السؤال الأوّل: نتأمّل هرماً $S-ABCD$ قاعدته مُربَّع ورأسه S ، وطول كلّ من حروفه وأضلاع قاعدته يساوي 2. **المطلوب:**

1) احسب $\overrightarrow{SB}.\overrightarrow{AD}$ وَ $\overrightarrow{SB}.\overrightarrow{SD}$ وَ $\overrightarrow{SB}.\overrightarrow{BD}$.

2) احسب حجم الهرم $S-ABCD$ ، واستنتج حجم رباعي الوجوه $SABC$.

السؤال الثاني: نتأمّل في معلمٍ متجانسٍ $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ للفراغ، النقاط $A(1,-1,2)$ وَ $B(-5,5,-2)$. **المطلوب:**

1) أثبت أنّ: $3x-3y+2z+12=0$ هي معادلة للمستوي (P) العمودي على $[AB]$ في منتصفها.

2) اكتب معادلة الكرة S التي مركزها O وتمسّ المستوي (P) ، ثمَّ أوجدْ إحداثيّات نقطة التماس C .

3) اكتب معادلة المستوي (Q) المارّ من A ويوازي المستوي (P) ، ثُمَّ احسب البُعد بين المستويَين.

السؤال الثالث: نتأمّل المستويَين: $P: x+y+z-5=0$ ، $Q: 2x-y-z+2=0$ والنقطة $A(1,-1,0)$. **المطلوب:**

1) أثبت تعامد المستويَين (P) وَ (Q) في فصل مشترك (d) يُطلب كتابة معادلاته الوسيطيّة.

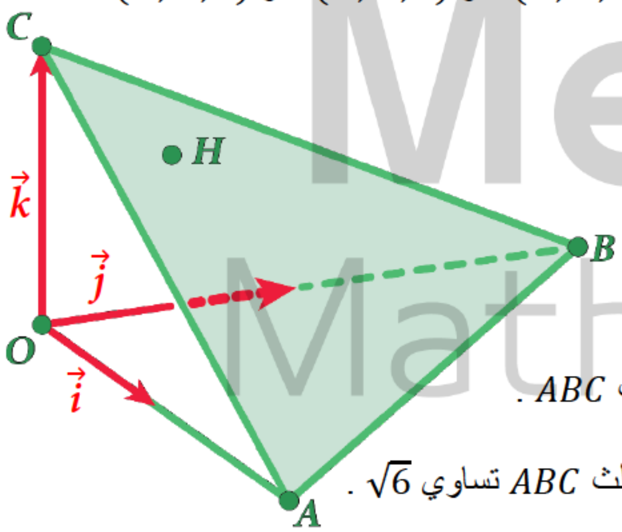
2) احسب بُعد النقطة A عن المستقيم (d) . إعداد: محمود المحمود 0936 838 276

3) بيّن أنَّ: $y-z+1=0$ هي معادلة للمستوي (R) المارّ من A والعمودي على (P) وَ (Q) .

4) بيّن فيما إذا كانت المستويات (P) وَ (Q) وَ (R) تشترك في نقطة فقط أو في مستقيم مشترك أو لا تشترك بأيّ نقطة.

السؤال الرابع: ما طبيعة مجموعة النقاط $M(x,y,z)$ التي تُحقّق: $x^2+y^2+z^2-2x-4y-6z=-14$ ؟

السؤال الخامس: نتأمّل في معلمٍ متجانسٍ $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ ، النقاط $A(2,0,0)$ وَ $B(0,2,0)$ وَ $C(0,0,1)$. **المطلوب:**



1) أثبت أنّ: $x+y+2z=2$ هي معادلة للمستوي (ABC) .

2) اكتب تمثيلاً وسيطيّاً للمستقيم (d) المارّ من O والعمودي على المستوي (ABC) .

3) استنتج أنَّ النقطة $H(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{2}{3})$ هي المسقط القائم للنقطة O على المستوي (ABC) ، ثُمَّ أثبت أنّها نقطة تلاقي ارتفاعات المثلث ABC .

4) احسب حجم رباعي الوجوه $OABC$ ، واستنتج أنَّ مساحة المثلث ABC تساوي $\sqrt{6}$.

5) a . اكتب معادلة الكرة S التي مركزها O وقطرها يساوي $[AB]$.

b . أثبت أنَّ المستوي (ABC) يقطع الكرة S ، يُطلَب تعيين إحداثيّات مركز دائرة المقطع وحساب نصف قطرها.

6) جِدْ الأعداد الحقيقيّة a وَ b وَ c لتكون H مركز أبعاد متناسبة للنقاط (A,a) وَ (B,b) وَ (C,c) .

------- انتهت الأسئلة -------

السؤال الأوّل :

(1

$\vec{SB}\cdot\vec{AD}=\vec{SB}\cdot\vec{BC}$

$=-\vec{BS}\cdot\vec{BC}$

$=-\|\vec{BS}\|\cdot\|\vec{BC}\|\cdot\cos(\widehat{\vec{BS},\vec{BC}})$

$=-2\times 2\cdot\cos(\frac{\pi}{3})$

$=-4\times\frac{1}{2}\Rightarrow$

$\boxed{\vec{SB}\cdot\vec{AD}=-2}$

$\vec{SB}\cdot\vec{SD}=\vec{SB}(\vec{SA}+\vec{AD})$

$=\vec{SB}\cdot\vec{SA}+\underbrace{\vec{SB}\cdot\vec{AD}}$

$=2\times 2\times\cos(\frac{\pi}{3})-2$

$=4\times\frac{1}{2}-2=2-2$

$\Rightarrow\boxed{\vec{SB}\cdot\vec{SD}=0}$

$\vec{SB}\cdot\vec{BD}=\vec{SB}(\vec{BA}+\vec{AD})$

$=\vec{SB}\cdot\vec{BA}+\vec{SB}\cdot\vec{AD}$

$=-\vec{BS}\cdot\vec{BA}-2$

$=-2\times 2\times\cos(\frac{\pi}{3})-2$

$=-4\times\frac{1}{2}-2=-2-2$

$\Rightarrow\boxed{\vec{SB}\cdot\vec{BD}=-4}$

(2

$V_{S-ABCD}=\frac{1}{3}S_{ABCD}\cdot h$

$S_{ABCD}=a^2=4 \qquad h=OS$

حيث : O هي مركز المربّع $ABCD$

حساب $h=OS$:

من المثلث القائم AOS

حسب علاقة فيثاغورث :

$AS^2=OA^2+OS^2$

$(2)^2=OA^2+h^2\Rightarrow h^2=4-OA^2$

حساب OA :

من المثلث القائم ABC

حسب علاقة فيثاغورث :

$AC^2=AB^2+BC^2\Rightarrow$

$AC^2=4+4=8\Rightarrow AC=2\sqrt{2}$

$OA=\frac{1}{2}AC=\frac{1}{2}2\sqrt{2}\Rightarrow$

$\boxed{OA=\sqrt{2}}\Rightarrow$

$h^2=4-2=2\Rightarrow h=OS=\sqrt{2}$

$V_{S-ABCD}=\frac{1}{3}\times 4\times\sqrt{2}\Rightarrow$

$\boxed{V_{S-ABCD}=\frac{4\sqrt{2}}{3}}$

$V_{SABC}=\frac{1}{2}V_{S-ABCD}$

$=\frac{1}{2}\times\frac{4\sqrt{2}}{3}\Rightarrow$

$\boxed{V_{SABC}=\frac{2\sqrt{2}}{3}}$

السؤال الثاني:

$A(1,-1,2)$ ، $B(-5,5,-2)$

1) $I(-2,2,0) \in P$ منتصف $[AB]$

$\vec{n}_P = \vec{AB}(-6,6,-4)$

$a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$

$-6(x+2)+6(y-2)-4(z-0)=0$

$-6x-12+6y-12-4z=0$

$-6x+6y-4z-24=0$

نقسم على (-2)

$$\boxed{P: 3x-3y+2z+12=0}$$

2) $R = dis(O,P) = \frac{|0-0+0+12|}{\sqrt{9+9+4}}$

$= \frac{12}{\sqrt{22}} = \frac{12\sqrt{22}}{22}$

$$\Rightarrow \boxed{R = dis(O,P) = \frac{12}{\sqrt{22}} = \frac{6\sqrt{22}}{11}}$$

$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=R^2$

$(x-0)^2+(y-0)^2+(z-0)^2=\frac{144}{22} \Rightarrow$

$$\boxed{S: x^2+y^2+z^2=\frac{72}{11}}$$

نقطة تماس (S) بـ (P) هي مسقط مركز الكرة O على المستوي (P).

$\vec{u}_{(OC)} = \vec{n}_P(3,-3,2)$ ، $O \in (OC)$

$$(OC): \begin{cases} x = 3t \\ y = -3t \quad ; t \in \mathbb{R} \\ z = 2t \end{cases}$$

نعوّض في (P):

$9t+9t+4t+12=0 \Rightarrow$

$22t=-12 \Rightarrow \boxed{t=\frac{-6}{11}}$

نعوّض في معادلات (OC):

$x=\frac{-18}{11}$

$y=\frac{18}{11}$

$z=\frac{-12}{11}$

$C\left(\frac{-18}{11}, \frac{18}{11}, \frac{-12}{11}\right)$

3) $\vec{n}_Q = \vec{n}_P(3,-3,2)$ ، $A \in Q$

$a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$

$3(x-1)-3(y+1)+2(z-2)=0$

$3x-3-3y-3+2z-4=0 \Rightarrow$

$$\boxed{Q: 3x-3y+2z-10=0}$$

$dis(P,Q)=AI=\sqrt{9+9+4}$

$=\sqrt{22} \Rightarrow$

$$\boxed{dis(P,Q)=\sqrt{22}}$$

يمكن حساب البعد من خلال حساب بُعد A عن P.

السؤال الثالث :

$P: x+y+z-5=0$

$Q: 2x-y-z+2=0$

$A(1,-1,0)$

1) $\vec{n}_P(1,1,1)$

$\vec{n}_Q(2,-1,-1)$

$\vec{n}_P \cdot \vec{n}_Q = 2-1-1=0 \Rightarrow$

$\vec{n}_P \perp \vec{n}_Q \Leftarrow$ المستويان (P)، (Q)

متعامدان في فصل مشترك (d) :

بالجمع $P+Q$:

$3x-3=0 \Rightarrow \boxed{x=1}$

نعوّض في P :

$1+y+z-5=0 \Rightarrow$

$\boxed{y=4-z}$

نفرض $z=t$:

$$(d): \begin{cases} x=1 \\ y=4-t \quad ; t\in\mathbb{R} \\ z=t \end{cases}$$

2) حسب عكس فيثاغورث :

بما أنّ $P \perp Q \Leftarrow$

$dis^2(A,d) = dis^2(A,P) + dis^2(A,Q)$

$dis(A,P) = \dfrac{|1-1+0-5|}{\sqrt{1+1+1}} = \dfrac{5}{\sqrt{3}}$

$dis(A,Q) = \dfrac{|2+1-0+2|}{\sqrt{4+1+1}} = \dfrac{5}{\sqrt{6}}$

$dis^2(A,d) = \underset{(2)}{\dfrac{25}{3}} + \underset{(1)}{\dfrac{25}{6}} = \dfrac{50+25}{6}$

$\Rightarrow \boxed{dis(A,d) = \dfrac{5\sqrt{2}}{2}}$

3) $\vec{n}_R = \vec{u}_d(0,-1,1)$ ، $A\in R$

$a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$

$0(x-1)-1(y+1)+1(z-0)=0 \Rightarrow$

$0-y-1+z=0 \Rightarrow$

نقسّم على (-1)

$\boxed{R: \ y-z+1=0}$

4) نعوّض معادلات (d) في (R) :

$4-t-t+1=0 \Rightarrow -2t=-5$

$\Rightarrow \boxed{t=\dfrac{5}{2}} \Rightarrow$

$$\left.\begin{aligned} x&=1 \\ y&=4-\tfrac{5}{2}=\tfrac{3}{2} \\ z&=\tfrac{5}{2} \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

المستويات P ، Q ، R

تشترك في نقطة وحيدة

هي : $\left(1, \dfrac{3}{2}, \dfrac{5}{2}\right)$

السؤال الرابع:

$$x^2+y^2+z^2-2x-4y-6z=-14$$

$$x^2-2x+1-1+y^2-4y+4-4+z^2-6z+9-9=-14$$

$$(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=-14+14$$

$$\Rightarrow (x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=0$$

تمثّل نقطة إحداثياتها:

$(1,2,3)$

السؤال الخامس:

$A(2,0,0),\ B(0,2,0),\ C(0,0,1)$

1) نعوّض النقاط في المعادلة:

$A(2,0,0) \Rightarrow 2+0+0=2$ ✓ محققة

$B(0,2,0) \Rightarrow 0+2+0=2$ ✓ محققة

$C(0,0,1) \Rightarrow 0+0+2=2$ ✓ محققة

$$\boxed{(ABC):\ x+y+2z=2}$$

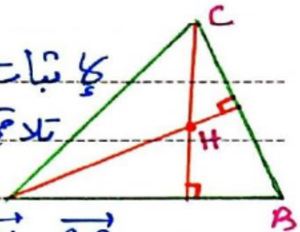
2) $\vec{u}_d=\vec{n}(1,1,2)$ و $O\in d$

$$(d):\begin{cases} x=t \\ y=t \\ z=2t \end{cases} ;\ t\in \mathbb{R}$$

3) نعوّض معادلات (d) في معادلة (ABC):

$t+t+4t=2 \Rightarrow 6t=2 \Rightarrow \boxed{t=\frac{1}{3}}$

$$\left.\begin{aligned} x&=\tfrac{1}{3} \\ y&=\tfrac{1}{3} \\ z&=\tfrac{2}{3} \end{aligned}\right\}\quad \boxed{H\left(\tfrac{1}{3},\tfrac{1}{3},\tfrac{2}{3}\right)}$$



لإثبات أنّ H هي نقطة تلاقي ارتفاعات ABC يكفي إثبات:

$\vec{AH}\cdot\vec{BC}=0$ و $\vec{CH}\cdot\vec{AB}=0$

$$\vec{AH}\cdot\vec{BC}=\left(-\frac{5}{3},\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)(0,-2,1)$$

$$=0-\frac{2}{3}+\frac{2}{3}=0 \Rightarrow$$

$$\boxed{\vec{AH}\cdot\vec{BC}=0 \Rightarrow \vec{AH}\perp\vec{BC}}$$

$$\vec{CH}\cdot\vec{AB}=\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},-\frac{1}{3}\right)(-2,2,0)$$

$$=-\frac{2}{3}+\frac{2}{3}+0=0 \Rightarrow$$

$$\boxed{\vec{CH}\cdot\vec{AB}=0 \Rightarrow \vec{CH}\perp\vec{AB}} \Rightarrow$$

H نقطة تلاقي ارتفاعات المثلث ABC.

4) $V_{OABC}=\frac{1}{3}S_{OAB}\cdot h$

$S_{OAB}=\frac{OA\times OB}{2}=\frac{2\times 2}{2}=2$; $h=OC=1$

$V_{OABC}=\frac{1}{3}\times 2\times 1 \Rightarrow$

$$\boxed{V_{OABC}=\frac{2}{3}}$$

باعتبار القاعدة ABC :

$$V_{OABC} = \frac{1}{3} S_{ABC} \cdot h$$

$$V_{OABC} = \frac{2}{3} \qquad h = dis(O,(ABC))$$

$$= \frac{|0+0+0-2|}{\sqrt{1+1+4}}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{6}} = \frac{2\sqrt{6}}{6}$$

$$h = \frac{\sqrt{6}}{3} = \frac{2}{\sqrt{6}}$$

$$\frac{2}{3} = \frac{1}{3} \times S_{ABC} \times \frac{2}{\sqrt{6}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{S_{ABC} = \sqrt{6}}$$

5) a. $2R = AB = \sqrt{4+4+0} = 2\sqrt{2}$

$\Rightarrow R = \sqrt{2} \Rightarrow$

$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=R^2$

$$\boxed{S: (x)^2+(y)^2+(z)^2 = 2}$$

b. $\sqrt{2} > \frac{2}{\sqrt{6}}$

$R > dis(O,(ABC))$

⇐ المستوي (ABC) يقطع الكرة S

وفق دائرة:

مركزها هو $H(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3})$

ونصف قطرها:

$$r^2 = R^2 - dis^2(O,(ABC))$$

$$= 2 - \frac{4}{6} = 2 - \frac{2}{3} = \frac{6-2}{3}$$

$$\Rightarrow r^2 = \frac{4}{3} \Rightarrow \boxed{r = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}}$$

6) نوجد عددان a ; b يحققان:

$$\vec{AH} = a\vec{AB} + b\vec{AC}$$

$$\begin{bmatrix} -\frac{5}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix} = a\begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$-\frac{5}{3} = -2a - 2b$ ---(1)

$\frac{1}{3} = 2a \Rightarrow a = \frac{1}{6}$ ---(2)

$\frac{2}{3} = b \Rightarrow b = \frac{2}{3}$ ---(3)

نعوض في (1) للتحقق:

$-\frac{5}{3} = -\frac{2}{6} - \frac{4}{3} = \frac{-1-4}{3} = -\frac{5}{3}$ ✓

محققة

$$\Rightarrow \vec{AH} = \frac{1}{6}\vec{AB} + \frac{4}{6}\vec{AC} \Rightarrow$$

$(H,6)$ مركز أبعاد متناسبة للنقاط:

$(A,1)$, $(B,1)$, $(C,4)$

$a=1$, $b=1$, $c=4$

محمود المحمود

#MeEn MathTeam

X_Math Bac