السؤال الأول :

1) $f(x) = \dfrac{4 - 4\cos 3x}{x^2}$

عند (0)

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} \frac{4 - 4\cos 3x}{x^2} = \frac{0}{0}$$

حالة عدم تعيين

$$f(x) = \frac{4(1-\cos 3x)(1+\cos 3x)}{x^2(1+\cos 3x)}$$

$$= \frac{4\sin^2 3x}{x^2(1+\cos 3x)} = 9\left(\frac{\sin 3x}{3x}\right)^2 \cdot \frac{4}{(1+\cos 3x)}$$

$$\lim_{x \to 0} f(x) = 9(1)\left(\frac{4}{2}\right) = 18$$

2) $f(x) = \dfrac{\sqrt{2x^3 - 7} - 3}{x - 2}$

عند (2)

$$\lim_{x \to 2} f(x) = \frac{0}{0}$$ حالة عدم تعيين

$$f(x) = \frac{(\sqrt{2x^3-7} - 3)(\sqrt{2x^3-7} + 3)}{(x-2)(\sqrt{2x^3-7} + 3)}$$

$$= \frac{2x^3 - 16}{(x-2)(\sqrt{2x^3-7} + 3)}$$

$$= \frac{2(x-2)(x^2+2x+4)}{(x-2)(\sqrt{2x^3-7} + 3)}$$

$$= \frac{2(x^2+2x+4)}{\sqrt{2x^3-7} + 3}$$

$$\lim_{x \to 2} f(x) = \frac{24}{6} = 4$$

السؤال الثاني :

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 2x\sin x + \sin^2 x}$$

$$f(x) = \sqrt{(x + \sin x)^2} = |x + \sin x|$$

$$-1 \leq \sin x \leq 1$$

$$x - 1 \leq x + \sin x \leq x + 1$$

$$\lim_{x \to +\infty} (x-1) = +\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} (x+1) = +\infty$$

$$\Leftarrow \lim_{x \to +\infty} (x + \sin x) = +\infty$$

وذلك حسب مبرهنة الإحاطة

السؤال الثالث :

$$f(x) \begin{cases} \dfrac{x-1}{\sqrt{x} - 1} & x \in [0, 1[\cup]1, +\infty[\\ 2 & x = 1 \end{cases}$$

حتى يكون f مستمر عند (1)

يجب أن يتحقق

$$\lim_{x \to 1} f(x) = f(1)$$

$$\lim_{x \to 1} f(x) = \frac{0}{0}$$

حالة عدم تعيين

$$f(x) = \frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-1)} = \sqrt{x}+1$$

$$\lim_{x \to 1} f(x) = 2$$

$$f(1) = 2$$

محققة

$\Leftarrow$ f مستمر عند (1) لأن

$$\lim_{x \to 1} f(x) = f(1)$$

السؤال الرابع :

$$f(x) = x^2 + \sqrt{x-1} - 2$$

f معرف ومستمر على المجال $[1, +\infty[$ ولدينا

$$f'(x) = 2x + \frac{2}{2\sqrt{x-1}} > 0$$

فالتابع مطرد تماماً على $[1,+\infty[$ (متزايد تماماً) والشرط الأول محقق

$$f(1) = -1$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

$$f(1) \cdot \lim_{x \to 1} f(x) < 0$$

والشرط الثاني محقق

فالمعادلة $x^2 + \sqrt{x-1} - 2 = 0$

تقبل حلاً وحيداً في المجال $[1, +\infty[$

حسب مبرهنة القيمة الوسطى

$$f(2) = 4+1-2 = 3$$

$$f(1) \cdot f(2) = -3 < 0$$

إذن حل المعادلة ينتمي إلى المجال

$$]1,2[$$

ثانياً :

التمرين الأول :

$$f(x) = E(x) + (x - E(x))^2$$

1) $f(x) = \begin{cases} x & x \in [0,1[\\ 1 + (x+1)^2 & x \in [1,2[\end{cases}$

$$x - 1 < E(x) \leq x \quad \dots (1)$$

2) $x - 1 < E(x) < 1 - x$

$$-x \leq -E(x) < 1 - x$$

$$0 \leq x - E(x) < 1$$

$$0 \leq (x - E(x))^2 < 1$$

حسب مبرهنة الإحاطة نستنتج أن

$$\lim_{x \to +\infty} f(f(x)) = \lim_{x \to +\infty} f(t) = +\infty$$

4) يجب أن يحقق الشرط

$$\lim f(x) = f(1)$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-}(x) = 1$$

$$\Rightarrow f(1) = 1 + (1-1)^2 = 1$$

$\Leftarrow$ التابع مستمر عند (1)

التمرين الثاني :

②

$$f(x) = \begin{cases} 4ax - 3 & : x > 6 \\ b + x^2 & : x < 6 \\ 0 & ; x = 6 \end{cases}$$

f مستمر على R فهو مستمر عند 6=

$$\lim_{x \to 6^-} f(x) = b + 36$$

$$f(6) = 0$$

$$\lim_{x \to 6^+} f(x) = 24a - 3$$

f مستمر عند $x=6$ عندما

$$\lim_{x \to 6} f(x) = f(6)$$

$$E(x) \leq E(x) + (x + E(x))^2 < 1 + E(x) \quad \dots (2)$$

$$E(x) \leq f(x) < 1 + E(x)$$

نقسم على x

$$\frac{E(x)}{x} \leq \frac{f(x)}{x} < \frac{1}{x} + \frac{E(x)}{x}$$

و بالعلاقة (1) نجد

$$\frac{x-1}{x} < \frac{E(x)}{x} \leq 1$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to +\infty} \frac{x-1}{x} = 1$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to +\infty} f(x) = 1$$

3) من العلاقة (2) نجد

$$E(x) < f(x) \leq 1 + E(x)$$

ولدينا $x - 1 < E(x) \leq x$

$$\lim_{x \to +\infty} (x - 1) = +\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} (x) = +\infty$$

$$\Leftarrow \lim_{x \to +\infty} E(x) = +\infty$$

ومنه نجد

$$\left.\begin{aligned} &\lim_{x \to +\infty} (E(x)) = +\infty \\ &\lim_{x \to +\infty} (1 + E(x)) = +\infty \end{aligned}\right\} \Rightarrow \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

$$b+36=0 \Rightarrow b=-36$$

$$-3+24a=0 \Rightarrow a=\frac{1}{8}$$

التابع هو $\Leftarrow$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x-3 & x>6 \\ -36+x^2 & x<6 \\ 0 & x=6 \end{cases}$$

(2

$$f(x) \begin{cases} 3x-2 & x\leq 1 \\ 2x^2-mx & x>1 \end{cases}$$

التابع f مستمر على المجالين $]-\infty,1[$ و $]1,+\infty[$ وحتى يكون مستمراً على R يجب أن يكون مستمراً عند الواحد أي يجب تحقق الشرط

$$\lim_{x\to 1} f(x) = f(1)$$

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1}(2x^2-mx) = 2-m$$

$$f(1) = 3(1)-2 = 1$$

$$\Rightarrow 2-m = 1$$

$$\Rightarrow m = 1$$

التمرين الثالث :

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x+\cos x}{x^2+1}\right] = \frac{+\infty+\cos(+\infty)}{+\infty+1}$$

$$-1 \leq \cos x \leq 1$$

$$x-1 \leq x+\cos x \leq x+1$$

نقسم على $x^2+1>0$

$$\frac{x-1}{x^2+1} \leq \frac{x+\cos x}{x^2+1} \leq \frac{x+1}{x^2+1}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x-1}{x^2+1}\right)=0$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x+1}{x^2+1}\right)=0$$

$$\Leftarrow \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x+\cos x}{x^2+1}\right)=0$$

وذلك حسب مبرهنة الإحاطة

$$|f(x)+3| \leq \frac{x+\cos x}{x^2+1}$$

$$|f(x)-l| \leq g(x)$$

وجدنا أن

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x+\cos x}{x^2+1}\right) = 0$$

$\Leftarrow$ حسب مبرهنة الإحاطة (الإحاطة (2))

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = l = -3$$

حل المسألة :

$$f(x) = \sqrt{4x^2-4x+3}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$$

$$4x^2-4x+3$$

$$4(x^2-x)+3$$

$$4\left(x^2-x+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\right)+3$$

$$4\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}+3$$

$$(2x-1)^2+2$$

$$f(x) = \sqrt{(2x-1)^2+2}$$

$$h(x) = f(x) - \sqrt{(2x-1)^2}$$

$$= \sqrt{(2x-1)^2+2} - \sqrt{(2x-1)^2}$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty}\left(\sqrt{(2x-1)^2+2} - \sqrt{(2x-1)^2}\right)$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{(2x-1)^2+2-(2x-1)^2}{\sqrt{(2x-1)^2+2}+\sqrt{(2x-1)^2}}$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2}{\sqrt{(2x-1)^2+2}+\sqrt{(2x-1)^2}} = 0$$

$$\sqrt{(2x-1)^2} = |2x-1| = \begin{cases} 2x-1 & \text{في جوار } +\infty \\ -2x+1 & \text{في جوار } -\infty \end{cases}$$

ومنه

$$\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-\sqrt{(2x-1)^2}\right)=0$$

إذاً $y = 2x-1$ مقارب مائل في جوار $+\infty$

$$h(x) = f(x) - \sqrt{(2x-1)^2}$$

$$\sqrt{(2x-1)^2+2} - \sqrt{(2x-1)^2} > 0$$

لأن

$$\sqrt{(2x-1)^2+2} > \sqrt{(2x-1)^2}$$

إذاً C يقع فوق D_1 و D_2