



[T.me/Science_2022bot](https://t.me/Science_2022bot) : تم التحميل بواسطة 



أولاً: أجب عن الأسئلة الآتية: (30° درجة لكل سؤال)

السؤال الأول: أثبت صحة العلاقة " $2^{3n} - 1$ " مضاعف للعدد 7 " أي أن العدد الطبيعي n .

السؤال الثاني: $(u_n)_{n \geq 0}$ متتالية حسابية حدها الأول u_0 وأساسها r فيها $u_3 = -11$ و $u_5 = -21$ ، احسب r و u_0 .

السؤال الثالث: أثبت أن المتتالية $u_n = \frac{\sqrt{n} + 1}{n + 1}$ متقاربة من الصفر.

السؤال الرابع: احسب المجموع $S = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \frac{3}{4} + 1 + \frac{5}{4} + \dots + 20$

ثانياً: حل التمرينات الآتية: (50° درجة لكل تمرين)

التمرين الأول: $(u_n)_{n \geq 0}$ متتالية معرفة بالعلاقة $u_{n+1} = u_n^2 + 4u_n + 2$ و $u_0 = -\frac{3}{2}$ والمطلوب:

(1) أثبت أن $-1 \leq u_n \leq -2$ أي أن العدد الطبيعي n .

(2) أثبت أن $u_{n+1} - u_n = (u_n + 1)(u_n + 2)$ أي أن العدد الطبيعي n .

(3) استنتج أن المتتالية u_n متقاربة واحسب نهايتها.

التمرين الثاني: لتكن المتتالية $(u_n)_{n \geq 0}$ المعرفة بالعلاقة $u_{n+1} = \frac{u_n}{2} + \frac{2}{u_n}$ و $u_0 = 4$ والمطلوب:

(1) أثبت أن التابع $f(x) = \frac{x}{2} + \frac{2}{x}$ متزايد تماماً على المجال $[2, +\infty[$ ثم استنتج أن العدد 2 حد قاصر عن المتتالية u_n .

(2) أثبت أن المتتالية u_n متناقصة تماماً.

(3) استنتج أن المتتالية u_n متقاربة واحسب نهايتها.

ثالثاً: حل المسألة الآتية: (80° درجة)

لتكن المتتالية $(u_n)_{n \geq 0}$ المعرفة بالعلاقة التدرجية $u_{n+1} = 3u_n - 4$ و $u_0 = 1$ والمطلوب:

(1) احسب الحدود u_1 و u_2 ثم ادرس اطراد المتتالية u_n .

(2) أثبت أن المتتالية $v_n = u_{n+1} - u_n$ هندسية، عيّن حدها الأول وأساسها.

(3) اكتب عبارة v_n بدلالة n ، ثم استنتج عبارة u_n بدلالة n .

(4) احسب نهاية المتتالية u_n ، هل هي متقاربة أم متباعدة؟

(5) تعرّف المتتالية S_n بالعلاقة $S_n = v_0 + v_1 + v_2 + \dots + v_n$ ، عبّر عن S_n بدلالة n واحسب نهايتها.

انتهى الاختبار الأول

المتتاليات ونهاية متتالية

أولاً: أجب عن الأسئلة الآتية: (30° درجة لكل سؤال)

السؤال الأول: u_n متتالية هندسية متناقصة حدها الأول u_0 وأساسها q فيما $u_3 = -\frac{1}{4}$ و $u_5 = -\frac{1}{16}$ ، احسب q و u_0 .

السؤال الثاني: $(u_n)_{n \geq 0}$ متتالية معرفة بالعلاقة $u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n}$ و $u_0 = 0$ ، أثبت أن $0 \leq u_n \leq 2$.

السؤال الثالث: جد نهاية المتتالية $u_n = \frac{3^n - 5^n}{2^n + 5^n}$ ، هل هي متقاربة ؟.

السؤال الرابع: أثبت أن المتتاليتين المعرفتين وفق $u_n = 1 - \frac{1}{n}$ و $v_n = 1 + \frac{1}{n^2}$ متجاورتين ، عين نهايتهما المشتركة.

ثانياً: حل التمرينات الآتية: (50° درجة لكل تمرين)

التمرين الأول: $(u_n)_{n \geq 1}$ متتالية معرفة بالعلاقة $u_n = \frac{1}{n(n+1)}$ و المطلوب:

(1) أثبت أن $0 < u_n \leq \frac{1}{2}$ أي أن العدد الطبيعي $n \geq 1$.

(2) أوجد عددين حقيقيين a و b بحيث $u_n = \frac{a}{n} + \frac{b}{n+1}$ أي أن العدد الطبيعي n .

(3) ليكن في حالة n عدد طبيعي $S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$ ، عبّر عن S_n بدلالة n ثم استنتج نهاية المتتالية S_n .

التمرين الثاني: لتكن $(u_n)_{n \geq 1}$ متتالية معرفة بالعلاقة التدرجية $u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + 2$ و $u_0 = -3$ والمطلوب:

(1) مثل هندسياً الحدود الأولى للمتتالية u_n ثم خمن جهة اطرافها ونهايتها المحتملة.

(2) ادرس اطراف المتتالية u_n .

(3) أثبت أن 3 حد راجح على المتتالية u_n ثم استنتج أن المتتالية u_n متقاربة واحسب نهايتها.

ثالثاً: حل المسألة الآتية: (80° درجة)

لتكن المتتالية $(u_n)_{n \geq 0}$ المعرفة بالعلاقة $u_{n+1} = \frac{-1 + 2u_n}{u_n}$ و $u_0 = 2$ والمطلوب:

(1) أثبت بالتدرج أن $u_n > u_{n+1} > 1$ ثم استنتج أن المتتالية u_n متقاربة.

(2) نعرف المتتالية $v_n = \frac{1}{u_n - 1}$ ، أثبت v_n حسابية ، عين حدها الأول وأساسها.

(3) اكتب عبارة v_n بدلالة n ثم استنتج أن $u_n = \frac{n+2}{n+1}$ واحسب $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n$.

(4) هل المتتالية u_n محدودة من الأعلى بالعدد 2 ؟ ، هل هي محدودة؟

(5) أثبت أن $u_n < v_n$ أي أن العدد الطبيعي $n \geq 1$.

انتهى الاختبار الثاني

المتتاليات ونهاية متتالية

أولاً: أجب عن الأسئلة الآتية: (30° درجة لكل سؤال)

السؤال الأول: هل المتتالية $u_n = \frac{n - 3 \sin n}{n}$ متقاربة؟ علل إجابتك.

السؤال الثاني: لتكن المتتالية المعرفة بالعلاقة $u_{n+1} = 10u_n - 18$ و $u_0 = 7$ ، أثبت بالتدريج أن $u_n = 5 \times 10^n + 2$.

السؤال الثالث: أثبت أن المتتالية $u_n = \frac{6}{n^2 + 2n + 4}$ محدودة من الأعلى بالعدد 2.

السؤال الرابع: لتكن المتتالية $u_n = 2 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{8} - \dots - \frac{1}{2^n}$ ، اعط صيغة أخرى تفيد في حساب u_n ثم احسب $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n$.

ثانياً: حل التمرينات الآتية: (50° درجة لكل تمرين)

التمرين الأول: $(u_n)_{n \geq 1}$ متتالية معرفة بالعلاقة $u_n = e + \frac{e}{1!} + \frac{e}{2!} + \frac{e}{3!} + \dots + \frac{e}{n!}$ و المطلوب:

$$(1) \text{ أثبت مستعملاً البرهان بالتدريج أن } \frac{1}{n!} \leq \frac{1}{2^{n-1}}$$

(2) استنتج أن العدد $3e$ راجح على المتتالية u_n ، ثم استنتج تقارب المتتالية u_n .

التمرين الثاني: لتكن المتتاليتين $(u_n)_{n \geq 0}$ و $(v_n)_{n \geq 0}$ المعرفتين وفق

$$\begin{cases} v_0 = 1 \\ v_{n+1} = 3v_n + u_n \end{cases} \text{ و } \begin{cases} u_0 = -1 \\ u_{n+1} = 3u_n + v_n \end{cases}$$

والمطلوب: (1) أثبت أن المتتالية $w_n = v_n - u_n$ هندسية، عين حدها الأول وأساسها ثم عبر عن w_n بدلالة n .

(2) أثبت بالتدريج أن $v_n + u_n = 0$ أيأ كان العدد الطبيعي n .

(3) استنتج عبارة v_n و u_n بدلالة n .

ثالثاً: حل المسألة الآتية: (80° درجة)

ليكن لدينا التابع $f(x) = \frac{2x+1}{x+2}$ المعرف على المجال $]-2, +\infty[$ و المطلوب:

(1) أثبت أن التابع f متزايد تماماً على المجال $]-2, +\infty[$.

(2) (a) نعرف المتتالية $(u_n)_{n \geq 0}$ بالعلاقة التدرجية $u_{n+1} = f(u_n)$ و $u_0 = 0$

أثبت بالتدريج أن $1 \geq u_{n+1} > u_n$ ثم استنتج أن المتتالية u_n متقاربة، واحسب نهايتها.

(b) نعرف المتتالية $(v_n)_{n \geq 0}$ بالعلاقة التدرجية $v_{n+1} = f(v_n)$ و $v_0 = 2$

أثبت بالتدريج أن $1 \leq v_{n+1} < v_n$ ثم استنتج أن المتتالية v_n متقاربة، واحسب نهايتها.

(c) هل المتتاليتين u_n و v_n متجاورتين؟ علل ذلك.

انتهى الاختبار الثالث

المتتاليات ونهاية متتالية

أولاً: أجب عن الأسئلة الآتية: (30° درجة لكل سؤال)

السؤال الأول: ادرس اطراد المتتالية $(u_n)_{n \geq 1}$ المعرفة بالعلاقة $u_n = \frac{10^n}{n}$.

السؤال الثاني: أثبت صحة القضية التالية $3n^2 \geq (n+1)^2$ أيأ كان العدد الطبيعي $n \geq 2$.

السؤال الثالث: أثبت أن المتتالية $u_n = \frac{n + (-1)^n}{3n + 1}$ متقاربة.

السؤال الرابع: أثبت أن المتتاليتين $u_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2}$ و $v_n = u_n + \frac{1}{n}$ متجاورتين.

ثانياً: حل التمرينات الآتية: (50° درجة لكل تمرين)

التمرين الأول: $(u_n)_{n \geq 0}$ متتالية معرفة بالعلاقة $u_n = \frac{1}{5} + \frac{2}{5^2} + \frac{3}{5^3} + \frac{4}{5^4} + \dots + \frac{n}{5^n}$ و المطلوب:

(1) أثبت مستعملاً البرهان بالتدرج أن $n \leq 2^n$ أيأ كان العدد الطبيعي n .

(2) أثبت أن $\frac{2}{3}$ عنصراً راجحاً على المتتالية u_n .

التمرين الثاني: a و b و c ثلاث حدود متوالية غير معدومة في متتالية هندسية اساسها q ، كما لدينا $12a$ و $5b$ و $2c$

ثلاث حدود متوالية في متتالية حسابية متناقصة ، احسب q .

ثالثاً: حل المسألة الآتية: (80° درجة)

لتكن المتتالية $(u_n)_{n \geq 0}$ المعرفة بالعلاقة $u_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n + 3)$ و $u_0 = 2$ والمطلوب:

(1) ادرس اطراد المتتالية u_n .

(2) جد α حل المعادلة $x = \frac{1}{2}(x + 3)$.

(b) نعرف المتتالية $v_n = u_n - \alpha$ ، أثبت أن المتتالية v_n هندسية عين حدها الأول وأساسها.

(3) اكتب عبارة v_n بدلالة n ثم استنتج أن عبارة u_n بدلالة n ، ثم احسب $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n$.

(4) نعرف المتتالية S_n في حالة العدد الطبيعي n : $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n = \sum_{k=0}^n u_k$

أثبت أن S_n تكتب بالشكل $S_n = 3n + 1 + \frac{1}{2^n}$ ثم احسب نهايتها.

انتهى الاختبار الرابع

المتتاليات ونهاية متتالية

أولاً:

السؤال الأول:

نفرض القضية $E(n)$: " $2^{3n} - 1 = 7k$ " أو " $2^{3n} - 1 = 7k$ " مضاعف للعدد 7

- نثبت صحة العلاقة $E(0)$ من أجل $n = 0$: $2^{3(0)} - 1 = 1 - 1 = 0 = 7(0)$ محققة.

- نفرض صحة العلاقة $E(n)$ من أجل n : $2^{3n} - 1 = 7k$ محققة.

- نثبت صحة العلاقة $E(n+1)$ من أجل $n+1$: $2^{3(n+1)} - 1 = 7k$ ؟

$$2^{3(n+1)} - 1 = 2^{3n+3} - 1 = 2^{3n} \cdot 2^3 - 1 = (7k+1) \cdot 8 - 1 = 56k + 8 - 1 = 56k + 7 = 7(8k+1)$$

العلاقة محققة من أجل $n+1$ فهي محققة أيًا كان العدد الطبيعي n .

السؤال الثاني:

لدينا $u_5 = -21$ و $u_3 = -11$ ومن العلاقة $u_n - u_m = (n-m)r$ نجد:

$$u_5 - u_3 = (5-3)r \quad \text{حساب } r$$

$$-21 - (-11) = 2r$$

$$2r = -10$$

$$r = -5$$

$$u_0 - u_3 = (0-3)r \quad \text{حساب } u_0$$

$$u_0 - (-11) = -3(-5)$$

$$u_0 = 15 - 11 = 4$$

السؤال الثالث:

$$u_n = \frac{\sqrt{n} + 1}{n + 1}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n} + 1}{n + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}} \right)}{\sqrt{n} \left(\sqrt{n} + \frac{1}{\sqrt{n}} \right)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{\sqrt{n}}}{\sqrt{n} + \frac{1}{\sqrt{n}}} = \frac{1 + 0}{\infty + 0} = 0$$

وبالتالي المتتالية u_n متقاربة من الصفر.

$$S = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \frac{3}{4} + 1 + \frac{5}{4} + \dots + 20$$

$$S = \frac{1+2+3+4+5+\dots+80}{4}$$

$$S = \frac{1}{4}(1+2+3+4+5+\dots+80)$$

مجموع حدود متتالية حسابية أساسها 1 وحدها الأول 1 والأخير 80 وعدد الحدود 80

$$S = \frac{1}{4} \left(\frac{a+l}{2} \cdot n \right) = \frac{1}{4} \left(\frac{1+80}{2} \cdot 80 \right) = \frac{1}{4} (81)(40) = 810$$

تانياً:

التمرين الأول:

$$u_0 = -\frac{3}{2} \text{ و } u_{n+1} = u_n^2 + 4u_n + 2$$

$$E(n): -2 \leq u_n \leq -1 \text{ نفرض القضية (1)}$$

- نثبت صحة العلاقة $E(0)$ من أجل $n=0$: $-2 \leq u_0 = -\frac{3}{2} \leq -1$ محققة.

- نفرض صحة العلاقة $E(n)$ من أجل n : $-2 \leq u_n \leq -1$ محققة.

- نثبت صحة العلاقة $E(n+1)$ من أجل $n+1$: $-2 \leq u_{n+1} \leq -1$ ؟

نفرض التابع $f(x) = x^2 + 4x + 2$ وندرس اطراده

$$f'(x) = 2x + 4$$

$f'(x) = 0$ أي $x = -2$ حيث $f(-2) = -2$ ومنه:

x	$-\infty$	-2	$+\infty$
$f'(x)$		$-$	$+$
$f(x)$		-2	

من الفرض $-2 \leq u_n \leq -1$ وبما أن التابع f متزايد على المجال $[-2, -1]$ فإن:

$$f(-2) \leq f(u_n) \leq f(-1)$$

$$-2 \leq u_{n+1} \leq -1$$

العلاقة محققة من أجل $n+1$ فهي محققة أيّاً كان العدد الطبيعي n .

$$u_{n+1} - u_n = u_n^2 + 4u_n + 2 - u_n = u_n^2 + 3u_n + 2 = (u_n + 2)(u_n + 1) \quad (2)$$

بما أن $u_n \geq -2$ فإن $u_n + 2 \geq 0$ من جهة أخرى بما أن $u_n \leq -1$ فإن $u_n + 1 \leq 0$

$$(u_n + 2)(u_n + 1) \leq 0 \text{ وبالتالي}$$

ومنه $u_{n+1} - u_n \leq 0$ وبالتالي المتتالية u_n متزايدة

(3) بما أن المتتالية u_n متزايدة ومحدودة من الأعلى فهي متقاربة ونهايتها هي حل المعادلة $f(x) = x$

$$x^2 + 4x + 2 = x$$

$$x^2 + 3x + 2 = 0$$

$$(x+2)(x+1) = 0$$

إما $x = -2$ مرفوض لأن المتتالية متزايدة وحدها الأول $-\frac{3}{2}$

أو $x = -1$ مقبول ، وبالتالي $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = -1$

التمرين الثاني:

$$u_0 = 4 \text{ و } u_{n+1} = \frac{u_n}{2} + \frac{2}{u_n}$$

$$f(x) = \frac{x}{2} + \frac{2}{x}$$

(1)

وبالتالي $x^2 = 4$ أي $f'(x) = 0$ ومنه $f(x) = \frac{1}{2} - \frac{2}{x^2} = \frac{x^2 - 4}{2x^2}$

$f(-2) = -2$ حيث $x = -2$ و $f(2) = 2$ حيث $x = 2$

x	$-\infty$	-2	0	2	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	$-$	0	$+$
$f(x)$		-2		2		

التابع f متزايد تماماً على المجال $]2, +\infty[$.

نفرض القضية $E(n): 2 < u_n$

- نثبت صحة العلاقة $E(0)$ من أجل $n = 0$: $2 < u_0 = 4$ محققة.

- نفرض صحة العلاقة $E(n)$ من أجل n : $2 < u_n$ محققة.

- نثبت صحة العلاقة $E(n+1)$ من أجل $n+1$: $2 < u_{n+1}$ ؟

من الفرض $2 < u_n$ وبما أن التابع f متزايد تماماً على المجال $]2, +\infty[$ فإن:

$$f(2) < f(u_n)$$

$$2 < u_{n+1}$$

العلاقة محققة من أجل $n+1$ فهي محققة أيضاً كان العدد الطبيعي n .

$$E(n): u_{n+1} < u_n \text{ نفرض القضية } (2)$$

$$- \text{ نثبت صحة العلاقة } E(0) \text{ من أجل } n=0: u_0 = 4 < u_1 = \frac{5}{2} \text{ محققة.}$$

$$- \text{ نفرض صحة العلاقة } E(n) \text{ من أجل } n: u_{n+1} < u_n \text{ محققة.}$$

$$- \text{ نثبت صحة العلاقة } E(n+1) \text{ من أجل } n+1: u_{n+2} < u_{n+1} \text{ .}$$

من الفرض $u_{n+1} < u_n$ وبما أن التابع f متزايد تماماً على المجال $]2, +\infty[$ فإن:

$$f(u_{n+1}) < f(u_n)$$

$$u_{n+2} < u_{n+1}$$

العلاقة محققة من أجل $n+1$ فهي محققة أياً كان العدد الطبيعي n .

$$(3) \text{ بما أن المتتالية } u_n \text{ متناقصة تماماً و محدودة من الأدنى فهي متقاربة ونهايتها هي حل المعادلة: } f(x) = x$$

$$\text{أي أن } x + \frac{2}{x} = x \text{ ومنه } \frac{x^2 + 4}{2x} = x \text{ وتكافئ } x^2 = 4$$

$$\text{إما } x = -2 \text{ مرفوض لأن المتتالية محدودة من الأدنى بالعدد } 2$$

$$\text{أو } x = 2 \text{ مقبول ومنه } \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 2$$

ثالثاً:

$$u_0 = 1 \text{ و } u_{n+1} = 3u_n - 4$$

$$u_1 = 3u_0 - 4 = 3(1) - 4 = 3 - 4 = -1 \quad (1)$$

$$u_2 = 3u_1 - 4 = 3(-1) - 4 = -3 - 4 = -7$$

نخمن أن المتتالية u_n متناقصة تماماً

$$E(n): u_{n+1} < u_n \text{ ونثبت بالتدريج صحة القضية}$$

$$- \text{ نثبت صحة العلاقة } E(0) \text{ من أجل } n=0: u_0 = 1 < u_1 = -1 \text{ محققة.}$$

$$- \text{ نفرض صحة العلاقة } E(n) \text{ من أجل } n: u_{n+1} < u_n \text{ محققة.}$$

$$- \text{ نثبت صحة العلاقة } E(n+1) \text{ من أجل } n+1: u_{n+2} < u_{n+1} \text{ .}$$

$$\text{من الفرض } u_{n+1} < u_n$$

$$3u_{n+1} < 3u_n$$

$$3u_{n+1} - 4 < 3u_n - 4$$

$$u_{n+2} < u_{n+1}$$

العلاقة محققة من أجل $n+1$ فهي محققة أياً كان العدد الطبيعي n .

$$(2) \text{ وبالتالى } v_n = u_{n+1} - u_n$$

$$v_{n+1} = u_{n+2} - u_{n+1} = 3u_{n+1} - 4 - 3u_n + 4 = 3(u_{n+1} - u_n) = 3v_n$$

$$v_0 = u_1 - u_0 = -1 - 1 = -2 \text{ وحدها الأول } q = 3 \text{ هندسية أساسها } 3$$

$$v_n = v_0 \cdot q^n = -2(3)^n \quad \text{وحدها العام} \quad (3)$$

$$v_n = u_{n+1} - u_n \quad \text{من جهة أخرى لدينا}$$

$$-2(3)^n = 3u_n - 4 - u_n$$

$$2u_n = 4 - 2(3)^n$$

$$u_n = 2 - 3^n$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 3^n = +\infty \quad \text{وبالتالي } q = 3 > 1 \quad \text{هندسية أساسها } 3^n \quad (4)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (2 - 3^n) = -\infty$$

وبالتالي المتتالية u_n متباعدة إلى $-\infty$.

$$S_n = v_0 + v_1 + v_2 + \dots + v_n \quad (5)$$

مجموع حدود متتالية هندسية أساسها $q = 3$ وحدها الأول $v_0 = -2$ وعدد الحدود $n + 1$

$$S_n = a \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q} = -2 \cdot \frac{1 - 3^{n+1}}{1 - 3} = 1 - 3^{n+1}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = -\infty$$

انتهى حل النموذج الأول

المتتاليات ونهاية متتالية

أولاً:

السؤال الأول:

لدينا $u_3 = -\frac{1}{4}$ و $u_5 = -\frac{1}{16}$ ومن العلاقة $\frac{u_n}{u_m} = q^{n-m}$ نجد:

$$\text{حساب } q: \frac{u_5}{u_3} = q^{5-3} \text{ ويكافئ } \frac{u_5}{u_3} = \frac{-\frac{1}{16}}{-\frac{1}{4}} = \frac{1}{4} \text{ وبالتالي: } q^2 = \frac{1}{4}$$

إما $q = -\frac{1}{2}$ مرفوض لأن المتتالية عندها تصبح متناوبة وليست متناقصة أو $q = \frac{1}{2}$ مقبول

$$\text{حساب } u_0: \frac{u_3}{u_0} = q^{3-0} \text{ ويكافئ } \frac{u_3}{u_0} = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8} \text{ وبالتالي } u_0 = -\frac{1}{4} \cdot (8) = -2$$

السؤال الثاني:

$$u_0 = 0 \text{ و } u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n}$$

نفرض القضية $E(n): 0 \leq u_n \leq 2$

- نثبت صحة العلاقة $E(0)$ من أجل $n = 0$ $0 \leq u_0 = 0 \leq 2$ محققة.
- نفرض صحة العلاقة $E(n)$ من أجل $n: 0 \leq u_n \leq 2$ محققة.
- نثبت صحة العلاقة $E(n+1)$ من أجل $n+1: 0 \leq u_{n+1} \leq 2$.

من الفرض $0 \leq u_n \leq 2$ نجد $2 \leq 2 + u_n \leq 4$ وبالتالي $\sqrt{2} \leq \sqrt{2 + u_n} \leq \sqrt{4} = 2$ أي أن $0 \leq u_{n+1} \leq 2$ العلاقة محققة من أجل $n+1$ فهي محققة أيًا كان العدد الطبيعي n .

السؤال الثالث:

$$u_n = \frac{3^n - 5^n}{2^n + 5^n} : \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n - 5^n}{2^n + 5^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5^n \left(\left(\frac{3}{5}\right)^n - 1 \right)}{5^n \left(\left(\frac{2}{5}\right)^n + 1 \right)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{3}{5}\right)^n - 1}{\left(\frac{2}{5}\right)^n + 1}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3}{5}\right)^n = 0 \text{ هندية أساسها } -1 < q = \frac{3}{5} < 1 \text{ فإن } \left(\frac{3}{5}\right)^n$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{5}\right)^n = 0 \text{ هندية أساسها } -1 < q = \frac{2}{5} < 1 \text{ فإن } \left(\frac{2}{5}\right)^n$$

$$\text{وبالتالي } \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \frac{0-1}{0+1} = -1 \text{ أي أن المتتالية } u_n \text{ متقاربة من } -1.$$

التابع الممثل للمتتالية $u_n = 1 - \frac{1}{n}$ هو $f(x) = 1 - \frac{1}{x}$ ومتزايد تماماً لأن $f'(x) = \frac{1}{x^2} > 0$

فالمتتالية u_n متزايدة تماماً

التابع الممثل للمتتالية $v_n = 1 + \frac{1}{n^2}$ هو $g(x) = 1 + \frac{1}{x^2}$ ومتناقص تماماً على المجال $]0, +\infty[$ لأن $g'(x) = -\frac{2}{x^3} > 0$

فالمتتالية v_n متناقصة تماماً

من جهة أخرى $\lim_{n \rightarrow \infty} (u_n - v_n) = 1 - 1 = 0$

فالمتتاليتين u_n و v_n متجاورتين ونهايتهما المشتركة 1

ثانياً:

التمرين الأول:

بما أن $n \geq 1$ ومنه $n+1 \geq 2$

فإن $\frac{1}{n} \leq 1$ و $\frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{2}$ وبالتالي $\frac{1}{n(n+1)} \leq \frac{1}{2}$ أي $u_n \leq \frac{1}{2}$

من جهة أخرى بما أن $n(n+1) > 0$ فإن $\frac{1}{n(n+1)} > 0$ أي $u_n > 0$

وبالتالي فإن $0 < u_n \leq \frac{1}{2}$

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{a}{n} + \frac{b}{n+1} \quad (2)$$

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{a(n+1) + bn}{n(n+1)}$$

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{an + a + bn}{n(n+1)}$$

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{(a+b)n + a}{n(n+1)}$$

بالمطابقة نجد $a = 1$ و $a + b = 0$ أي أن $b = -1$

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \text{ وبالتالي يكون}$$

$$u_1 = 1 - \frac{1}{2}$$

$$u_2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}$$

$$u_3 = \frac{1}{3} - \frac{1}{4}$$

⋮

$$u_{n-1} = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}$$

$$u_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

بالجمع نجد:

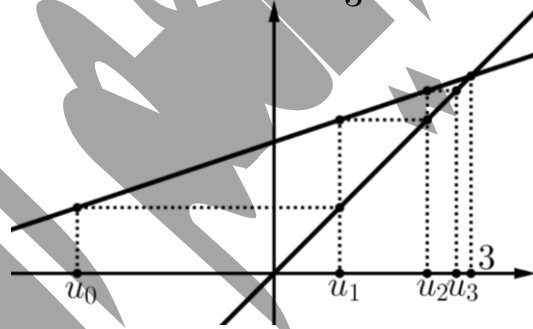
$$S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n = 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n+1-1}{n+1} = \frac{n}{n+1}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = 1$$

التمرين الثاني:

$$u_0 = -3 \text{ و } u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + 2$$

(1)



نخمن أن المتتالية u_n متزايدة ونهايتها المحتملة هي 3

$$E(n): u_{n+1} > u_n \text{ نفرض القضية}$$

(2)

- نثبت صحة العلاقة $E(0)$ من أجل $n = 0$: $u_1 = 1 > u_0 = -3$ محققة.

- نفرض صحة العلاقة $E(n)$ من أجل n : $u_{n+1} > u_n$ محققة.

- نثبت صحة العلاقة $E(n+1)$ من أجل $n+1$: $u_{n+2} > u_{n+1}$.?

من الفرض $u_{n+1} > u_n$

$$\frac{1}{3}u_{n+1} > \frac{1}{3}u_n$$

$$\frac{1}{3}u_{n+1} + 2 > \frac{1}{3}u_n + 2$$

$$u_{n+2} < u_{n+1}$$

العلاقة محققة من أجل $n+1$ فهي محققة أيًا كان العدد الطبيعي n .

نفرض القضية $E(n): u_n < 3$

- نثبت صحة العلاقة $E(0)$ من أجل $n = 0$: $u_0 = -3 < 3$ محققة.

- نفرض صحة العلاقة $E(n)$ من أجل n : $u_n < 3$ محققة.

- نثبت صحة العلاقة $E(n+1)$ من أجل $n+1$: $u_{n+1} < 3$ ؟

من الفرض $u_n < 3$

$$\frac{1}{3}u_n < 1$$

$$\frac{1}{3}u_n + 2 < 3$$

$$u_{n+1} < 3$$

العلاقة محققة من أجل $n+1$ فهي محققة أيضاً كان العدد الطبيعي n .

بما أن المتتالية u_n متزايدة تماماً و محدودة من الأعلى فهي متقاربة ونهايتها هي حل المعادلة: $f(x) = x$

$$\text{أي أن } \frac{1}{3}x + 2 = x \text{ ومنه } \frac{1}{3}x - x = -2 \text{ وتكافئ } -\frac{2}{3}x = -2 \text{ وبالتالي } x = 3$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 3 \text{ ومنه}$$

ثالثاً:

$$u_0 = 2 \text{ و } u_{n+1} = \frac{-1 + 2u_n}{u_n}$$

نفرض القضية $E(n): 1 < u_{n+1} < u_n$

- نثبت صحة العلاقة $E(0)$ من أجل $n = 0$: $u_0 = 2 < \frac{3}{2} < u_1 = 1$ محققة.

- نفرض صحة العلاقة $E(n)$ من أجل n : $1 < u_{n+1} < u_n$ محققة.

- نثبت صحة العلاقة $E(n+1)$ من أجل $n+1$: $1 < u_{n+2} < u_{n+1}$ ؟

$$\text{التابع } f(x) = \frac{-1 + 2x}{x} \text{ متزايد تماماً لأن } f'(x) = \frac{1}{x^2} > 0$$

من الفرض $1 < u_{n+1} < u_n$

وبما أن التابع f متزايد تماماً فإن: $f(1) < f(u_{n+1}) < f(u_n)$

$$1 < u_{n+2} < u_{n+1}$$

العلاقة محققة من أجل $n+1$ فهي محققة أيضاً كان العدد الطبيعي n .

• لدينا $u_{n+1} < u_n$ وبالتالي المتتالية u_n متناقصة تماماً

لدينا $1 < u_n$ وبالتالي المتتالية u_n محدودة من الأدنى فهي متقاربة.

$$v_n = \frac{1}{u_n - 1} \quad (2)$$

$$v_{n+1} = \frac{1}{u_{n+1} - 1} = \frac{1}{\frac{-1 + 2u_n}{u_n} - 1} = \frac{1}{\frac{-1 + 2u_n - u_n}{u_n}} = \frac{1}{\frac{u_n - 1}{u_n}} = \frac{u_n}{u_n - 1}$$

$$v_{n+1} - v_n = \frac{u_n}{u_n - 1} - \frac{1}{u_n - 1} = \frac{u_n - 1}{u_n - 1} = 1$$

$$v_0 = \frac{1}{u_0 - 1} = 1 \text{ وحدها الأول } r = 1 \text{ حسابية أساسها } r = 1$$

$$v_n = v_0 + nr = 1 + n \text{ وحدها العام } r = 1$$

$$v_n = \frac{1}{u_n - 1} \text{ من جهة أخرى لدينا}$$

$$u_n - 1 = \frac{1}{v_n}$$

$$u_n = \frac{1}{v_n} + 1$$

$$u_n = \frac{1}{1+n} + 1 = \frac{n+2}{n+1}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 1$$

$$u_n - 2 = \frac{n+2}{n+1} - 2 = \frac{n+2 - 2n - 2}{n+1} = \frac{-n}{n+1} \leq 0$$

$$u_n \leq 2 \text{ أي أن}$$

وبالتالي المتتالية u_n محدودة من الأعلى بالعدد 2

ووجدنا سابقاً أن المتتالية u_n محدودة من الأدنى بالعدد 1

وبالتالي المتتالية u_n محدودة أي $1 < u_n \leq 2$

$$u_n - v_n = \frac{n+2}{n+1} - (n+1)$$

$$u_n - v_n = \frac{n+2 - (n+1)^2}{n+1}$$

$$u_n - v_n = \frac{n+2 - n^2 - 2n - 1}{n+1}$$

$$u_n - v_n = \frac{-n^2 - n + 1}{n+1}$$

(5)

$$-n^2 - n + 1 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 1 - 4(-1)(1) = 5$$

$$n_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1 - \sqrt{5}}{-2} \approx 0.6 \quad \text{و} \quad n_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1 + \sqrt{5}}{-2} \approx -1.6$$

n	$-\infty$	-1.6	0.6	$+\infty$	
$-n^2 - n + 1$	-	0	+	0	-

من أجل $n \geq 1$ نجد أن $-n^2 - n + 1 < 0$

ولدينا $n + 1 > 0$

$$\frac{-n^2 - n + 1}{n + 1} < 0 \quad \text{ومنه}$$

$$u_n - v_n < 0 \quad \text{أي أن}$$

$$u_n < v_n \quad \text{وبالتالي}$$

انتهى حل النموذج الثاني

المتتاليات ونهاية متتالية

أولاً:

السؤال الأول:

$$u_n = \frac{n - 3 \sin n}{n}$$

$$-1 \leq \sin n \leq 1$$

$$-3 \leq -3 \sin n \leq 3$$

$$n - 3 \leq n - 3 \sin n \leq n + 3$$

$$\frac{n-3}{n} \leq u_n \leq \frac{n+3}{n} \text{ أي أن } \frac{n-3}{n} \leq \frac{n-3 \sin n}{n} \leq \frac{n+3}{n} \text{ بما أن } n > 0 \text{ فإن}$$

$$\text{بحسب مبرهنة الإحاطة } \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 1 \text{ فإن } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n-3}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+3}{n} = 1 \text{ بما أن}$$

وبالتالي المتتالية u_n متقاربة من الواحد.

السؤال الثاني:

$$u_0 = 7 \text{ و } u_{n+1} = 10u_n - 18$$

$$E(n): u_n = 5 \cdot 10^n + 2 \text{ نفرض القضية}$$

- نثبت صحة العلاقة $E(0)$ من أجل $n = 0$: $u_0 = 5 \cdot 10^0 + 2 = 5 + 2 = 7$ محققة.

- نفرض صحة العلاقة $E(n)$ من أجل n : $u_n = 5 \cdot 10^n + 2$ محققة.

- نثبت صحة العلاقة $E(n+1)$ من أجل $n+1$: $u_{n+1} = 5 \cdot 10^{n+1} + 2$.

$$u_{n+1} = 10u_n - 18 = 10(5 \cdot 10^n + 2) - 18 = 5 \cdot 10^{n+1} + 20 - 18 = 5 \cdot 10^{n+1} + 2$$

العلاقة محققة من أجل $n+1$ فهي محققة أياً كان العدد الطبيعي n .

السؤال الثالث:

$$u_n = \frac{6}{n^2 + 2n + 4}$$

$$u_n - 2 = \frac{6}{n^2 + 2n + 4} - 2 = \frac{6 - 2n^2 - 4n - 8}{n^2 + 2n + 4} = \frac{-2n^2 - 4n - 2}{n^2 + 2n + 4} = \frac{-2(n^2 + 2n + 1)}{n^2 + 2n + 1 + 3} = \frac{-2(n+1)^2}{(n+1)^2 + 3}$$

$$(n+1)^2 + 3 > 0 \text{ و } -2(n+1)^2 < 0 \text{ بما أن}$$

$$u_n - 2 < 0 \text{ أي أن } \frac{-2(n+1)^2}{(n+1)^2 + 3} < 0 \text{ وبالتالي}$$

$$u_n < 2$$

وبالتالي المتتالية u_n محدودة من الأعلى بالعدد 2

$$u_n = 2 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{8} - \dots - \frac{1}{2^n}$$

$$u_n = 2 - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2^n} \right)$$

مجموع حدود متتالية هندسية أساسها $q = \frac{1}{2}$ وحدها الأول $\frac{1}{2}$ وعدد الحدود n وبالتالي:

$$u_n = 2 - a \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q} = 2 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}} = 2 - \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right) = 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0 \text{ ومنه } -1 \leq q = \frac{1}{2} \leq 1 \text{ هندسية أساسها } \left(\frac{1}{2}\right)^n \text{ بما أن}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 1 \text{ وبالتالي}$$

ثانياً:

التمرين الأول:

$$u_n = e + \frac{e}{1!} + \frac{e}{2!} + \dots + \frac{e}{n!}$$

$$E(n): \frac{1}{n!} \leq \frac{1}{2^{n-1}} \text{ نفرض الفضية} \quad (1)$$

$$\text{- نثبت صحة العلاقة } E(0) \text{ من أجل } n = 0: \frac{1}{1!} = 1 \leq \frac{1}{2^{1-1}} = 1 \text{ محققة.}$$

$$\text{- نفرض صحة العلاقة } E(n) \text{ من أجل } n: \frac{1}{n!} \leq \frac{1}{2^{n-1}} \text{ محققة.}$$

$$\text{- نثبت صحة العلاقة } E(n+1) \text{ من أجل } n+1: \frac{1}{(n+1)!} \leq \frac{1}{2^n} \text{ .}$$

$$(1) \dots \frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{2} \text{ لدينا } n \geq 1 \text{ أي } n+1 \geq 2 \text{ وبالتالي}$$

$$(2) \dots \frac{1}{n!} \leq \frac{1}{2^{n-1}} \text{ ومن الفرض لدينا}$$

بما المقادير في المتراجحتين (1) و (2) موجبين تماماً فيمكن الجداء حد بحد

$$\frac{1}{(n+1)!} \leq \frac{1}{2^n} \text{ وبالتالي } \frac{1}{n+1} \cdot \frac{1}{n!} \leq \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2^{n-1}}$$

العلاقة محققة من أجل $n+1$ فهي محققة أيّاً كان العدد الطبيعي n .

$$u_n = e + \frac{e}{1!} + \frac{e}{2!} + \dots + \frac{e}{n!} \leq e + \underbrace{\frac{e}{1} + \frac{e}{2} + \frac{e}{2^2} + \dots + \frac{e}{2^{n-1}}}_{(2)}$$

مجموع حدود متتالية هندسية أساسها $q = \frac{1}{2}$ وحدها الأول e وعدد الحدود $n = 0 + 1 + \dots + n - 1$ ، وبالتالي:

$$u_n \leq e + e \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}} = e + 2e \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right)$$

$$u_n \leq e + 2e \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right) < 3e \text{ وبالتالي } 2e \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right) < 2e \text{ أي } 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n < 1 \text{ ومنه } -\left(\frac{1}{2}\right)^n < 0 \text{ لدينا}$$

$$u_n < 3e$$

وبالتالي فإن $3e$ حد راجح على المتتالية u_n

$$\bullet \text{ من جهة أخرى لدينا } u_{n+1} - u_n = \frac{e}{(n+1)!} > 0 \text{ أي أن المتتالية } u_n \text{ متزايدة تماماً.}$$

بما أن المتتالية u_n متزايدة تماماً ومحدودة من الأعلى فهي متقاربة.

التمرين الثاني:

$$w_n = v_n - u_n \quad (1)$$

$$w_{n+1} = v_{n+1} - u_{n+1}$$

$$w_{n+1} = 3v_n + u_n - 3u_n - v_n$$

$$w_{n+1} = 2v_n - 2u_n = 2(v_n - u_n)$$

$$w_{n+1} = 2w_n$$

وبالتالي المتتالية w_n هندسية أساسها 2 وحدها الأول $w_0 = v_0 - u_0 = 2$

$$w_n = w_0 \cdot q^n = 2 \cdot 2^n = 2^{n+1} \text{ وحدها العام}$$

$$E(n): v_n + u_n = 0 \text{ نفرض القضية} \quad (1)$$

- نثبت صحة العلاقة $E(0)$ من أجل $n = 0$: $v_0 + u_0 = 1 - 1 = 0$ محققة.

- نفرض صحة العلاقة $E(n)$ من أجل n : $v_n + u_n = 0$ محققة.

- نثبت صحة العلاقة $E(n+1)$ من أجل $n+1$: $v_{n+1} + u_{n+1} = 0$ ؟

$$v_{n+1} + u_{n+1} = 3v_n + u_n + 3u_n + v_n$$

$$v_{n+1} + u_{n+1} = 4(u_n + v_n) = 4(0) = 0$$

العلاقة محققة من أجل $n+1$ فهي محققة أيًا كان العدد الطبيعي n .

وجدنا سابقاً أن $v_n - u_n = w_n = 2^{n+1}$ (1)...

و $v_n + u_n = 0$ (2)...

بجمع (1) و (2) نجد $2v_n = 2^{n+1}$ وبالتالي $v_n = 2^n$

ومنه $u_n = -v_n = -2^n$

ثالثاً:

$$f(x) = \frac{2x+1}{x+2} \text{ و }]-2, +\infty[$$

$$f'(x) = \frac{3}{(x+2)^2} > 0 \text{ التابع } f \text{ متزايد تماماً لأن } (1)$$

$$u_{n+1} = f(u_n) = \frac{2u_n+1}{u_n+2} \text{ و } u_0 = 0 \quad (a) \quad (2)$$

نفرض القضية $E(n): u_n < u_{n+1} \leq 1$

- نثبت صحة العلاقة $E(0)$ من أجل $n = 0$ $u_0 = 0 < u_1 = \frac{1}{2} \leq 1$ محققة.

- نفرض صحة العلاقة $E(n)$ من أجل n $u_n < u_{n+1} \leq 1$ محققة.

- نثبت صحة العلاقة $E(n+1)$ من أجل $n+1$ $u_{n+1} < u_{n+2} \leq 1$ ؟

من الفرض $u_n < u_{n+1} \leq 1$ وبما أن التابع f متزايد تماماً فإن:

$$f(u_n) < f(u_{n+1}) \leq f(1)$$

$$u_{n+1} < u_{n+2} \leq 1$$

العلاقة محققة من أجل $n+1$ فهي محققة أيّاً كان العدد الطبيعي n .

• لدينا $u_n < u_{n+1}$ وبالتالي المتتالية u_n متزايدة تماماً

لدينا $u_n \leq 1$ وبالتالي المتتالية u_n محدودة من الأعلى فهي متقاربة ونهايتها هي حل المعادلة:

$$f(x) = x$$

$$\text{أي أن } \frac{2x+1}{x+2} = x \text{ ومنه } 2x+1 = x^2 + 2x \text{ وتكافئ } x^2 = 1$$

إما $x = -1$ مرفوض لأن المتتالية متزايدة وحدها الأول صفر.

$$\text{أو } x = 1 \text{ مقبول ومنه } \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 1$$

$$v_{n+1} = f(v_n) = \frac{2v_n + 1}{v_n + 2} \text{ و } v_0 = 2 \quad (b)$$

$E(n): 1 \leq v_{n+1} < v_n$ نفرض القضية

- نثبت صحة العلاقة $E(0)$ من أجل $n = 0$: $1 \leq v_1 = \frac{5}{4} < v_0 = 2$ محققة.

- نفرض صحة العلاقة $E(n)$ من أجل n : $1 \leq v_{n+1} < v_n$ محققة.

- نثبت صحة العلاقة $E(n+1)$ من أجل $n+1$: $1 \leq v_{n+2} < v_{n+1}$.

من الفرض $1 \leq v_{n+1} < v_n$ وبما أن التابع f متزايد تماماً فإن:

$$f(1) \leq f(v_{n+1}) < f(v_n)$$

$$1 \leq v_{n+2} < v_{n+1}$$

العلاقة محققة من أجل $n+1$ فهي محققة أيأ كان العدد الطبيعي n .

• لدينا $v_{n+1} < v_n$ وبالتالي المتتالية v_n متناقصة تماماً

لدينا $1 \leq v_n$ وبالتالي المتتالية u_n محدودة من الأدنى فهي متقاربة ونهايتها هي حل المعادلة:

$$f(x) = x$$

$$\text{أي أن } \frac{2x+1}{x+2} = x \text{ ومنه } 2x+1 = x^2 + 2x \text{ وتكافئ } x^2 = 1$$

إما $x = -1$ مرفوض لأن المتتالية متزايدة محدودة من الأدنى بالعدد 1

$$\text{أو } x = 1 \text{ مقبول ومنه } \lim_{n \rightarrow \infty} v_n = 1$$

لدينا المتتالية u_n متزايدة تماماً و المتتالية v_n متناقصة تماماً

$$\text{من جهة أخرى لدينا } \lim_{n \rightarrow \infty} (u_n - v_n) = 1 - 1 = 0$$

وبالتالي المتتاليتين u_n و v_n متجاورتين

(c)

انتهى حل النموذج الثالث

المتتاليات ونهاية متتالية

أولاً:

السؤال الأول:

لدينا $u_n = \frac{10^n}{n}$ ومن جهة أخرى لدينا $u_{n+1} = \frac{10^{n+1}}{n+1}$ وبالتالي:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\frac{10^{n+1}}{n+1}}{\frac{10^n}{n}} = \frac{10^{n+1} \cdot n}{(n+1) \cdot 10^n} = \frac{10n}{n+1}$$

لدينا $n \geq 1$ ومنه $n+1 > 9n+1 \geq 9n+1 > n+1$ أي $10n > n+1$ وبالتالي $\frac{10n}{n+1} > 1$ أي $\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$

المتتالية u_n متزايدة تماماً

السؤال الثاني:

نفرض القضية $E(n): 3n^2 \geq (n+1)^2$ حيث $n \geq 2$

- نثبت صحة العلاقة $E(2)$ من أجل $n = 2: 12 \geq 9$ محققة.

- نفرض صحة العلاقة $E(n)$ من أجل $n: 3n^2 \geq (n+1)^2$ محققة.

- نثبت صحة العلاقة $E(n+1)$ من أجل $n+1: 3(n+1)^2 \geq (n+2)^2$.

$$3(n+1)^2 = 3(n^2 + 2n + 1) = 3n^2 + 6n + 3 \geq (n+1)^2 + 6n + 3 = n^2 + 2n + 1 + 6n + 3 = n^2 + 8n + 4 \geq n^2 + 4n + 4 = (n+2)^2$$

العلاقة محققة من أجل $n+1$ فهي محققة أيأ كان العدد الطبيعي n .

السؤال الثالث:

$$u_n = \frac{n + (-1)^n}{3n + 1}$$

$$-1 \leq (-1)^n \leq 1$$

$$n - 1 \leq n + (-1)^n \leq n + 1$$

بما أن $3n + 1 > 0$ فإن $\frac{n-1}{3n+1} \leq \frac{n+(-1)^n}{3n+1} \leq \frac{n+1}{3n+1}$ أي أن $\frac{n-1}{3n+1} \leq u_n \leq \frac{n+1}{3n+1}$

بما أن $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n-1}{3n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{3n+1} = \frac{1}{3}$ فإن $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \frac{1}{3}$ حسب مبرهنة الإحاطة

وبالتالي المتتالية u_n متقاربة من العدد $\frac{1}{3}$

$$u_{n+1} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} + \dots + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2} \text{ و } u_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} + \dots + \frac{1}{n^2}$$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(n+1)^2} > 0$$

وبالتالي المتتالية u_n متزايدة تماماً

$$v_{n+1} = u_{n+1} + \frac{1}{n+1} \text{ و } v_n = u_n + \frac{1}{n}$$

$$v_{n+1} - v_n = u_{n+1} + \frac{1}{n+1} - u_n - \frac{1}{n}$$

$$v_{n+1} - v_n = u_{n+1} - u_n + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n}$$

$$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n}$$

$$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{n+1}{(n+1)^2} - \frac{1}{n}$$

$$v_{n+1} - v_n = \frac{n+2}{(n+1)^2} - \frac{1}{n}$$

$$v_{n+1} - v_n = \frac{n^2 + 2n - n^2 - 2n - 1}{n(n+1)^2} = -\frac{1}{n(n+1)^2} < 0$$

وبالتالي المتتالية v_n متناقصة تماماً

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (v_n - u_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0 \text{ و}$$

وبالتالي المتتاليتين u_n و v_n متجاورتين

ثانياً:

التمرين الأول:

$$u_n = \frac{1}{5} + \frac{2}{5^2} + \frac{3}{5^3} + \dots + \frac{n}{5^n}$$

$$E(n): n \leq 2^n \text{ نفرض القضية } (1)$$

- نثبت صحة العلاقة $E(0)$ من أجل $0 \leq 1: n = 0$ محققة.

- نفرض صحة العلاقة $E(n)$ من أجل $n \leq 2^n$ محققة.

- نثبت صحة العلاقة $E(n+1)$ من أجل $n+1 \leq 2^{n+1}$.

$$n+1 \leq 2^n + 1 \leq 2^n + 2^n = 2 \cdot 2^n = 2^{n+1}$$

العلاقة محققة من أجل $n+1$ فهي محققة أيّاً كان العدد الطبيعي n .

$$u_n = \frac{1}{5} + \frac{2}{5^2} + \frac{3}{5^3} + \dots + \frac{n}{5^n} \leq \frac{2}{5} + \frac{2^2}{5^2} + \frac{2^3}{5^3} + \frac{2^4}{5^4} + \dots + \frac{2^n}{5^n} = \frac{2}{5} + \underbrace{\left(\frac{2}{5}\right)^2 + \left(\frac{2}{5}\right)^3 + \left(\frac{2}{5}\right)^4 + \dots + \left(\frac{2}{5}\right)^n}_{(2)}$$

مجموع حدود متتالية هندسية أساسها $q = \frac{2}{5}$ وحدها الأول $\frac{2}{5}$ وعدد الحدود $n - 1 + 1 = n$ ، وبالتالي:

$$u_n \leq \frac{2}{5} \cdot \frac{1 - \left(\frac{2}{5}\right)^n}{1 - \frac{2}{5}} = \frac{2}{3} \left(1 - \left(\frac{2}{5}\right)^n\right)$$

$$u_n \leq \frac{2}{3} \left(1 - \left(\frac{2}{5}\right)^n\right) < \frac{2}{3} \quad \text{وبالتالي} \quad \frac{2}{3} \left(1 - \left(\frac{2}{5}\right)^n\right) < \frac{2}{3} \quad \text{أي أن} \quad 1 - \left(\frac{2}{5}\right)^n < 1 \quad \text{ومنه} \quad -\left(\frac{2}{5}\right)^n < 0$$

$$u_n < \frac{2}{3}$$

وبالتالي فإن $\frac{2}{3}$ حد راجع على المتتالية u_n .

التمرين الثاني:

a و b و c ثلاث حدود متوالية في متتالية هندسية أساسها q أي أن:

$$(1) \dots \quad c = bq = aq^2 \quad \text{و} \quad b = aq \quad \text{و} \quad a$$

$12a$ و $5b$ و $2c$ ثلاث حدود متوالية في متتالية حسابية متناقصة أي أن:

$$(2) \dots \quad 12a + 2c = 10b$$

نعوض (1) في (2) فنجد:

$$12a + 2aq^2 = 10aq$$

بما أن $a \neq 0$ نقسم على $2a$ فنجد:

$$6 + q^2 = 5q$$

$$q^2 - 5q + 6 = 0$$

$$(q - 3)(q - 2) = 0$$

إما $q = 3$ ومنه تكون حدود المتتالية الهندسية a و $b = 3a$ و $c = 9a$

و حدود المتتالية الحسابية $12a$ و $5b = 5(3a) = 15a$ و $2c = 2(9a) = 18a$ متزايدة ، إذا $q = 3$ مرفوض.

أو $q = 2$ ومنه تكون حدود المتتالية الهندسية a و $b = 2a$ و $c = 4a$

و حدود المتتالية الحسابية $12a$ و $5b = 5(2a) = 10a$ و $2c = 2(4a) = 8a$ متناقصة ، إذا $q = 3$ مقبول.

$$u_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n + 3) \text{ و } u_0 = 2$$

$$u_1 = \frac{1}{2}(u_0 + 3) = \frac{1}{2}(2 + 3) = \frac{5}{2} \quad (1)$$

نخمن أن المتتالية u_n متزايدة تماماً

ونثبت بالتدرج صحة القضية $E(n): u_n < u_{n+1}$

- نثبت صحة العلاقة $E(0)$ من أجل $n = 0$: $u_0 = 2 < u_1 = \frac{5}{2}$ محققة.

- نفرض صحة العلاقة $E(n)$ من أجل n : $u_n < u_{n+1}$ محققة.

- نثبت صحة العلاقة $E(n+1)$ من أجل $n+1$: $u_{n+1} < u_{n+2}$.

من الفرض $u_n < u_{n+1}$

$$u_n + 3 < u_{n+1} + 3$$

$$\frac{1}{2}(u_n + 3) < \frac{1}{2}(u_{n+1} + 3)$$

$$u_{n+1} < u_{n+2}$$

العلاقة محققة من أجل $n+1$ فهي محققة أياً كان العدد الطبيعي n .

$$x = \frac{1}{2}(x + 3) \quad (a) \quad (2)$$

$$2x = x + 3 \text{ وبالتالي حل المعادلة } \alpha = 3$$

$$v_n = u_n - \alpha = u_n - 3 \quad (b)$$

$$v_{n+1} = u_{n+1} - \alpha = u_{n+1} - 3 = \frac{1}{2}(u_n + 3) - 3 = \frac{1}{2}u_n + \frac{3}{2} - 3 = \frac{1}{2}u_n - \frac{3}{2} = \frac{1}{2}(u_n - 3) = \frac{1}{2}v_n$$

وبالتالي v_n هندسية أساسها $q = \frac{1}{2}$ وحدها الأول $v_0 = u_0 - 3 = 2 - 3 = -1$

$$v_n = v_0 \cdot q^n = -\left(\frac{1}{2}\right)^n \text{ وحدها العام} \quad (3)$$

من جهة أخرى لدينا $v_n = u_n - 3$

$$u_n = v_n + 3$$

$$u_n = 3 - \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0 \text{ وبالتالي } -1 < q = \frac{1}{2} < 1 \text{ هندسية أساسها } \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 3 - 0 = 3 \text{ أي أن}$$

$$S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n = \sum_{k=0}^n u_k \quad (4)$$

$$S_n = v_0 + 3 + v_1 + 3 + v_2 + 3 + \dots + v_n + 3$$

$$S_n = \underbrace{v_0 + v_1 + v_2 + \dots + v_n}_{n+1} + 3(n+1)$$

$$S_n = (-1) \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}} + 3(n+1)$$

$$S_n = -2 \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \right) + 3(n+1)$$

$$S_n = -2 + \frac{2}{2^{n+1}} + 3n + 3$$

$$S_n = 3n + 1 + \frac{1}{2^n}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (3n + 1) + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^n} = +\infty + 0 = +\infty$$

انتهى حل النموذج الرابع

المتتاليات ونهاية متتالية