نعلق جسماً صلباً كتلته m مركز عطالته C إلى محور دوران أفقي Δ مار من النقطة O من الجسم حيث البعد $OC = d$ نزيح الجسم عن موضع توازنه الشاقولي بزاوية θ ونتركه دون سرعة ابتدائية ليهتز في مستوٍ شاقولي مكوناً نواس ثقلي مركب والمطلوب انطلاقاً من المعادلة التفاضلية $(\theta)''_t = -\frac{mgd}{I_\Delta} sin\theta$ من أجل سعات زاوية صغيرة برهن أن حركة النواس الثقلي المركب غير المتخامد هي حركة جيبية دورانية ثم استنتج علاقة الدور الخاص لهذا النواس المركب مبيناً دلالات الرموز.

(دورة 2013 تكميلي+2021)

الحل:

$$(\theta)''_t = -\frac{mgd}{I_\Delta} sin\theta$$

وهي معادلة تفاضلية من المرتبة الثانية تحتوي $sin\theta$ بدلاً من θ فحلها ليس جيبياً ،ومن ذلك فإن حركة النواس الثقلي هي حركة اهتزازية غير توافقية .

~حركة النواس الثقلي من أجل السعات الزاوية الصغيرة $(\theta \le 0.24rad)$

في هذه الحالة يكون $sin\theta \cong \theta$

نعوض في العلاقة (1) فنجد:

$$(\theta)''_t = -\frac{mgd}{I_\Delta} \theta \ldots\ldots (1)$$

وهي معادلة تفاضلية من المرتبة الثانية تقبل حلاً جيبياً من الشكل :

$$\theta = \theta_{max} cos(\omega_0 t + \varphi)$$

للتحقق من صحة الحل نشتق تابع المطال الزاوي مرتين بالنسبة للزمن نجد:

$$(\theta)'_t = -\omega_0 \theta_{max} sin(\omega_0 t + \varphi)$$

$$(\theta)''_t = -\omega_0^2 \theta_{max} cos(\omega_0 t + \varphi)$$

$$\alpha = (\theta)''_t = -\omega_0^2 \theta \ldots\ldots (2)$$

بالمطابقة بين (2)و (1) نجد:

$$\omega_0^2 = \frac{mgd}{I_\Delta}$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{mgd}{I_\Delta}} > 0$$

وهذا محقق لأن المقادير m,g,d, I_Δ موجبة فحركة النواس الثقلي من أجل السعات الزواية الصغيرة هي حركة جيبية دورانية .

- استنتاج الدور الخاص:

نعلم أن: $w_0 = \frac{2\pi}{T_0}$

$$\frac{2\pi}{T_0} = \sqrt{\frac{mgd}{I_\Delta}}$$

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{I_\Delta}{mgd}}$$

T_0: الدور الخاص للنواس (s)

I_Δ: عزم عطالة الجسم الصلب $(kg.m^2)$

d : بعد محور الدوران عن مركز عطالة الجسم الصلب c (m)

انطلاقاً من العلاقة $(\theta)''_t = -\frac{g}{l} sin\theta$ ومن أجل السعات الزاوية الصغيرة برهن أن حركة النواس الثقلي البسيط هي حركة جيبية دورانية ثم استنتج علاقة الدور الخاص للاهتزاز.

(دورة 2022)

الحل:

$$(\theta)''_t = -\frac{g}{l} sin\theta$$

وفي حالة السعات الزاوية الصغيرة : $\theta \le 0.24rad$

$$sin\theta \cong \theta$$

$$(\theta)''_t = -\frac{g}{l} \theta \ldots\ldots (1)$$

معادلة تفاضلية من المرتبة الثانية تقبل حلاً جيبياً من الشكل :

$$\theta = \theta_{max} cos(\omega_0 t + \varphi)$$

للتحقق من صحة الحل نشتق تابع المطال مرتين بالنسبة للزمن نجد:

$$(\theta)'_t = -\omega_0 \theta_{max} cos(\omega_0 t + \varphi)$$

$$(\theta)''_t = -\omega_0^2 \theta_{max} cos(\omega_0 t + \varphi)$$

$$(\theta)''_t = -\omega_0^2 \theta \ldots\ldots (2)$$

بالمطابقة بين (1) و (2) نجد :

$$\omega_0^2 = \frac{g}{l}$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}} > 0$$

وهذا محقق لأن : g،l مقداران موجبان، فحركة النواس الثقلي البسيط من أجل السعات الزاوية الصغيرة هي حركة جيبية دورانية.

- **استنتاج علاقة الدور الخاص للاهتزاز :**

نعلم أن:

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$$

$$\frac{2\pi}{T_0} = \sqrt{\frac{g}{l}}$$

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

وهي علاقة الدور الخاص للنواس الثقلي البسيط في السعات الزاوية الصغيرة .

انطلاقاً من علاقة الدور الخاص للنواس الثقلي المركب في حالة السعات الزاوية الصغيرة، استنتج علاقة الدور الخاص للنواس الثقلي البسيط في هذه الحالة.

الحل:

$$T_0 = \sqrt{\frac{I_\Delta}{mgd}}$$

بتعويض كل من:

$$d = l$$

$$I_\Delta = ml^2$$

في علاقة الدور :

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{ml^2}{mgl}}$$

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

عرف النواس الثقلي البسيط نظرياً وعملياً (دورة 2022)

الحل:

نظرياً: نقطة مادية تهتز بتأثير ثقلها على بعد ثابت l من محور أفقي ثابت .

عملياً : كرة صغيرة كتلتها m كثافتها النسبية كبيرة معلقة بخيط مهمل الكتلة لا يمتد طوله l كبير بالنسبة لنصف قطر الكرة.
