انطلاقاً من العلاقة $ma = -kx$ برهن أن حركة الجسم الصلب المعلق بالنابض في النواس المرن غير المتخامد هي حركة جيبية انسحابية (توافقية بسيطة) ثم استنتج علاقة الدور الخاص لهذا النواس.
(دورة2022+2013+2015)

الحل:

$$ma = -kx$$

$$a = -\frac{k}{m}x$$

$$(x)''_t = -\frac{k}{m}x \ldots\ldots\ldots(1)$$

وهي معادلة تفاضلية من المرتبة الثانية تقبل حلا جيبيا من

$$x = X_{max}cos(\omega_0 t + \varphi)$$

للتحقق من صحة الحل نشتق تابع المطال مرتين بالنسبة للزمن نجد

$$(x)'_t = v = -\omega_0 X_{max} sin(\omega_0 t + \varphi)$$

$$(x)''_t = a = -\omega_0^2 X_{max} cos(\omega_0 t + \varphi)$$

$$(x)''_t = -\omega_0^2 x \ldots\ldots\ldots(2)$$

بالمقارنة بين (1) و (2) نجد أن :

$$-\omega_0^2 x = -\frac{k}{m}x$$

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m}$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} > 0$$

وهذا محقق لأن $k.m$ موجبان والحركة جيبية انسحابية.

استنتاج علاقة الدور الخاص للنواس المرن :

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

بما أن: $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$

بالمساواة نجد:

$$\frac{2\pi}{T_0} = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

انطلاقاً من التابع الزمني لسرعة الجسم المعلق بالنابض في النواس المرن $v = -\omega_0 X_{max} \sin \omega_0 t$ استنتج تابع تسارع الجسم بدلالة مطال الحركة x ثم حدد الأوضاع التي يكون فيها تسارع الجسم:
a) أعظمياً (طويلة) b) معدوماً (دورة2014 تكميلي)

الحل:

$$a = (v)'_t$$

$$a = -\omega_0{}^2 X_{max} cos\omega_0 t$$

$$a = -\omega_0^2 x$$

وهو تابع التسارع بدلالة المطال .

~التسارع أعظمي (طويلة) $a_{max} = |\pm\omega_0^2 X_{max}|$ عند المرور في المطالين الأعظميين (الموضعين الطرفيين)

~التسارع معدوم $a = 0$ عند المرور في مركز الاهتزاز

استنتج علاقة الطاقة الميكانيكية في الحركة التوافقية البسيطة (النواس المرن غير المتخامد) (دورة 2021+2016)

الحل:

نعلم أن: $x = X_{max}cos(\omega_0 t + \varphi)$

$$v = -\omega_0 X_{max} sin(\omega_0 t + \varphi)$$

إن الطاقة الميكانيكة للنواس المرن هي مجموع الطاقتين (الكامنة والحركية)

$$E_{tot} = E_p + E_k \ldots\ldots(1)$$

- الطاقة الكامنة المرونية للنابض هي:

$$E_p = \frac{1}{2}k\,x^2$$

نعوض تابع المطال :

$$E_p = \frac{1}{2}k\,X_{max}^2\,cos^2(\omega_0 t + \varphi)$$

- الطاقة الحركية للجسم هي $E_k = \frac{1}{2}m\,v^2$ نعوض تابع السرعة :

نعوض في (1) : $E_k = \frac{1}{2}m\,\omega_0^2\,X_{max}^2 sin^2(\omega_0 t + \varphi)$

$$E_{tot} = \frac{1}{2}kX_{max}^2 cos^2(\omega_0 t + \varphi) + \frac{1}{2}m\omega_0^2 X_{max}^2 sin^2(\omega_0 t + \varphi)$$

لكن : $k = m\omega_0^2$

$$E_{tot} = \frac{1}{2}kX_{max}^2cos^2(\omega_0 t + \varphi) + \frac{1}{2}k\,X_{max}^2 sin^2(\omega_0 t + \varphi)$$

$$E_{tot} = \frac{1}{2}kX_{max}^2 = const$$

حدد شكل الطاقة عند المرور بوضع التوازن. (دورة 2020)

عند المرور بوضع التوازن الطاقة حركية فقط.

حدد شكل الطاقة عند المرور في الوضعين الطرفيين.

عند المرور في الوضعين الطرفيين الطاقة كامنة فقط.

برهن أن محصلة القوى المؤثرة في مركز عطالة الجسم الصلب في النواس المرن هي قوة إرجاع تعطى بالعلاقة: $F = -kx$

(دورة 2016 تكميلي)

الحل:

1- حالة السكون :

يستطيل النابض مسافة x_0 بعد تعليق الجسم فيه ويتوازن الجسم بتأثير قوتين :

~قوة ثقله $\vec{\omega}$

~قوة توتر النابض $\overrightarrow{F_{s_0}}$

وبما ان الجسم ساكن :

$$\sum \vec{F} = \vec{0}$$

$$\vec{\omega} + \overrightarrow{F_{s_0}} = \vec{0}$$

بالإسقاط على محور شاقولي موجه نحو الأسفل :

$$\omega - F_{s_0} = 0$$

$$\omega = F_{s_0}$$

تؤثر في النابض القوة $\overrightarrow{F'_{s_0}}$ التي تسبب له الاستطالة x_0 إذ:

$$F'_{s_0} = F_{s_0} = kx_0$$

بالتعويض نجد: $\omega = kx_0$

يسمى المقدار x_0 الاستطالة السكونية .

2 حالة الحركة :

القوى الخارجية المؤثرة في مركز عطالة الجسم:

~قوة توتر النابض $\vec{F_s}$

~قوة الثقل $\vec{\omega}$

بتطبيق قانون نيوتن الثاني:

$$\sum \vec{F} = m\vec{a}$$

$$\vec{W} + \vec{F_s} = m\,\vec{a}$$

بالإسقاط على محور شاقولي موجه نحو الأسفل:

$$\omega - F_s = ma$$

تؤثر في النابض القوة $\overrightarrow{F'_s}$ التي تسبب له الاستطالة $(x + x_0)$ إذاً:

$$F'_s = F_s = k(x + x_0)$$

بالتعويض نجد :

$$\omega - k(x + x_0) = ma$$

$$\omega - kx - kx_0 = ma$$

نعلم أن $w = kx_0$

$$kx_0 - kx - kx_0 = ma$$

$$-k\,x = ma = F$$

$$F = -kx$$

انطلاقاً من التابع الزمني للمطال في النواس المرن $x = X_{max}\cos\omega_0 t$ استنتج تابع تسارع الجسم بدلالة مطال الحركة x ثم حدد الأوضاع التي يكون فيها تسارع الجسم: a) أعظمياً (طويلة) b) معدوماً

(دورة2015+2018 تكميلي)

الحل:

$$a = (v)'_t = (x)''_t$$

$$x = X_{max}\cos\omega_0 t$$

$$(x)'_t = v = -\omega_0 X_{max} sin\,\omega_0 t$$

$$(x)''_t = a = -\omega_0{}^2 X_{max} cos\omega_0 t$$

$$a = -\omega_0^2 x$$

وهو تابع التسارع بدلالة المطال .

~التسارع أعظمي (طويلة) $a_{max} = \left|\pm\omega_0^2 X_{max}\right|$ عند المرور في المطالين الأعظميين (الموضعين الطرفيين)

~التسارع معدوم $a = 0$ عند المرور في مركز التوازن.

انطلاقاً من التابع الزمني للمطال في النواس المرن $x = X_{max}cos\omega_0 t$ استنتج التابع الزمني لسرعة الجسم المعلق بالنابض ثم حدد باستخدام العلاقات المناسبة الأوضاع التي يكون فيها سرعة الجسم:

a) عظمى (طويلة) b) معدومة (دورة 2017 تكميلي)

الحل:

$$v = (x)'_t$$

$$v = -\omega_0 X_{max} sin(\omega_0 t)$$

~ السرعة أعظمية (طويلة) $v_{max} = |\pm\omega_0 X_{max}|$ لحظة المرور في مركز الاهتزاز

~السرعة معدومة $v = 0$ لحظة المرور في المطالين الأعظميين (الموضعين الطرفيين)
