شغف رفيقك خطوة بخطوة

شغف التعليمي

Educational passion

القناة الرئيسية " فريق شغف التعليمي "

https://t.me/alsh276

مكتبة شغف " بوت الملفات "

@passion_study_bot

قناة الرياضيات

https://t.me/passion_maths12

Subject : .... / /

- قواعد الاشتقاق:

1. $f(x) = a \Rightarrow f'(x) = 0$
2. $f(x) = ax \Rightarrow f'(x) = a$
3. $f(x) = x^n \Rightarrow f'(x) = n x^{n-1}$
4. $f(x) = g^n \Rightarrow f'(x) = n g^{n-1} . g'$
5. $f(x) = \sqrt{g(x)} \Rightarrow f'(x) = \frac{g'(x)}{2\sqrt{g(x)}}$
6. $f(x) = \frac{g(x)}{h(x)} \Rightarrow f'(x) = \frac{g'(x).h(x) - h'(x).g(x)}{(h(x))^2}$
7. $f(x) = g(x).h(x) \Rightarrow f'(x) = g'(x).h(x) + g(x).h'(x)$
8. $f(x) = f_1 + f_2 + \cdots \Rightarrow f'(x) = f_1' + f_2' + \cdots$
9. $f(x) = \cos x \Rightarrow f'(x) = -\sin x$
10. $f(x) = \cos ax \Rightarrow f'(x) = -a \sin ax$
11. $f(x) = \sin x \Rightarrow f'(x) = \cos x$
12. $f(x) = \sin ax \Rightarrow f'(x) = a.\cos ax$
13. $f(x) = \tan x \Rightarrow f'(x) = 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$
14. $f(x) = \tan ax \Rightarrow f'(x) = a(1 + \tan^2 ax)$
15. $f(x) = g(h(x)) \Rightarrow f'(x) = h'(x).\, g'(h(x))$

تمارين:

1. $f(x) = 2x^4 - 5x^3 + 6x - 1$

$f'(x) = 8x^3 - 15x^2 + 6$

2. $f(x) = x^4 - 2x\sqrt{x}$

$f'(x) = 4x^3 - 2\sqrt{x} - \sqrt{x} = 4x^3 - 3\sqrt{x}$

3. $f(x) = x.\cos x$

$f'(x) = \cos x - x.\sin x$

4. $f(x) = \sin(3x + \frac{\pi}{2})$

$f'(x) = 3.\cos(3x + \frac{\pi}{2})$

5. $f(x) = \sin x - \cos x$

$f'(x) = \cos x + \sin x$

6. $f(x) = 3x^2 + 9$

$f'(x) = 6x$

7. $f(x) = (3x^2+5)^4$

$f'(x) = 4(3x^2+5)^3(6x) = 24x(3x^2+5)^3$

8. $f(x) = \sin(x^3)$

$f'(x) = 3x^2.\cos(x^3)$

9. $f(x) = \sin^3 x = (\sin x)^3$

$f'(x) = 3.\sin^2 x.\cos x$

10. $f(x) = \left(\frac{x+1}{x+3}\right)^3$

$f'(x) = 3\left(\frac{x+1}{x+3}\right)^2 . \frac{x+3-(x+1)}{(x+3)^2} = 3\frac{(x+1)^2}{(x+3)^2} . \frac{2}{(x+3)^2} = 6\frac{(x+1)^2}{(x+3)^4}$

11. $f(x) = \frac{\sin^2 x}{\cos^3 x} \Rightarrow f'(x) = \frac{2.\sin x.\cos^2 x + 3.\sin^3 x}{\cos^4 x}$

12. $f(x) = \tan(3x) \Rightarrow f'(x) = 3(1+\tan^2(3x))$

13. $f(x) = \tan^2 x \Rightarrow f'(x) = 2.\tan x(1+\tan^2 x) = 2\tan x + 2\tan^3 x$

Subject:

- معادلة المماس T عند نقطة التماس $A(x_0, y_0)$: بدنا نقطة وميل
نحسب الميل $m = f'(x_0)$

$$T: y - y_0 = m(x - x_0)$$

ملاحظة: • $y = ax + b$ ميله $m = a$
• المستقيمان المتوازيان لهما نفس الميل.

- تمرين:

$$f(x) = \frac{x^2 - 3x + 1}{x + 1}$$

1- معادلة المماس T عند $x = 1$.

$A(1, ?)$

$$f(1) = -\frac{1}{2} \Rightarrow \boxed{A(1, -\tfrac{1}{2})}$$

نقطة التماس

لسا بدنا الميل m:

$$m = f'(1)$$

$$f'(x) = \frac{x^2 + 2x - 4}{(x+1)^2} \Rightarrow f'(1) = -\frac{1}{4} = m$$

صار معنا نقطة وميل يعني فينا ~~نط~~ نطالع معادلة المماس.

$$T: y - y_0 = m(x - x_0)$$

$$T: y = -\frac{1}{4}x - \frac{1}{4}$$

2- هل يقبل c مماساً موازياً $y = -4x$ أي أوجد معادلة المماس الذي ميله $m = -4$

$$f'(x) = \frac{x^2 + 2x - 4}{(x+1)^2}$$

$$-4 = \frac{x^2 + 2x - 4}{(x+1)^2} \Rightarrow -4(x+1)^2 = x^2 + 2x - 4$$

$$\Rightarrow 5x^2 + 10x = 0 \Rightarrow 5x(x+2) = 0$$

Subject: ....

إما $5x = 0 \Rightarrow x = 0$

$F(0) = 1 \Rightarrow A_1(0,1)$

$T_1 : y - y_0 = m(x - x_0)$

$T_1 : y = -4x + 1$

أو $x + 2 = 0 \Rightarrow x = -2$

$F(-2) = -11 \Rightarrow A_2(-2,-11)$

$T_2 : y = -4x - 19$

وبالتالي C يقبل مماسين ميل كل منهما $m = -4$

3- هل يقبل C مماساً موازياً $3x - 2y = 0$ ؟

$3x = 2y \Rightarrow y = \frac{3}{2}x \Rightarrow m = \frac{3}{2}$

$\frac{3}{2} = \frac{x^2 + 2x - 4}{(x+1)^2} \Rightarrow 3(x+1)^2 = 2(x^2 + 2x - 4)$

$\Rightarrow x^2 + 2x + 11 = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac = -40 < 0$

مستحيلة الحل في $\mathbb{R}$ ⇐ لا يوجد مماس ميله $m = \frac{3}{2}$.

دراسة قابلية الاشتقاق عند a :

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

نميز عدة حالات :

- الجواب $\mp\infty \Leftarrow$ التابع غير اشتقاقي عند a وهنا المماس شاقولي .
- النهاية غير موجودة $\lim_{x \overset{>}{\to} a} \neq \lim_{x \overset{<}{\to} a}$ فالتابع غير اشتقاقي عند a وهنا نصفي مماس .
- النهاية عدد حقيقي l فالتابع اشتقاقي عند a وتكون $l = m = f'(a)$ أي :

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a)$$

تمارين :

$f(x) = x^2\sqrt{x}$ $\quad [0, +\infty[$

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{x^2\sqrt{x}}{x} = \lim_{x \to 0} x\sqrt{x} = 0$$

التابع اشتقاقي عند الصفر من اليمين .

$f(x) = x|x|$ $\quad \mathbb{R}$

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{x|x|}{x} = \lim_{x \to 0} |x| = 0$$

التابع اشتقاقي عند الصفر .

$f(x) = \frac{x^2 + |x|}{x^2 + 1}$ $\quad \mathbb{R}$

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{x^2 + |x|}{x(x^2 + 1)}$$

نميز حالتين : $\boxed{1}$

$$\lim_{x \overset{<}{\to} 0} \frac{x^2 - x}{x(x^2 + 1)} = \lim_{x \overset{<}{\to} 0} \frac{x - 1}{x^2 + 1} = -1 = f'(0^-)$$

التابع اشتقاقي عند الصفر من اليسار .

$\boxed{2}$

$$\lim_{x \overset{>}{\to} 0} \frac{x^2 + x}{x(x^2 + 1)} = \lim_{x \overset{>}{\to} 0} \frac{x + 1}{x^2 + 1} = 1 = f'(0^+)$$

التابع اشتقاقي عند الصفر من اليمين .

بما أن $f'(0^+) \neq f'(0^-)$ فالتابع غير اشتقاقي عند الصفر .

$F(x) = x^2 \cdot \cos\frac{1}{x}$; $F(0) = 0$

$$\lim_{x \to 0} \frac{F(x) - F(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} x \cdot \cos\frac{1}{x}$$

$$\underbrace{-1 \le \cos\frac{1}{x} \le 1}_{x<0 \qquad\qquad x>0}$$

$x<0$: $-x \ge x \cdot \cos\frac{1}{x} \ge x$, each side $\to 0$

$\Rightarrow \lim_{x \overset{<}{\to} 0} x \cdot \cos\frac{1}{x} = 0$

$x>0$: $-x \le x \cdot \cos\frac{1}{x} \le x$, each side $\to 0$

$\Rightarrow \lim_{x \overset{>}{\to} 0} x \cdot \cos\frac{1}{x} = 0$

⇐ التابع اشتقاقي عند الصفر.

$F(x) = \frac{x+2}{|x|+1}$ $\quad \mathbb{R}$

1] ادرس قابلية الاشتقاق عند الصفر من اليمين.

$$\lim_{x \overset{>}{\to} 0} \frac{F(x) - F(0)}{x - 0} = \lim_{x \overset{>}{\to} 0} \frac{-x}{x(x+1)} = \lim_{x \overset{>}{\to} 0} \frac{-1}{x+1} = -1 = F'(0^+) = m$$

⇐ $F(x)$ اشتقاقي عند الصفر من اليمين.

2] المماس عند $A(0,2)$

$T_1 : y - y_0 = m(x - x_0)$

$T_1 : y = -x + 2$

3] ادرس قابلية الاشتقاق عند الصفر من اليسار.

$$\lim_{x \overset{<}{\to} 0} \frac{F(x) - F(0)}{x - 0} = \lim_{x \overset{<}{\to} 0} \frac{3}{-x+1} = 3 = F'(0^-) = m$$

⇐ $F(x)$ اشتقاقي عند الصفر من اليسار.

$T_2 : y - y_0 = m(x - x_0)$

$T_2 : y = 3x + 2$

ملاحظة: $\sqrt[n]{x^m} = x^{\frac{m}{n}}$

تمرين:

$F(x) = \frac{1}{x^4} + \sqrt[3]{x^2}$

$F(x) = x^{-4} + x^{\frac{2}{3}}$

$F'(x) = -4x^{-5} + \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}$

$= \frac{-4}{x^5} + \frac{2}{3x^{\frac{1}{3}}}$

$\Rightarrow \boxed{F'(x) = \frac{-4}{x^5} + \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}}$

$F(x) = \sqrt[4]{x^5} + \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$

$F(x) = x^{\frac{5}{4}} + x^{-\frac{1}{3}}$

$F'(x) = \frac{5}{4}x^{\frac{1}{4}} - \frac{1}{3}x^{-\frac{4}{3}}$

$\boxed{F'(x) = \frac{5}{4}\sqrt[4]{x} - \frac{1}{3\sqrt[3]{x^4}}}$

قاعدة: $F(x) = \frac{ax+b}{cx+d} \Rightarrow F'(x) = \frac{ad-bc}{(cx+d)^2}$

مثال:

$F(x) = \frac{5x+2}{x+1} \Rightarrow F'(x) = \frac{5-2}{(x+1)^2} = \frac{3}{(x+1)^2}$

تمرين: $c: f(x) = \frac{x-1}{x^2}$.

أوجد معادلة المماس للخط c الموازي للمستقيم $y=x$.

الحل:

$f'(x) = \frac{-x+2}{x^3}$

$m=1 \Rightarrow 1 = \frac{-x+2}{x^3}$

$x^3 = -x+2 \Rightarrow x^3+x-2=0$

بالتخمين نجد أن (1) هو جذر للمعادلة

نقسم على $(x-1)$

$$\begin{array}{r|l} & x^2+x+2 \\ \hline x-1 & x^3+x-2 \\ & \underline{x^3-x^2} \\ & x^2+x-2 \\ & \underline{x^2-x} \\ & 2x-2 \\ & \underline{2x-2} \\ & 0 \end{array}$$

$(x-1)(x^2+x+2)=0$

إما $x=1$ ← $y=0$ ← $A_1(1,0)$

$T_1: y-0 = 1(x-1)$

$\boxed{T_1: y = x-1}$

أو $x^2+x+2=0$

$\Delta = -7<0$

مستحيلة الحل في $\mathbb{R}$.

Subject :

$$f(x)=\frac{1}{\cos^2 3x}$$

16/108

$$\cos^2 3x=0 \Rightarrow \cos 3x=0$$

$$\Rightarrow 3x=\frac{\pi}{2}+\pi k$$

$$x=\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{3}k$$

$$D=\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{3}k\right\}$$

$$f'(x)=\frac{0-2\cos 3x(-3\sin 3x)}{\cos^4 3x}$$

$$f'(x)=\frac{6\cdot\sin 3x}{\cos^3 3x}$$

الاشتقاق تابع مركب :

إذا كان $g(x)=f(u)$ فإن :

$$g'(x)=u'\cdot f'(u)$$

15/108

$$f(x)=\frac{x^2+1}{x-1}$$

1 احسب $f'(x)$.

2 استنتج مشتق ،

$$h(x)=\frac{x^4+1}{x^2-1}$$

$$g(x)=\frac{x+1}{\sqrt{x}-1}$$

$$k(x)=\frac{\sin^2 x+1}{\sin x-1}$$

$$l(x)=\sqrt{\frac{x^2+1}{x-1}}$$

هام 8/105

$$f(x)=x+\sqrt{1+x^2}$$

1 تحقق أن : $\sqrt{1+x^2}\cdot f'(x)=f(x)$

الحل :

$$f'(x)=1+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

نضرب بـ $\sqrt{1+x^2}$:

$$\sqrt{1+x^2}\cdot f'(x)=\sqrt{1+x^2}+x$$

$$\sqrt{1+x^2}\cdot f'(x)=f(x)$$

2 استنتج أن :

$$(1+x^2)\cdot f''(x)+x\cdot f'(x)-f(x)=0 \;\dots\; \star$$

الحل :

$$f''(x)=\frac{\sqrt{1+x^2}-\frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}}{1+x^2}$$

$$=\frac{\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}}{1+x^2}=\frac{1}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}$$

نعوض في $\star$:

$$(1+x^2)\cdot\frac{1}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}+x\cdot\left(1+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)-(x+\sqrt{1+x^2})$$

$$=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}+x+\frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}-x-\sqrt{1+x^2}$$

$$=\frac{x^2+1}{\sqrt{x^2+1}}-\sqrt{1+x^2}=0$$

ملاحظة :

- $\cos x=0 \Rightarrow x=\frac{\pi}{2}+\pi k$
- $\sin x=0 \Rightarrow x=\pi k$

الحل II.

$$f'(x) = \frac{x^2-2x-1}{(x-1)^2}$$

2. نلاحظ أن: $h(x) = f(x^2)$

$$\Rightarrow h'(x) = (x^2)' . f'(x^2)$$

$$= 2x\,\frac{x^4-2x^2-1}{(x^2-1)^2} = \boxed{\frac{2x^5-4x^3-2x}{(x^2-1)^2}}$$

• نلاحظ أن: $g(x) = f(\sqrt{x})$

$$\Rightarrow g'(x) = (\sqrt{x})' . f'(\sqrt{x})$$

$$= \boxed{\frac{x-2\sqrt{x}-1}{(\sqrt{x}-1)^2} . \frac{1}{2\sqrt{x}}}$$

• نلاحظ أن: $k(x) = f(\sin x)$

$$\Rightarrow k'(x) = f'(\sin x) . (\sin x)'$$

$$= \boxed{\frac{\sin^2 x - 2\sin x - 1}{(\sin x - 1)^2} . \cos x}$$

• نلاحظ أن: $l(x) = \sqrt{f(x)}$

$$\Rightarrow l'(x) = \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$$

$$= \frac{\frac{x^2-2x-1}{(x-1)^2}}{2\sqrt{\frac{x^2+1}{x-1}}} = \boxed{\frac{x^2-2x-1}{2(x-1)^2}\sqrt{\frac{x-1}{x^2+1}}}$$

تمرين: $f(x) = \frac{3x+1}{x+1}$

أوجد $f'(x)$ ثم استنتج مشتق التابع: $g(x) = f(\sin^2 x)$

$$f'(x) = \frac{2}{(x+1)^2}$$

$$g'(x) = (\sin^2 x)' . f'(\sin^2 x)$$

$$= 2.\sin x.\cos x . \frac{2}{(\sin^2 x+1)^2}$$

$$\boxed{g'(x) = \frac{4\sin x.\cos x}{(\sin^2 x+1)^2}}$$

صفحة 102:

$$f(x) = \frac{x+2}{|x|+1}$$

$T_1: y = -x+2$

$T_2: y = 3x+2$

3 ارسم نصفي المماسين وارسم C على $[-2,2]$.

نرسم T_1 على $[0,+\infty[$:

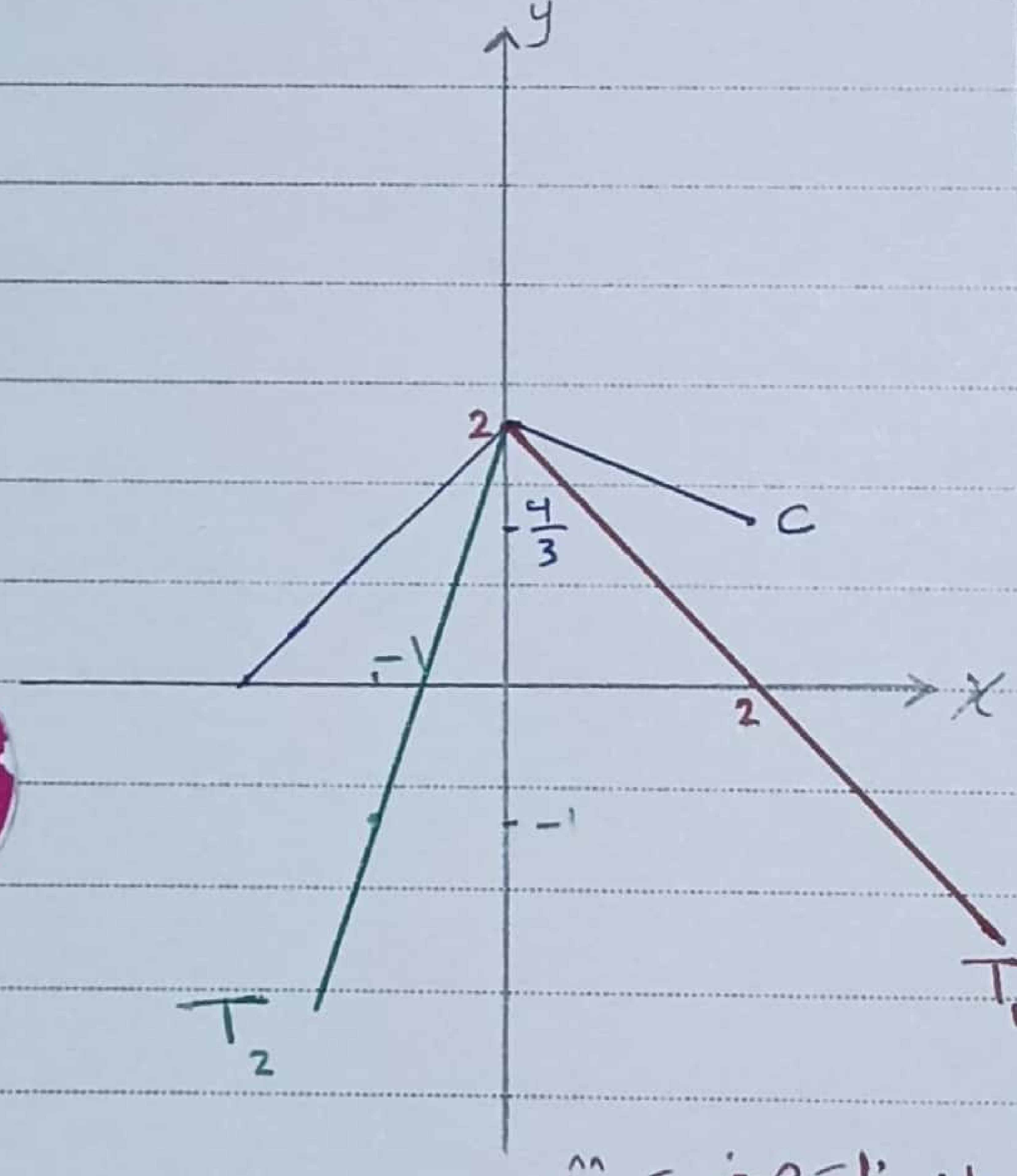
x	0	2
y	2	0

نرسم T_2 على $]-\infty,0]$:

x	0	-1
y	2	-1

$C: f(x) = \frac{x+2}{|x|+1} \Rightarrow$

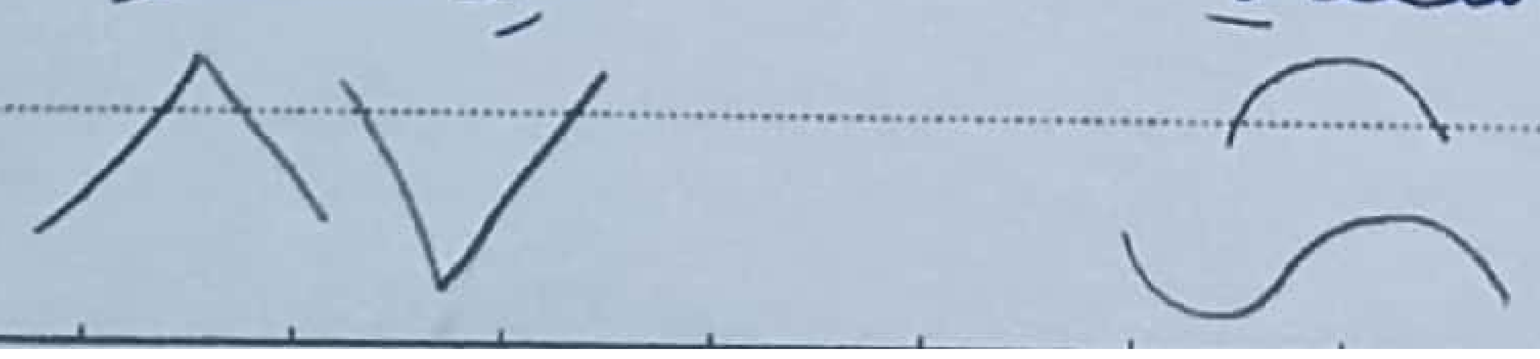
x	-2	0	2
y	0	2	$\frac{4}{3}$



ملاحظة صغيرة:

عند الحنية نام وارتاح وعند العقرب اقترب.

اشتقاقي — غير اشتقاقي



ملاحظة:

x		x_0	
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	$f(x_0)$	$\nearrow$

نسمي $f(x_0)$ قيمة صغرى محلية.

x		x_0	
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\nearrow$	$f(x_0)$	$\searrow$

نسمي $f(x_0)$ قيمة كبرى محلياً.

ملاحظة هامة:

المشتق عند القيمة الحدية معدوم $f'(x_0)=0$

وهنا يكون المماس أفقي معادلته: $T: y=y_0$

$\boxed{\frac{3}{89}}$

$f(x)=x^3-x^2+ax$

عيّن a ليكون للتابع قيمة حدية عند $x=1$

الحل:

$f'(x)=3x^2-2x+a$

$f'(1)=0 \Rightarrow 3(1)-2(1)+a=0$

$3-2+a=0$

$a+1=0 \Rightarrow \boxed{a=-1}$

$\cancel{f(x)=3x^2-2x+x}$

$\Rightarrow f(x)=x^3-x^2-x$

$\boxed{\frac{4}{89}}$

$f(x)=\frac{ax^2+bx+1}{x-1} \quad \mathbb{R}\setminus\{1\}$

عيّن a و b إذا علمت أن للتابع قيمة حدية تساوي (0) عند $x=-1$

أو عيّن a و b إذا علمت أن للخط البياني C مماساً أفقياً عند $A(-1,0)$

الحل:

$A\in C \Rightarrow \frac{a-b+1}{-2}=0$

$\Rightarrow a-b+1=0 \dots (1)$

$f'(x)=\frac{(2ax+b)(x-1)-(ax^2+bx+1)}{(x-1)^2}$

$f'(-1)=0 \Rightarrow \frac{(-2a+b)(-2)-(a-b+1)}{4}=0$

$4a-2b-a+b-1=0$

$3a-b-1=0 \dots (2)$

$$\begin{cases} a-b+1=0 \dots (1) \\ 3a-b-1=0 \dots (2) \end{cases}$$

بالطرح:

$-2a+2=0$

$\Rightarrow \boxed{a=1}$

نعوض $a=1$ في (1):

$3(1)-b-1=0 \Rightarrow \boxed{b=2}$

$$\Rightarrow \boxed{f(x)=\frac{x^2+2x+1}{x-1}}$$

18/108

$C: f(x) = ax^3 + bx^2 + 1 \quad ; \mathbb{R}$

عيّن a ، b إذا علمت أن للخط C مماساً أفقياً عند $A(1,2)$

أو عيّن a ، b إذا علمت أن للتابع قيمة حدية تساوي 2 عند $x=1$:

الحل

$A \in C \Rightarrow a+b+1=2$

$\Rightarrow a+b=1 \ldots (1)$

ميل المماس الأفقي معدوم وبالتالي :

$f'(x) = 3ax^2 + 2bx$

$m = f'(1) = 0$

$3a+2b=0 \ldots (2)$

$\left.\begin{array}{l} a+b=1 \\ 3a+2b=0 \end{array}\right\} \Rightarrow a=-2 ,\ b=3$

$\boxed{f(x) = -2x^3 + 3x^2 + 1}$

19/108

$C: f(x) = \dfrac{3x^3+ax+b}{x^2+1} \quad ; \mathbb{R}$

عيّن a ، b إذا علمت أن $T: y=4x+3$ مماساً للخط C في نقطة فاصلتها $x=0$

الحل

$A(0,?) \in T$

$y = 4(0)+3 = 3$

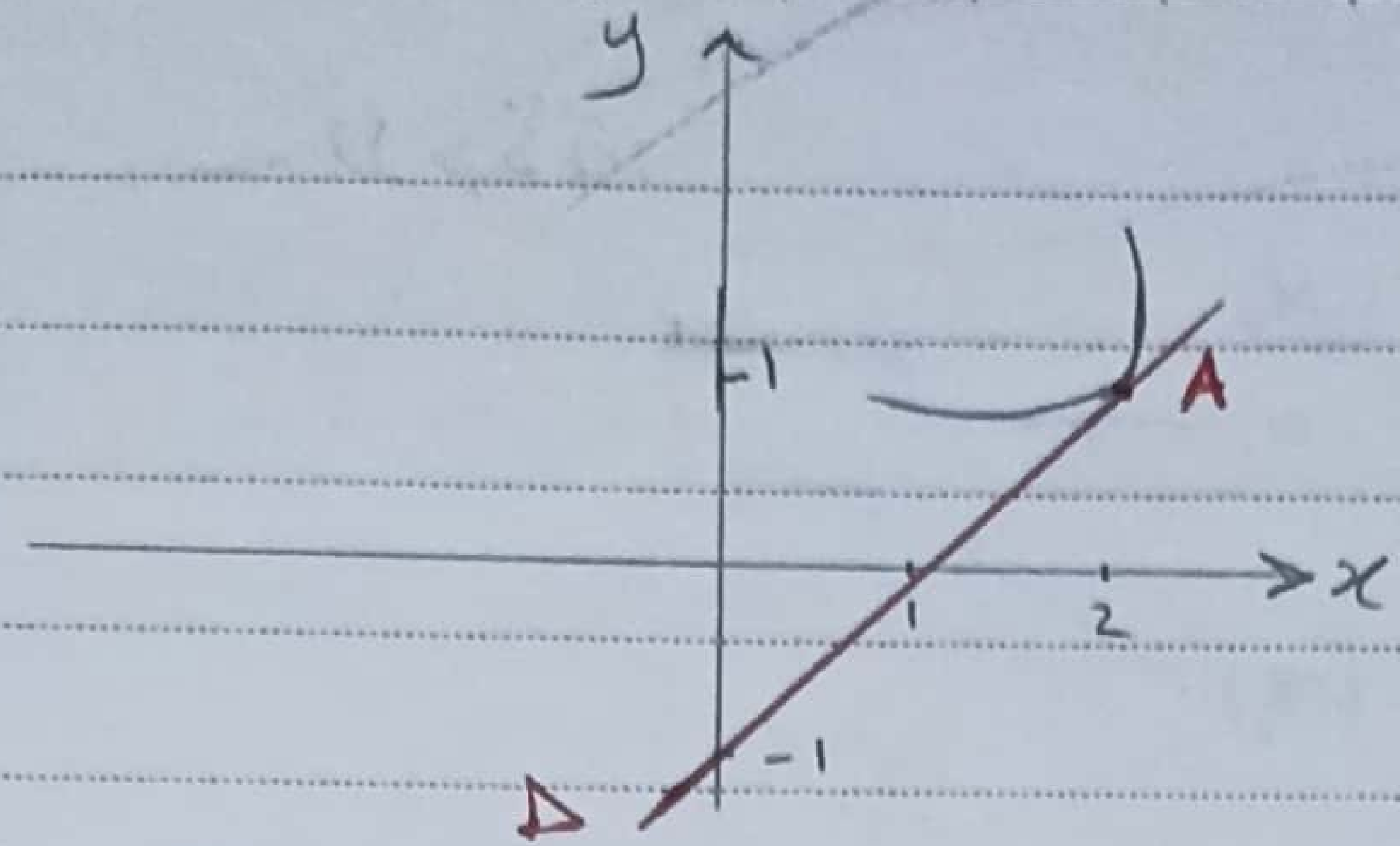
$\Rightarrow A(0,3)$ نقطة التماس .

$A(0,3) \in C \Rightarrow \dfrac{b}{1} = 3 \Rightarrow b=3$

$f'(x) = \dfrac{(9x^2+a)(x^2+1) - 2x(3x^3+ax+b)}{(x^2+1)^2}$

$m = f'(0) = 4 \Rightarrow a=4$

$\Rightarrow \boxed{f(x) = \dfrac{3x^3+4x+3}{x^2+1}}$



$C: f(x) = \dfrac{ax+b}{x^2+1}$

عيّن a ، b إذا علمت أن Δ مماس لـ c في A .

الحل

$A(2,1) \in C \Rightarrow \dfrac{2a+b}{5} = 1$

$2a+b=5 \ldots (1)$

Δ مار من $(2,1)$ و $(1,0)$

$m_\Delta = \dfrac{1-0}{2-1} = 1$

$f'(x) = \dfrac{a(x^2+1) - 2x(ax+b)}{(x^2+1)^2}$

$m_\Delta = f'(2) = 1 \Rightarrow \dfrac{5a-4(2a+b)}{25} = 1$

$\Rightarrow 5a - 8a - 4b = 25$

$-3a - 4b = 25 \ldots (2)$

$a = 9 \quad , \quad b = -13$

$\Rightarrow \boxed{f(x) = \dfrac{9x-13}{x^2+1}}$

- تعريف العدد المشتق:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(a)$$

يستخدم في التغلب على النهايات الصعبة ث

- صفحة 101 : نموذج امتحاني.

$F(x) = \tan x$

1] احسب $F(\frac{\pi}{4})$ ، $F'(x)$ ، $F'(\frac{\pi}{4})$

$F(\frac{\pi}{4}) = 1$

$F'(x) = 1 + \tan^2 x$

$F'(\frac{\pi}{4}) = 2$

2] استنتج $\lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{\tan x - 1}{x - \frac{\pi}{4}}$

حسب تعريف العدد المشتق:

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{f(x)-f(\frac{\pi}{4})}{x-\frac{\pi}{4}} = f'(\frac{\pi}{4})$$

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{\tan x - 1}{x - \frac{\pi}{4}} = 2$$

$f(x) = 2\cos x$

1] احسب $f(\frac{\pi}{3})$ ، $f'(x)$ ، $f'(\frac{\pi}{3})$

$F(\frac{\pi}{3}) = 1$

$F'(x) = -2\sin x$

$F'(\frac{\pi}{3}) = -2(\frac{\sqrt{3}}{2}) = -\sqrt{3}$

2] استنتج $\lim_{x \to \frac{\pi}{3}} \frac{2\cos x - 1}{x - \frac{\pi}{3}}$

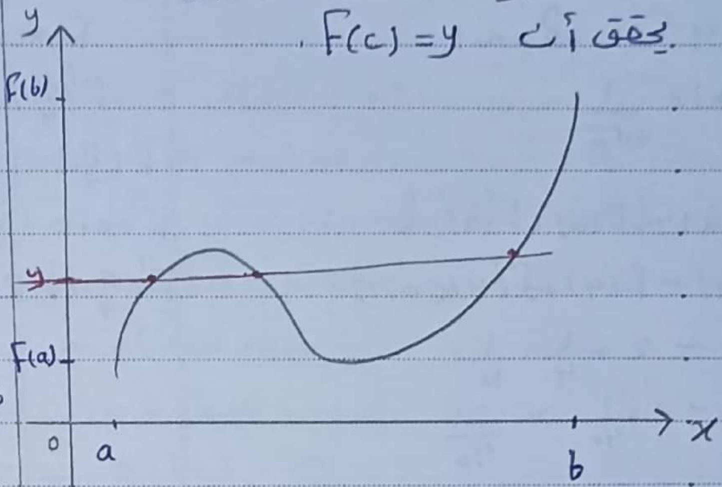
حسب تعريف العدد المشتق:

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{3}} \frac{2\cos x - 1}{x - \frac{\pi}{3}} = f'(\frac{\pi}{3}) = -\sqrt{3}$$

- مبرهنة القيمة الوسطى :

F مستمر على $[a,b]$ عندئذٍ

أياً كان العدد الحقيقي y المحصور بين $F(a)$ و $F(b)$ يوجد على الأقل عدد حقيقي c محصور بين a و b يحقق أن $F(c)=y$.



• لإثبات أن للمعادلة $F(x)=y$ حل وحيد في $[a,b]$ نثبت أن F مستمر ومطرد تماماً على $[a,b]$.

حالة خاصة :

لإثبات أن للمعادلة $F(x)=0$ حل وحيد في $[a,b]$ نثبت :

← F مستمر ومطرد تماماً على $[a,b]$

← إما $0 \in F([a,b])$

أو $F(a).F(b)<0$

$\frac{2}{61}$ G

$F(x) = x^3 - 3x^2 + 1 \; ; \mathbb{R}$

ادرس تغيرات التابع ونظم جدولاً بها.

التابع معرف ومستمر واشتقاقي على $\mathbb{R}$.

$\lim_{x \to -\infty} F(x) = -\infty \quad , \quad \lim_{x \to +\infty} F(x) = +\infty$

$F'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x-2)$

$F' = 0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \rightarrow F(0)=1 \\ x=2 \rightarrow F(2)=-3 \end{cases}$

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
F'		$+$	0	$-$	0	$+$	
F	$-\infty$	↗	1	↘	-3	↗	$+\infty$

2) أثبت أن للمعادلة $F(x)+1=0$ ثلاث حلول فقط في $\mathbb{R}$.

المعادلة تكافئ : $F(x)=-1$

في $]-\infty,0[$ التابع مستمر ومتزايد تماماً.

$-1 \in F(]-\infty,0[) =]-\infty,1[$

$\Leftarrow$ للمعادلة حل α_1 في $]-\infty,0[$

في $[0,2]$ التابع مستمر ومتناقص تماماً

$-1 \in F([0,2]) = [-3,1]$

$\Leftarrow$ للمعادلة حل α_2 في $[0,2]$

في $]2,+\infty[$ التابع مستمر ومتزايد تماماً

$-1 \in F(]2,+\infty[) =]-3,+\infty[$

$\Leftarrow$ للمعادلة حل α_3 في $]2,+\infty[$.

مما سبق للمعادلة $F(x)+1=0$ ثلاثة حلول فقط في $\mathbb{R}$.

$F(x) = \sqrt[3]{x}$ $\mathbb{R}$

اكتب معادلة المماس للخط البياني c عند النقطة

التي فاصلتها $x=1$.

الحل: $F(1)=1 \Rightarrow A(1,1)$ نقطة التماس

$F'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$

$F'(1) = \frac{1}{3} = m$

$T: y - y_0 = m(x - x_0)$

$T: y = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$

تدريب صفحة 184

$F(x) = \frac{1}{x}$ عند $x=4$

$F(4) = \frac{1}{4} \Rightarrow A(4, \frac{1}{4})$ نقطة التماس

$F'(x) = -\frac{1}{x^2} \Rightarrow F'(4) = -\frac{1}{16} = m$

$T: y - y_0 = m(x - x_0)$

الباقي احسبوه انتو ^^ .

$F(x) = x^2$ عند $x=4$

$F(4) = 16 \Rightarrow A(4,16)$ نقطة التماس

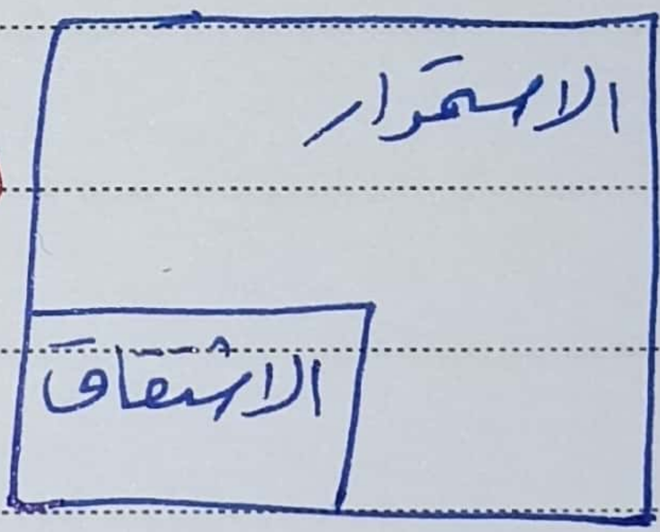
$F'(x) = 2x \Rightarrow F'(4) = 8 = m$

$T: y - y_0 = m(x - x_0)$

كملو الحل لحالكن ^^ .

ملاحظة صغيرة وحلوة :

كل تابع اشتقاقي على مجال هو مستمر
والعكس ليس صحيح بالضرورة.



الاستمرار بيت
والاشتقاق غرفة بداخل
البيت .

مسألة: $C: f(x) = ax + b\sqrt{x+1} - 3$

$D_f: [-1, +\infty[$

1) عيّن a , b إذا علمت أن للخط البياني مماساً أفقياً عند $A(0,-5)$ منه.

2) ادرس قابلية الاشتقاق عند (-1) ثم اكتب معادلة نصف المماس عند $x = -1$.

3) ادرس تغيرات التابع ونظم جدولاً بها ثم دل على القيم الحدية.

4) أثبت أن المعادلة $f(x)=0$ لها حل وحيد α أوجده.

الحل:

1) $A \in C \Rightarrow b - 3 = -5$

$\Rightarrow \boxed{b = -2}$

$f'(x) = a + \dfrac{b}{2\sqrt{x+1}}$

$m = f'(0) = 0 \Rightarrow a + \dfrac{b}{2} = 0 \Rightarrow \boxed{a = 1}$

$\Rightarrow \boxed{f(x) = x - 2\sqrt{x+1} - 3}$

2) $$\lim_{x \to -1} \frac{f(x) - f(-1)}{x-(-1)}$$

$$= \lim_{x \to -1} \frac{x - 2\sqrt{x+1} - 3 + 4}{x+1}$$

$$= \lim_{x \to -1} \frac{x - 2\sqrt{x+1} + 1}{x+1}$$

$$= \lim_{x \to -1} \frac{x+1 - 2\sqrt{x+1}}{x+1}$$

$$= \lim_{x \to -1} \left(1 - \frac{2\sqrt{x+1}}{x+1}\right) = \lim_{x \to -1}\left(1 - \frac{2}{\sqrt{x+1}}\right) = -\infty$$

التابع غير اشتقاقي عند (-1)

وهنا نصف مماس شاقولي معادلته

$T: x = -1$

3) $f(x)$ معرف ومستمر على $[-1, +\infty[$

واشتقاقي على $]-1, +\infty[$

$f(-1) = -4$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = (\infty - \infty)$ عدم تعيين

$$= \lim_{x \to +\infty} \left(x - 2x\sqrt{\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} - 3\right)$$

$$= \lim_{x \to +\infty} x\left(1 - 2\sqrt{\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} - \frac{3}{x}\right)$$

$$= \infty(1 - 0) = +\infty$$

$f'(x) = 1 - \dfrac{1}{\sqrt{x+1}} = \dfrac{\sqrt{x+1} - 1}{\sqrt{x+1}}$

$f' = 0 \Rightarrow \sqrt{x+1} - 1 = 0 \Rightarrow \sqrt{x+1} = 1$

$\Rightarrow x = 0 \longrightarrow f(0) = -5$

x	-1		0		$+\infty$
$f'(x)$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	-4	$\searrow$	-5	$\nearrow$	$+\infty$

$f(0) = -5$ قيمة صغرى محلياً

$f(-1) = -4$ قيمة كبرى محلياً

4 في $[0,+\infty[$ التابع مستمر ومتزايد تماماً.

$0 \in f([0,+\infty[) = [-5,+\infty[$

للمعادلة حل وحيد α في $]0,+\infty[$

$f(x)=0$

$x-2\sqrt{x+1}-3=0$

$2\sqrt{x+1}=x-3$

نربع الطرفين بشرط $x-3\geq 0$ أي $x\geq 3$

$4x+4=x^2-6x+9$

$x^2-10x+5=0$

$\Delta=80 \Rightarrow \sqrt{\Delta}=4\sqrt{5}$

$x_1=\frac{10+4\sqrt{5}}{2}=5+2\sqrt{5}$ مقبول

$x_2=\frac{10-4\sqrt{5}}{2}=5-2\sqrt{5}$ مرفوض

$\Rightarrow \boxed{\alpha=5+2\sqrt{5}}$

27 ص110

$f(x)=\frac{2x^2+x+7}{x+1}$ $\quad \mathbb{R}\setminus\{-1\}$

1 أوجد نهاية التابع عند $\mp\infty$

2 أثبت أن $d: y=2x-1$ مقارب مائل لـ c

3 ادرس نهاية f عند -1، ماذا تستنتج منها يتعلق بالخط c؟

4 ادرس تغيرات f ونظم جدولاً بها.

5 أثبت أن النقطة $I(-1,-3)$ هي مركز تناظر للخط c.

6 ارسم مقاربات c ثم c

الحل: 1

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

2

$f(x)=2x-1+\frac{8}{x+1}$

$f(x)-y_d=\frac{8}{x+1}$

$\lim_{x\to\mp\infty}(f(x)-y_d)=0$

$\Leftarrow$ d مقارب مائل بجوار $\mp\infty$

الوضع النسبي:

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f-y_d$	$-$	‖	$+$
الوضع	d تحت c	‖	d فوق c

3

$\lim_{x\to-1^-} f(x)=\frac{8}{0^-}=-\infty$

$\lim_{x\to-1^+} f(x)=\frac{8}{0^+}=+\infty$

$\Rightarrow x=-1$ مقارب شاقولي

4

$f'(x)=2-\frac{8}{(x+1)^2}=\frac{2(x+1)^2-8}{(x+1)^2}$

$f'(x)=0 \Rightarrow 2(x+1)^2-8=0$

$(x+1)^2=4 \Rightarrow x+1=\mp 2$

$x=-3 \rightarrow f(-3)=-11$

$x=+1 \rightarrow f(1)=5$

/ /

x	$-\infty$		-3		-1		1		$+\infty$
F'		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
F	$-\infty$	↗	-11	↘ $-\infty$	‖	$+\infty$ ↘	$+5$	↗	$+\infty$

$\boxed{5}$

قاعدة: نقول أن $A(x_0, y_0)$ مركز تناظر

إذا تحقق:

- $\forall x \in D : 2x_0 - x \in D$
- $F(2x_0 - x) + F(x) = 2y_0$

يجب إثبات:

$\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{-1\} \overset{??}{\Rightarrow} -2-x \in \mathbb{R}\setminus\{-1\}$

لدينا $x \in \mathbb{R}\setminus\{-1\}$

$-x \in \mathbb{R}\setminus\{+1\}$

$-2-x \in \mathbb{R}\setminus\{-1\}$

⇐ الشرط الأول محقق.

يجب إثبات:

$F(-2-x) + F(x) = -6$

$F(-2-x) = -6 - F(x)$

$\ell_1 = F(-2-x) = \dfrac{2(-2-x)^2 - 2 - x + 7}{-2-x+1}$

$= \dfrac{2x^2+7x+13}{-x-1} = -\dfrac{2x^2+7x+13}{x+1}$

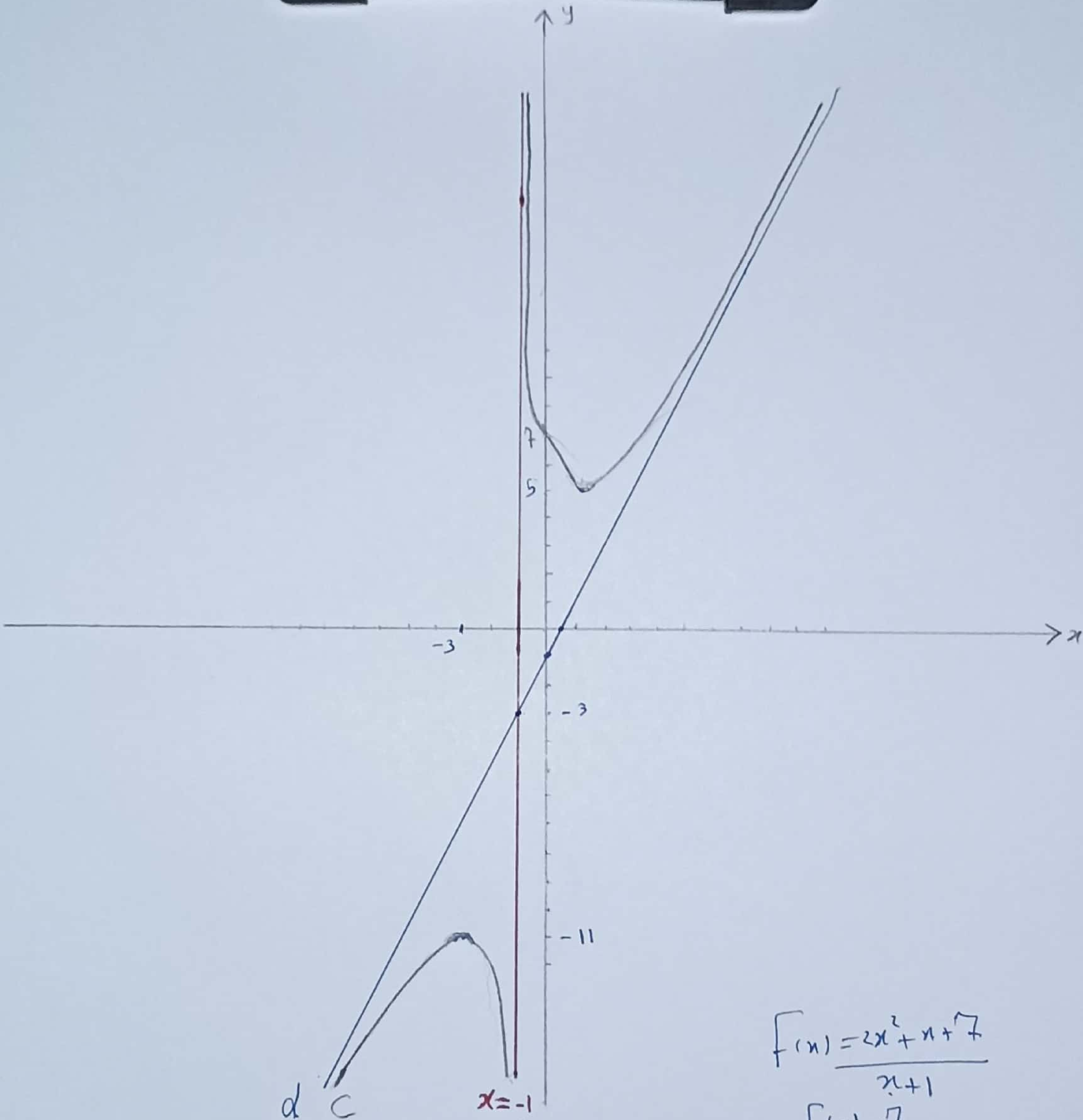
$\ell_2 = -6 - F(x) = -6 - \dfrac{2x^2+x+7}{x+1}$

$= \dfrac{-6x-6-2x^2-x-7}{x+1} = \dfrac{-2x^2-7x-13}{x+1}$

$= -\dfrac{2x^2+7x+13}{x+1}$

$\Rightarrow \ell_1 = \ell_2$

ومنه $I(-1,-3)$ مركز تناظر.



$$f(x) = \frac{2x^2+x+7}{x+1}$$

$$f(0) = 7$$

$d: y = 2x - 1$

x	0	$\frac{1}{2}$
y	-1	0

$2(0) - 1 = -1$

$2x - 1 = 0$

$2x = 1$

$x = \frac{1}{2}$

Subject :

26/110

$f(x) = \dfrac{x^2+x}{x^2+x+3}$ $\mathbb{R}$

1) ادرس تغيرات التابع ونظم جدولاً بها.

التابع معرف ومستمر واشتقاقي على $\mathbb{R}$.

$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 1 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow$ مقارب أفقي بجوار $\pm\infty$: $y=1$.

$f'(x) = \dfrac{(2x+1)(x^2+x+3) - (2x+1)(x^2+x)}{(x^2+x+3)^2}$

$= \dfrac{(2x+1)(x^2+x+3-x^2-x)}{(x^2+x+3)^2}$

$= \dfrac{3(2x+1)}{(x^2+x+3)^2}$

$f' = 0 \Rightarrow 2x+1 = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{2} \longrightarrow f(-\frac{1}{2}) = \frac{-1}{11}$

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		$+\infty$
f'		$-$	0	$+$	
f	1	$\searrow$	$-\frac{1}{11}$	$\nearrow$	1

2) أوجد معادلة المماس المار بالمبدأ عدا المماس بالمبدأ.

نفرض نقطة التماس $a \neq 0 : A\left(a, \dfrac{a^2+a}{a^2+a+3}\right)$

$m = f'(a) = \dfrac{3(2a+1)}{(a^2+a+3)^2}$

$T : y - y_0 = m(x - x_0)$

$T : y - \dfrac{a^2+a}{a^2+a+3} = \dfrac{3(2a+1)}{(a^2+a+3)^2}(x-a)$

$(0,0) \in T \Rightarrow -\dfrac{a^2+a}{a^2+a+3} = \dfrac{3(2a+1)}{(a^2+a+3)^2}(-a)$

$-a\,\dfrac{a+1}{a^2+a+3} = \dfrac{3(2a+1)}{(a^2+a+3)^2}(-a)$

$a+1 = \dfrac{3(2a+1)}{a^2+a+3}$

$(a+1)(a^2+a+3) = 3(2a+1)$

$a^3+a^2+3a+a^2+a+3 = 6a+3$

$a^3+2a^2-2a = 0$

$a^2+2a-2 = 0 \quad \Leftarrow a \neq 0$

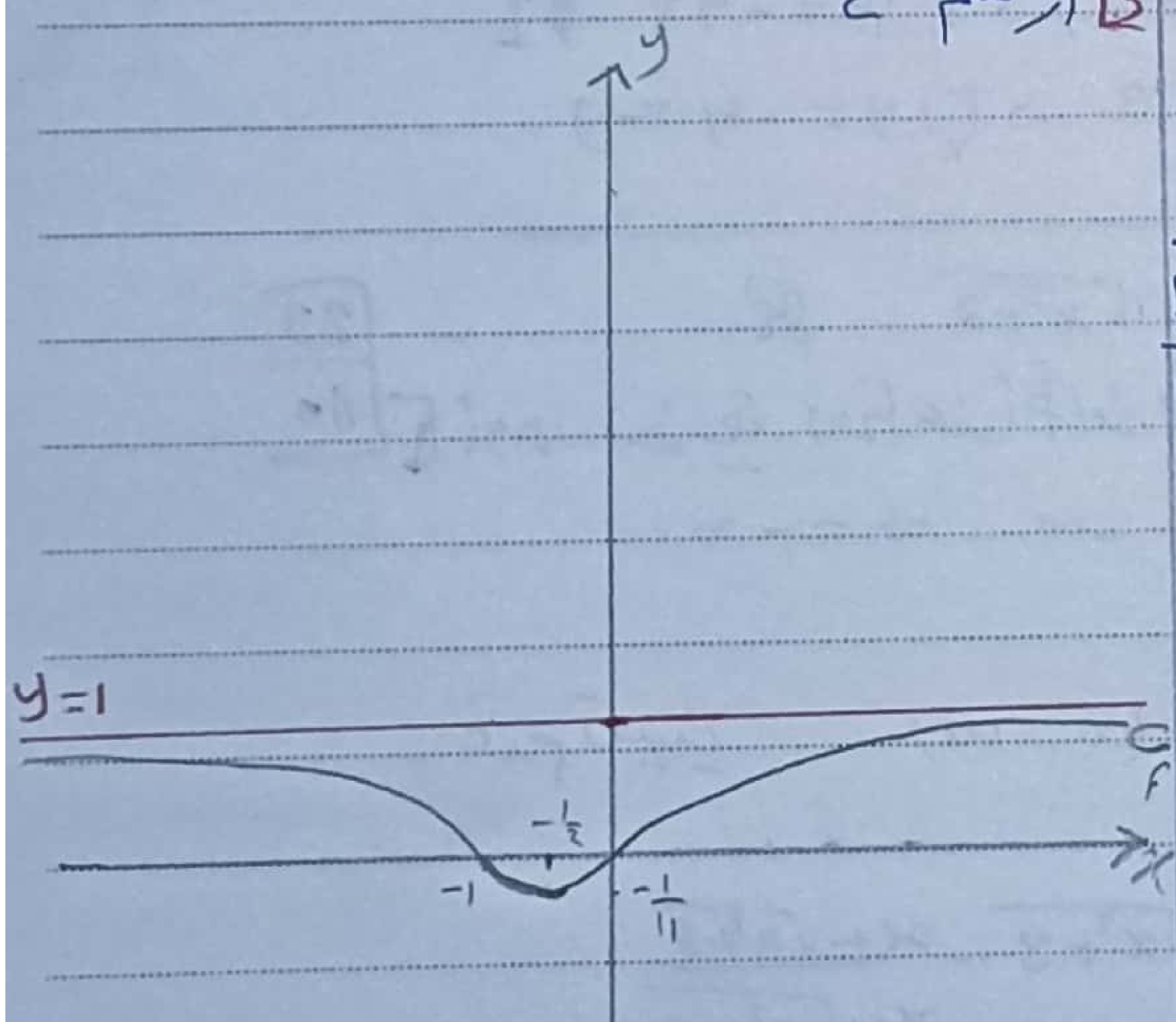
$\Delta = 12$

$a_1 = -1-\sqrt{3} \Rightarrow T_1 : y - \text{---} = \text{---}(x+1+\sqrt{3})$

بس عوضو قيمة a

$a_2 = -1+\sqrt{3} \Rightarrow T_2 = \text{---}$

3) ارسم C



نقاط مساعدة

$(0,0)$

$(-1,0)$

تمرين : $f(x) = x^2 - 2x$

1. أوجد معادلة المماس T_a بدلالة a في $A(a, f(a))$

2. أوجد معادلة كل مماس لـ C يمر من $B(1, -5)$

الحل

1

$A(a, f(a))$

$m = f'(a)$

$f'(x) = 2x - 2 \Rightarrow f'(a) = 2a - 2$

$T_a : y - y_0 = m(x - x_0)$

$T_a : y - (a^2 - 2a) = (2a - 2)(x - a)$

2

$B \in T \Rightarrow -5 - a^2 + 2a = (2a - 2)(1 - a)$

$-5 - a^2 + 2a = 2a - 2a^2 + 2a - 2$

$a^2 - 2a - 3 = 0$

$(a - 3)(a + 1) = 0$

إما $a = -1 \rightarrow T_1 : y = -4x - 1$

أو $a = 3 \rightarrow T_2 : y = -4x - 9$

$f(x) = x - \sqrt{x^2 + 8}$ $\mathbb{R}$

29 / 10

1. أوجد نهاية $f(x)$ عند أطراف المجال

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty - \infty = -\infty$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = (\infty - \infty)$ عدم تعيين

$f(x) = x - \sqrt{x^2 + 8} \cdot \frac{x + \sqrt{x^2 + 8}}{x + \sqrt{x^2 + 8}}$

$= \frac{-8}{\sqrt{x^2 + 8}} \Rightarrow \lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$

$y = 0$ مقارب أفقي بجوار $+\infty$

$\boxed{2}$

$d: y = 2x$ مقارب مائل ؟

$$g(x) = f(x) - y_d = -x - \sqrt{x^2+8}$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = (\infty - \infty)$$ عدم تعيين

$$g(x) = \frac{8}{x - \sqrt{x^2+8}} \Rightarrow \lim_{x \to -\infty} g(x) = 0$$

وبالتالي $d: y = 2x$ مقارب مائل لـ

$\boxed{3}$ تغيرات + رسم.

$f(x)$ معرف ومستمر واشتقاقي على $\mathbb{R}$

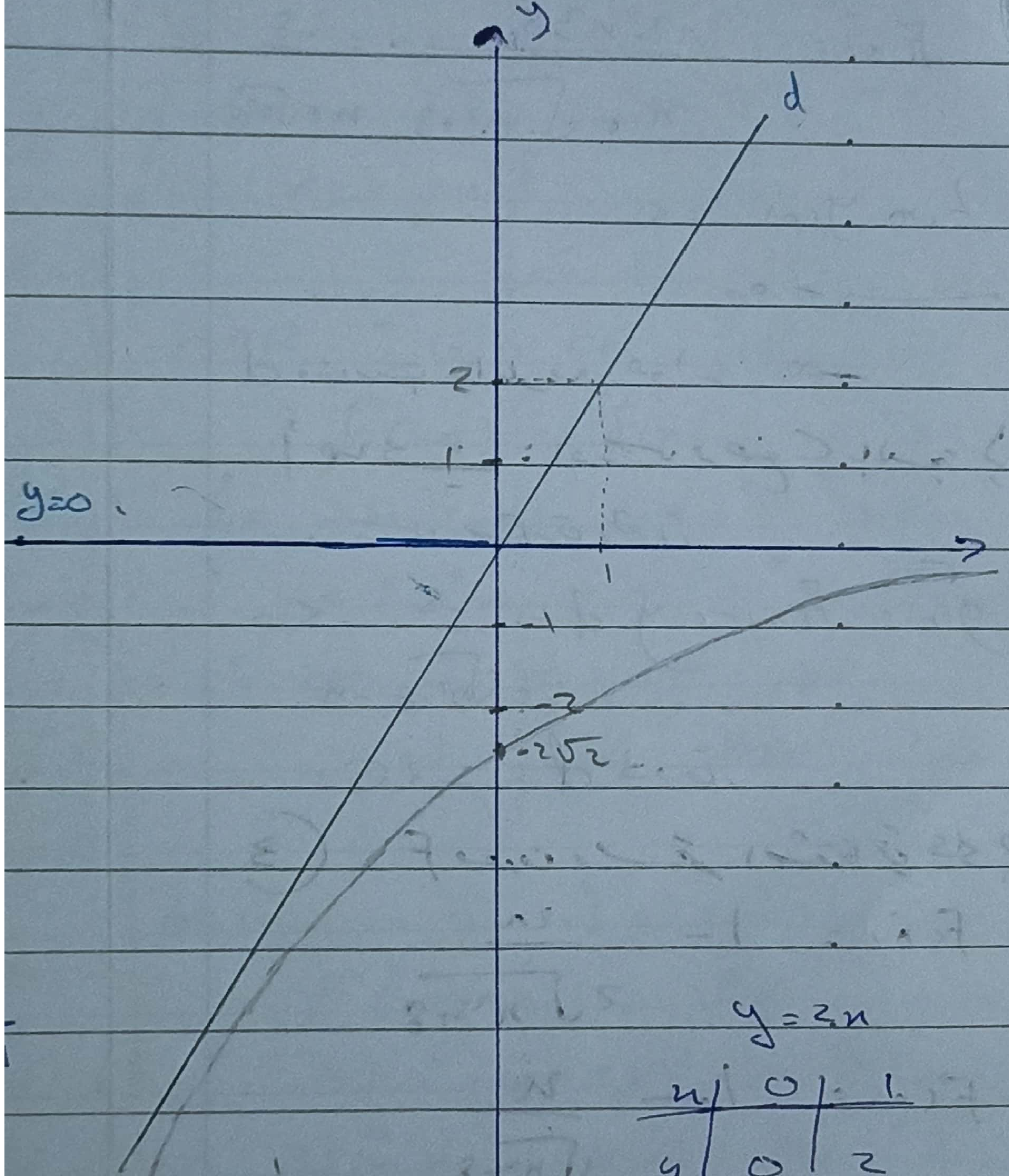
$$f'(x) = 1 - \frac{2x}{2\sqrt{x^2+8}} = 1 - \frac{x}{\sqrt{x^2+8}}$$

$$= \frac{\sqrt{x^2+8} - x}{\sqrt{x^2+8}} > 0$$

$f(x)$ متزايد تماماً لا ينعدم.

x	$-\infty$		$+\infty$
f'		$+$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	0

الموضوع : ....



$y = 2x$

x	0	1
y	0	2

الخط يقطع yy' بنقطة $F(0) = -2\sqrt{2}$

تعاريف:

- نقول أن $f(x)$ تابع زوجي إذا تحقق:
- $\forall x \in D \Rightarrow -x \in D$
- $f(-x) = f(x)$

ويكون عندها الخط C متناظر بالنسبة لِ $y'y$

- نقول أن $f(x)$ تابع فردي إذا تحقق:
- $\forall x \in D \Rightarrow -x \in D$
- $f(-x) = -f(x)$

ويكون عندها الخط C متناظر بالنسبة لِ o

- نقول أن $f(x)$ تابع دوري دوره (a) إذا تحقق:

$f(x+a) = f(x)$

شوية ملاحظات:

- $\sin(-x) = -\sin x$ الـ sin بتطالع الناقص لبرا
- $\cos(-x) = \cos x$ الـ cos بتبلع الناقص
- $\sin(x+2\pi) = \sin x$ | $\sin x = 0 \Rightarrow x = \pi k$
- $\cos(x+2\pi) = \cos x$ | $\cos x = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + \pi k$

30.
111.

مسألة الشرح:

$c: f(x) = 3\sin^2 x + 4\cos^3 x \quad \mathbb{R}$

1. أثبت أن $f(x)$ تابع زوجي واستنتج الصفة التناظرية.
2. أثبت أن $f(x)$ تابع دوري دوره 2π
3. ادرس تغيرات $f(x)$ على $[0,\pi]$ ونظم جدولاً بها.
4. ارسم c على $[-2\pi, 2\pi]$

الحل:

1. يجب إثبات:

محقق $\quad \bullet \forall x \in D_f \Rightarrow -x \in D_f$

$\bullet f(-x) = f(x)$

$l_1 = f(-x) = 3\sin^2(-x) + 4\cos^3(-x)$

$= 3\sin^2 x + 4\cos^3 x$

$= f(x)$

$= l_2 \Rightarrow l_1 = l_2$

$\Leftarrow$ $f(x)$ تابع زوجي والخط البياني c متناظر بالنسبة لـ $y'y$.

2. يجب إثبات: $\quad f(x+2\pi) = f(x)$

$l_1 = f(x+2\pi) = 3\sin^2(x+2\pi) + 4\cos^3(x+2\pi)$

$= 3\sin^2(x) + 4\cos^3(x)$

$= f(x)$

$= l_2 \Rightarrow l_1 = l_2$

$\Leftarrow$ $f(x)$ تابع دوري دوره (2π).

3. التابع $f(x)$ معرف ومستمر واشتقاقي على $[0,\pi]$

$f(0) = 4 \quad , \quad f(\pi) = -4$

$f'(x) = 3 \times 2\sin x.\cos x + 4 \times 3.\cos^2 x(-\sin x)$

$= 6\sin x.\cos x - 12\cos^2 x.\sin x$

$= 6.\sin x.\cos x(1 - 2.\cos x)$

لما $\sin x = 0 \Rightarrow x = \pi K$

$K = 0 \rightarrow \boxed{x = 0}$

$K = 1 \rightarrow \boxed{x = \pi}$

أو $\cos x = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + \pi K$

$K = 0 \Rightarrow \boxed{x = \frac{\pi}{2}} \rightarrow f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 3$

أو $1 - 2\cos x = 0 \Rightarrow \cos x = \frac{1}{2} \Rightarrow \boxed{x = \frac{\pi}{3}}$

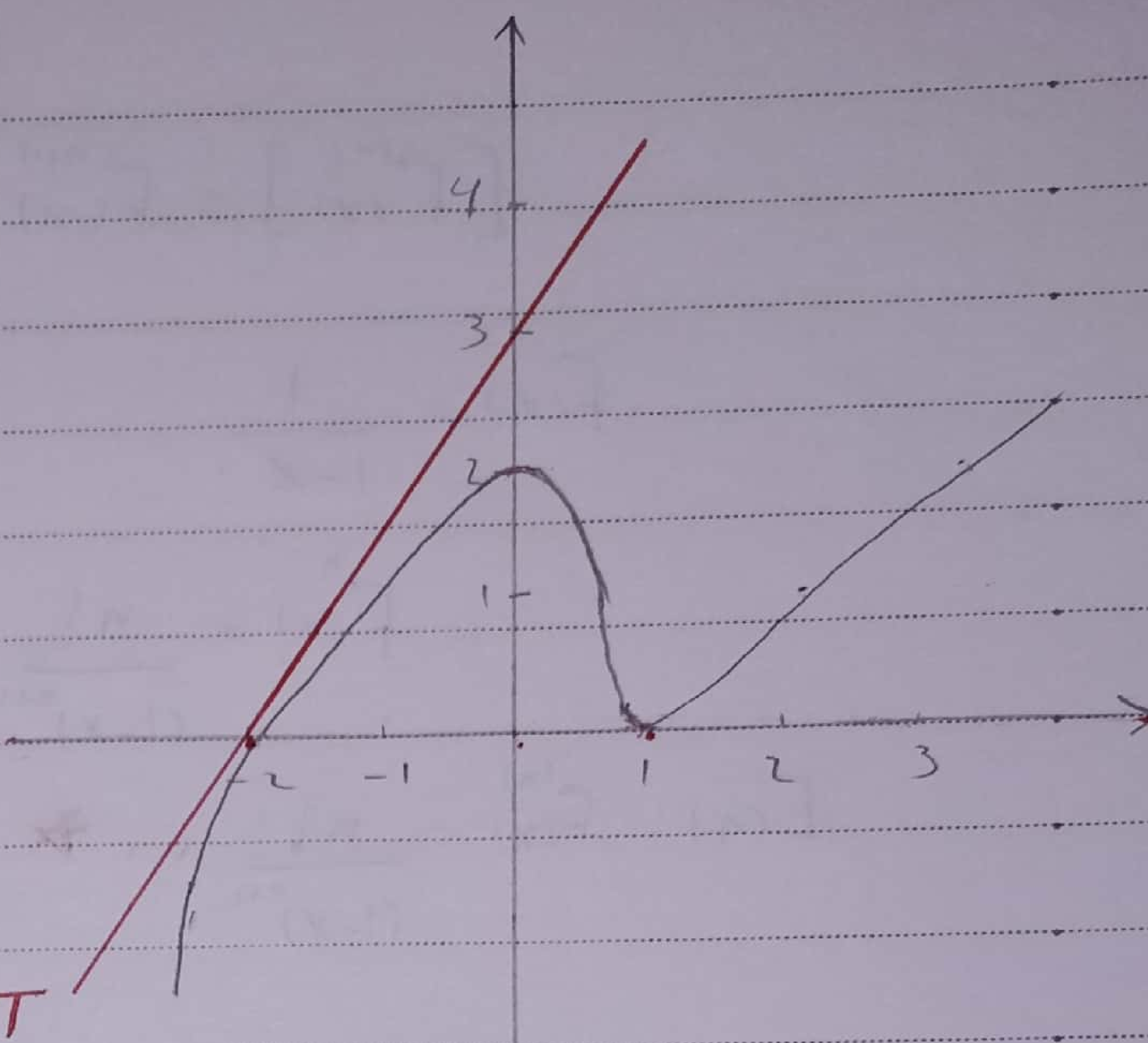
$\Rightarrow f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{11}{4}$

x	0		$\frac{\pi}{3}$		$\frac{\pi}{2}$		π
$f'(x)$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0
$f(x)$	4	$\searrow$	$\frac{11}{4}$	$\nearrow$	3	$\searrow$	-4


4
3
11/4
-4
x
-2π
-π
-π/2
-π/3
π/3
π/2
π
2π

مخطط بياني

تفاصيل المخطط البياني



احسب

$f(-2)=0$

$f(0)=2$

$f(1)=0$

$f(2)=1$

$f(3)=2$

$\left.\begin{array}{l} f'(0)=0 \\ f'(1)=0 \end{array}\right\}$ المشتق عند القمة الحدية معدوم.

$f'(-2)=\frac{3}{2}$

المماس T مار من $(0,3)$ $(-2,0)$ احسب

$m=\frac{3-0}{2}=\frac{3}{2}$

احسب:

$$\lim_{x\to -2}\frac{f(x)-f(-2)}{x+2}=f'(-2)=\frac{3}{2}$$

دل على القيم الحدية:

$f(0)=2$ قيمة حدية كبرى

$f(1)=0$ قيمة حدية صغرى

مماس أفقي

أوجد معادلة كل مماس أفقي عند القيم الحدية يوجد

$T_1: y=2$ $T_2: y=0$

أوجد معادلة المماس T.

$T: y-y_0=m(x-x_0)$

$T: y-0=\frac{3}{2}(x+2)$

$\boxed{T: y=\frac{3}{2}x+3}$

ما عدد حلول المعادلة $f(x)=0$ ؟

حلان.

أوجد حلول المعادلة $f(x)=0$.

$x=-2$, $x=1$

ما عدد حلول المعادلة $f(x)=1$ ؟

3 حلول.

ما عدد حلول المعادلة $f(x)=2$ ؟

حلان.

أوجد حلول المعادلة $f(x)=2$.

$x=0$ $x=3$

أوجد حلول المتراجحة $f'(x)<0$

$x\in]0,1[$

$\lim_{x\to -\infty} f(x)=-\infty$

$\lim_{x\to +\infty} f(x)=+\infty$

Subject : / /

- المشتقات من مراتب عليا :

$$\left[F^{(n)}_{(x)}\right]' = F^{(n+1)}_{(x)} \quad ; n \geq 1$$

- تمرين :

لتكن لدينا التابع :

$$F(x) = \frac{1}{1-x}$$

أثبت أن

$$F^{n}(x) = \frac{n!}{(1-x)^{n+1}}$$

الحل: لتكن لدينا القضية :

$$E(n) : F^{(n)}_{(x)} = \frac{n!}{(1-x)^{n+1}} \quad \ldots ★$$

. نثبت صحة $E(1)$:

$$\left.\begin{aligned} l_1 &= F^{(1)}(x) = F'(x) = \frac{1}{(1-x)^2} \\ l_2 &= \frac{1!}{(1-x)^{1+1}} = \frac{1}{(1-x)^2} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \underset{\text{محققة}}{l_1 = l_2}$$

. نفرض أن $E(n)$ صحيحة .

. نثبت صحة $E(n+1)$ أي يجب إثبات :

$$F^{(n+1)}(x) = \frac{(n+1)!}{(1-x)^{n+2}}$$

. نشتق طرفي العلاقة ★ :

$$F^{(n+1)} = \frac{0-(n+1)(1-x)^{n}(-1)n!}{(1-x)^{2n+2}}$$

$$= \frac{(n+1)!\,(1-x)^{n}}{(1-x)^{2n+2}}$$

$$= \frac{(n+1)!}{(1-x)^{n+2}}$$

ومنه الخلاصة $E(n+1)$ صحيحة $\Leftarrow$ $E(n)$ صحيحة حسب الاستقراء الرياضي.

تمرين:

$f(x)=\frac{1}{x-1}-\sqrt{x}$

1. ادرس تغيرات التابع ونظم جدولاً بها.
2. أثبت أن للمعادلة $f(x)=0$ جذراً وحيداً α في $]1,2[$.

الحل:

1. التابع معرف ومستمر واشتقاقي على $]1,+\infty[$

$\lim_{x \xrightarrow{>} 1} f(x)=+\infty$

$\lim_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$

$f'(x)=\frac{-1}{(x-1)^2}-\frac{1}{2\sqrt{x}}<0$

x	1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	
$f(x)$	‖ $+\infty$	$\searrow$	$-\infty$

2. في $]1,2[$ التابع مستمر ومتناقص تماماً.

$f(2)=1-\sqrt{2}$

$0\in f(]1,2[)=]1-\sqrt{2},+\infty[$

$\Leftarrow$ للمعادلة $f(x)=0$ حل وحيد في $]1,2[$

طريقة ثانية:

بما أن: $\lim_{x \xrightarrow{>} 1} f(x)\cdot f(2)<0$

يكون للمعادلة $f(x)=0$ حل وحيد في $]1,2[$.

تمرين قراءة جدول تغيرات:

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	‖	$+$	0	$-$	
$f(x)$	1	$\searrow$	$-\infty$ ‖ $-\infty$	$\nearrow$	3	$\searrow$	1

1. أوجد:

$D_f=\mathbb{R}\setminus\{1\}$ ، $f(D)=]-\infty,3]$

2. أوجد النهايات عند أطراف مجال التعريف.

$\lim_{x\to\mp\infty} f(x)=1$

$y=1$ مقارب أفقي بجوار $\mp\infty$.

$\lim_{x\to 1} f(x)=-\infty$

$x=1$ مقارب شاقولي.

3. ناقش حسب قيم m عدد حلول المعادلة $f(x)=m$

$m\in]-\infty,1[$ حلين

$m=1$ حل وحيد

$m\in]1,3[$ حلين

$m=3$ حل وحيد

$m\in]3,+\infty[$ مستحيلة

4. هل يوجد مقارب مائل؟ علل.

لا يوجد لأن $\lim_{x\to\mp\infty} f(x)\neq\mp\infty$

5. دل على القيم الحدية.

$f(2)=3$ قيمة حدية كبرى

6. أوجد معادلة المماس الأفقي.

$T: y=3$

7. ما عدد حلول المعادلة $f(x)=0$؟ حلين

8. أوجد حلول المتراجحة $f'(x)\geq 0$

$x\in]1,2]$

9. احسب:

$\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=f'(2)=0$

شغف رفيقك خطوة بخطوة

شغف التعليمي

Educational passion

القناة الرئيسية " فريق شغف التعليمي "

https://t.me/alsh276

مكتبة شغف " بوت الملفات "

@passion_study_bot

قناة الرياضيات

https://t.me/passion_maths12