السؤال الأول :

1) $f(-2)=3$

قيمة حدية كبرى

$f(2)=0$

قيمة حدية صغرى

2) التابع f لا يقبل مقارب مائل في جوار $+\infty$ لأن $\lim_{x\to+\infty} f(x)=2$ و لا يقبل مقارب مائل في جوار $-\infty$ لأن $\lim_{x\to-\infty} f(x)=0$

3) $\lim_{x\to+\infty} f(f(x)) = \lim_{x\to 2} f(x) = 0$

4) حل وحيد

السؤال الثاني :

$f(x)=x\sqrt{x}$

التابع f معرف على المجال $[0,+\infty[$ و اشتقاقي على المجال $]0,+\infty[$ ~~ندرس~~ ندرس قابلية الاشتقاق عند الصفر

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} \frac{x\sqrt{x}}{x}$$

$$= \lim_{x\to 0} \sqrt{x} = 0$$

و بالتالي التابع f اشتقاقي عند الصفر فهو اشتقاقي على المجال $[0,+\infty[$ و تابعه المشتق

$$f'(x) = \sqrt{x} + \frac{1}{2\sqrt{x}}x = \sqrt{x} + \frac{\sqrt{x}}{2}$$

$$= \frac{3}{2}\sqrt{x}$$

السؤال الثالث :

$$g(x) = \tan(2x)$$

$$g\left(\frac{\pi}{8}\right) = \tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$$

$$g'(x) = 2(1+\tan^2(2x))$$

$$g'\left(\frac{\pi}{8}\right) = 2(1+1) = 4$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{8}} \left(\frac{\tan(2x)-1}{2x-\frac{\pi}{4}}\right) = \lim_{x\to\frac{\pi}{8}} \frac{g(x)-g(\frac{\pi}{8})}{2(x-\frac{\pi}{8})}$$

حسب تعريف العدد المشتق

$$= \frac{1}{2}\left(g'\left(\frac{\pi}{8}\right)\right) = \frac{1}{2}(4) = 2$$

السؤال الرابع :

$$f(x) = \frac{x^2+3x+5\sin x}{x}$$

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \frac{0}{0}$$

حالة عدم تعيين

$$f(x) = x+3+5\frac{\sin x}{x}$$

$$\lim_{x\to 0} f(x) = 8$$

$$\lim_{x\to 0} (f(x)-y_\Delta) = \frac{x^2+3x+5\sin x}{x} - (x+3)$$

$$= \frac{\cancel{x^2}+\cancel{3x}+5\sin x - \cancel{x^2} - \cancel{3x}}{x}$$

$$= \frac{5\sin x}{x}$$

$$-1 \leq \sin x \leq 1$$

نضرب ب (5)

$$-5 \leq 5\sin x \leq 5$$

نقسم على x $\quad x > 0$

$$-\frac{5}{x} \leq \frac{5\sin x}{x} \leq \frac{5}{x}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to +\infty} -\frac{5}{x} = 0 \\ \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{5}{x} = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x \to +\infty} \frac{5\sin x}{x} = 0$$

وذلك حسب مبرهنة الإحاطة

إذاً y مقارب مائل بجوار $+\infty$

التمرين الأول :

$$f(x) = 2\cos\left(\frac{\pi}{2}x + \frac{\pi}{3}\right)$$

$$f'(x) = -\pi \sin\left(\frac{\pi}{2}x + \frac{\pi}{3}\right)$$

$$f''(x) = -\frac{\pi^2}{2} \cos\left(\frac{\pi}{2}x + \frac{\pi}{3}\right)$$

$$f''(x) = -\frac{\pi^2}{4} \left(2\cos\left(\frac{\pi}{2}x + \frac{\pi}{3}\right)\right)$$

$$\Rightarrow f''(x) = -\frac{\pi^2}{4} f(x)$$

التمرين الثاني

$$f(x)\begin{cases} x^2\cos\left(\frac{\pi}{x}\right) & x\neq 0 \\ f(0)=0 \end{cases}$$

-1

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2\cos\left(\frac{\pi}{x}\right)}{x}$$

$$\lim_{x\to 0} x\cos\left(\frac{\pi}{x}\right)=\ ?$$

$$-1\leq \cos\left(\frac{\pi}{x}\right)\leq 1 \longrightarrow *$$

نضرب بـ x عندما $x>0$

$$-x\leq x\cos\left(\frac{\pi}{x}\right)\leq x$$

$$\lim_{x\to 0^+}(-x)=0 \quad \lim_{x\to 0^+}(x)=0$$

حسب الإحاطة

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0}\left(x\cos\left(\frac{\pi}{x}\right)\right)=0$$

نضرب المتراجحة $*$ بـ x عندما $x<0$

$$-x\geq x\cos\left(\frac{\pi}{x}\right)\geq x$$

$$\lim_{x\to 0^-}(-x)=0 \quad \lim_{x\to 0^-}(x)=0$$

حسب الإحاطة

$$\lim_{x\to 0^-}\left(x\cos\left(\frac{\pi}{x}\right)\right)=0$$

نفرض أن $t(x)=x\cos\left(\frac{\pi}{x}\right)$

نلاحظ أن $\lim_{x\to 0^+}t(x)=\lim_{x\to 0^-}t(x)$

فالتابع اشتقاقي عند الصفر ولدينا $f'(0)=0$

2- معادلة المماس من الشكل:

$$T: y=f'(0)(x-0)+f(0)$$

$$f'(0)=0 \quad f(0)=0 \Rightarrow T: y=0$$

-3

$$\lim_{x\to +\infty} f(x)=(+\infty)\cos(0)=+\infty$$

$$\lim_{x\to +\infty} f(f(x))=\lim_{t\to +\infty} f(t)=+\infty$$

-4

$$f'(x)=2x\cos\left(\frac{\pi}{x}\right)-\frac{\pi}{x^2}\left(-\sin\left(\frac{\pi}{x}\right)\right)x^2$$

$$f'(x)=2x\cos\left(\frac{\pi}{x}\right)+\pi\sin\left(\frac{\pi}{x}\right)$$

-5

$$g(x)=f(x^2+1)\Rightarrow g'(x)=2x\,f'(x^2+1)$$

$$g(x)=2x\left(2(x^2+1)\cos\left(\frac{\pi}{(x^2+1)}\right)+\pi\sin\left(\frac{\pi}{(x^2+1)}\right)\right)$$

التمرين الثالث:

-1

$$f(1)=1\Rightarrow \sqrt{a+b+2}=1$$

$$a+b+2=1\Rightarrow a+b=-1 \ldots\ldots *$$

$$f'(1)=0\Rightarrow f'(x)=\frac{2ax+b}{2\sqrt{ax^2+bx+2}}$$

$$f'(1)=\frac{2a+b}{2}=0\Rightarrow 2a+b=0 \ldots\ldots *'$$

بالحل المشترك بين $*$ و $*'$ نجد أن

$$a=1 \quad b=-2$$

-2

$$f(x) = \sqrt{x^2-2x+2}$$

$$f'(x) = \frac{2x-2}{2\sqrt{x^2-2x+2}}$$

$$f'(x) = \frac{x-1}{\sqrt{x^2-2x+2}} > 0 \quad ; x \in]3,5[$$

التابع f مستمر ومطرد تماماً على $]3,5[$

$f(3) = \sqrt{5} < \sqrt{10}$

$f(5) = \sqrt{17} > \sqrt{10}$

بالتالي حسب مبرهنة القيمة الوسطى المعادلة

$f(x) = \sqrt{10}$ تقبل حلاً وحيداً في المجال $]3,5[$

$f(x) = \sqrt{10}$

$\sqrt{x^2-2x+2} = \sqrt{10}$

$x^2-2x+2 = 10$

$x^2-2x-8 = 0$

$(x-4)(x+2) = 0$

إما $x_1 = 4 \in]3,5[\Rightarrow \alpha = 4$

أو $x_2 = -2 \notin]3,5[$

(2)

$$f(x) = \frac{x-1}{\sqrt{x^2-2x+2}}$$

$g(x) = f(\cos x)$

g اشتقاقي على R

$g'(x) = -\sin x \, f'(\cos x)$

$$g'(x) = -\sin x \cdot \frac{\cos x - 1}{\sqrt{\cos^2 x - 2\cos x + 2}}$$

حل المسألة :

1- f معرف بشرط $x^2-x+1 \neq 0$

$x^2-x+1 = 0 \quad \Delta = b^2-4ac$

$\Delta = 1-4 = -3 < 0$

المعادلة مستحيلة الحل في IR

فالتابع معرف على IR أي $D_f = R$

2- f معرف ومستمر واشتقاقي على IR

$$f'(x) = \frac{3(x^2-x+1) - \cancel{2}(2x-1)(3x)}{(x^2-x+1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{3x^2-3x+3-6x^2+3x}{(x^2-x+1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{3(1-x^2)}{(x^2-x+1)^2}$$

$f'(x) = 0 \Rightarrow 1-x^2 = 0 \quad (x-1)(x+1) = 0$

إما $x_1 = -1 \quad f(-1) = -1$

أو $x_2 = +1 \quad f(1) = 3$

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	3	$\searrow$	0

$\lim_{x \to \mp\infty} f(x) = 0$ $\quad f(-1) = -1$ قيمة حدية صغرى

$f(2) = 3$ قيمة حدية كبرى

$T_0 = y = f'(0)(x-0) + f(0)$

$f(0) = 0 \qquad f'(0) = 3$

$T_0 : y = 3x$

$$f(x) - y_{T_0} = \frac{3x - 3x(x^2-x+1)}{x^2-x+1}$$

$$= \frac{3x - 3x^3 + 3x^2 - 3x}{x^2-x+1}$$

$$= 3x^2 \frac{1-x}{x^2-x+1}$$

إشارة الفرق تماثل إشارة المقدار $(1-x)$

في حال $x=1$ يتقاطع C مع T_0

في حال $x<1$ يكون C فوق T_0

في حال $x>1$ يكون C تحت T_0

-4

$T_2 : y = f'(2)(x-2) + f(2)$

$f(2) = \frac{6}{3} = 2 \qquad f'(2) = \frac{-9}{(3)^2} = -1$

$y = -1(x-2) + 2$

$\boxed{T_2 : y = -x + 4}$

$$f(x) - y_{T_2} = \frac{3x}{x^2-x+1} - (-x+4)$$

$$= \frac{3x + x^3 - x^2 + x - 4x^2 + 4x}{x^2-x+1}$$

$$= \frac{x^3 - 5x^2 + 8x - 4}{x^2-x+1}$$

$$\begin{array}{r|l} x^3 - 5x^2 + 8x - 4 & x-1 \\ \hline -x^3 + x^2 & x^2 - 4x + 4 = (x-2)^2 \\ -4x^2 + 8x - 4 & \\ +4x^2 - 4x & \\ 4(x-1) & \\ -4(x-1) & \\ 0 & \end{array}$$

$$f(x) - y_{T_2} = \frac{(x-1)(x-2)^2}{x^2-x+1}$$

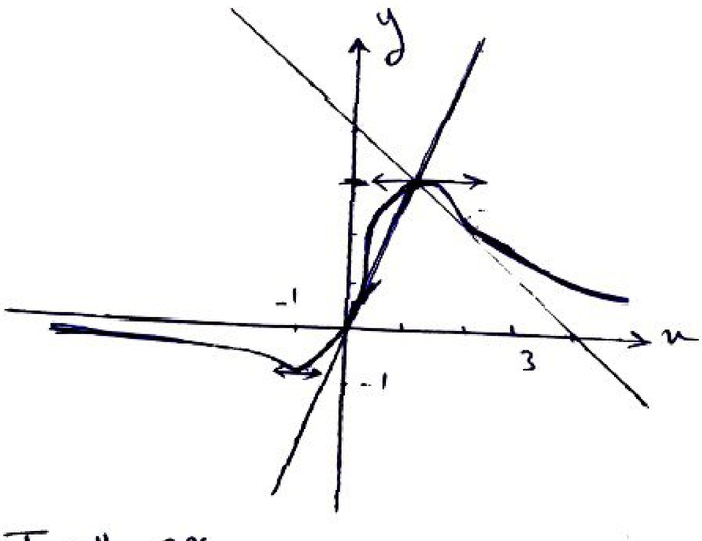
إشارة الفرق $f(x) - y_{T_2}$ تماثل إشارة $(x-1)$

من أجل $x=1$ يتقاطع C مع T_2

= = $x<1$ يقع C تحت T_2

= = $x>1$ يقع C فوق T_2

-5



توضيح للرسم

$T_0 : y = 3x$
$(0,0) \ (1,3)$

$T_2 : y = -x + 4$
$(0,4) \ (4,0)$

فريق الأفق - رياضيات