دورة 2017 الأولى:

التمرين الأول:

لتكن المتتالية $(u_n)_{n\geq0}$ المعرفة وفق:

$$u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n - 2 \,, u_0 = 1$$

ولتكن المتتالية $(v_n)_{n\geq0}$ المعرفة وفق:

$$v_n = u_n + 3$$

① أثبت أن $(v_n)_{n\geq0}$ متتالية هندسية، وأوجد أساسها.

② اكتب عبارة v_n بدلالة n، ثم عبارة u_n بدلالة n.

③ ليكن في حالة عدد طبيعي n:

$$S_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_n$$

عبر عن S_n بدلالة n، واستنتج نهاية المتتالية $(S_n)_{n\geq0}$

الحل:

① لإثبات أن v_n هندسية

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = q$$

$$v_{n+1} = u_{n+1} + 3 = \frac{1}{3}u_n - 2 + 3$$

$$v_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + 1 = \frac{1}{3}(u_n + 3)$$

$$v_{n+1} = \frac{1}{3}v_n$$

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{1}{3} = q$$

v_n متتالية هندسية أساسها $q = \frac{1}{3}$ وحدها الأول $v_0 = u_0 + 3 = 1 + 3 = 4$

② إيجاد الحد العام لـ v_n:

$$v_n = v_m . q^{n-m}$$

u_n بدلالة n

لدينا

$$v_n = u_n + 3$$
$$u_n = v_n - 3$$
$$u_n = 4\left(\frac{1}{3}\right)^n - 3$$

③ حساب مجموع S_n

$$S_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_n$$

S_n مجموع متتالية هندسية لأن v_n هندسية

$$S_n = a\left[\frac{1 - q^n}{1 - q}\right]$$

$$a = v_0 = 4 \,, q = \frac{1}{3}$$

$$n = n - 0 + 1 = n + 1$$

$$S_n = 4\left(\frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{3}}\right)$$

$$S_n = 6\left[1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right]$$

استنتاج نهاية S_n

$$\lim_{n\to+\infty} S_n =$$

$$-1 < q = \frac{1}{3} < 1$$

$$\lim_{n\to+\infty} 6\left[1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right] = 6$$

حل أسئلة دورات

دورة 2017 الثانية:

التمرين الأول:

لتكن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرفة وفق ما يأتي: $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$

① أثبت أن المتتالية u_n متناقصة.

② أثبت أن $0 \leq u_n \leq 1$ واستنتج أنها متقاربة واحسب نهايتها.

الحل:

❶ لإثبات أن u_n متناقصة

$$u_{n+1} - u_n < 0 \Rightarrow u_{n+1} < u_n$$
$$u_{n+1} = \sqrt{n+2} - \sqrt{n+1}$$

نضرب بالمرافق

$$u_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1}}$$
$$u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$$
$$\frac{1}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1}} < \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$$

وهذا محقق لأن

$$\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1} > \sqrt{n+1} + \sqrt{n}$$

للتوضيح: كل ما كبر المقام صغر الكسر

$$u_{n+1} < u_n$$

$\Leftarrow$ u_n متناقصة.

❷ نعلم أن $\sqrt{n+1} \geq \sqrt{n}$ أياً كان $n \geq 0$:

$$u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n} \geq 0 \quad \dots (*)$$

ونعلم أن $\sqrt{n+1} \geq 1$

ومنه $\sqrt{n+1} + \sqrt{n} \geq 1$

نقلب $(*)$

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \leq 1 \quad \dots (**)$$

من $*$ و $**$ نجد أن:

$$0 \leq u_n \leq 1$$

كل متتالية متناقصة ومحدودة من الأدنى فهي متقاربة.

نهاية u_n:

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = 0$$

سيتم تنزيل ع قناتي اليوتيوب شرح دروس المنهاج بالإضافة فكرة جديدة ع اليوتيوب تنزيل 18 اختبار شامل و جزئي مع الحل و شرح الاختبار ع اليوتيوب بالإضافة ل شرح ملف الدورات

اسال عن المكثفة التكرورية و الجلسة التكرورية

يوجد مكثفة اونلاين قريبا و معسكرات في جميع المحافظات

حل أسئلة دورات

دورة 2018 الأولى:

التمرين الثاني:

ليكن لدينا المتتاليتان $(u_n)_{n\geq1}$, $(v_n)_{n\geq1}$ المعرفتان وفق: $u_n = 5 - \frac{1}{n}$ والمطلوب:

① أثبت أن المتتالية u_n متزايدة.

② أثبت أن المتتالية v_n متناقصة

③ هل المتتاليتان u_n, v_n متجاورتان؟ علل إجابتك

الحل:

❶ لإثبات أن u_n متزايدة.

$$u_n = 5 - \frac{1}{n}$$

بما أن u_n تابع نفرض

$$u_n = f(x) = 5 - \frac{1}{x}$$

$$f'(x) = \frac{1}{x^2} > 0$$

u_n متتالية متزايدة

❷ لإثبات أن v_n متناقصة

$$v_n = 5 + \frac{1}{n^2}$$

بما أن v_n تابع نفرض

$$v_n = g(x) = 5 + \frac{1}{x^2}$$

$$g'(x) = -\frac{2}{x^3} < 0$$

v_n متناقصة

❸ نعم، لأن u_n متزايدة و v_n متناقصة

$$\lim_{n\to+\infty}(v_n - u_n)$$

$$= \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n}\right) = 0$$

دورة 2018 الثانية:

السؤال الرابع:

$(u_n)_{n\geq0}$ متتالية هندسية أساسها $q = 2$ وفيها $u_0 = 1$ والمطلوب:

① احسب u_3

② احسب المجموع :

$$S = u_3 + u_4 + \cdots + u_7$$

الحل:

❶ بما أن u_n هندسية، نوجد الحد العام

لدينا $u_0 = 1 , q = 2$

$$u_n = u_m . q^{n-m}$$
$$u_n = 2^n$$

حساب u_3:

$$u_3 = 2^3 = 8$$

❷ حساب S_n:

$$S_n = u_3 + u_4 + u_5 + u_6 + u_7$$

بما أن S_n مجموع متتالية هندسية

$$S = a\left(\frac{1 - q^n}{1 - q}\right)$$

$$a = u_3 = 8 , q = 2 , n = 7 - 3 + 1 = 5$$

حل أسئلة دورات

$$S = 8\left(\frac{1-2^5}{1-2}\right) = 8\left(\frac{1-32}{-1}\right)$$
$$= 8\left(-\frac{31}{-1}\right) = 248$$

دورة 2019 الأولى:

التمرين الأول:

لتكن المتتالية $(S_n)_{n\geq 0}$ المعرفة وفق:

$$S_n = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{3^n}$$

والمطلوب:

❶ أثبت أن المتتالية S_n متزايدة تماماً.

❷ أثبت أن S_n تكتب بالشكل $S_n = \frac{1}{2}\left(3 - \frac{1}{3^n}\right)$ ثم استنتج عنصراً راجحاً على المتتالية S_n وبين أنها متقاربة.

الحل:

① لإثبات أن S_n متزايدة تماماً

$$S_{n+1} - S_n > 0$$
$$S_{n+1} = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{3^{n+1}}$$
$$S_{n+1} = S_n + \frac{1}{3^{n+1}}$$
$$S_{n+1} - S_n = \frac{1}{3^{n+1}} > 0$$

S_n متتالية متزايدة تماماً.

② S_n مجموع لحدود متتالية هندسية أساسها $q = \frac{1}{3}$

$$a = 1\ , \qquad q = \frac{1}{3}, \qquad n = n+1$$
$$S_n = 1 \times \left(\frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{3}}\right)$$
$$S_n = \frac{3}{2}\left(1 - \frac{1}{3^{n+1}}\right)$$
$$S_n = \frac{1}{2}\left(3 - \frac{3}{3^n.3}\right)$$
$$S_n = \frac{1}{2}\left(3 - \frac{1}{3^n}\right)$$

نعلم أن $0 \leq 3 - \frac{1}{3^n}$ منه $3 - \frac{1}{3^n} \leq 3$ منه

$$\frac{1}{2}\left(3 - \frac{1}{3^n}\right) \leq \frac{3}{2}$$

يعطي

$$S_n \leq \frac{3}{2}$$

فالعدد الراجح على المتتالية هو $\frac{3}{2}$

بما أن S_n متزايدة تماماً ومحدودة من الأعلى فهي متقاربة.

حل أسئلة دورات

دورة 2019 الثانية

التمرين الثالث:

لتكن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرفة وفق: $u_n = \frac{2n-1}{n+1}$ والمطلوب:

① ادرس اطراد المتتالية u_n.

② أثبت أن العدد 2 راجح على u_n

③ احسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ ثم جد عدداً طبيعياً n_0 يحقق أياً كان $n < n_0$ كان u_n في المجال $]1.9\,, 2.1[$

الحل:

❶ ندرس اطراد u_n

نفرض $u_n = f(x) = \frac{2x-1}{x+1}$

$$f'(x) = \frac{3}{(x+1)^2} > 0$$

$\Leftarrow$ u_n متتالية متزايدة تماماً.

❷ لإثبات أن العدد 2 راجح على u_n

$$u_n - 2 = \frac{2n-1}{n+1} - 2 = -\frac{3}{n+1} < 0$$

$$u_n - 2 < 0$$

$$u_n < 2$$

فالعدد 2 راجح على المتتالية u_n

❸ $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 2$

لإيجاد n_0 عدداً طبيعياً $]1.9\,, 2.1[$

$$c = \frac{a+b}{2} = \frac{1.9+2.1}{2} = 2$$

$$r = \frac{b-a}{2} = \frac{2.1-1.9}{2} = 0.1 = \frac{1}{10}$$

$$|u_n - c| < r$$

$$\left|-\frac{3}{n+1}\right| < \frac{1}{10}$$

$$\frac{3}{n+1} < \frac{1}{10}$$

$$n+1 > 30$$

$$n > 29$$

$$n_0 = 29$$

دورة 2020 الأولى:

التمرين الأول:

نتأمل المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرفة بالعلاقة التدريجية:

$$u_{n+1} = \frac{u_n}{2} + \frac{2}{u_n}\ , u_0 = 3$$

عند كل $n \geq 0$ والمطلوب:

① أثبت أن التابع $f(x) = \frac{x}{2} + \frac{2}{x}$ متزايد تماماً على $[2, +\infty[$

② أثبت بالتدريج أن $2 \leq u_{n+1} \leq u_n$ أياً كان العدد الطبيعي n.

③ استنتج أن المتتالية متقاربة، واحسب نهايتها.

الحل:

❶

$$f(x) = \frac{x}{2} + \frac{2}{x}$$

$$f'(x) = \frac{1}{2} - \frac{2}{x^2}$$

$$f'(x) = \frac{x^2-4}{2x^2}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow x^2 = 4$$

$x=2$ مقبول

$x=-2$ مرفوض

$f'(x)<0$ على المجال $[0,2[$

$f'(x)\geq 0$ على المجال $[2,+\infty[$

منه $f(x)$ متزايد على المجال $[2,+\infty[$

② نرمز للقضية $E(n)$

$$E(n);\ \ 2\leq u_{n+1}\leq u_n$$

نبرهن صحة القضية من أجل $n=0$

$$u_1=\frac{3}{2}+\frac{2}{3}=\frac{13}{6}\simeq 2.15$$

$$2\leq u_1\leq u_0$$

$$2\leq\frac{13}{6}\leq 3$$

محقق

فالقضية صحيحة من أجل $n=0$

نفرض صحة القضية من أجل n

$$2\leq u_{n+1}\leq u_n\ ...(*)$$

نبرهن صحة القضية من أجل $n+1$

$$2\leq u_{n+2}\leq u_{n+1}$$

بالاستفادة من f متزايد

بأخذ f لـ$*$

$$f(2)\leq f(u_{n+1})\leq f(u_n)$$

$$f(2)=\frac{2}{2}+\frac{2}{2}=2$$

$$2\leq u_{n+2}\leq u_{n+1}$$

فالقضية صحيحة من أجل $n+1$ وبالتالي

القضية صحيحة

③ بما أن u_n متناقصة ومحدودة من الأدنى بـ 2 فهي متقاربة.

لحساب نهايته نحل $f(x)=x$

$$\frac{x}{2}+\frac{2}{x}=0\Rightarrow 2x^2=x^2+4$$

إما $x=-2$ مرفوض لأن $2\leq u_{n+1}\leq u\_n$

أو $x=2$ مقبول وبالتالي $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=2$

دورة 2020 الثانية:

التمرين الرابع:

لتكن المتتالية $(u_n)_{n\geq1}$ المعرفة وفق:

$$u_n=\frac{1}{e}+\frac{2}{e^2}+\frac{3}{e^3}+\cdots+\frac{n}{e^n}$$

المطلوب:

① أثبت أن $n\leq 2^n$ أياً كان العدد الطبيعي $n\geq 1$

② استنتج أن $\frac{2}{e-2}$ عنصر راجح على المتتالية $(u_n)_{n\geq1}$

③ أثبت أن المتتالية $(u_n)_{n\geq1}$ متقاربة.

الحل:

① نرمز للقضية $E(n)$

$$E(n):\ 2\leq 2^n$$

نبرهن صحة القضية من أجل $n=1$

$$1\leq 2$$

والقضية صحيحة من أجل $n=1$

نفرض صحة القضية من أجل $n+1$

$$n \le 2^n \ *$$

نبرهن صحة القضية من أجل $n+1$

$$n+1 \le 2^{n+1}$$
$$n \le 2^n \Rightarrow 2n \le 2.2^n$$
$$2n \le 2^{n+1}$$

باعتبار $n+1 \le 2n$

$$n+1 \le 2n \le 2^{n+1}$$

فالقضية صحيحة من أجل $n+1$

2) من الطلب الأول نجد:

$$\frac{2}{e} \ge \frac{1}{e} \ , \left(\frac{2}{e}\right)^2 \ge \frac{2}{e^2} \ , \left(\frac{2}{e}\right)^3 \ge \frac{3}{e^3} \ \cdots$$
$$\left(\frac{2}{e}\right)^n \ge \frac{n}{e^n}$$

منه نجد:

$$u_n = \frac{1}{e} + \frac{2}{e^2} + \cdots \frac{n}{e^n} \le S_n$$
$$= \frac{2}{e} + \left(\frac{2}{e}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{2}{e}\right)^n$$

S_n هي مجموع حدود لمتتالية هندسية $q = \frac{2}{e}$

$$n = n \ , q = \frac{2}{e}$$

$$S_n = a\left(\frac{1-q^n}{1-q}\right)$$

$$S_n = \frac{2}{e}\left(\frac{1-\left(\frac{2}{e}\right)^n}{1-\frac{2}{e}}\right)$$

$$S_n = \frac{2}{e-2}\left[1-\left(\frac{2}{e}\right)^n\right]$$

نعلم أن

$$-\left(\frac{2}{e}\right)^n < 0 \Rightarrow 1-\left(\frac{2}{e}\right)^n < 1$$
$$\Rightarrow \frac{2}{e-2}\left[1-\left(\frac{2}{e}\right)^n\right] < \frac{2}{e-2}$$
$$S_n < \frac{2}{e-2}$$

منه

$$u_n \le S_n < \frac{2}{e-2} \Rightarrow u_n < \frac{2}{e-2}$$

فالعدد $\frac{2}{e-2}$ راجح على المتتالية u_n

3) لندرس اطراد u_n

$$u_{n+1} = \frac{1}{e} + \frac{2}{e^2} + \cdots + \frac{n}{e^n} + \frac{n+1}{e^{n+1}}$$
$$u_{n+1} - u_n = \frac{n+1}{e^{n+1}} > 0$$

u_n متزايدة تماماً

المتتالية متزايدة ومحدودة من الأعلى بـ $\frac{2}{e-2}$ فهي متقاربة.

دورة 2021 الأولى:

التمرين الأول:

لتكن لدينا المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرفة بالعلاقة التدريجية:

$$u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n - 3 \, , u_0 = 2$$

ولنعرف المتتالية $(v_n)_{n\geq 0}$ وفق:

$$v_n = u_n + 6$$

والمطلوب:

① أثبت أن المتتالية v_n هندسية، عين أساسها واحسب v_0 ثم اكتب عبارة v_n بدلالة n.

② لنعرف المتتالية $(w_n)_{n\geq 0}$ وفق $w_n = \ln(v_n)$، أثبت أن المتتالية w_n حسابية، واحسب w_0 ثم احسب المجموع

$$S = w_0 + w_1 + w_2 + w_3 + w_4 + w_5$$

الحل:

❶ لإثبات أن v_n هندسية يجب أن نبرهن:

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = q$$

$$v_{n+1} = u_{n+1} + 6 = \frac{1}{2}(u_n + 6)$$

$$v_{n+1} = \frac{1}{2}v_n$$

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{1}{2} = 1$$

v_n هندسية أساسها $q = \frac{1}{2}$، حدها الأول:

$$v_0 = u_0 + 6 = 2 + 6 = 8$$

لإيجاد الحد العام لـ v_n:

$$v_n = v_m . q^{n-m}$$

$$v_n = 8\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$w_n = \ln(v_n)$$

لإثبات أن w_n حسابية يجب أن نبرهن :

$$w_{n+1} - w_n = r$$

$$w_{n+1} = \ln(v_{n+1})$$

$$w_{n+1} = \ln\left(8\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right)$$

نعلم أن $\ln(a.b) = \ln(a) + \ln(b)$

$$w_{n+1} = \ln\left(8\left(\frac{1}{2}\right)^n\right) + \ln\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$w_{n+1} = \ln(v_n) + \ln\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$w_{n+1} = w_n + \ln\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$w_{n+1} - w_n = \ln\left(\frac{1}{2}\right)$$

المتتالية w_n حسابية أساسها $r = \ln\left(\frac{1}{2}\right)$

حدها الأول:

$$w_0 = \ln\left(8\left(\frac{1}{2}\right)^0\right) = \ln(8) = 3\ln(2)$$

حساب المجموع S:

$$S = \frac{(a+b)n}{2} \quad , \quad n = 6$$

$$a = w_0 = 3\ln(2)$$

$$b = w_5 = \ln(v_5) = \ln\left(8\left(\frac{1}{2}\right)^5\right) = \ln\left(\frac{1}{4}\right)$$

$$= -\ln(4)$$

$$b = -2\ln(2)$$

$$S = \frac{(3\ln(2) - 2\ln(2))6}{2} = 3\ln(2)$$

حل أسئلة دورات

دورة 2021 الثانية:

التمرين الأول:

نتأمل المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرفة، وأياً كان العدد الطبيعي n:

$$u_{n+1} = (u_n - 2)^2 + 2 \ , u_0 = \frac{5}{2}$$

المطلوب:

① أثبت بالتدريج أن $2 \leq u_n \leq 3$ أياً كان العدد الطبيعي n.

② أثبت أن المتتالية u_n متناقصة.

③ استنتج تقارب المتتالية u_n وجد $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

الحل:

1 نرمز للقضية $E(n)$

$$E(n):\ 2 \leq u_n \leq 3$$

نبرهن صحة القضية من أجل $n = 0$

$$2 \leq u_0 = \frac{5}{2} \leq 3$$

محقق

نفرض صحة القضية من أجل n

$$2 \leq u_n \leq 3 \ \dots \ *$$

نبرهن صحة القضية من أجل $n+1$

$$2 \leq u_{n+1} \leq 3$$
$$2 \leq (u_n - 2)^2 + 2 \leq 3$$

من $*$ نجد:

$$2 \leq u_n \leq 3$$

نطرح 2:

$$0 \leq u_n - 2 \leq 1$$

نربع الأطراف

$$0 \leq (u_n - 2)^2 \leq 1$$

نضيف 2

$$2 \leq (u_n - 2)^2 + 2 \leq 3$$

محقق والقضية صحيحة من أجل $n+1$

2 لإثبات أن u_n متناقصة يجب أن نبرهن:

$$u_{n+1} < u_n$$

نرمز للقضية $E(n)$

نبرهن صحة القضية من أجل $n = 0$

$$u_1 < u_0$$
$$u_1 = (u_0 - 2)^2 + 2 = \frac{1}{4} + 2$$
$$u_1 = \frac{1}{4} + \frac{8}{4} = \frac{9}{4}$$

$\frac{9}{4} < \frac{5}{2}$ محقق

نفرض صحة القضية من أجل n

$$u_{n+1} < u_n \ \dots \ **$$

نبرهن صحة القضية من أجل $n+1$

$$u_{n+2} < u_{n+1}$$
$$\ell_2 = (u_{n+1} - 2)^2 + 2$$
$$< (u_n - 2)^2 + 2$$

من $**$ نجد:

$$u_{n+1} < u_n$$

نطرح 2

$$u_{n+1}-2<u_n-2$$

نربع الطرفين

$$(u_{n+1}-2)^2<(u_n-2)^2$$

نضيف 2

$$(u_{n+1}-2)^2+2<(u_{n2}-2)^2+2$$
$$u_{n+2}<u_{n+1}$$

والقضية صحيحة من أجل $n+1$

بالاعتماد على الاستقراء الرياضي نستنتج أن u_n متناقصة.

③ بما أن المتتالية u_n متناقصة ومحدودة من الأدنى بـ 2 فهي متقاربة.

$$\lim_{n\to+\infty} u_n=2$$

لحساب نهايته نحل $f(x)=x$

دورة 2022 الأولى:

التمرين الأول:

نتأمل المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرفة وفق:

$$u_0=\frac{5}{2}\ ,u_{n+1}=u_n^2-4u_n+6$$

المطلوب:

① أثبت مستعملاً البرهان بالتدريج أن $2\leq u_n\leq 3$ أياً كان العدد الطبيعي n.

② أثبت أن $u_{n+1}-u_n=(u_n-3)(u_n-2)$

③ استنتج أن المتتالية u_n متناقصة.

④ بين أن المتتالية u_n متقاربة واحسب نهايتها.

الحل:

①

$$u_{n+1}=u_n^2-4u_n+2$$
$$u_{n+1}=(u_n-2)^2+2$$

نفس الطلب الأول دورة 2021 الثانية

ط2: يمكن الحل على تزايد f.

②

$$u_{n+1}-u_n=u_n^2-5u_n+6$$
$$=(u_n-3)(u_n-2)$$

③ من الطلب السابق:

$$2\leq u_{n+1}\leq 3$$

منه:

$$u_n-2\geq 0$$

ومنه

$$u_n-3\leq 0$$

ومنه:

$$(u_n-3)(u_n-2)\leq 0$$
$$u_{n+1}-u_n\leq 0$$

فالمتتالية متناقصة تماماً.

④ بما أن u_n متناقصة تماماً ومحدودة من الأدنى بـ 2 فهي متقاربة.

$$\lim_{n\to+\infty} u_n=2$$

نحل المعادلة $f(x)=x$

حل أسئلة دورات

دورة 2022 الثانية:

التمرين الأول:

ليكن المتتاليتان $(u_n)_{n\geq1}$ ، $(v_n)_{n\geq1}$:

$$u_n = \frac{1}{5} + \frac{1}{5^2} + \cdots + \frac{1}{5^n} \quad , \quad v_n = u_n + \frac{1}{2^n}$$

والمطلوب:

① أثبت أن $(u_n)_{n\geq1}$ متتالية متزايدة و $(v_n)_{n\geq1}$ متتالية متناقصة.

② استنتج أن المتتاليتين u_n, v_n متجاورتان.

③ أثبت أن $u_n = \frac{1}{4}\left(1 - \frac{1}{5^n}\right)$ ثم احسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ واستنتج $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$

الحل:

❶

$$u_{n+1} = \frac{1}{5} + \frac{1}{5^1} + \cdots + \frac{1}{5^n} + \frac{1}{5^{n+1}}$$

$$u_{n+1} = u_n + \frac{1}{5^{n+1}}$$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{5^{n+1}} > 0$$

u_n متزايدة تماماً.

لنثبت أن v_n متناقصة

$$v_{n+1} - v_n$$

$$v_{n+1} = u_{n+1} + \frac{1}{2^{n+1}}$$

$$v_{n+1} - v_n = u_{n+1} - u_n + \frac{1}{2^{n+1}} - \frac{1}{2^n}$$

$$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{5^{n+1}} - \frac{1}{2^{n+1}}$$

$$v_{n+1} - v_n = \frac{2^{n+1} - 5^{n+1}}{(5^{n+1})(2^{n+1})} < 0$$

v_n متناقصة

❷ من الطلب السابق وجدنا u_n متزايدة و v_n متناقصة فالشرط الأول محقق

$$\lim_{n\to+\infty}(v_n - u_n) = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{2^n} = 0$$

لأن $-1 < \frac{1}{2} < 1$

نهاية فرق المتتاليتان هو صفر، فالشرط الثاني محقق وبالتالي المتتاليتان متجاورتان.

❸ u_n مجموع حدود متتالية هندسية أساسها $q = \frac{1}{5}$ حدها الأول $\frac{1}{5}$.

$$u_n = a\left(\frac{1-q^n}{1-q}\right)$$

$$a = \frac{1}{5} \,, \qquad q = \frac{1}{5} \,, \qquad n = n$$

$$u_n = \frac{1}{5}\left(\frac{1-\left(\frac{1}{5}\right)^n}{1-\frac{1}{5}}\right) = \frac{1}{4}\left[1-\left(\frac{1}{5}\right)^n\right]$$

$$u_n = \frac{1}{4}\left[1-\frac{1}{5^n}\right]$$

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{4}\left[1-\frac{1}{5^n}\right] = \frac{1}{4}$$

لأن $-1 < q = \frac{1}{5} < 1$

نعلم أن

$$\lim_{n\to+\infty}(u_n - v_n) = 0$$

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} v_n = \frac{1}{4}$$

وجدنا

$$\lim_{n\to+\infty} v_n = \frac{1}{4}$$

حل أسئلة دورات

دورة 2023 الأولى:

التمرين الثالث:

لتكن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ معرفة وفق:

$u_{n+1} = 3 + \sqrt{u_n - 1}, u_0 = 2$،

المطلوب:

① أثبت أن $2 \leq u_n \leq 5$ أياً كان $n \geq 0$

② أثبت أن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ متزايدة تماماً، واستنتج تقاربها واحسب نهايتها.

الحل:

❶ نرمز للقضية $E(n): 2 \leq u_n \leq 5$

نبرهن صحة القضية من أجل $n = 0$

$$2 \leq u_0 \leq 5$$

$$2 \leq 2 \leq 5$$

نفرض صحة القضية من أجل n

$$2 \leq u_n \leq 5 \qquad (*)$$

نبرهن صحة القضية من أجل $n+1$

$$2 \leq u_{n+1} \leq 5$$

$$2 \leq 3 + \sqrt{u_n - 1} \leq 5$$

من $(*)$ نجد: $2 \leq u_n \leq 5$

نطرح 1

$$1 \leq u_n - 1 \leq 4$$

نجذر

$$1 \leq \sqrt{u_n - 1} \leq 2$$

نضيف 3:

$$2 < 4 \leq 3 + \sqrt{u_n - 1} \leq 5$$

والقضية $E(n)$ صحيحة من أجل $n+1$

$$2 \leq u_n \leq 5$$

أياً كان العدد الطبيعي n

❷ لإثبات أن المتتالية u_n متزايدة تماماً نبرهن صحة القضية $u_{n+1} > u_n$ أياً كان العدد الطبيعي n

نرمز للقضية: $E(n): u_{n+1} > u_n$

نبرهن صحة القضية من أجل $n = 0$

$$u_1 > u_0$$

$$u_1 = 3 + \sqrt{u_0 - 1} = 3 + 1 = 4$$

$$4 > 2$$

محقق

نفرض صحة القضية من أجل n

$$u_{n+1} > u_n \qquad (**)$$

نبرهن صحة القضية من أجل $n+1$

$$u_{n+2} > u_{n+1}$$

$$u_{n+2} = 3 + \sqrt{u_{n+1} - 1}$$

$$3 + \sqrt{u_{n+1} - 1} > 3 + \sqrt{u_n - 1}$$

من $(**)$ نجد: $u_{n+1} > u_n$

نطرح 1 من الطرفين

$$u_{n+1} - 1 > u_n - 1$$

نجذر الطرفين

$$\sqrt{u_{n+1} - 1} > \sqrt{u_n - 1}$$

نضيف 3 للطرفين

$$3 + \sqrt{u_{n+1} - 1} > 3 + \sqrt{u_n - 1}$$

$$\Rightarrow u_{n+2} > u_{n+1}$$

أي أن القضية محققة، ومنه $u_{n+1} > u_n$ أياً كان العدد الطبيعي n أي أن المتتالية متزايدة تماماً.

دراسة التقارب:

بما أن المتتالية متزايدة تماماً ومحدودة من الأعلى بـ 5 فهي متقاربة من العدد ℓ حيث $\ell \le 5$ وحد البدء $u_0 = 2$ وبالتالي

$$2 < \ell \le 5$$

بما أن التابع $f(x) = 3 + \sqrt{x-1}$ مستمر على المجال $[1, +\infty[$ فهو مستمر عند ℓ حيث ℓ هو حل المعادلة $f(x) = x$

$$f(x) = x \Rightarrow 3 + \sqrt{x-1} = x \Rightarrow x - 3 = \sqrt{x-1}$$

نربع الطرفين

$$x^2 - 6x + 9 = x - 1 \Rightarrow x^2 - 7x + 10 = 0 \Rightarrow (x-5)(x-2) = 0$$

$x = 5$ مقبول

$x = 2$ مرفوض

وبالتالي $\lim_{n \to +\infty} u_n = 5$

دورة 2023 الثانية:

التمرين الثاني:

ليكن التابع f المعرف على $\mathbb{R}$ وفق:

$$f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{x^4+1}}$$

① أثبت أن $f(x) = \frac{x}{2}(1+x^4)f'(x)$ ثم استنتج $g'(x)$ حيث $g: x \to f(\sin x)$

② لتكن المتتالية $(u_n)_{n\ge1}$ معرفة وفق:

$$u_n = \frac{n}{\sqrt{n^4+1}} + \frac{n}{\sqrt{n^4+2}} + \cdots + \frac{n}{\sqrt{n^4+n}}$$

أثبت أن $\frac{n^2}{\sqrt{n^4+n}} \le u_n \le \frac{n^2}{\sqrt{n^4+1}}$ أياً كان $n \ge 1$

③ استنتج تقارب المتتالية $(u_n)_{n\ge1}$ واحسب نهايتها.

الحل:

❶ $\ell_2 = \frac{x}{2}(1+x^4)f'(x)$

$$= \frac{x}{2}(1+x^4)\frac{2x\sqrt{x^4+1} - \frac{4x^3}{2\sqrt{x^4+1}}(x^2)}{\sqrt{(x^4+1)^2}}$$

$$= \frac{x}{2} \times \frac{2(x^5 - x - x^5)}{\sqrt{x^4+1}} = \frac{x^2}{\sqrt{x^4+1}}$$

$$= f(x) = \ell_1$$

ومنه نجد:

$$f'(x) = \frac{x^2}{\sqrt{x^4+1}} \times \frac{2}{x(1+x^4)} = \frac{2x}{\sqrt{x^4+1}(1+x^4)}$$

$$g'(x) = f'(\sin x)(\sin x)'$$

$$= \frac{2\sin x \, . \cos x}{\sqrt{\sin^4 x + 1}(1 + \sin^4 x)}$$

$$= \frac{\sin 2x}{\sqrt{\sin^4 x + 1}(1 + \sin^4 x)}$$

حل أسئلة دورات

2. u_n هو مجموع n حد، أكبرها $M = \frac{n}{\sqrt{n^4+1}}$ وأصغرها $m = \frac{n}{\sqrt{n^4+n}}$ ويكون

$$n.m \le u_n \le n.M$$

ومنه نجد $n.\frac{n}{\sqrt{n^4+n}} \le u_n \le n.\frac{n}{\sqrt{n^4+1}}$

وبالتالي نجد: $\frac{n^2}{\sqrt{n^2+n}} \le u_n \le \frac{n^2}{\sqrt{n^4+1}}$

3. أياً كان $n \ge 1$ كان $n^4 < n^4 - 1$ ومنه $n^2 < \sqrt{n^4 - 1}$ وبالتالي نجد

$$u_n = \frac{n^2}{\sqrt{n^4+1}}$$

فالمتتالية u_n محدودة من الأعلى.

سيتم تنزيل ع قناتي اليوتيوب شرح دروس المنهاج بالإضافة فكرة جديدة ع اليوتيوب تنزيل 18 اختبار شامل و جزئي مع الحل و شرح الاختبار ع اليوتيوب بالإضافة ل شرح ملف الدورات

اسال عن المكثفة التكرورية و الجلسة التكرورية

يوجد مكثفة اونلاين قريبا و معسكرات في جميع المحافظات

دعواتكم الي بالتوفيق

الأستاذ احمد تكروري

حل أسئلة دورات


Ahmad Tkrory
MATHEMATICS TEACHER
#لاتقلقوا
AHMAD TKRORY
افتتاح المكثفة الأولى
لمادة الرياضيات (المنهاج كاملا)
لطلاب البكالوريا
600
استغل وقتك
مع المكثفة الأقوى
المكان : الفرقان - الجميلية - سيف الدولة
PREPARED BY
AHMAD TKRORY
احمد تكروري رياضيات
@Ahmad_Tkrory
احمد تكروري