Pixel Team Channel

انقر / امسح الرمز للانتقال
الى قناة الفريق.

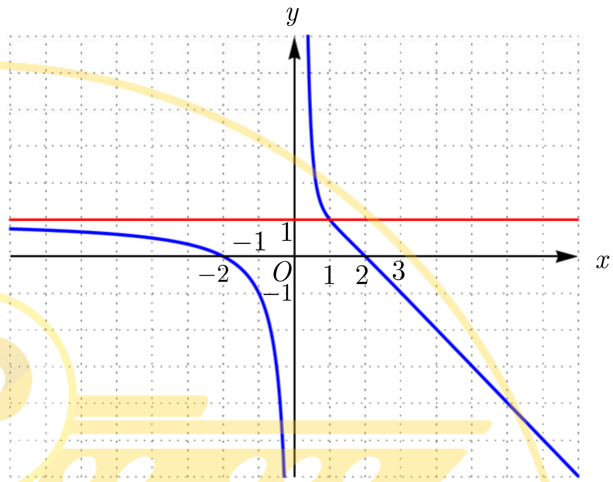
Saade files Channel

انقر / امسح الرمز للانتقال
الى قناة الملفات.

التحليل الرياضي: (300 درجة)

التحليل 1: (40 درجة لكل سؤال)

السؤال الأول : ليكن f التابع المعرّف على $\mathbb{R}^*$ خطه البياني C_f المرسوم في الشكل المجاور:



❶ استنتج من الشكل نهاية التابع f عند أطراف مجموعة تعريفه ثمّ اكتب معادلة كل مستقيم مقارب أفقي أو شاقولي لخطه البياني C_f.

❷ استنتج $\lim\limits_{x\to(-2)^+}\dfrac{1}{f(x)}$ و $\lim\limits_{x\to2^-} f(f(x))$ و $\lim\limits_{x\to1^-} f(\ln x)$.

❸ ما حلول المعادلة $f(x)=0$ ؟

❹ ما مجموعة حلول المتراجحة $f(x)\geq 0$ ؟

❺ عيّن مجموعة تعريف التابع $g : x \mapsto \ln(1-f(x))$

❻ ما مجموعة حلول المتراجحة $g(x)\leq \ln 2$ ؟

الحل

❶ f معرّف على $]-\infty,0[\cup]0,+\infty[$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=1$ ومنه : 2

$y=1$ مستقيم مقارب أفقي للخط C_f في جوار $-\infty$. 2

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$ 2

$\lim\limits_{x\to0^-} f(x)=-\infty$ و $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=+\infty$ 2

ومنه $x=0$ مستقيم مقارب شاقولي . 2

2 ❷ $\lim\limits_{x\to(-2)^+}\dfrac{1}{f(x)}=-\infty$

لأنّ $f(-2)=0$ و $f(x)<0$ عندما $x\in]-2,0[$

2 لإيجاد $\lim\limits_{x\to2^-} f(f(x))$:

❒ $\lim\limits_{x\to2^-} f(x)=0^+$

لأنّ $f(2)=0$ و $f(x)>0$ عندما $x\in]0,2[$

2 ❒ $\lim\limits_{x\to2^-} f(f(x))=\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=+\infty$

لإيجاد $\lim\limits_{x\to1^-} f(\ln x)$:

2 ❒ $\lim\limits_{x\to1^-}\ln x=0^-$

لأنّ $\ln 1=0$ و $\ln x<0$ عندما $x\in]0,1[$

2 ❒ $\lim\limits_{x\to1^-} f(\ln x)=\lim\limits_{x\to0^-} f(x)=-\infty$.

4 ❸ للمعادلة $f(x)=0$ حلّان هما

$x=-2$ و $x=2$.

❹ مجموعة حلول المتراجحة $f(x)\geq 0$:

2 هي : $x\in]-\infty,-2]\cup]0,2]$

2 ❺ $g : x\mapsto \ln(1-f(x))$

g معرّف عندما $1-f(x)>0$

2 أي $f(x)<1$ ومنه $1>f(x)$

2 وهذا محقّق عندما : $x\in]-\infty,0[\cup]1,+\infty[$.

❻ $g(x)\leq \ln 2$

يكافئ $\ln(1-f(x))\leq \ln 2$

2 ❒ شرط الحل : $1-f(x)>0$ وهذا محقّق حسب السابق عندما $x\in]-\infty,0[\cup]1,+\infty[=D_1$.

2 ❒ $1-f(x)\leq 2$ أي $-1\leq f(x)$

2 أي $f(x)\geq -1$ وهذا محقّق عندما :

$x\in]-\infty-1]\cup]0,3]=D_2$

❒ فمجموعة حلول المتراجحة المفروضة هي

2 $x\in D_1\cap D_2=]-\infty,-1]\cup]1,3]$

$S=]-\infty,-1]\cup]1,3]$

40

السؤال الثاني : ادرس نهايات كلاً من التوابع الآتية عند a الموافقة .

❶ $f(x)=\dfrac{4\sqrt{x^2+1}+x}{2x-\sqrt{x^2+2}}$ عند $+\infty$.

❷ $f(x)=\sqrt{2x^2+2x+2}+\sqrt{2}\,x$ عند $-\infty$

❸ $f(x)=\dfrac{\sqrt{3+\cos x+\sin^2 x}-2}{x^2}$ عند 0 .

❹ $f(x)=\dfrac{x+\sin x}{\sqrt{-x}}$ عند 0 و $-\infty$.

الحل

❶ $f(x)=\dfrac{4\sqrt{x^2+1}+x}{2x-\sqrt{x^2+2}}$

نلاحظ أنّ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ هي حالة عدم تعيين من الشكل $\dfrac{+\infty}{+\infty-\infty}$ لإزالتها

$$f(x)=\frac{4\sqrt{x^2(1+\frac{1}{x^2})}+x}{2x-\sqrt{x^2(1+\frac{2}{x^2})}}$$ 2

ومنه $$f(x)=\frac{4\sqrt{x^2}\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+x}{2x-\sqrt{x^2}\sqrt{1+\frac{2}{x^2}}}$$ 1

$$f(x)=\frac{4|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+x}{2x-|x|\sqrt{1+\frac{2}{x^2}}}$$ 1

بما أنّ x في جوار $+\infty$ فإنّ $|x|=x$ وبالتالي 1

$$f(x)=\frac{4x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+x}{2x-x\sqrt{1+\frac{2}{x^2}}}$$ 1

$$f(x)=\frac{\cancel{x}(4\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+1)}{\cancel{x}(2-\sqrt{1+\frac{2}{x^2}})}$$ 1

1 $$f(x)=\frac{4\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+1}{2-\sqrt{1+\frac{2}{x^2}}}$$

1 بما أنّ $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2}{x^2}=0$ فإنّ

1 $$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\frac{5}{2-1}=5$$

❷ $f(x)=\sqrt{2x^2+2x+2}+\sqrt{2}\,x$

نلاحظ أنّ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ هي حالة عدم تعيين من الشكل $+\infty-\infty$ لإزالتها

نضرب بالمرافق ونقسم عليه

2 $$f(x)=\frac{(\sqrt{2x^2+2x+2}+\sqrt{2}\,x)(\sqrt{2x^2+2x+2}-\sqrt{2}\,x)}{\sqrt{2x^2+2x+2}-\sqrt{2}\,x}$$

ومنه

$$f(x)=\frac{2x^2+2x+2-2x^2}{\sqrt{2x^2+2x+2}-\sqrt{2}\,x}=\frac{2x+2}{\sqrt{2x^2+2x+2}-\sqrt{2}\,x}$$

2 $$f(x)=\frac{x(2+\frac{2}{x})}{\sqrt{x^2(2+\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2})}-\sqrt{2}\,x}$$

$$f(x)=\frac{x(2+\frac{2}{x})}{\sqrt{x^2}\sqrt{(2+\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2})}-\sqrt{2}\,x}$$

بما أنّ x في جوار $-\infty$ فإنّ $|x|=-x$

2 $$f(x)=\frac{x(2+\frac{2}{x})}{-x\sqrt{(2+\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2})}-\sqrt{2}\,x}$$

2 $$f(x)=\frac{\cancel{x}(2+\frac{2}{x})}{\cancel{x}(-\sqrt{2+\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2}}-\sqrt{2})}$$

2 $$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\frac{2}{-2\sqrt{2}}=-\frac{1}{\sqrt{2}}$$

❸ $$f(x)=\frac{\sqrt{3+\cos x+\sin^2 x}-2}{x^2}$$

نلاحظ أنّ $\lim\limits_{x\to0} f(x)$ هي حالة عدم تعيين من الشكل $\frac{0}{0}$ لإزالتها نضرب بالمرافق ونقسّم عليه :

$$f(x)=\frac{3+\cos x+\sin^2 x-4}{x^2\times(\sqrt{3+\cos x+\sin^2 x}+2)}$$

$$f(x)=\frac{\cos x-1+\sin^2 x}{x^2\times(\sqrt{3+\cos x+\sin^2 x}+2)}$$

$$f(x)=\frac{\cos x-(1-\sin^2 x)}{x^2\times(\sqrt{3+\cos x+\sin^2 x}+2)}$$

$$f(x)=\frac{\cos x-\cos^2 x}{x^2\times(\sqrt{3+\cos x+\sin^2 x}+2)}$$

$$f(x)=\frac{\cos x(1-\cos x)}{x^2\times(\sqrt{3+\cos x+\sin^2 x}+2)}$$

$$f(x)=\frac{1-\cos x}{x^2}\times\frac{\cos x}{\sqrt{3+\cos x+\sin^2 x}+2}$$

$$f(x)=2\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}\times\frac{\cos x}{\sqrt{3+\cos x+\sin^2 x}+2}$$

$$f(x)=2\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{x}\right)^2\times\frac{\cos x}{\sqrt{3+\cos x+\sin^2 x}+2}$$

$$f(x)=2\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{2\frac{x}{2}}\right)^2\times\frac{\cos x}{\sqrt{3+\cos x+\sin^2 x}+2}$$

بما أنّ $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}=\lim\limits_{X\to0}\frac{\sin X}{X}=1$

و $\lim\limits_{x\to0}\frac{\cos x}{\sqrt{3+\cos x+\sin^2 x}+2}=\frac{1}{4}$

وبالتالي $\lim\limits_{x\to0} f(x)=2(\frac{1}{4})(\frac{1}{4})=\frac{1}{8}$

❹ $$f(x)=\frac{x+\sin x}{\sqrt{-x}}$$

نلاحظ أنّ $\lim\limits_{x\to0} f(x)$ هي حالة عدم تعيين من الشكل $\frac{0}{0}$ لإزالتها : نضرب بمرافق المقام ونقسم عليه

$$f(x)=\frac{x+\sin x}{\sqrt{-x}\times\sqrt{-x}}\times\sqrt{-x}$$

ومنه $f(x)=\frac{x+\sin x}{-x}\times\sqrt{-x}$

وبالتالي : $f(x)=(\frac{x}{-x}-\frac{\sin x}{x})\times\sqrt{-x}$

$$f(x)=(-1-\frac{\sin x}{x})\times\sqrt{-x}$$

بما أنّ $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1$ و $\lim\limits_{x\to0}\sqrt{-x}=0$

فإنّ $\lim\limits_{x\to0} f(x)=(-1-1)(0)=0$

عند $-\infty$:

$$-1\le\sin x\le1$$

نضيف x فنجد $x-1\le x+\sin x\le x+1$

نقسّم على $\sqrt{-x}>0$ فلا تتغير جهة التراجح

$$\frac{x-1}{\sqrt{-x}}\le\frac{x+\sin x}{\sqrt{-x}}\le\frac{x+1}{\sqrt{-x}}$$

$$\frac{x-1}{\sqrt{-x}}\le f(x)\le\frac{x+1}{\sqrt{-x}}$$

لدينا $f(x)\le\frac{x+1}{\sqrt{-x}}$

بفرض $g(x)=\frac{x+1}{\sqrt{-x}}$

$$g(x)=\frac{x(1+\frac{1}{x})}{\sqrt{-x}}$$

عندما $x<0$ يكون $x=-\sqrt{-x}\times\sqrt{-x}$ ومنه

$$g(x)=-\sqrt{-x}(1+\frac{1}{x})$$

ومنه $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=-\infty$ وبالتالي

استناداً إلى مبرهنة المقارنة عند اللانهاية نجد

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$$

السؤال الثالث :

أولاً : f و g تابعان يحقّقان المتراجحة :

$g(x) \le f(x) \le 2\sqrt{x+1} - x$ أياً تكن $x \in [-1, +\infty[$

استنتج نهاية كل من f و g عند $+\infty$.

ثانياً : f تابع يحقّق المتراجحة :

$\left|f(x)+2\right| \le \dfrac{-x-1}{\sqrt{2x^2-2}}$ أياً تكن $x \in]-\infty, -1[$.

استنتج نهاية f عند -1 .

ثالثاً : احسب $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x - \sin x}{x\cos x + \sin x}$.

الحل

أولاً : $g(x) \le f(x) \le 2\sqrt{x+1} - x$

بفرض $h(x) = 2\sqrt{x+1} - x$

نلاحظ أنّ $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)$ هي حالة عدم تعيين من الشكل $+\infty - \infty$ لإزالتها

$$h(x) = 2\sqrt{x^2\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)} - x$$ 2

$$h(x) = 2\sqrt{x^2}\sqrt{\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)} - x$$ 2

$$h(x) = 2\left|x\right|\sqrt{\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)} - x$$ 2

بما أنّ x في جوار $+\infty$ فإنّ $\left|x\right| = x$ 2

$$h(x) = 2x\sqrt{\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)} - x$$ 2

$$h(x) = x\left(2\sqrt{\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)} - 1\right)$$ 2

بما أنّ $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x^2} = 0$ 1

فإنّ $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = -\infty$ 1

فاستناداً إلى مبرهنة المقارنة عند اللانهاية نجد

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$$ 1

و لمّا كان $g(x) \le f(x)$ 1

فاستناداً إلى مبرهنة المقارنة عند اللانهاية مرةً أخرى

نجد أنّ $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$. 1

ثانياً : $\left|f(x)+2\right| \le \dfrac{-x-1}{\sqrt{2x^2-2}}$

$$\left|f(x)-(-2)\right| \le g(x)$$

حيث $g(x) = \dfrac{-x-1}{\sqrt{2x^2-2}}$

نلاحظ أنّ $\lim\limits_{x\to-1} g(x)$ هي حالة عدم تعيين من 2

الشكل $\dfrac{0}{0}$ لإزالتها : نضرب البسط والمقام بمرافق 2

الجذر $g(x) = \dfrac{(-x-1)\times\sqrt{2x^2-2}}{\sqrt{2x^2-2}\times\sqrt{2x^2-2}}$ 2

ومنه $g(x) = \dfrac{(-x-1)\times\sqrt{2x^2-2}}{2x^2-2}$ 2

وبالتالي : $g(x) = \dfrac{-(x+1)\times\sqrt{2x^2-2}}{2(x^2-1)}$ 2

$$g(x) = \frac{-(x+1)\times\sqrt{2x^2-2}}{2(x-1)(x+1)}$$ 2

ومنه $g(x) = \dfrac{-\sqrt{2x^2-2}}{2(x-1)}$ 2

وبالتالي $\lim\limits_{x\to-1} g(x) = 0$ 2

فاستناداً إلى مبرهنة الإحاطة (2) نجد 2

$$\lim_{x\to-1} f(x) = -2$$

ثالثاً : احسب $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{x\cos x + \sin x}$.

نلاحظ أنّها حالة عدم تعيين من الشكل $\dfrac{0}{0}$ 1

لإزالتها بفرض $f(x) = \dfrac{x-\sin x}{x\cos x + \sin x}$

$$f(x) = \frac{\cancel{x}\left(1 - \frac{\sin x}{x}\right)}{\cancel{x}\left(\cos x + \frac{\sin x}{x}\right)}$$ 2

بما أنّ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x} = 1$ و $\lim\limits_{x\to 0}\cos x = 1$ فإنّ 1

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \frac{1-1}{1+1} = \frac{0}{2} = 0$$ 1

40

السؤال الرابع : f تابع معرّف على $]0,+\infty[$ وفق العلاقة : $f(x)=x\cdot\sin\frac{1}{\sqrt{x}}$

❶ جِدْ نهاية f عند الصفر .

❷ جِدْ نهاية f عند $+\infty$.

الحل

❶ عند الصفر :

$$f(x)=x\cdot\sin\frac{1}{\sqrt{x}}$$

$$-1\le\sin\frac{1}{\sqrt{x}}\le 1$$ 4

بما أنّ $x>0$

فإذا ضربنا المتراجحة بِـ x لا تتغيّر جهة التراجح

$$-x\le x\sin\frac{1}{\sqrt{x}}\le x$$ 4

$$-x\le f(x)\le x$$

بما أنّ $\lim_{x\to0}x=0$ و $\lim_{x\to0}(-x)=0$ 4

فاستناداً إلى مبرهنة الإحاطة (1) نجد أنّ 4

$\lim_{x\to0}f(x)=0$.

❷ نلاحظ أنّ $\lim_{x\to+\infty}f(x)$ هي حالة عدم تعيين من 4

الشكل $+\infty\times0$ لإزالتها

$$f(x)=\sqrt{x}\cdot\sqrt{x}\cdot\sin\frac{1}{\sqrt{x}}$$ 4

$$f(x)=\sqrt{x}\cdot\frac{\sin\frac{1}{\sqrt{x}}}{\frac{1}{\sqrt{x}}}$$ 4

بما أنّ $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x}=+\infty$ 4

و $\lim_{x\to+\infty}\frac{\sin\frac{1}{\sqrt{x}}}{\frac{1}{\sqrt{x}}}=\lim_{X\to0}\frac{\sin X}{X}=1$ 4

فإنّ $\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$. 4

40

التحليل2:

السؤال الأول : (30 درجة)

❶ حل المعادلة الآتية :

$\ln\sqrt{x^2-1}+\ln2=\ln(\sqrt{4x-1})$.

❷ حل المتراجحة الآتية :

$\ln(4x+1)+\ln(x+2)\ge2\ln(3x)$.

❸ حل المتراجحة الآتية : $\ln(x^2+2x+2)\le0$.

الحل

❶ $\ln\sqrt{x^2-1}+\ln2=\ln(\sqrt{4x-1})$

❐ نوجد مجموعة تعريف المعادلة اللوغارتمية :

$4x-1>0$ و $x^2-1>0$

2 $x>\frac{1}{4}$ و $x^2-1>0$

ومنه $x\in]\frac{1}{4},+\infty[$ و $x\in]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[$

2 وبالتالي : $x\in(]\frac{1}{4},+\infty[)\cap(]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[)$

ومنه $x\in]1,+\infty[=D_1$

❐ لنضرب أولاً طرفي المعادلة بِـ 2 للتخلص من

2 الجذر ثمّ نطبق الخواص :

$$2\ln\sqrt{x^2-1}+2\ln2=2\ln(\sqrt{4x-1})$$

ومنه $\ln(x^2-1)+\ln4=\ln(4x-1)$

$$\ln(4(x^2-1))=\ln(4x-1)$$

$$\ln(4x^2-4)=\ln(4x-1)$$

1 $4x^2-4=4x-1$

$$4x^2-4x-3=0$$

$$\Delta=(-4)^2-4(4)(-3)=16+48=64$$

1 $\sqrt{\Delta}=8$

1 مقبول $x=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{4+8}{2(4)}=\frac{12}{8}=\frac{3}{2}\in D_1$

1 مرفوض $x=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{4-8}{2(4)}=\frac{-4}{8}=\frac{-1}{2}\notin D_1$

2 $S=\{\frac{3}{2}\}$

❷ $\ln(4x+1)+\ln(x+2)\geq 2\ln(3x)$

❒ نوجد مجموعة تعريف المتراجحة اللوغارتمية :

$3x>0$ و $x+2>0$ و $4x+1>0$

أي $x>0$ و $x>-2$ و $x>-\frac{1}{4}$

أي $x\in]-\frac{1}{4},+\infty[\cap]-2,+\infty[\cap]0,+\infty[$

ومنه $x\in]0,+\infty[=D_1$

❒ نطبّق خواص اللوغاريتم : 1

$\ln((4x+1)\times(x+2))\geq\ln(3x)^2$ 1

$\ln(4x^2+9x+2)\geq\ln(9x^2)$

$4x^2+9x+2\geq 9x^2$ 1

ومنه $5x^2-9x-2\leq 0$

$5x^2-9x-2=0$

$\Delta=b^2-4ac=81-4(5)(-2)=121$ 1

ومنه $\sqrt{\Delta}=11$

$x=\frac{9-11}{2(5)}=\frac{-1}{5}$ 1

$x=\frac{9+11}{2(5)}=2$ 1

x	$-\infty$		$\frac{-1}{5}$		2		$+\infty$
$5x^2-9x-2$		$+$	0	$-$	0	$+$	
المتراجحة		غيرمحققة		محقّقة		غيرمحققة	

1

$x\in[\frac{-1}{5},2]=D_2$ 1

❒ فمجموعة حلول المتراجحة المفروضة هي : 1

$x\in]0,+\infty[\cap[\frac{-1}{5},2]=]0,2]=S$

❸ $\ln(x^2+2x+2)\leq 0$ 1

$\ln(x^2+2x+2)\leq\ln 1$

❒ شرط الحل : $x^2+2x+2>0$

$x^2+2x+2=0$ 1

$\Delta=(2)^2-4(1)(2)=-4<0$

مستحيلة الحل في $\mathbb{R}$ فإشارة x^2+2x+2 توافق إشارة 1

أمثال x^2

فالمتراجحة $x^2+2x+2>0$ محققة أياً تكن

$x\in\mathbb{R}=D_1$

❒ $x^2+2x+2\leq 1$ 2

$x^2+2x+1\leq 0$ 2

ومنه $(x+1)^2\leq 0$

وهذه المتراجحة محققة فقط عندما $x=-1$

$D_2=\{-1\}$

❒ فمجموعة حلول المتراجحة المفروضة هي

$x\in D_1\cap D_2=\{-1\}=S$ 2

السؤال الثاني : (30 درجة) 30

حل كلاً من المتراجحتين الآتيتين :

❶ $4(\ln x)^2-\ln\frac{1}{x}\geq 3$.

❷ $\ln(-x^2+4x+5)\leq\ln(x+1)$.

الحل

❶ $4(\ln x)^2-\ln\frac{1}{x}\geq 3$

المتراجحة معرّفة عندما $x\in]0,+\infty[$ 2

$4(\ln x)^2+\ln x-3\geq 0$

هذه متراجحة من الدرجة الثانية بالمجهول $\ln x$. 1

$4(\ln x)^2+\ln x-3=0$ 1

$\Delta=b^2-4ac$

$\Delta=(1)^2-4(4)(-3)=1+48=49$ 1

$\sqrt{\Delta}=7$ 1

$\ln x=\frac{-1+7}{2(4)}=\frac{6}{8}=\frac{3}{4}$ 1

$\ln x=\frac{3}{4}$

ومنه $x=e^{\frac{3}{4}}$ 1

أو $\ln x=\frac{-1-7}{2(4)}=\frac{-8}{8}=-1$ 1

$\ln x=-1$ ومنه $x=e^{-1}=\frac{1}{e}$ 1

x	0	e^{-1}	$e^{\frac{3}{4}}$	$+\infty$
$4(\ln x)^2+\ln x-3$	$+$	$0 \quad -$	$0 \quad +$	
المتراجحة	محقّقة	غير محقّقة	محقّقة	

1 1

2 $x\in]0,e^{-1}]\cup[e^{\frac{3}{4}},+\infty[=S$

❷ $\ln(-x^2+4x+5)\le\ln(x+1)$.

1 ❐ شرط الحل : $-x^2+4x+5>0$

$-x^2+4x+5=0$

1 نضرب بالعدد -1 فنجد $x^2-4x-5=0$

1 وبالتالي $(x-5)(x+1)=0$

ومنه إما $x-5=0$ وبالتالي $x=5$

1 أو $x+1=0$ وبالتالي $x=-1$.

x	$-\infty$	-1	5	$+\infty$
$-x^2+4x+5$	$-$	$0 \quad +$	$0 \quad -$	
المتراجحة	غيرمحقّقة	محقّقة	غيرمحقّقة	

2 1

$x\in]-1,5[=D_1$

2 ❐ $-x^2+4x+5\le x+1$

$x^2-3x-4\ge0$

1 $x^2-3x-4=0$

$(x-4)(x+1)=0$

إمّا $x-4=0$ ومنه $x=4$

1 أو $x+1=0$ ومنه $x=-1$

x	$-\infty$	-1	4	$+\infty$
x^2-3x-4	$+$	$0 \quad -$	$0 \quad +$	
المتراجحة	محقّقة	غير محقّقة	محقّقة	

1 1

1 $x\in]-\infty,-1]\cup[4,+\infty[=D_2$

❐ فمجموعة حلول المتراجحة المفروضة هي :

2 $x\in D_1\cap D_2=[4,5[=S$

30

السؤال الثالث : (30 درجة)

حل جملة المعادلتين الآتيتين :

$$\begin{cases}\ln(x-2)-\ln y=0\\ \ln x+\ln y=3\ln 2+\ln 3\end{cases}$$

الحل

جملة المعادلتين معرّفتين عندما

3 $x>0$ و $y>0$ و $x-2>0$

3 ومنه $x>2$ و $y>0$

$$\begin{cases}\ln(x-2)=\ln y\\ \ln(xy)=\ln 2^3+\ln 3\end{cases}$$

3

3 $$\begin{cases}\ln(x-2)=\ln y\\ \ln(xy)=\ln 24\end{cases}$$

3 $$\begin{cases}y=x-2 & (1)\\ xy=24 & (2)\end{cases}$$

3 نعوّض (1) في (2) فنجد $x(x-2)=24$ ومنه

$x^2-2x-24=0$

3 $(x-6)(x+4)=0$

إما $x-6=0$ ومنه $x=6$

3 أو $x+4=0$ ومنه $x=-4$ مرفوض

3 عندما $x=6$ نعوّض في (1) فنجد $y=6-2=4$

ومنه $(x,y)=(6,4)$ مقبول

3 $S=\{(6,4)\}$.

30

السؤال الرابع: (50 درجة)

ما حلول المتراجحة $\ln x < 2 - \frac{e}{x}$ ؟

الحل

المتراجحة تكافئ $\ln x + \frac{e}{x} - 2 > 0$ 5

$f(x) > 0$ حيث $f(x) = \ln x + \frac{e}{x} - 2$ 5

يصبح المطلوب معرفة حلول المتراجحة $f(x) > 0$ 5

لذلك ندرس اطراد التابع f على المجال $]0, +\infty[$

(مجموعة تعريف المتراجحة المفروضة)

f اشتقاقي على $]0, +\infty[$ 5

$$f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{e}{x^2} = \frac{x-e}{x^2}$$ 5

$f'(x) = 0$ عندما $x - e = 0$

ومنه $x = e$ وبالتالي $f(e) = 1 + 1 - 2 = 0$ 5

x	0		e		$+\infty$
$f'(x)$	$\|\|$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$\|\|$	$\searrow$	0	$\nearrow$	

5

5

نلاحظ من جدول اطراد التابع f أنّ $f(x) > 0$ عندما 5

$x \in]0, e[\cup]e, +\infty[$ وهي حلول المتراجحة المفروضة . 5

50

الجبر:

السؤال الأول : (45 درجة)

أجب عن الأسئلة الثلاث الآتية :

❶ u و v عددين عقديين يحققان

$|u| = |v| = 1$ و $u \neq v$ و z عدد عقدي ما

وليكن w العدد العقدي الذي يحقّق

$w = \dfrac{z + uv\bar{z} - (u+v)}{u - v}$ أثبت أنّ w تخيّلي بحت

❷ ليكن n عدداً طبيعياً و z عدد عقدي طويلته

تساوي الواحد و $z^{2n} \neq -1$

أثبت أنّ $\dfrac{z^n}{1 + z^{2n}}$ حقيقي .

❸ لتكن الأعداد العقدية : u و v و w حيث

$|u| = |v| = |w| = 1$ و $u + v + w \neq 1$.

و Z عدد عقدي يحقّق : $Z = \dfrac{uv + vw + wu}{u + v + w}$.

أثبت أنّ $|Z| = 1$.

الحل

❶ $w = \dfrac{z + uv\bar{z} - (u+v)}{u - v}$

يكون w تخيّلي بحت إذا كان $\bar{w} = -w$ لنثبت ذلك

3 $\bar{w} = \dfrac{\bar{z} + \bar{u}\,\bar{v}\,z - (\bar{u} + \bar{v})}{\bar{u} - \bar{v}}$

بما أنّ $|u| = 1$ فإنّ $\bar{u} = \dfrac{1}{u}$

3 وبما أنّ $|w| = 1$ فإنّ $\bar{w} = \dfrac{1}{w}$

نعوّض : $\bar{w} = \dfrac{\bar{z} + \frac{1}{u}\frac{1}{v}z - (\frac{1}{u} + \frac{1}{v})}{\frac{1}{u} - \frac{1}{v}}$

لنضرب البسط المقام بِـ uv

3 $\bar{w} = \dfrac{uv\bar{z} + z - (v+u)}{v - u}$

3 $\bar{w} = \dfrac{uv\bar{z} + z - (v+u)}{-(u-v)} = -\dfrac{uv\bar{z} + z - (v+u)}{(u-v)}$

3 ومنه $\bar{w} = -w$ وبالتالي w تخيّلي بحت .

❷ إثبات أنّ $\frac{z^n}{1+z^{2n}}$ حقيقي .

بفرض $Z=\frac{z^n}{1+z^{2n}}$

يكون Z حقيقياً إذا كان $\bar{Z}=Z$ لنثبت ذلك

$\bar{Z}=\overline{\left(\frac{z^n}{1+z^{2n}}\right)}$ 3

ومنه $\bar{Z}=\frac{\bar{z}^n}{1+\bar{z}^{2n}}$ 3

بما أنّ $|z|=1$ فإنّ $\bar{z}=\frac{1}{z}$ وبالتالي $\bar{Z}=\frac{(\frac{1}{z})^n}{1+(\frac{1}{z})^{2n}}$ 3

وبالتالي $\bar{Z}=\frac{\frac{1}{z^n}}{1+\frac{1}{z^{2n}}}$ 3

لنضرب البسط والمقام بـ z^{2n}

$\bar{Z}=\frac{z^n}{z^{2n}+1}=Z$ 3

ومنه Z حقيقي .

❸ $Z=\frac{uv+vw+wu}{u+v+w}$

إثبات أنّ $|Z|=1$

$\bar{Z}=\frac{\bar{u}\,\bar{v}+\bar{v}\,\bar{w}+\bar{w}\,\bar{u}}{\bar{u}+\bar{v}+\bar{w}}$ 3

بما أنّ $|u|=|v|=|w|=1$ فإنّ

$u\cdot\bar{u}=v\cdot\bar{v}=w\cdot\bar{w}=1$

لنضرب البسط والمقام بـ uvw 3

$\bar{Z}=\frac{\bar{u}\,\bar{v}uvw+\bar{v}\,\bar{w}uvw+\bar{w}\,\bar{u}uvw}{\bar{u}uvw+\bar{v}uvw+\bar{w}uvw}$ 3

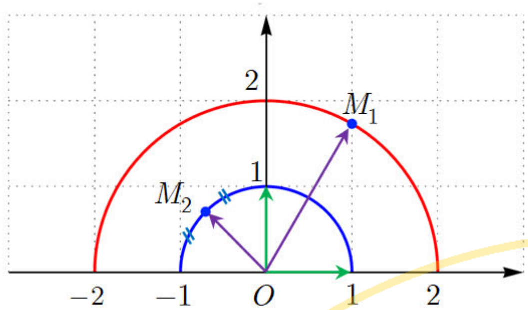
$\bar{Z}=\frac{w+u+v}{vw+uw+uv}=\frac{1}{Z}$ 3

ومنه $Z\cdot\bar{Z}=1$ وبالتالي $|Z|^2=1$ 3

أي $|Z|=1$

45

السؤال الثاني : (30 درجة) في الشكل المرسوم جانباً : لدينا النقطتان M_1 و M_2 .



❶ اكتب العددين العقديين z_1 و z_2 الممثّلين للنقطتين M_1 و M_2 بالشكل الأسي ثمّ بالشكل الجبري

❷ استنتج الشكل الأسي لكل من الأعداد العقدية الآتية : $z_1\cdot z_2$ و $\frac{z_1}{z_2}$ و $\frac{z_2}{z_1}$.

❸ في كل حالة عيّن مجموعة النقاط M التي يحقّق العدد العقدي z الذي يمثّلها الشرط المعطى:

❒ $\arg(\bar{z})=-\frac{3\pi}{4}$ ❒ $|-2iz|=2$

الحل

❶ $|z_1|=2$ 1

(نحن نعلم: في مثلث قائم إذا كانت الضلع القائمة تساوي نصف طول الوتر كانت الزاوية المقابلة لتلك الضلع تساوي 30°)

بفرض M_1' المسقط القائم للنقطة M_1 على xx'

المثلث OM_1M_1' قائم في M_1' فيه $OM_1'=1$

و $OM_1=2$ فالزاوية $\widehat{OM_1M_1'}=\frac{\pi}{6}$ 2

ومنه $(\vec{u},\overrightarrow{OM_1})=\frac{\pi}{3}$ 2

ومنه $M_1(2;\frac{\pi}{3})$ $z_1=2e^{i\frac{\pi}{3}}$ 2

ومنه $z_1=2(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3})$ 1

$z_1=2(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i)=1+\sqrt{3}i$ 2

$M_2(1;\frac{3\pi}{4})$ ومنه $z_2 = e^{i\frac{3\pi}{4}}$ 2

$z_2 = (\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4})$ 2

وبالتالي : $z_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$ 2

❷ $z_1 \cdot z_2 = 2e^{i\frac{\pi}{3}} \cdot e^{i\frac{3\pi}{4}} = 2e^{i(\frac{4\pi+9\pi}{12})} = 2e^{i\frac{13\pi}{12}}$ 2

$\frac{z_1}{z_2} = \frac{2e^{i\frac{\pi}{3}}}{e^{i\frac{3\pi}{4}}} = 2e^{i(\frac{\pi}{3}-\frac{3\pi}{4})} = 2e^{i(\frac{-5\pi}{12})}$ 1

$\frac{z_2}{z_1} = \frac{e^{i\frac{3\pi}{4}}}{2e^{i\frac{\pi}{3}}} = \frac{1}{2}e^{i(\frac{3\pi}{4}-\frac{\pi}{3})} = \frac{1}{2}e^{i(\frac{5\pi}{12})}$ 1

❸ ❒ $\arg(\overline{z}) = -\frac{3\pi}{4}$

ومنه $-\arg(z) = -\frac{3\pi}{4}$ 2

$\arg(z) = \frac{3\pi}{4}$

فمجموعة النقاط $M(z)$ التي تحقّق الشرط المعطى 1

تمثّل نصف المستقيم $]OM_2)$ المرسوم في الشكل

محذوفة منه النقطة O .

❒ $|-2iz| = 2$

$|-2i||z| = 2$ 1

وبالتالي $2\cdot|z| = 2$ 2

ومنه $|z| = 1$

مجموعة النقاط $M(z)$ التي تحقّق الشرط المعطى تمثّل 2

دائرة مركزها $O(0,0)$ ونصف قطرها تساوي 1 . 2

30

السؤال الثالث : (30 درجة)

لتكن الأعداد العقدية :

$z_1 = 3 - 3i$ و $z_2 = -\sqrt{3} + i$ و $z = z_1 \cdot z_2$

❶ اكتب z بالشكل الجبري .

❷ اكتب كلاً من z_1 و z_2 و z بالشكل المثلثي .

❸ استنتج كلاً من $\sin\frac{7\pi}{12}$ و $\cos\frac{7\pi}{12}$.

الحل

❶ $z = z_1 \cdot z_2$

$z = (3-3i)\cdot(-\sqrt{3}+i)$ 2

ومنه $z = -3\sqrt{3} + 3i + 3\sqrt{3}i + 3$ 2

وبالتالي : $z = -3\sqrt{3} + 3i + 3\sqrt{3}i + 3$ 1

ومنه $z = (-3\sqrt{3}+3) + i(3\sqrt{3}+3)$ 1

❷ $z_1 = 3 - 3i$

$r = \sqrt{3^2 + (-3)^2} = \sqrt{9+9} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$ 1

$\left.\begin{array}{l} \cos\theta = \frac{3}{3\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad 1 \\ \sin\theta = \frac{-3}{3\sqrt{2}} = \frac{-1}{\sqrt{2}} \quad 1 \end{array}\right\}$ θ تقع في الربع (4)

$\theta = \frac{-\pi}{4}$ 1

ومنه $z_1 = 3\sqrt{2}(\cos\frac{-\pi}{4} + i\sin\frac{-\pi}{4})$ 1

$z_2 = -\sqrt{3} + i$

$r = \sqrt{(-\sqrt{3})^2 + (1)^2} = \sqrt{3+1} = \sqrt{4} = 2$ 1

$\left.\begin{array}{l} \cos\theta = \frac{-\sqrt{3}}{2} \quad 1 \\ \sin\theta = \frac{1}{2} \quad 1 \end{array}\right\}$ θ تقع في الربع (2)

$\theta = \frac{5\pi}{6}$ 1

ومنه $z_2 = 2(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6})$ 2

$z_1 \cdot z_2 = 6\sqrt{2}(\cos(-\frac{\pi}{4}+\frac{5\pi}{6}) + i\sin(-\frac{\pi}{4}+\frac{5\pi}{6}))$ 2

ومنه $z_1 \cdot z_2 = 6\sqrt{2}(\cos(\frac{7\pi}{12}) + i\sin(\frac{7\pi}{12}))$ 1

❸ بالمقارنة بين الشكل المثلثي والشكل الجبري

للعدد $z_1 \cdot z_2$ نجد

$$6\sqrt{2}(\cos(\frac{7\pi}{12}) + i\sin(\frac{7\pi}{12})) = (-3\sqrt{3}+3) + i(3\sqrt{3}+3)$$ 3

نقسّم الطرفين على $6\sqrt{2}$ فنجد

$$\cos(\frac{7\pi}{12}) + i\sin(\frac{7\pi}{12}) = (\frac{-3\sqrt{3}+3}{6\sqrt{2}}) + i(\frac{3\sqrt{3}+3}{6\sqrt{2}})$$ 3

$$\cos\frac{7\pi}{12} = \frac{-3\sqrt{3}+3}{6\sqrt{2}} = \frac{-\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$$ 2

$$\sin\frac{7\pi}{12} = \frac{3\sqrt{3}+3}{6\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$$ 2

السؤال الرابع : (30 درجة) 30

ليكن العدد العقدي $z \neq 1$ و العدد $w = \frac{z-1}{1-\bar{z}}$

❶ أثبت أنّ $|w| = 1$.

❷ أثبت أنّ $\frac{w-1}{z-1}$ حقيقي .

❸ أثبت أنّ $\frac{w+1}{z-1}$ تخيّلي بحت

الحل

❶ إثبات $|w| = 1$

$$w \cdot \bar{w} = \frac{z-1}{1-\bar{z}} \cdot \frac{\bar{z}-1}{1-z}$$ 4

$$w \cdot \bar{w} = \frac{z-1}{1-\bar{z}} \cdot \frac{-(1-\bar{z})}{-(z-1)} = 1$$ 4

أصبح لدينا $w \cdot \bar{w} = 1$ ومنه

$|w|^2 = 1$ وبالتالي $|w| = 1$ 2

طريقة ثانية : (تعتمد على معرفة أنّ $|\bar{z}| = |z|$)

$$|w| = \left|\frac{z-1}{1-\bar{z}}\right| = \frac{|z-1|}{|1-\bar{z}|} = \frac{|z-1|}{|\overline{1-\bar{z}}|} = \frac{|z-1|}{|1-z|} = \frac{|z-1|}{|-(z-1)|}$$

ومنه $|w| = \frac{|z-1|}{|-(z-1)|} = \frac{|z-1|}{|-1||z-1|} = 1$.

❷ إثبات أنّ $\frac{w-1}{z-1}$ حقيقي :

بفرض $u = \frac{w-1}{z-1}$ يكون u حقيقياً إذا كان $\bar{u} = u$

لنثبت ذلك :

$$\bar{u} = \frac{\bar{w}-1}{\bar{z}-1}$$ 2

لمّا كان $|w| = 1$ كان $\bar{w} = \frac{1}{w}$

$$\bar{u} = \frac{\frac{1}{w}-1}{\bar{z}-1} = \frac{1-w}{w(\bar{z}-1)} = \frac{1-w}{(\frac{z-1}{1-\bar{z}})(\bar{z}-1)}$$ 2

$$\bar{u} = \frac{1-w}{(\frac{z-1}{1-\bar{z}})(-(1-\bar{z}))}$$ 2

ومنه $\bar{u} = \frac{1-w}{-(z-1)} = \frac{w-1}{z-1} = u$ 2

ومنه $\bar{u} = u$ وبالتالي u حقيقي. 2

طريقة ثانية :

$$u = \frac{\frac{z-1}{1-\bar{z}} - 1}{z-1} = \frac{z-1-1+\bar{z}}{(1-\bar{z})(z-1)}$$

$$u = \frac{z+\bar{z}-2}{z-1-\bar{z}z+\bar{z}} = \frac{z+\bar{z}-2}{z+\bar{z}-1-\bar{z}z}$$

ومنه $u = \frac{2\operatorname{Re}(z) + -2}{2\operatorname{Re}(z) - 1 - |z|^2} \in \mathbb{R}$

ومنه u حقيقي .

❸ إثبات أنّ $\frac{w+1}{z-1}$ تخيّلي بحت:

بفرض $v = \frac{w+1}{z-1}$

يكون v تخيّلياً بحتاً إذا كان $\bar{v} = -v$ لنثبت ذلك .

$$\bar{v} = \frac{\bar{w}+1}{\bar{z}-1}$$

لمّا كان $|w| = 1$ كان $\bar{w} = \frac{1}{w}$ 2

$$\bar{v} = \frac{\frac{1}{w}+1}{\bar{z}-1} = \frac{1+w}{w(\bar{z}-1)} = \frac{1+w}{(\frac{z-1}{1-\bar{z}})(\bar{z}-1)}$$ 2

$$\bar{v} = \frac{1+w}{(\frac{z-1}{1-\bar{z}})(-(1-\bar{z}))} = \frac{1+w}{-(z-1)}$$ 2

$$\bar{v} = -(\frac{1+w}{z-1}) = -v$$ 2

ومنه $\bar{v} = -v$ تخيلي بحت v 2

30

طريقة ثانية :

$$v=\frac{\frac{z-1}{1-\bar z}+1}{z-1}=\frac{z-1+1-\bar z}{(1-\bar z)(z-1)}$$

$$v=\frac{z-\bar z}{z-1-\bar z z+\bar z}=\frac{2\,\mathrm{Im}(z)i}{2\,\mathrm{Re}(z)-1-|z|^2}$$

ومنه $v=\left(\frac{2\,\mathrm{Im}(z)}{2\,\mathrm{Re}(z)-1-|z|^2}\right)i$

حيث $b=\frac{2\,\mathrm{Im}(z)}{2\,\mathrm{Re}(z)-1-|z|^2}\in\mathbb{R}$

ومنه $v=bi$ فهو تخيلي بحت .

السؤال الخامس: (25 درجة)

أجب عن الأسئلة الخمسة الآتية :

❶ ليكن العدد العقدي $z=2e^{i\frac{\pi}{8}}$

أثبت أنّ z^{2024} حقيقي وحدّد إشارته .

❷ ليكن العدد العقدي $z=\frac{5+3i\sqrt3}{2-4i\sqrt3}$

أثبت أنّ $z^{2024}=\bar z$.

❸ اكتب العدد العقدي: $z=5(-\cos\frac{\pi}{5}+i\sin\frac{\pi}{5})$ بالشكل المثلثي .

❹ اكتب العدد العقدي $z=1-\sqrt3$ بالشكل الأسي .

❺ هل العددان العقديان $\frac{\pi}{3}$ و $\frac{5\pi}{6}$ لهما نفس الزاوية ؟ علّل إجابتك .

الحل

❶ $z=2e^{i\frac{\pi}{8}}$

2 $z^{2024}=2^{2024}e^{i\frac{2024\pi}{8}}=2^{2024}e^{i\frac{2024\pi}{8}}=2^{2024}e^{i253\pi}$

2 $z^{2024}=2^{2024}e^{i\pi}=-2^{2024}$

1 ومنه z^{2024} حقيقي سالب

❷ $z=\frac{5+3i\sqrt3}{2-4i\sqrt3}$

لإيجاد z^{2024} يجب أنْ نكتب z بالشكل المثلثي أولاً:

$z=\frac{1}{2}\cdot\frac{5+3i\sqrt3}{1-2i\sqrt3}$

لنضرب البسط والمقام بمرافق المقام

1 $z=\frac{1}{2}\cdot\frac{(5+3i\sqrt3)\times(1+2i\sqrt3)}{1+12}$

1 $z=\frac{1}{2}\cdot\frac{5+10\sqrt3 i+3\sqrt3 i-18}{13}$

1 $z=\frac{1}{2}\cdot\frac{-13+13\sqrt3 i}{13}$

1 $z=\frac{1}{2}\cdot(-1+\sqrt3 i)$

1 بفرض $w=-1+\sqrt3\,i$

$r=\sqrt{1+3}=\sqrt4=2$

1 $\cos\theta=\frac{-1}{2}$

1 $\sin\theta=\frac{\sqrt3}{2}$

θ تقع في الربع (2)

1 ومنه $\theta=\frac{2\pi}{3}$

ومنه $w=2(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3})$

$z=\frac{1}{2}\cdot2(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3})$

1 $z=\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}$

1 $z^{2024}=\cos\frac{4048\pi}{3}+i\sin\frac{4048\pi}{3}$

$$\begin{array}{r|l} 4048 & 6 \\ \hline 36 & 674 \\ 44 & \\ 42 & \\ 28 & \\ 24 & \\ 4 & \end{array}$$

1 $z^{2024}=\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt3}{2}i$

$\bar{z} = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$ 1

ومنه $z^{2024} = \bar{z}$

❸ $z = 5(-\cos\frac{\pi}{5} + i\sin\frac{\pi}{5})$

$z = 5(\cos(\pi - \frac{\pi}{5}) + i\sin(\pi - \frac{\pi}{5}))$ 1

ومنه $z = 5(\cos(\frac{4\pi}{5}) + i\sin(\frac{4\pi}{5}))$ 1

❹ $z = 1 - \sqrt{3}$

z عدد حقيقي سالب 1

$\theta = \pi$ و $|z| = |1-\sqrt{3}| = \sqrt{3} - 1$ 1

ومنه $z = (\sqrt{3} - 1)e^{i\pi}$ 1

❺ $z_1 = \frac{\pi}{3}$ عدد حقيقي موجب فزاويته 0 1

و $z_2 = \frac{5\pi}{6}$ عدد حقيقي موجب فزاويته 0 1

ومنه $\arg(\frac{\pi}{3}) = \arg(\frac{5\pi}{6}) = 0$ 1

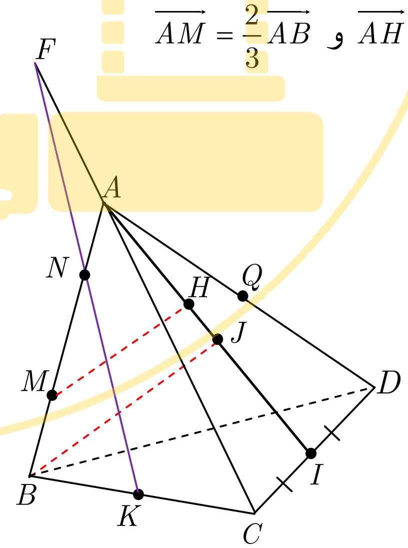
أي العددان العقديان $\frac{\pi}{3}$ و $\frac{5\pi}{6}$ لهما نفس الزاوية 25

الأشعة: السؤال الأول: (60 درجة)

$ABCD$ رباعي وجوه . I منتصف $[CD]$

و J منتصف $[AI]$. M و H نقطتان تحقّقان :

$\overrightarrow{AH} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AI}$ و $\overrightarrow{AM} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$



❶ (a عبّر عن كل من الشعاعين $\overrightarrow{MH}$ و $\overrightarrow{BJ}$ بدلالة الأشعة $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ و $\overrightarrow{AD}$.

(b استنتج أنّ المستقيمين (MH) و (BJ) متوازيان

❷ بفرض K منتصف $[BC]$ و النقطتان : N و F

تحقّقان $\overrightarrow{AF} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ و $\overrightarrow{AN} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$

(a عبّر عن كل من الشعاعين $\overrightarrow{FN}$ و $\overrightarrow{FK}$ بدلالة $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$.

(b استنتج أنّ النقاط F و N و K تقع على استقامةٍ واحدة .

❸ بفرض Q منتصف $[AD]$:

أثبت أنّ : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC} = 2\overrightarrow{QK}$

واستنتج أنّ الأشعة $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{DC}$ و $\overrightarrow{QK}$ مرتبطة خطياً

الحل

2 ❶ (a $\overrightarrow{MH} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AH}$

2 ومنه $\overrightarrow{MH} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AI}$

2 وبالتالي $\overrightarrow{MH} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD})$

2 ومنه $\boxed{\overrightarrow{MH} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{6}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{6}\overrightarrow{AD}}$

2 $\overrightarrow{BJ} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AJ}$

2 $\overrightarrow{BJ} = -\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AI}$

2 ومنه $\overrightarrow{BJ} = -\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD})$

2 وبالتالي : $\boxed{\overrightarrow{BJ} = -\overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AD}}$

(b نلاحظ أنّ

2 $\frac{2}{3}\overrightarrow{BJ} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{6}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{6}\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{MH}$

ومنه $\overrightarrow{MH} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BJ}$

فالشعاعان $\overrightarrow{MH}$ و $\overrightarrow{BJ}$ مرتبطان خطياً

2 فالمستقيمان (MH) و (BJ) متوازيان

❷ (a $\overrightarrow{FN}=\overrightarrow{FA}+\overrightarrow{AN}$ 2

ومنه $\boxed{\overrightarrow{FN}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}+\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}}$ 2

$\overrightarrow{FK}=\overrightarrow{FC}+\overrightarrow{CK}$ 2

وبالتالي $\overrightarrow{FK}=\frac{3}{2}\overrightarrow{AC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{CB}$ 2

ومنه $\overrightarrow{FK}=\frac{3}{2}\overrightarrow{AC}+\frac{1}{2}(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB})$ 2

$\overrightarrow{FK}=\frac{3}{2}\overrightarrow{AC}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ 2

ومنه $\boxed{\overrightarrow{FK}=\overrightarrow{AC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}}$ 2

(b نلاحظ أنّ $2\overrightarrow{FN}=\overrightarrow{AC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{FK}$ 2

ومنه $\overrightarrow{FK}=2\overrightarrow{FN}$ 2

فالشعاعان $\overrightarrow{FK}$ و $\overrightarrow{FN}$ مرتبطان خطياً 2

فالنقاط F و N و K تقع على استقامةٍ واحدة .

❸ $\overrightarrow{QK}=\overrightarrow{QA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BK}$ 4

من جهةٍ أخرى نجد $\overrightarrow{QK}=\overrightarrow{QD}+\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CK}$ 4

بالجمع نجد : $2\overrightarrow{QK}=\vec{0}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC}+\vec{0}$ 4

وبالتالي : $2\overrightarrow{QK}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC}$

نلاحظ أنّ $\overrightarrow{QK}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{DC}$ 4

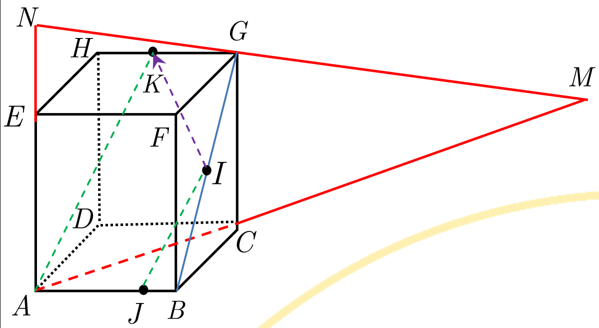
فالأشعة $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{DC}$ و $\overrightarrow{QK}$ مرتبطة خطياً . 4

60

السؤال الثاني: (80 درجة)

$ABCDEFGH$ مكعب طول حرفه يساوي 1 .

ولنختر معلماً متجانساً $(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE})$



❶ جد إحداثيات رؤوس المكعب في المعلم المفروض

❷ لتكن النقطة N تحقّق $\overrightarrow{AN}=\frac{3}{2}\overrightarrow{AE}$

و M تحقّق $\overrightarrow{AM}=3\overrightarrow{AC}$

أثبت أنّ النقاط M و N و G تقع على استقامةٍ واحدة

❸ لتكن النقطة K منتصف $[HG]$ و

I منتصف $[BG]$ والنقطة J تحقّق $\overrightarrow{BJ}=\frac{1}{4}\overrightarrow{BA}$

أثبت أنّ المستقيمين (AK) و (IJ) متوازيان .

❹ أثبت أنّ الأشعة $\overrightarrow{IK}$ و $\overrightarrow{FG}$ و $\overrightarrow{CH}$ مرتبطة خطياً

❺ احسب مساحة المثلث ANM ثمّ عيّن النقطة

L التي تجعل الشكل $AMLN$ مستطيلاً .

❻ أثبت أنّ النقطة P منتصف $[CG]$

هي مركز ثقل المثلث AMN .

❼ أثبت أنّ المستوي $(IJAK)$ هو المستوي

المحوري للقطعة المستقيمة $[FC]$.

❽ اكتب معادلة الكرة التي مركزها F وتمس

المستوي $(IJAK)$.

الحل

❶ $A(0,0,0)$ و $B(1,0,0)$ و $D(0,1,0)$ و $C(1,1,0)$

$E(0,0,1)$ و $F(1,0,1)$ و $H(0,1,1)$ و $G(1,1,1)$ 8×2

❷ $N(0,0,\frac{3}{2})$ 1

بفرض $M(x,y,z)$ 1

لدينا $\overrightarrow{AC}(1,1,0)$ و $\overrightarrow{AM}=3\overrightarrow{AC}$ 1

ومنه $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ 1

$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ 1

وبالتالي $M(3,3,0)$ 1

$\left.\begin{matrix} N(0,0,\frac{3}{2}) \\ M(3,3,0) \end{matrix}\right\} \overrightarrow{NM}(3,3,-\frac{3}{2})$ 1

$\left.\begin{matrix} N(0,0,\frac{3}{2}) \\ G(1,1,1) \end{matrix}\right\} \overrightarrow{NG}(1,1,-\frac{1}{2})$ 1

نلاحظ أنّ $\overrightarrow{NM}=3\overrightarrow{NG}$ 2

فالشعاعان $\overrightarrow{NM}$ و $\overrightarrow{NG}$ مرتبطان خطياً 2

فالنقاط N و M و G تقع على استقامةٍ واحدة . 2

❸ $K(\frac{1}{2},1,1)$ ومنه $\overrightarrow{AK}(\frac{1}{2},1,1)$ 1

$\left.\begin{matrix} I(1,\frac{1}{2},\frac{1}{2}) \\ J(\frac{3}{4},0,0) \end{matrix}\right\} \overrightarrow{IJ}(-\frac{1}{4},\frac{-1}{2},\frac{-1}{2})$ 1

نلاحظ أنّ $\overrightarrow{AK}=-2\overrightarrow{IJ}$ 2

فالشعاعان $\overrightarrow{AK}$ و $\overrightarrow{IJ}$ مرتبطان خطياً 2

فالمستقيمان (AK) و (IJ) متوازيان . 2

❹ $\left.\begin{matrix} I(1,\frac{1}{2},\frac{1}{2}) \\ K(\frac{1}{2},1,1) \end{matrix}\right\} \overrightarrow{IK}(\frac{-1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ 1

$\overrightarrow{FG}(0,1,0)$ 1

$\overrightarrow{CH}(-1,0,1)$ 1

نلاحظ أنّ الشعاعين $\overrightarrow{FG}$ و $\overrightarrow{CH}$ غير مرتبطين خطياً 1

لأنه لا ينتج أحدهما عن الآخر بضربه بعدد حقيقي

لنبحث عن عددين حقيقيين a و b يحقّقان :

$\overrightarrow{IK}=a\overrightarrow{FG}+b\overrightarrow{CH}$ 1

$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ 1

ومنه $\begin{pmatrix} -b \\ a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ 1

وبالتالي وضوحاً نجد أنّ : $a=\frac{1}{2}$ و $b=\frac{1}{2}$ 2

ومنه $\overrightarrow{IK}=\frac{1}{2}\overrightarrow{FG}+\frac{1}{2}\overrightarrow{CH}$ 1

فالأشعة $\overrightarrow{IK}$ و $\overrightarrow{FG}$ و $\overrightarrow{CH}$ مرتبطة خطياً . 1

❺ إنّ المثلث ANM قائم في A 1

$S(AMN)=\frac{1}{2}AM\cdot AN$ 1

$AM=\sqrt{(3-0)^2+(3-0)^2+0}=\sqrt{18}=3\sqrt{2}$

$AN=\frac{3}{2}$. 1 1

ومنه $S(AMN)=\frac{1}{2}3\sqrt{2}\cdot\frac{3}{2}=\frac{9\sqrt{2}}{4}$ 1

حتى يكون الشكل $AMLN$ مستطيلاً يكفي أن نثبت

بأنّه متوازي أضلاع لأنّ المثلث AMN قائم في A

أي يجب أن تتحقق المساواة الشعاعية :

$\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{NL}$ 2

بفرض $L(x,y,z)$ 1

$\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z-\frac{3}{2} \end{pmatrix}$ 1

ومنه $L(3,3,\frac{3}{2})$ 1

❻ إحداثيات P منتصف $[CG]$ هي

$P(1,1,\frac{1}{2})$ 1

لنوجد مركز ثقل المثلث AMN :

$$\left(\frac{0+3+0}{3},\frac{0+3+0}{3},\frac{0+0+\frac{3}{2}}{3}\right)$$ 1

ومنه $P = (1,1,\frac{1}{2})$ 1

أي النقطة P منتصف $[CG]$ 1

هي مركز ثقل المثلث AMN

❼ إثبات أنّ المستوي $(IJAK)$ هو المستوي المحوري للقطعة المستقيمة $[FC]$:

❒ بما أنّ I منتصف $[FC]$ 1

فإنّ $IF = IC$ 1

ومنه I تنتمي إلى المستوي المحوري للقطعة المستقيمة $[FC]$ .... (1) 1

❒ $JF = \sqrt{1+\frac{1}{16}} = \frac{\sqrt{17}}{4}$ 1

$JC = \sqrt{1+\frac{1}{16}} = \frac{\sqrt{17}}{4}$ 1

وبالتالي $JF = JC$ 1

ومنه J تنتمي إلى المستوي المحوري للقطعة المستقيمة $[FC]$ .... (2) 1

❒ $AF = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$ 1

$AC = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$ 1

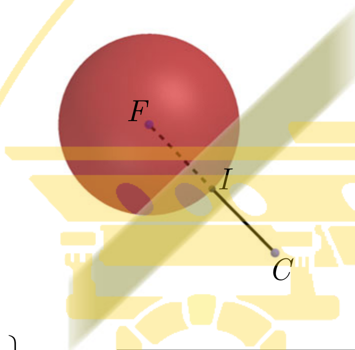
وبالتالي $AF = AC$

ومنه A تنتمي إلى المستوي المحوري للقطعة المستقيمة $[FC]$ .... (3) 1

من (1) و (2) و (3) نستنتج أنّ المستوي $(IJAK)$ هو المستوي المحوري للقطعة المستقيمة $[FC]$. 1

ملاحظة : لإثبات أنّ مستوٍ ما هو مستوي محوري لقطعة مستقيمة (ضمن المعلومات التي أخذناها) يكفي أنّ نثبت أنّ ثلاث نقاط لا تقع على استقامةٍ واحدة من ذلك المستوي متساوية البعد عن طرفي القطعة المستقيمة .

❽ لكتابة معادلة الكرة التي مركزها F وتمس المستوي $(IJAK)$ نحتاج معرفة نصف قطرها ولمّا كان المستوي المحوري للقطعة المستقيمة هو المستوي العمودي على القطعة المستقيمة في منتصفها كان $R = FI$ 2



$$\left.\begin{matrix} F(1,0,1) \\ I(1,\frac{1}{2},\frac{1}{2}) \end{matrix}\right\} FI = \sqrt{(1-1)^2+(0-\frac{1}{2})^2+(1-\frac{1}{2})^2}$$ 1

$$FI = \sqrt{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = R$$ 1

فمعادلة الكرة المطلوبة هي :

$$(x-1)^2+(y-0)^2+(z-1)^2 = \frac{1}{2}$$

$$\boxed{(x-1)^2+y^2+(z-1)^2 = \frac{1}{2}}$$ 2

30

انتهى السلّم