السؤال الأوّل: إذا علمت أنَّ أطوال الأشعّة $\vec{u}$ وَ $\vec{v}$ وَ $\vec{u}+\vec{v}$ هي بالترتيب $\sqrt{5}$ وَ $\sqrt{6}$ وَ $\sqrt{21}$. **المطلوب:**

1) احسب الجداء السلمي $\vec{u}.\vec{v}$.

2) استنتج قيمة النسبة المثلثية $Cos(\vec{u} ، \vec{v})$.

السؤال الثاني: في معلمٍ متجانسٍ $(O\,;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ للفراغ، لدينا المستوي (P) ذي المعادلة الديكارتيّة $x+y+z=2$ ، ومجموعة نقاط الفراغ S التي تُحقّق المعادلة: $x^2+y^2+z^2-4x+2y=5$. **المطلوب:**

1) بيّن أنَّ S هي كرة، عيّن كلّ من مركزها C ونصف قطرها.

2) ادرس الوضع النسبي بين المستوي (P) والكرة S .

3) تَحقَّق أنَّ النقطة $A(1\,,-1\,,-3)$ تقع على الكرة S ، ثُمَّ اكتب معادلة المستوي (R) المماس للكرة S في النقطة A .

السؤال الثالث: باستعمال طريقة غاوس، حلّ جملة المعادلات الآتية ذات المجاهيل $(x\,,y\,,z)$:

$$\begin{cases} x+y+z=9 \\ 2x+3y+4z=29 \\ 3x-2y+2z=8 \end{cases}$$

السؤال الرابع: نتأمَّل في معلمٍ متجانسٍ $(O\,;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ للفراغ النقطتَين $A(-1\,,-5\,,3)$ وَ $B(0\,,-1\,,-2)$ ، والمستقيم (Δ) المُعرَّف وفق:

$$(\Delta):\begin{cases} x=s-1 \\ y=as-2\ ;s\in R \\ z=-3s \end{cases}$$

. حيث $a\in R$. **المطلوب:**

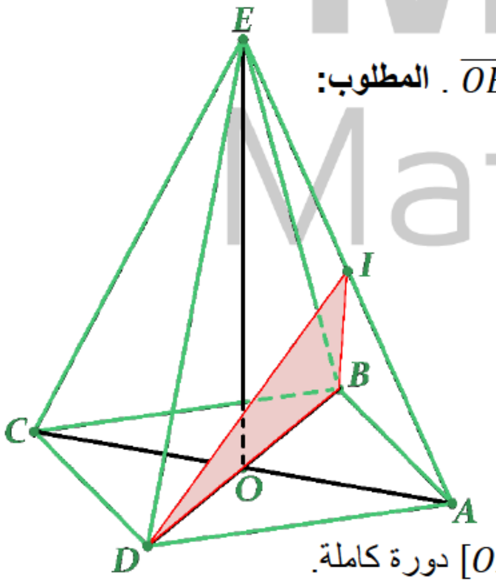
i) عيّن a ليكون المستقيم (AB) عمودي على المستقيم (Δ) .

ii) بفرض $a=2$: 1) أثبت أنَّ المستقيمَين (AB) وَ (Δ) متقاطعان في نقطة I يُطلَب إيجاد إحداثيّاتها.

2) اكتب معادلة المستوي المُحدَّد بالمستقيمَين (AB) وَ (Δ) .

3) ما طبيعة مجموعة نقاط الفراغ $M(x,y,z)$ التي تُحقّق: $\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{AB}=0$ ؟

السؤال الخامس: نتأمَّل جانباً هرماً $E-ABCD$ قاعدته مُربَّع مركزها O ورأسه E ، وَ I منتصف $[AE]$.



نختار معلماً متجانساً $(O\,;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ حيث : $\overrightarrow{OA}=\vec{i}$ وَ $\overrightarrow{OB}=\vec{j}$ وَ $\overrightarrow{OE}=2\vec{k}$. **المطلوب:**

1) أوجِدْ إحداثيّات رؤوس الهرم وإحداثيّات I .

2) احسب حجم الهرم $E-ABCD$.

3) تَحقَّق أنَّ: $2x-z=0$ هي معادلة للمستوي (DIB) .

4) أثبت أنَّ النقطة F التي تُحقّق العلاقة $\overrightarrow{OF}=\frac{2}{5}\overrightarrow{OI}$ هي المسقط القائم للنقطة A على المستوي (DIB) .

5) احسب حجم رباعي الوجوه $ABDI$ ، واستنتج حجم الهرم $E-DBIC$.

6) اكتب معادلة المخروط الناتج عن دوران القطعة المستقيمة $[OI]$ حَول $[OA]$ دورة كاملة.

-------- انتهت الأسئلة --------

السؤال الأول:

$\|\vec{u}\|=\sqrt{5}$, $\|\vec{v}\|=\sqrt{6}$, $\|\vec{u}+\vec{v}\|=\sqrt{21}$

(1

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=\frac{1}{2}\left(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2-\|\vec{u}\|^2-\|\vec{v}\|^2\right)$$

$$=\frac{1}{2}(21-5-6)$$

$$=\frac{1}{2}(10)=5 \Rightarrow$$

$$\boxed{\vec{u}\cdot\vec{v}=5}$$

(2 $\vec{u}\cdot\vec{v}=\|\vec{u}\|\cdot\|\vec{v}\|\cdot\cos(\vec{u},\vec{v})$

$$\cos(\vec{u},\vec{v})=\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\|\vec{u}\|\cdot\|\vec{v}\|}=\frac{5}{\sqrt{5}\times\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}}$$

$$\Rightarrow \boxed{\cos(\vec{u},\vec{v})=\frac{\sqrt{30}}{6}}$$

السؤال الثاني:

$P: x+y+z=2$

$S: x^2+y^2+z^2-4x+2y=5$

(1 $x^2-4x+4-4+y^2+2y+1-1+z^2=5$

$(x-2)^2+(y+1)^2+z^2=10 \Rightarrow$

$$\boxed{S:(x-2)^2+(y+1)^2+z^2=10}$$

S تمثّل كرة مركزها: $C(2,-1,0)$

ونصف قطرها: $R=\sqrt{10}$

(2 $dis(C,P)=\dfrac{|2-1+0-2|}{\sqrt{1+1+1}}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

$$\frac{1}{\sqrt{3}} < \sqrt{10}$$

$dis(C,P) < R \Rightarrow$

المستوي (P) يقطع الكرة S وفقه دائرة

مركزها: المستقيم القائم (CC') على (P)

$\vec{u}_{(CC')}=\vec{n}_P(1,1,1)$ و $C(2,-1,0)\in(CC')$

$$(CC'):\begin{cases} x=t+2 \\ y=t-1 \quad ; t\in\mathbb{R} \\ z=t \end{cases}$$

نعوّض في معادلة (P):

$t+2+t-1+t=2 \Rightarrow \boxed{t=\frac{1}{3}}$

$$\left.\begin{aligned} x&=\frac{1}{3}+2=\frac{7}{3} \\ y&=\frac{1}{3}-1=\frac{-2}{3} \\ z&=\frac{1}{3} \end{aligned}\right\} C'\left(\frac{7}{3},\frac{-2}{3},\frac{1}{3}\right)$$

ونصف قطرها:

$$r^2=R^2-dis^2(C,P)$$

$$=10-\frac{1}{3}=\frac{29}{3} \Rightarrow$$

$$\boxed{r=\sqrt{\frac{29}{3}}=\frac{\sqrt{87}}{3}}$$

3) نعوّض A في (S):

$$(1-2)^2+(-1+1)^2+(-3)^2=1+9=10$$ ✓

محققة $\Leftarrow$ $A(1,-1,-3)\in(S)$

$$\vec{n}_R=\vec{AC}(1,0,3)\ ;\ A\in(R)$$

$$a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$$

$$1(x-1)+0(y+1)+3(z+3)=0$$

$$x-1+3z+9=0\Rightarrow$$

$$\boxed{R:\ x+3z+8=0}$$

السؤال الثالث:

$$\begin{cases} x+y+z=9 & ---\ \ell_1\\ 2x+3y+4z=29 & ---\ \ell_2\\ 3x-2y+2z=8 & ---\ \ell_3\end{cases}$$

$$\begin{cases} x+y+z=9 & ---\ \ell_1\\ y+2z=11 & ---\ \ell_2'=-2\ell_1+\ell_2\\ -5y-z=-19 & ---\ \ell_3'=-3\ell_1+\ell_3\end{cases}$$

$$\begin{cases} x+y+z=9 & ---\ \ell_1\\ y+2z=11 & ---\ \ell_2'\\ 9z=36 & ---\ \ell_3''=5\ell_2'+\ell_3'\end{cases}$$

من ℓ_3'': $\boxed{z=4}$

نعوّض في ℓ_2': $y+8=11\Rightarrow\boxed{y=3}$

نعوّض في ℓ_1: $x+3+4=9\Rightarrow\boxed{x=2}$

$\Leftarrow$ الحل هو: $(2,3,4)$

السؤال الرابع:

$A(-1,-5,3)$ و $B(0,-1,-2)$

$$(\Delta):\begin{cases} x=s-1\\ y=as-2 & ;\ s\in\mathbb{R}\\ z=-3s\end{cases}$$

i)

$\vec{AB}(1,4,-5)$

$\vec{u}_\Delta(1,a,-3)$

$(AB)\perp(\Delta)\Rightarrow \vec{AB}\cdot\vec{u}_\Delta=0\Rightarrow$

$(1,4,-5)(1,a,-3)=0\Rightarrow$

$1+4a+15=0\Rightarrow 4a=-16$

$\Rightarrow\ \boxed{a=-4}$

ii) $a=2 \Leftarrow$

$$(\Delta):\begin{cases} x=s-1\\ y=2s-2 & ;\ s\in\mathbb{R}\\ z=-3s\end{cases}$$

$\left.\begin{array}{l}\vec{AB}(1,4,-5)\\ \vec{u}_\Delta(1,2,-3)\end{array}\right]\ \frac{1}{1}\neq\frac{4}{2}\neq\frac{-5}{-3}$ (1

المركبات غير متناسبة والشعاعات غير مرتبطين خطياً $\Leftarrow$ المستقيمان غير متوازيين (هما متقاطعان أو متخالفان)

$\vec{AB}(1,4,-5)$, $B(0,-1,-2)$

$$(AB):\begin{cases} x=t\\ y=4t-1 & ;\ t\in\mathbb{R}\\ z=-5t-2\end{cases}$$

بالحل المشترك بين معادلات (AB) و (Δ)

$s-1=t$ --- (1)

$2s-2=4t-1$ --- (2)

$-3s=-5t-2$ --- (3)

نعوّض (1) في (2):

$2s-2=4(s-1)-1 \Rightarrow$

$2s-2=4s-4-1 \Rightarrow$

$-2s=-3 \Rightarrow \boxed{s=\frac{3}{2}}$

نعوّض في (1): $t=\frac{3}{2}-1$

$\Rightarrow \boxed{t=\frac{1}{2}}$

نعوّض في (3) للتحقّق:

$-3\left(\frac{3}{2}\right)=-5\left(\frac{1}{2}\right)-2 \Rightarrow$

$\frac{-9}{2}=\frac{-5}{2}-2 \Rightarrow =\frac{-5-4}{2}=\frac{-9}{2}$ ✓

محققة ⇐

المستقيمان متقاطعان في نقطة I إحداثياتها:

نعوّض $s=\frac{3}{2}$ في معادلات (Δ):

$x=\frac{3}{2}-1=\frac{1}{2}$

$y=3-2=1$

$z=\frac{-9}{2}$

$\boxed{I\left(\frac{1}{2},1,\frac{-9}{2}\right)}$

2) نفرض $\vec{n}(a,b,c)$ ناظم المستوي

$\vec{n}\cdot\vec{u}_\Delta=0 \Rightarrow (a,b,c)(1,2,-3)=0$

$\boxed{a+2b-3c=0}$ ---(1)

$\vec{n}\cdot\vec{AB}=0 \Rightarrow (a,b,c)(1,4,-5)=0$

$\boxed{a+4b-5c=0}$ ---(2)

نفرض $\boxed{c=1} \Leftarrow$ (1)-- $a+2b-3=0$

(2)-- $a+4b-5=0$

بالطرح:

$-2b+2=0 \Rightarrow \boxed{b=1}$

نعوّض في (1): $a+2-3=0$

$\Rightarrow \boxed{a=1}$

$\vec{n}(1,1,1)$ و $B(0,-1,-2)$

$a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$

$1(x-0)+1(y+1)+1(z+2)=0$

$\Rightarrow \boxed{x+y+z+3=0}$

3) مستوي مار من المبدأ O و يقبل الشعاع $\vec{AB}$ ناظماً عليه.

أي مستوي مار من المبدأ O و العمودي على (AB).

السؤال الخامس:

1) $O(0,0,0)$, $A(1,0,0)$

$B(0,1,0)$, $E(0,0,2)$

$C(-1,0,0)$, $D(0,-1,0)$

$I\left(\frac{1}{2}, 0, 1\right)$

2) $V_{E-ABCD} = \frac{1}{3} S_{ABCD} \cdot h$

$S_{ABCD} = a^2 = AB^2 = 2$ $\quad h = OE = 2$

$V_{E-ABCD} = \frac{1}{3} \times 2 \times 2 \Rightarrow$

$$\boxed{V_{E-ABCD} = \frac{4}{3}}$$

3) نعوّض النقاط:

$D(0,-1,0) \Rightarrow 0-0=0$ ✓ محققة

$I\left(\frac{1}{2},0,1\right) \Rightarrow 1-1=0$ ✓ محققة

$B(0,1,0) \Rightarrow 0-0=0$ ✓ محققة

$$\Rightarrow \boxed{(DIB) : 2x - z = 0}$$

4) $\overrightarrow{OF} = \frac{2}{5}\overrightarrow{OI}$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \frac{2}{5}\begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \Rightarrow x = \frac{1}{5} \\ \Rightarrow y = 0 \\ \Rightarrow z = \frac{2}{5} \end{matrix}$$

$\Rightarrow F\left(\frac{1}{5}, 0, \frac{2}{5}\right)$

حتى تكون F مسقط A على (DIB)

يجب أن يتحقق الشرطان:

1) $F \in (DIB)$ و 2) $\overrightarrow{AF} = \alpha \vec{n}$

$(\overrightarrow{AF} \perp (DIB))$

1) نعوّض F في (DIB) : وضوحاً

محققة $\frac{2}{5} - \frac{2}{5} = 0$ ✓

(هذا محقق وضوحاً)

2) $\left.\begin{matrix} \vec{n}(2,0,-1) \\ \overrightarrow{AF}\left(-\frac{4}{5}, 0, \frac{2}{5}\right) \end{matrix}\right\} \overrightarrow{AF} = -\frac{2}{5}\vec{n}$

$F \Leftarrow$ هي المسقط القائم للنقطة A على المستوي (DIB).

5) $V_{ABDI} = \frac{1}{3} S_{DIB} \cdot h$

حساب S_{DIB}: $DI = \sqrt{\frac{1}{4}+1+1} = \frac{3}{2}$

$DB = \sqrt{0+4+0} = 2$

$IB = \sqrt{\frac{1}{4}+1+1} = \frac{3}{2}$

المثلث DIB متساوي الساقين رأسه I:

$S_{DIB} = \frac{1}{2} DB \times OI = \frac{1}{2} \times 2 \times \frac{\sqrt{5}}{2}$

$$\Rightarrow \boxed{S_{DIB} = \frac{\sqrt{5}}{2}}$$

حساب h: $h = dis(A,(DIB))$

$= \frac{|2-0|}{\sqrt{4+1}} = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$

$V_{ABDI} = \frac{1}{3} \times \frac{\sqrt{5}}{2} \times \frac{2}{\sqrt{5}} \Rightarrow$

$$\boxed{V_{ABDI} = \frac{1}{3}}$$

[ط2] لحساب حجم رباعي الوجوه (ABDI):

باتخاذ القاعدة ABD :

$$V_{ABDI} = \frac{1}{3} S_{ABD} \cdot h$$

$$S_{ABD} = \frac{AB^2}{2} = 1 \qquad h = II' = 1$$

$$V_{ABDI} = \frac{1}{3} \times 1 \times 1 \Rightarrow$$

$$\boxed{V_{ABDI} = \frac{1}{3}}$$

حيث: I' هي مسقط I على القاعدة ABD فَ: $I'(\frac{1}{2},0,0)$

استنتاج حجم الهرم E-DBIC

لدينا:

$$V_{E-ABCD} = V_{ABDI} + V_{E-DBIC}$$

$$\Rightarrow V_{E-DBIC} = V_{E-ABCD} - V_{ABDI}$$

$$= \frac{4}{3} - \frac{1}{3} = \frac{3}{3}$$

$$\Rightarrow \boxed{V_{E-DBIC} = 1}$$

6) مركز قاعدة المخروط الدائرية هي $I'(\frac{1}{2},0,0)$

ونصف قطرها: $R = II' = 1$

ارتفاع المخروط: $h = OI' = \frac{1}{2}$

$$\begin{cases} y^2 + z^2 = \frac{R^2}{h^2} x^2 \\ x_0 \leq x \leq x_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y^2 + z^2 = 4x^2 \\ 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \end{cases}$$

محمود المحمود

#MeEn Math Team

X_MathBac