الاسم:
الدرجة: 300
المدّة: ساعتَين

اختبار لطلاب الثالث الثانوي العلمي 2023 – 2024
رياضيات (بحث الأشعّة -3-)

السؤال الأوّل: نتأمّل النقاط $A(1\,,1\,,a)$ وَ $B(-2\,,0\,,2)$ والمستوي (P) الذي معادلته $x+2y-z+2=0$. **المطلوب:**

1) عيّن العدد الحقيقي a ليكون المستقيم (AB) موازياً للمستوي (P) .

2) بفرض $a=1$ ، أثبت أنَّ المستقيم (AB) يقطع المستوي (P) في نقطة I يُطلب تعيين إحداثيّاتها.

السؤال الثاني: ادرس الوضع النسبي بين المستقيمَين المُعرَّفَين وفق:

$$(d):\begin{cases} x=1+m \\ y=1-2m \quad ; \ m\in R \\ z=3m \end{cases} \quad \text{وَ} \quad (d'):\begin{cases} 2x+y=3 \\ 3x-z=3 \end{cases}$$

السؤال الثالث: في معلمٍ متجانسٍ $(O\,;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ للفراغ، نتأمّل المستويَين:

$P: x-y+2z=2$ وَ $Q: 2x+y+z=-2$. **المطلوب:**

1) أثبت أنَّ المستويَين متقاطعان في فصل مشترك (d) يُحقّق المعادلات: $(d):\begin{cases} x=-t-1 \\ y=t-1 \quad ;t\in R \\ z=t+1 \end{cases}$.

2) تَحقّق أنَّ النقطة $A'(-1\,,-1\,,1)$ هي المسقط القائم للنقطة $A(0\,,0\,,1)$ على (d) ، واستنتج بُعد النقطة A عن (d) .

السؤال الرابع: في معلمٍ متجانسٍ $(O\,;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ للفراغ، نتأمّل النقاط:

$A(1\,,2\,,-1)$ وَ $B(0\,,2\,,1)$ وَ $C(3\,,1\,,-1)$ وَ $D\left(4\,,3\,,-\frac{1}{2}\right)$ ، ولتكُنْ $\theta=(\overrightarrow{AB}\,,\overrightarrow{AC})$. **المطلوب:**

1) احسب $Cos(\theta)$.   2) بيّن طبيعة المثلث ABC ، واحسب مساحته.

3) أثبت أنَّ المستوي (ABC) يقبل الشعاع $\overrightarrow{CD}$ ناظماً عليه، واستنتج حجم رباعي الوجوه $ABCD$.

4) عيّن طبيعة مجموعة نقاط الفراغ $M(x,y,z)$ التي تُحقّق: $\|\overrightarrow{AM}\|^2=2\|\overrightarrow{BM}\|^2$.

السؤال الخامس: نتأمّل في معلمٍ متجانسٍ $(O\,;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ للفراغ، النقاط:

$A(-1\,,3\,,3)$ وَ $B(-3\,,1\,,-3)$ وَ $C(4\,,-1\,,0)$. **المطلوب:**

1) تَحقّق أنَّ النقاط A وَ B وَ C تُعيّن مستوياً.

2) a . عيّن a وَ b ليكون $\vec{n}(a\,,b\,,-2)$ شعاعاً ناظماً على المستوي (ABC) .

b . تَحقّق أنَّ: $x+2y-z=2$ هي معادلة للمستوي (ABC) .

3) a . احسب إحداثيّات النقطة H المسقط القائم للنقطة $L(3\,,7\,,-3)$ على المستوي (ABC) .

b . احسب $\overrightarrow{HA}+\overrightarrow{HB}+\overrightarrow{HC}$ ، واستنتج ماذا تُمثّل النقطة H بالنسبة للمثلث ABC .

4) احسب بُعد النقطة L عن المستوي (ABC) ، ثُمَّ اكتب معادلة الكرة التي مركزها L وتقطع المستوي (ABC) وفق الدائرة التي مركزها H ونصف قطرها $3\sqrt{3}$.

------- انتهت الأسئلة -------

السؤال الأوّل:

$A(1,1,a)$, $B(-2,0,2)$

$P: x+2y-z+2=0$

1) $\overrightarrow{AB}(-3,-1,(2-a))$

$\overrightarrow{n_P}(1,2,-1)$

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{n_P}=0 \Rightarrow -3-2-(2-a)=0$

$\Rightarrow 2-a=-5 \Rightarrow a=7$

$\boxed{a=7}$

2) $a=1 \Leftarrow B(-2,0,2), A(1,1,1)$

$\overrightarrow{AB}(-3,-1,1)$

$\overrightarrow{n_P}(1,2,-1)$

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{n_P}=-3-2-1=-6\neq 0$

⇐ المستقيم (AB) يقطع المستوي (P) في نقطة I:

$\overrightarrow{AB}(-3,-1,1)$, $A(1,1,1)$

$$(AB):\begin{cases} x=-3t+1 \\ y=-t+1 \quad ; t\in\mathbb{R} \\ z=t+1 \end{cases}$$

نعوّض معادلات (AB) في معادلة (P)

$-3t-2t+2-t-1+2+1=0$

$-6t=-4 \Rightarrow \boxed{t=\frac{2}{3}}$

نعوّض في معادلات (AB):

$$\left.\begin{aligned} x&=-2+1=-1 \\ y&=-\frac{2}{3}+1=\frac{1}{3} \\ z&=\frac{2}{3}+1=\frac{5}{3} \end{aligned}\right\} I\left(-1,\frac{1}{3},\frac{5}{3}\right)$$

السؤال الثاني:

نوجد المعادلات الوسيطية لـ (d'):

$2x+y=3 \quad ---(1)$

$3x-z=3 \quad ---(2)$

$$\left.\begin{aligned} &\overrightarrow{n_1}(2,1,0) \\ &\overrightarrow{n_2}(3,0,-1) \end{aligned}\right\} \frac{2}{3}\neq\frac{0}{-1}$$

المركبات غير متناسبة فالشعاعات غير مرتبطين خطياً ⇐ المستويات متقاطعان في مستقيم (d')

من (1): $y=-2x+3$

من (2): $z=3x-3$

نفرض $x=t$ ⇐

$$(d'):\begin{cases} x=t \\ y=-2t+3 \quad ; t\in\mathbb{R} \\ z=3t-3 \end{cases}$$

$$\left.\begin{aligned} &\vec{u}(1,-2,3) \\ &\vec{u'}(1,-2,3) \end{aligned}\right\} \vec{u}=\vec{u'}$$

⇐ (d) و (d') إما متوازيان أو منطبقان

بالحل المشترك:

$t=1+m$

$-2t+3=1-2m \Rightarrow -2t=-2-2m$

$\Rightarrow t=1+m$

$3t-3=3m \Rightarrow t=1+m$

⇐ المعادلات متكافئة ⇐ المستقيمان منطبقان

السؤال الثالث:

$P: x - y + 2z = 2$

$Q: 2x + y + z = -2$

1) $\left.\begin{array}{l}\vec{n}_P(1,-1,2)\\ \vec{n}_Q(2,1,1)\end{array}\right\}\ \frac{1}{2} \neq \frac{-1}{1} \neq \frac{2}{1}$

المركبات غير متناسبة ← الشعاعان غير مرتبطين خطياً ← المستويان متقاطعان في فصل مشترك (d):

بالجمع $(P+Q)$: $3x + 3z = 0 \Rightarrow \boxed{x = -z}$

نعوّض في (Q): $-2z + y + z = -2$

$\Rightarrow \boxed{y = z - 2}$

نفرض: $\boxed{z = 1 + t}$

$(d): \begin{cases} x = -t - 1 \\ y = t - 1 \\ z = t + 1 \end{cases} \quad ; t \in \mathbb{R}$

إعداد: محمود المحمود 0936 838 276

2) حتى تكون A' مسقط A على (d) يجب أن يتحقق الشرطان:

1) $A' \in (d)$ ، 2) $\overrightarrow{AA'} \perp (d)$

1) نعوّض A' في (d):

$\left.\begin{array}{l} -1 = -t - 1 \Rightarrow t = 0 \\ -1 = t - 1 \Rightarrow t = 0 \\ 1 = t + 1 \Rightarrow t = 0 \end{array}\right\} A' \in (d)$

2) $\overrightarrow{AA'} \cdot \vec{u} = (-1,-1,0) \cdot (-1,1,1)$

$= +1 - 1 + 0 = 0 \Rightarrow$

$\overrightarrow{AA'} \cdot \vec{u} = 0 \Rightarrow \overrightarrow{AA'} \perp (d)$

← A' هي المسقط القائم للنقطة A على الفصل المشترك (d).

$dis(A,d) = AA' = \sqrt{1+1+0} = \sqrt{2}$

السؤال الرابع:

$A(1,2,-1),\ B(0,2,1),\ C(3,1,-1),\ D(4,3,-\frac{1}{2})$

(1 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\|\overrightarrow{AB}\|\cdot\|\overrightarrow{AC}\|\cos\theta$

$$\boxed{\cos\theta=\frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{\|\overrightarrow{AB}\|\cdot\|\overrightarrow{AC}\|}} \quad ---*$$

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=(-1,0,2)(2,-1,0)$

$=-2+0+0 \Rightarrow$

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=-2$

$\|\overrightarrow{AB}\|=\sqrt{1+0+4}=\sqrt{5}$

$\|\overrightarrow{AC}\|=\sqrt{4+1+0}=\sqrt{5}$

نعوّض في *:

$\cos\theta=\frac{-2}{\sqrt{5}\times\sqrt{5}} \Rightarrow$

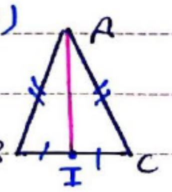
$$\boxed{\cos\theta=\frac{-2}{5}}$$

(2 $BC=\sqrt{9+1+4}=\sqrt{14}$

لدينا: $AB=AC=\sqrt{5}$

⇐ المثلث ABC متساوي الساقين رأسه A.

$[BC]$ منتصف $I(\frac{3}{2},\frac{3}{2},0)$



$AI=\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+1}=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$

$S_{ABC}=\frac{1}{2}BC\times AI$

$=\frac{1}{2}\times\sqrt{14}\times\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$

$$\boxed{S_{ABC}=\frac{\sqrt{21}}{2}}$$

(3 $\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{AB}(-1,0,2)\\ \overrightarrow{AC}(2,-1,0)\end{array}\right\}\ -\frac{1}{2}\neq\frac{0}{-1}$

المركبات غير متناسبة ⇐

الشعاعان غير مرتبطين خطياً".

$\overrightarrow{CD}(1,2,\frac{1}{2})$

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}=-1+0+1=0 \Rightarrow \overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{CD}$

$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{CD}=2-2+0=0 \Rightarrow \overrightarrow{AC}\perp\overrightarrow{CD}$

$\overrightarrow{CD}$ عمودي على شعاعين غير مرتبطين خطياً "من المستوي (ABC)

فهو عمودي على المستوي.

(ناظم)

$V_{ABCD}=\frac{1}{3}S_{ABC}\cdot h$

$S_{ABC}=\frac{\sqrt{21}}{2}$ $\qquad h=CD=\sqrt{1+4+\frac{1}{4}}=\frac{\sqrt{21}}{2}$

$V_{ABCD}=\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{21}}{2}\times\frac{\sqrt{21}}{2}$

$$\boxed{V_{ABCD}=\frac{7}{4}}$$

(4 $\|\overrightarrow{AM}\|^2=2\|\overrightarrow{BM}\|^2$

$(x-1)^2+(y-2)^2+(z+1)^2=2x^2+2(y-2)^2+2(z-1)^2$

$x^2-2x+1+z^2+2z+1=2x^2+(y-2)^2+2z^2-4z+2$

$x^2+2x+(y-2)^2+z^2-6z=0$

$x^2+2x+1-1+(y-2)^2+z^2-6z+9-9=0$

$(x+1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=10$

تمثّل كرة مركزها: $(-1,2,3)$

ونصف قطرها: $R=\sqrt{10}$

السؤال الخامس:

$A(-1,3,3)$ و $B(-3,1,-3)$

$C(4,-1,0)$

(1

$\overrightarrow{AB}(-2,-2,-6)$, $\overrightarrow{AC}(5,-4,-3)$: $\frac{-2}{5} \neq \frac{-2}{-4} \neq \frac{-6}{-3}$

المركبات غير متناسبة، فالشعاعان غير مرتبطين خطياً ⇐ النقاط A و B و C لا تقع على استقامة واحدة وتحدد مستوٍ.

(2 a. $\vec{n}\cdot\overrightarrow{AB}=0 \Rightarrow$

$-2a-2b+12=0 \Rightarrow$

$\boxed{a+b-6=0}$ ---(1)

$\vec{n}\cdot\overrightarrow{AC}=0 \Rightarrow \boxed{5a-4b+6=0}$ ---(2)

من (1) نجد: $\boxed{a=6-b}$ ---

نعوض في (2): $5(6-b)-4b+6=0$

$30-5b-4b+6=0 \Rightarrow$

$-9b=-36 \Rightarrow \boxed{b=4}$

نعوض في (1): $\boxed{a=2}$

$\vec{n}(2,4,-2)$

b. $\vec{n}(2,4,-2)$ و $C(4,-1,0)$

$a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$

$2(x-4)+4(y+1)-2(z-0)=0$

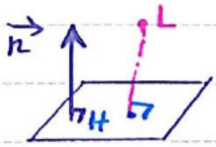
$x-4+2y+2-z=0 \Rightarrow$

$$\boxed{(ABC):\ x+2y-z-2=0}$$

ملاحظة: يمكن التحقق من معادلة المستوي، بتعويض النقاط A و B و C فيها.

(3 a. $\vec{u}=\vec{n}(1,2,-1)$

$L(3,7,-3)$



$$(LH):\begin{cases} x=t+3 \\ y=2t+7 \quad ; t\in\mathbb{R} \\ z=-t-3 \end{cases}$$

نعوّض معادلات (LH) في معادلة المستوي (ABC):

$t+3+4t+14+t+3=2 \Rightarrow$

$6t=-18 \Rightarrow \boxed{t=-3}$

نعوّض في معادلات (LH):

$$\left.\begin{array}{l} x=0 \\ y=-6+7=1 \\ z=3-3=0 \end{array}\right\} \boxed{H(0,1,0)}$$

b. $\overrightarrow{HA}+\overrightarrow{HB}+\overrightarrow{HC}=$

$$\begin{bmatrix}-1\\2\\3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-3\\0\\-3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}4\\-2\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}=\vec{0}$$

H تمثّل مركز ثقل المثلث ABC.

(4 $dis(L,(ABC))=\frac{|3+14+3-2|}{\sqrt{1+4+1}}$

$=\frac{18}{\sqrt{6}}=\frac{18\sqrt{6}}{6}$

$\Rightarrow \boxed{dis(L,(ABC))=3\sqrt{6}}$

لحساب R نصف قطر الكرة:

حسب فيثاغورث:

$R^2=r^2+dis^2(L,(ABC)) \Rightarrow$

$R^2=27+54=81 \Rightarrow \boxed{R=9}$

$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=R^2$

$$\boxed{(x-3)^2+(y-7)^2+(z+3)^2=81}$$