{3}{2}\left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right)$$
$$= \frac{3}{2}\left(1 - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^n\right) \Rightarrow$$
$$S_n = \frac{1}{2}\left(3 - \frac{1}{3^n}\right)$$

لإيجاد العنصر الراجح نأخذ نهاية S_n عندما $n \to +\infty$
$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \frac{1}{2}(3 - 0) = \frac{3}{2}$$
$$q > 1 \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{3^n} = 0$$
$(3>1)$

وجدنا أنها متزايدة ومحدودة من الأعلى بعنصر راجح فهي متقاربة.

السؤال الحادي عشر: أولى (2018)
ليكن لدينا المتتاليتين $(U_n)_{n\geq 1}$ و $(V_n)_{n\geq 1}$ المعرفتان وفق:
$$U_n = 5 - \frac{1}{n} \quad \& \quad V_n = 5 + \frac{1}{n^2}$$

① أثبت أن المتتالية $(U_n)_{n\geq 1}$ متزايدة
② أثبت أن المتتالية $(V_n)_{n\geq 1}$ متناقصة
③ هل المتتاليتان $(U_n)_{n\geq 1}$ و $(V_n)_{n\geq 1}$ متجاورتان؟ علل ذلك؟

"غذ قلبك بالآيات، وغذ عقلك بالرياضيات"

مكثفة المتتاليات ونهاية المتتالية

الحل: (1)

$f(x) = 5 - \frac{1}{x}$ $\quad (x>0)$

$f'(x) = \frac{1}{x^2} > 0$

f متزايدة تماماً ⟸ فالمتتالية $(u_n)_{n\geq 1}$ متزايدة

$g(x) = 5 + \frac{1}{x^2}$ $\quad x>0$

$g'(x) = \frac{-2x}{x^4} < 0$

g متناقصة تماماً ⟸ فالمتتالية $(v_n)_{n\geq 1}$ متناقصة.

الشرط الأول محقق:

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 5 \\ \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 5\end{array}\right\} \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} v_n$$

⟸ $(u_n)_{n\geq 1}$ و $(v_n)_{n\geq 1}$ متجاورتان.

M. Ah

M-AH

السؤال الثاني عشر: (H.work)

لتكن المتتاليتين $(u_n)_{n\geq 1}$ و $(v_n)_{n\geq 1}$ المعرفتين وفق الآتي:

$v_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}}$ و $u_n = -\frac{1}{n}$

1) ادرس اطراد كل من $(u_n)_{n\geq 1}$ و $(v_n)_{n\geq 1}$

2) أثبت أن المتتاليتان $(u_n)_{n\geq 1}$ و $(v_n)_{n\geq 1}$ متجاورتان.

"الأستاذ: محمد أحمد"

السؤال الثالث عشر: دورة ثانية 2017

لتكن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرفة وفق ما يأتي:

$u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$

1) أثبت أن u_n متتالية متناقصة

2) أثبت أن $0 \leq u_n \leq 1$ واستنتج أنها متقاربة واحسب نهايتها.

حل

$x \geq 0 \Rightarrow f(x) = \sqrt{x+1} - \sqrt{x}$

$f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x+1}} - \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

$(\sqrt{x}) \qquad (\sqrt{x+1})$

$= \dfrac{\sqrt{x} - \sqrt{x+1}}{2\sqrt{x}\sqrt{x+1}} \Rightarrow f'(x) = 0$

$\Rightarrow \sqrt{x} - \sqrt{x+1} = 0$

$\Rightarrow \sqrt{x} = \sqrt{x+1} \Rightarrow x = x+1$

$\Rightarrow 0 = 1$ مستحيلة

$f'(x) < 0$

$\sqrt{x} < \sqrt{x+1}$ لأن البسط سالب والمقام موجب.

f متناقص ومنه المتتالية متناقصة.

(2) ندرس تغيرات التابع

$[0, +\infty[\qquad f(x) = \sqrt{x+1} - \sqrt{x}$

$f(0) = 1$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \infty - \infty$ عدم تعيين.

$f(x) = \dfrac{(\sqrt{x+1} - \sqrt{x})(\sqrt{x+1} + \sqrt{x})}{(\sqrt{x+1} + \sqrt{x})}$

$= \dfrac{\cancel{x}+1-\cancel{x}}{(\sqrt{x+1} + \sqrt{x})} = \dfrac{1}{(\sqrt{x+1} + \sqrt{x})}$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \dfrac{1}{+\infty} = 0$

x	0	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	
$f(x)$	$1 \searrow$	0

$0 \leq f(x) \leq 1$

$0 < u_n \leq 1$

بما أنها متناقصة ومحدودة من الأدنى فهي متقاربة.

$\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \lim\limits_{n \to +\infty} [\sqrt{n+1} - \sqrt{n}]$

$\Rightarrow \lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}} = 0$

ادرُس بذكاءٍ وليس بجهد

M. Ali

السؤال الرابع عشر: (هام جداً)

تأمل المتتاليتين $(X_n)_{n\geq 0}$ و $(y_n)_{n\geq 0}$ المعرفتين وفق:

$x_0 = 3$ ، $x_{n+1} = \frac{1}{3}x_n - 2$

$y_n = x_n + 3$

1) a) أثبت أن المتتالية $(y_n)_{n\geq 0}$ هندسية.

b) احسب y_n ثم x_n بدلالة n

2) نضع: $S_n = y_0 + y_1 + \dots + y_n$

$S'_n = x_0 + x_1 + \dots + x_n$

a) احسب كلاً من S_n و S'_n بدلالة n.

b) استنتج نهاية كل من المتتاليتين $(S_n)_{n\geq 0}$ و $(S'_n)_{n\geq 0}$

الحل:

1) a) $y_{n+1} = x_{n+1} + 3$

$= \frac{1}{3}x_n - 2 + 3 = \frac{1}{3}x_n + 1$

$= \frac{1}{3}(x_n + 3) = \frac{1}{3}y_n$

$(y_n)_{n\geq 0}$ هندسية أساسها $q = \frac{1}{3}$

b) كتابة y_n بدلالة n.

$y_n = y_p \cdot q^{n-p}$

$y_n = y_0 \cdot q^{n-0}$

$y_0 = x_0 + 3 = 3 + 3 = 6$

$\Rightarrow y_n = y_0 \cdot q^{n-0}$

$y_n = 6 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^n$

وكتابة X_n بدلالة n

$X_n = y_n - 3$

$= 6 \times \left(\frac{1}{3}\right)^n - 3$

2) $S_n = y_0 + y_1 + \dots + y_n$

مجموع $n+1$ حداً متتابعاً من متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{3}$ وحدها الأول

$y_0 = x_0 + 3 = 3 + 3 = 6$

$S_n = a \times \frac{1 - q^n}{1 - q} = 6 \times \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{3}}$

$= 6 \times \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{\frac{2}{3}}$

$= 6 \times \frac{3}{2}\left[1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right]$

$S_n = 9 \times \left[1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right]$

$S'_n = x_0 + x_1 + \dots + x_n$

$= (y_0-3)+(y_1-3)+\dots+(y_n-3)$

$S'_n = \underbrace{y_0+y_1+\dots+y_n} + \underbrace{(-3)+(-3)+\dots+(-3)}_{n+1 \text{ عددهم}}$

$S'_n = S_n + (-3)\times(n+1)$

$S'_n = 9\times\left[1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right] - 3n - 3$

$\Rightarrow \quad -1 < \frac{1}{3} < 1$

$\lim \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} = 0$

$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} S_n = 9\times\{1-0\} = 9$

$\lim_{n\to+\infty} S'_n = 9[1-0] - \infty - 3$

$= 9 - \infty - 3 = -\infty$

السؤال الخامس عشر: (وزاري هام)

لتكن المتتالية $(U_n)_{n\ge 0}$ المعرفة كما يأتي:

$U_0 = 0 \ , \ U_{n+1} = \frac{2U_n+1}{U_n+2}$

(1) أثبت أن $0 \le U_n \le 1$

(2) أثبت أن $(U_n)_{n\ge 0}$ متزايدة

(3) علل تقارب المتتالية $(U_n)_{n\ge 0}$ واحسب نهايتها.

الحل: (1) نرمز للقضية $E(n)$:

$0 \le U_n \le 1$

نبرهن صحة القضية من أجل $E(0)$

$0 \le U_0 \le 1$

$0 \le 0 \le 1$ .... محققة

نفرض أن القضية $E(n)$ صحيحة:

$0 \le U_n \le 1$ .... (*)

نبرهن صحة القضية من أجل $E(n+1)$

$0 \le U_{n+1} \le 1$ .... (**)

ومن أجل ذلك ندرس إطراد التابع.

$f(x) = \frac{2x+1}{x+2}$

f معرف ومستمر واشتقاقي على $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$

$f'(x) = \frac{2(x+2)-(1)(2x+1)}{(x+2)^2}$

$= \frac{3}{(x+2)^2} > 0$

$f'(x) > 0$ متزايد تماماً على مجال تعريفه

من (*) $0 \le U_n \le 1$

$f(0) \le f(U_n) \le f(1)$

(لأن f متزايد تماماً).

ومنه: $\frac{1}{2} \le U_{n+1} \le \frac{3}{3}$

$\Rightarrow 0 \le U_{n+1} \le 1$

⇐ $E(n+1)$ محققة

ومنه $E(n)$ محققة مهما يكن $n \in N$

(2) نرمز للقضية $E(n)$: $U_{n+1} > U_n$

نبرهن صحة القضية من أجل $E(0)$: $U_1 > U_0$

$\Rightarrow U_0 = 0$

$U_1 = \frac{1}{2}$

$U_1 > U_0$

$\frac{1}{2} > 0$ محققة.

نفرض أن القضية صحيحة من أجل $E(n)$

$U_{n+1} > U_n$ ...... (*)

نبرهن صحة القضية من أجل $E(n+1)$

$U_{n+2} > U_{n+1}$ ...... (**)

من (*) : $U_{n+1} > U_n$

$f(U_{n+1}) > f(U_n)$

(لأن f متزايد تماماً)

$U_{n+2} > U_{n+1}$

$E(n+1)$ محققة

مما سبق كله نستنتج أن $E(n)$ محققة مهما يكن $n \in N$

⇐ $(U_n)_{n\ge 0}$ متزايدة

(3) بما أن $(U_n)_{n\ge 0}$ متزايدة ومحدودة من الأعلى بالعدد (1) فهي متقاربة ولتكن نهايتها هي l حيث $0 \le l \le 1$

وبما أن f مستمر على $R \setminus \{-2\}$ ومستمر عند l وبالتالي يكون l هو حل المعادلة: $f(x) = x$

$\frac{2x+1}{x+2} = x \Rightarrow 2x+1 = x^2 + 2x$

$\Rightarrow x^2 - 1 = 0$

$(x+1)(x-1) = 0$

إما $\boxed{x = -1}$ مرفوض

أو $\boxed{x = 1}$ مقبول

$\lim_{n \to +\infty} U_n = 1$

السؤال السادس عشر:

لتكن المتتاليتين $(U_n)_{n\ge 1}$, $(V_n)_{n\ge 1}$ المعرفتين وفق العلاقتين:

$U_n = -\frac{1}{n}$ & $V_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}}$

(1) ادرس اطراد كل من $(U_n)_{n\ge 1}$ و $(V_n)_{n\ge 1}$

(2) أثبت أن المتتاليتان $(U_n)_{n\ge 1}$ & $(V_n)_{n\ge 1}$ متجاورتان.

سنبلغ حلمنا لو بعد حين... فنحن بحار عزم إن أردنا ....

مكثفة المتتاليات ونهاية المتتالية

1) احسب x_1 ، x_2 ، x_3 .
ادرس اطراد المتتالية.

2) نعرف $(y_n)_{n\geq 0}$ بالعلاقة :
$y_n = x_n + 4$
أثبت أن $(y_n)_{n\geq 0}$ متتالية هندسية

3) اكتب y_n بدلالة n ثم احسب
$y_2 + y_3 + \dots + y_{10}$.

الحل : بدلالة قوة للعدد $\frac{6}{5}$

1) $x_1 = \frac{6}{5}(5) + \frac{4}{5} = \frac{34}{5}$

$x_2 = \frac{6}{5}\left(\frac{34}{5}\right) + \frac{4}{5} = \frac{204}{25} + \frac{4}{5}_{(5)}$

$= \frac{224}{25}$

$x_3 = \frac{6}{5}\left(\frac{224}{25}\right) + \frac{4}{5} = \frac{1344}{125} + \frac{4}{5}_{(25)}$

$= \frac{1444}{125}$

نستطيع من الحدود الأولى أن نخمن أن المتتالية متزايدة تماماً.

لذلك سوف نحاول إثبات صحة القضية مهما يكن $n \in \mathbb{N}$.

$E(n): \; x_{n+1} > x_n$.

$E(0): \; x_1 > x_0$

الحل

1) $u_n = -\frac{1}{n}$

$u_{n+1} - u_n = -\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n}$

$= \frac{1}{n(n+1)} > 0$

$(u_n)_{n\geq 1}$ متزايدة تماماً.

$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{\sqrt{(n+1)^2+1}} - \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} < 0$

$(v_n)_{n\geq 1}$ متناقصة تماماً

2) من الطلب السابق وجدنا أن :
$(u_n)_{n\geq 1}$ متزايدة تماماً
$(v_n)_{n\geq 1}$ متناقصة تماماً.

$u_n - v_n = -\frac{1}{n} - \frac{1}{\sqrt{n^2+1}}$

$\lim_{n\to+\infty}(u_n - v_n) = 0 - 0 = 0$

(المتتاليتان متجاورتان)

السؤال السابع عشر: "وزاري"

لتكن المتتالية المعرفة $(x_n)_{n\geq 0}$ وفق :
$x_0 = 5$
$x_{n+1} = \frac{6}{5}x_n + \frac{4}{5}$

$\frac{34}{5} > 5$

نفرض أن القضية صحيحة من أجل

$E(n): x_{n+1} > x_n$ ...... (*)

نبرهن صحة القضية من أجل

$E(n+1): x_{n+2} > x_{n+1}$ ...... (**)

من (*)

$x_{n+1} > x_n$

$\frac{6}{5} x_{n+1} > \frac{6}{5} x_n$

$\Rightarrow \frac{6}{5} x_{n+1} + \frac{4}{5} > \frac{6}{5} x_n + \frac{4}{5}$

$x_{n+2} > x_{n+1}$

$\Rightarrow E(n+1)$ محققة

ومنه نستنتج $E(n)$ محققة مهما يكن $n \in N$

وبالتالي نستنتج أن $(x_n)_{n\geq 0}$ متزايدة تماماً.

② $y_{n+1} = x_{n+1} + 4$

$= \frac{6}{5} x_n + \frac{4}{5} + 4$

$= \frac{6}{5}(y_n - 4) + \frac{24}{5}$

$= \frac{6}{5} y_n - \frac{24}{5} + \frac{24}{5}$

$y_{n+1} = \frac{6}{5} y_n$

ومنه $(y_n)_{n\geq 0}$ متتالية هندسية أساسها $\left(\frac{6}{5}\right)$ وحدها الأول.

$y_0 = x_0 + 4 = 5 + 4 = 9$

$y_n = y_0 \cdot q^{n-0} = 9 \times \left(\frac{6}{5}\right)^n$

عدد الحدود المراد حساب مجموعها هو

$10 - 2 + 1 = 9$

$a = y_2 = x_2 + 4 = \frac{224}{25} + 4$

$= \frac{324}{25}$

$S = a \times \frac{1 - q^n}{1 - q}$

$= \frac{324}{25} \times \frac{1 - \left(\frac{6}{5}\right)^9}{1 - \frac{6}{5}}$

$= \frac{324}{25} \times \frac{1 - \left(\frac{6}{5}\right)^9}{-\frac{1}{5}}$

$= \frac{324}{5}\left[1 - \left(\frac{6}{5}\right)^9\right].$

السؤال الثامن عشر: اختبار (3)

أثبت أن المتتاليتان $(x_n)_{n\geq1}$ و $(y_n)_{n\geq1}$ متجاورتان.

$$x_n = \frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\dots+\frac{1}{2n}$$

$$y_n = x_n + \frac{1}{4n}$$

الحل:

$$x_n = \frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\dots+\frac{1}{2n-1}+\frac{1}{2n}$$

$$x_{n+1} = \frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+\dots+\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{2n+2}$$

$$x_{n+1}-x_n = \frac{-1}{n+1}+\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{2n+2}$$

$(2(2n+1))\quad (2(n+1))\quad (2n+1)$

$$= \frac{-4n-2+2n+2+2n+1}{2(n+1)(2n+1)} > 0$$

المتتالية x_n متتالية متزايدة تماما

$$y_n = x_n + \frac{1}{4n}$$

$$y_{n+1} = x_{n+1} + \frac{1}{4n+4}$$

$$y_{n+1}-y_n = x_{n+1}+\frac{1}{4n+4}-x_n-\frac{1}{4n}$$

$$= x_{n+1}-x_n+\frac{1}{4n+4}-\frac{1}{4n}$$

$$= \frac{1}{2(n+1)(2n+1)}+\frac{1}{4(n+1)}-\frac{1}{4n}$$

$(2n)\quad n(2n+1)\quad (n+1)(2n+1)$

$$= \frac{2n+2n^2+n-2n^2-3n-1}{4n(n+1)(2n+1)}$$

$$= \frac{-1}{4n(n+1)(2n+1)} < 0$$

المتتالية y_n متناقصة تماما

$$\lim_{n\to+\infty}(y_n-x_n) = \lim \frac{1}{4n} = 0$$

إذاً المتتاليتان $(x_n)_{n\geq1}$ و $(y_n)_{n\geq1}$ متجاورتان.

Mohammed Ahmed
Math Teacher
0964848890

3

السؤال التاسع عشر:

المتتالية $(U_n)_{n\ge 0}$ معرفة وفق: $U_0=\frac{3}{2}$

وعندئذٍ $n\in \mathbb{N}$

$$U_{n+1}=U_n^2-2U_n+2$$

1) أثبت مستعملاً البرهان بالتدريج أن $1\le U_n\le 2$ أياً يكن $n\in \mathbb{N}$

2) a) أثبت أن $U_{n+1}-U_n=(U_n-2)(U_n-1)$ أياً $n\in \mathbb{N}$

b) استنتج أن المتتالية $(U_n)_{n\ge 0}$ متناقصة.

3) أهي متقاربة؟

1) نرمز للقضية $E(n):\ 1\le U_n\le 2$

نبرهن صحة القضية من أجل $E(0)$

$1\le U_0\le 2$

$1\le \frac{3}{2}\le 2$

نفرض صحة القضية من أجل $E(n)$

$1\le U_n\le 2$ ـــ (*)

نبرهن صحة القضية من أجل $E(n+1)$

$1\le U_{n+1}\le 2$ ـــ (**)

(*) ـــ $0\le U_n-1\le 1$

$0\le (U_n-1)^2\le 1$

$\Rightarrow 1\le (U_n-1)^2+1\le 2$

$1\le U_n^2-2U_n+1+1\le 2$

$1\le U_{n+1}\le 2$

إذاً القضية صحيحة.

2) a)

$U_{n+1}-U_n=U_n^2-2U_n+2-U_n=$

$U_n^2-3U_n+2$

$=(U_n-2)(U_n-1)$

b) وجدنا أن $1\le U_n\le 2$ مهما يكن

$n\in \mathbb{N}$

$$\left.\begin{matrix}U_n-1\ge 0\\ U_n-2\le 0\end{matrix}\right\}\Rightarrow U_{n+1}-U_n=(U_n-2)(U_n-1)\le 0$$

$\Leftarrow (U_n)_{n\ge 0}$ متناقصة

3) بما أن $(U_n)_{n\ge 0}$ متناقصة
وبما أن $U_n\ge 1$ فهي محدودة
من الأدنى

$\Leftarrow (U_n)_{n\ge 0}$ متقاربة من ℓ

السؤال الواحد والعشرون : وزاري رابع :

لتكن المتتالية $(U_n)_{n\geq 0}$ المعرفة تدريجياً بالشكل $U_0 = e^3$ ، $U_{n+1} = e\sqrt{U_n}$

و $(V_n)_{n\geq 0}$ متتالية معرفة بالشكل :

$V_n = \ln(U_n) - 2$

والمطلوب :

1) أثبت أن V_n هندسية وعيّن q و V_0

2) اكتب V_n بدلالة n ثم استنتج U_n بدلالة n.

3) أثبت أن $\lim_{n\to+\infty} U_n = e^2$

الحل

$V_{n+1} = \ln(U_{n+1}) - 2$

$= \ln(e.\sqrt{U_n}) - 2$

$= \ln e + \ln\sqrt{U_n} - 2$

$= \frac{1}{2}\ln(U_n) - 1 = \frac{1}{2}[\ln(U_n) - 2]$

$= \frac{1}{2}V_n$

وهي متتالية هندسية أساسها $q = \frac{1}{2}$ وحدها الأول

$V_0 = \ln(U_0) - 2 = 3 - 2 = 1$

2) $V_n = V_0 \cdot q^n$

$= 1 \times (\frac{1}{2})^n = (\frac{1}{2})^n$

3) $V_n = \ln(U_n) - 2$

$V_n + 2 = \ln(U_n)$

$\Rightarrow U_n = e^{V_n + 2} = e^{(\frac{1}{2})^n + 2}$

$\lim_{n\to+\infty}(U_n) = \lim(e^{(\frac{1}{2})^n + 2})$

$= e^{0+2} = e^2$

لأن :

$-1 < \frac{1}{2} < 1$

$\lim_{n\to+\infty}(\frac{1}{2})^n = 0$

السؤال الثاني والعشرين :

أثبت أنه مهما كان العدد الطبيعي n كان $4^n + 2$ مضاعف للعدد 3 .

1) نبرهن صحة القضية من أجل $n = 0$ أي $E(0)$

$4^0 + 2 = 1 + 2 = 3$ مضاعف للعدد 3 محقق

2) نفرض أن القضية صحيحة من أجل $E(n)$

أي: (*) $4^n + 2$ مضاعف للعدد 3 .

3) نبرهن صحة القضية من أجل $E(n+1)$

أي لنثبت أن : $4^{n+1} + 2$ ....(**)

مضاعف للعدد 3 .

الإثبات:

$4^{n+1}+2 = 4^n\cdot 4+2 = 4^n(3+1)+2$

$= 4^n\cdot 3 + 4^n + 2$ ... مضاعف للعدد 3

لأن: 4^n+2 مضاعف للعدد 3

3 مضاعف للعدد 3
4^n عدد طبيعي
$\Leftarrow$ $4^n\cdot 3$ مضاعف للعدد 3

$4^n\cdot 3 + 4^n + 2$ مضاعف للعدد 3.

السؤال الثالث والعشرون: دورة (2021)

لتكن لدينا المتتالية $(U_n)_{n\geq 0}$ المعرفة بالعلاقة التدريجية:

$U_{n+1} = \frac{1}{2} U_n - 3$, $U_0 = 2$

1) أثبت أن المتتالية $(V_n)_{n\geq 0}$ المعرفة بالعلاقة: $V_n = U_n + 6$ هندسية عين أساسها وأحسب حدها الأول

ثم احسب عبارة V_n بدلالة n

2) لنعرف المتتالية $(W_n)_{n\geq 0}$

$W_n = \ln V_n$

أثبت أنها حسابية واحسب W_0 ثم احسب المجموع

$S = W_0 + W_1 + W_2 + W_3 + W_4 + W_5$

الحل:

$$\frac{V_{n+1}}{V_n} = \frac{U_{n+1}+6}{U_n+6}$$

$$= \frac{\frac{1}{2}U_n - 3 + 6}{U_n+6} = \frac{\frac{1}{2}U_n + 3}{U_n+6}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\cancel{U_n+6}}{\cancel{U_n+6}}\right) = \frac{1}{2}$$

$\Leftarrow$ المتتالية $(V_n)_{n\geq 0}$ هندسية أساسها $q = \frac{1}{2}$ وحدها الأول.

$V_0 = U_0 + 6 = 2 + 6 = 8$

$$V_n = V_0 \cdot q^{n-0} = 8\left(\frac{1}{2}\right)^n = \boxed{\frac{8}{2^n}}$$

(2) $W_{n+1} - W_n = \ln(V_{n+1}) - \ln(V_n)$

$$= \ln 8\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} - \ln 8\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$= \ln \frac{8\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{8\left(\frac{1}{2}\right)^n} = \ln \frac{1}{2}$$

$$= -\ln 2 = r$$

إذن: $(W_n)_{n\geq 0}$ متتالية حسابية أساسها $-\ln 2$ وحدها الأول.

$W_0 = \ln(V_0) = \ln(U_0 + 6) =$

$\ln(2+6) = \ln 8$

$= 3\ln 2$

ويكون:

$w_n = \ln 8 - n\ln 2$

$w_5 = \ln 8 - 5\ln 2$

$= 3\ln 2 - 5\ln 2$

$= -2\ln 2$

$n = 5 - 0 + 1 = 6$

$S = \frac{n}{2}(a + l)$

$= \frac{6}{2}(3\ln(2) + (-2\ln(2)))$

$= 3(3\ln(2) - 2\ln(2))$

$= 3\ln 2$

السؤال الرابع والمشروع : H.Work

نعرف المتتالية $(v_n)_{n\geq 0}$ كما يأتي:

$v_0 = \frac{1}{2}$

وظيفة

$v_{n+1} = \frac{5v_n + 4}{v_n + 2}$

① ادرس جهة اطراد المتتالية $(v_n)_{n\geq 0}$

② نعرف المتتالية $(U_n)_{n\geq 0}$ بالعلاقة

$U_n = \frac{v_n - 4}{v_n + 1}$

أ) أثبت أن المتتالية $(U_n)_{n\geq 0}$ هندسية / ثم عين أساسها وحدها الأول.

ب) أوجد عبارة U_n بدلالة n ثم استنتج عبارة v_n بدلالة n، وعين نهاية $(v_n)_{n\geq 0}$.

① $v_0 = \frac{1}{2}$

$v_1 = \frac{5(\frac{1}{2}) + 4}{\frac{1}{2} + 2} = \frac{13}{5}$

$v_2 = \frac{5(\frac{13}{5}) + 4}{\frac{13}{5} + 2} = \frac{85}{33}$

نلاحظ: $v_0 = \frac{1}{2}, v_1 = \frac{13}{5}$

$v_2 = \frac{85}{33}$

حدود متتالية متزايدة

ومنه نثبت أن المتتالية متزايدة.

سنبرهن أن: $v_{n+1} > v_n$

نرمز للقضية

$E(n): v_{n+1} > v_n$

نثبت صحة القضية من أجل $n=0$

$E(0): v_1 > v_0$

محققة ... $\frac{13}{5} > \frac{1}{2}$

نفرض صحة القضية من أجل n أي:

$E(n): v_{n+1} > v_n$ ... (*)

نثبت صحة القضية من أجل $n+1$ أي:

$E(n+1): v_{n+2} > v_{n+1}$ ... (**)

نفرض تابع: $f(x) = \frac{5x + 4}{x + 2}$

$$f'(x) = \frac{5(x+2)-(1)(5x+4)}{(x+2)^2}$$

$$= \frac{6}{(x+2)^2} > 0$$

ومنه التابع متزايد.

مـ (*) $v_{n+1} > v_n$

$f(v_{n+1})\ f(v_n)$

$v_{n+2} > v_{n+1}$

ومنه القضية محققة من أجل $n+1$

ومنه العلاقة صحيحة أياً كان n

ومنه المتتالية متزايدة

② ① $\frac{U_{n+1}}{U_n} =$ ثابت

$$U_{n+1} = \frac{v_{n+1}-4}{v_{n+1}+1}$$

$$U_{n+1} = \frac{\frac{5v_n+4}{v_n+2}-4}{\frac{5v_n+4}{v_n+2}+1}$$

$$= \frac{\frac{5v_n+4-4v_n-8}{v_n+2}}{\frac{5v_n+4+v_n+2}{v_n+2}}$$

$$U_{n+1} = \frac{\frac{v_n-4}{v_n+2}}{\frac{6v_n+6}{v_n+2}} = \frac{v_n-4}{6v_n+6}$$

$$U_n = \frac{v_n-4}{v_n+1}$$

$$\frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{\frac{v_n-4}{6v_n+6}}{\frac{v_n-4}{v_n+1}} =$$

$$= \frac{\cancel{v_n-4}}{6v_n+6} \times \frac{v_n+1}{\cancel{v_n-4}} = \frac{\cancel{v_n+1}}{6(\cancel{v_n+1})}$$

$$= \frac{1}{6}$$

ومنه: $\frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{1}{6}$

ومنه المتتالية هندسية أساسها $q = \frac{1}{6}$

وحدها الأول:

$$U_0 = \frac{v_0-4}{v_0+1} = \frac{\frac{1}{2}-4}{\frac{1}{2}+1} = -\frac{7}{3}$$

$v_0 = \frac{1}{2}\ ,\ U_0 = -\frac{7}{3}$

مكثفة المتتاليات ونهـاية المتتالية

② بما أن $(U_n)_{n\geq 0}$ متتالية هندسية فإن:

$$\frac{U_n}{U_p} = q^{n-p}$$

$$\frac{U_n}{U_0} = q^{n-0}$$

و $U_0 = -\frac{7}{3}$

$q = \frac{1}{6}$

$$U_n = U_0 \cdot q^{n-0}$$

$$\Rightarrow U_n = -\frac{7}{3}\left(\frac{1}{6}\right)^n$$

ولكتابة V_n بدلالة n:

$$U_n = \frac{V_n - 4}{V_n + 1}$$

$$U_n(V_n + 1) = V_n - 4$$

$$U_n \cdot V_n + U_n - V_n + 4 = 0$$

$$V_n(U_n - 1) + U_n + 4 = 0$$

$$V_n(U_n - 1) = -U_n - 4$$

$$V_n = \frac{-U_n - 4}{U_n - 1}$$

ولكن: $U_n = -\frac{7}{3}\left(\frac{1}{6}\right)^n$

$$V_n = \frac{\frac{7}{3}\left(\frac{1}{6}\right)^n - 4}{-\frac{7}{3}\left(\frac{1}{6}\right)^n - 1}$$

ولحساب نهاية $(V_n)_{n\geq 0}$

$$\lim_{n\to+\infty}(V_n) = \frac{\frac{7}{3}(0) - 4}{-\frac{7}{3}(0) - 1} = \frac{0-4}{0-1} = 4$$

حيث

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{6}\right)^n = 0$$

لأن: $-1 < \frac{1}{6} < 1$

انتهت مكثفة المتتاليات و نهاية المتتالية ......

مع تمنياتي لكم بالنجاح التام ان شاء الله.

الأستاذ: محمد أحمد.

0964848890

"2023"

Mohammed Ahmed
Math Teacher
0964848890

(ورقة عمل على قناة التلجرام) ⇓
بكالوريا رياضيات مع الأستاذ:
محمد أحمد.

Scanned by CamScanner

Mohammed Ahmed

Math Teacher

0964848890