الحمد لله الذي بنعمته تتم الصالحات

سلسلة
الرياضيات

مراجعة
على موضوعات التفاضل
للصف الثاني الثانوي
علمي وأدبي

مفاتيح الرياضيات في النهايات

1. إيجاد نهاية الدالة جبريا.
   - أولا: التعويض المباشر وأفكاره
2. نهاية الدالة عند اللا نهاية.
3. نهاية الدوال المثلثية (علمي)

إعداد الأستاذ

أحمد عرفات

لإيجاد نهاية دالة عند نقطة

نوجد د(أ) بالتعويض

نهـــا د(س)
س ← أ

تعويض مباشر عن س = أ

إذا كان الناتج

١- عدد حقيقي

نهاية الدالة

1 نهـا جا٣٠° = $\frac{١}{٢}$
س ← ٣

2 نهـا (٢س - لو١)
س ← ٥
١٠ - صفر
= ١٠

3 نهـا (٢س + لو$_{٢}$ ٨)
س ← ٢
٤ + ٣
= ٧

٢- عدد لا يساوي صفر

صفر

كمية غير معرفة

1 نهـا $\frac{س + ٤}{س - ٤}$ = $\frac{٨}{٠}$
س ← ٤

2 نهـا $\frac{١}{س - ٢}$ = $\frac{١}{٠}$
س ← ٢

3 نهـا $\frac{١}{لو_{٢} ٨ - س}$ = $\frac{٤}{٠}$
س ← ٣

الناتج $\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$

1

ن نحلل (بسط ومقام)

ن نختصر العامل الصفري

ن نعوض عن س = أ

1 $\text{نهـا}_{س \leftarrow ٤} \frac{٢س - ٨}{س^{٢} - س - ١٢}$ ← العامل الصفري

$= \text{نهـا}_{س \leftarrow ٤} \frac{٢(س - ٤)}{(س - ٤)(س - ٣)} = \frac{٢}{٧}$

2

(القسمة المطولة)

أو التركيبية

$\text{نهـا}_{س \leftarrow ٤} \frac{س^{٣} - ١٥س - ٤}{س - ٤} = \frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$

إجراء قسمة تركيبية للبسط

معاملات البسط

	١	٠	-١٥	-٤
٤		٤	١٦	٤
	١	٤	١	٠

خارج القسمة: $س^{٢} + ٤س + ١$

$\text{نهـا}_{س \leftarrow ٤} \frac{(س - ٤)(س^{٢} + ٤س + ١)}{(س - ٤)} = ٣٣$

القانون (نظرية (٤))

$\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$

× المرافق

إذا احتوى الكسر على جذر تربيعي

$\text{نهـا}_{س \leftarrow أ} \frac{س^{ن} - أ^{ن}}{س - أ} = ن \times أ^{ن-١}$ لكل ن ∈ ح - {١}

نتيجة

1 $\text{نهـا}_{س \leftarrow أ} \frac{س^{ن} - أ^{ن}}{س^{م} - أ^{م}} = \frac{ن}{م} \times أ^{ن-م}$ ن، م ∈ ح

2 $\text{نهـا}_{س \leftarrow ٠} \frac{(س + أ)^{ن} - أ^{ن}}{س} = ن \times أ^{ن-١}$

$\text{نهـا}_{س \leftarrow ٠} \frac{\sqrt{س+١} - ١}{س} \times \frac{\sqrt{س+١} + ١}{\sqrt{س+١} + ١}$

$\text{نهـا}_{س \leftarrow ٠} \frac{(س+١) - ١}{س(\sqrt{س+١} + ١)}$

$\text{نهـا}_{س \leftarrow ٠} \frac{س}{س(\sqrt{س+١} + ١)} = \frac{١}{١ + \sqrt{٠+١}} = \frac{١}{٢}$

نظرية (٤)

$$\text{نهـــا}_{س \leftarrow أ} \frac{س^{ن} - أ^{ن}}{س - أ} = ن \times أ^{ن-١}$$

اللي بين
علامة ← تؤول
في البسط والمقام
وبينهم (-) على طول

حدين
حدين

أسس البسط
متساوية
أسس المقام
متساوية

أمثلة

$$\text{نهـــا}_{س \leftarrow ٢} \frac{س^{٣} - ٨}{س - ٢}$$

$$\text{نهـــا}_{س \leftarrow ٢} \frac{س^{٣} - ٢^{٣}}{س - ٢} = \frac{٣}{١} \times ٢^{٢} = ٣ \times ٤ = ١٢$$

$$\text{نهـــا}_{س \leftarrow -٣} \frac{س^{٤} - ٨١}{س + ٣}$$

$$\text{نهـــا}_{س \leftarrow -٣} \frac{س^{٤} - (-٣)^{٤}}{س - (-٣)} = ٤ \times (-٣)^{٣} = -١٠٨$$

نظرية (٤)

$$\text{نهـــا}_{س \leftarrow أ} \frac{س^{ن} - أ^{ن}}{س^{م} - أ^{م}} = \frac{ن}{م} أ^{ن-م}$$

اللي بين
علامة ←
في البسط والمقام موجود
وبينهم (-) على طول

حدين
حدين

أسس البسط
متساوية
أسس المقام
متساوية

$$\text{نهـــا}_{س \leftarrow ٢} \frac{س^{٧} - ١٢٨}{س^{٣} - ٨}$$

$$\text{نهـــا}_{س \leftarrow ٢} \frac{س^{٧} - ٢^{٧}}{س^{٣} - ٢^{٣}} = \frac{٧}{٣} \times ٢^{٤} = \frac{١١٢}{٣}$$

$$\text{نهـــا}_{س \leftarrow -\sqrt[٣]{٢}} \frac{س^{٨} - ١٦}{س^{٥} - \sqrt[٣]{٢٤}}$$

$$\text{نهـــا}_{س \leftarrow -\sqrt[٣]{٢}} \frac{س^{٨} - (-\sqrt[٣]{٢})^{٨}}{س^{٥} - (-\sqrt[٣]{٢})^{٥}}$$

$$= \frac{٨}{٥} \times (-\sqrt[٣]{٢})^{٣} = \frac{-\sqrt[٣]{١٦}}{٥}$$

شكل النهاية حسب القوس المقفول

$$\text{نهـــا}_{س \leftarrow 6} \frac{(س - 5)^{7} - 1}{س - 6}$$

$$\text{نهـــا}_{س-5 \leftarrow 1} \frac{(س - 5)^{7} - 1}{(س - 5) - 1} = 7 \times 1^{6} = 7$$

$$\text{نهـــا}_{س \leftarrow 1} \frac{(٤س - ٣)^{5} - 1}{س - 1}$$

$$٤\text{نهـــا}_{٤س-٣ \leftarrow 1} \frac{(٤س - ٣)^{5} - 1}{(٤س - ٣) - 1}$$

$$= ٤ \times 5 \times 1^{٤} = ٢٠$$

$$\text{نهـــا}_{س \leftarrow .} \frac{(س+أ)^{ن} - أ^{ن}}{س}$$

$$= ن \times أ^{ن-١}$$

$$\text{نهـــا}_{هـ \leftarrow .} \frac{(هـ + ٢)^{٤} - ١٦}{هـ}$$

$$\text{نهـــا}_{هـ \leftarrow .} \frac{(هـ + ٢)^{٤} - ٢^{٤}}{هـ} = ٤ \times ٢^{٣}$$

$$= ٤ \times ٨ = ٣٢$$

$$\text{نهـــا}_{هـ \leftarrow .} \frac{(أ + ٢هـ)^{٦} - أ^{٦}}{٥هـ}$$

$$\frac{٢}{٥}\text{نهـــا}_{أ+٢هـ \leftarrow أ} \frac{(أ + ٢هـ)^{٦} - أ^{٦}}{(أ+٢هـ) - أ}$$

$$= \frac{٢}{٥} \times ٦ \times أ^{٥} = \frac{١٢}{٥} أ^{٥}$$

$$\text{نهـــا}_{هـ \to 0} \frac{(س-٢هـ)^{١٧} - س^{١٧}}{٥١هـ}$$

$$\frac{-٢}{٥١} \text{نهـــا}_{هـ \to 0} \frac{(س-٢هـ)^{١٧} - س^{١٧}}{(س-٢هـ)-س}$$

$-٢هـ \to 0$

$س-٢هـ \to س$

$$= \frac{-٢}{٥١} \times ١٧ \times س^{١٦} = \frac{-٢}{٣} س^{١٦}$$

$$\text{نهـــا}_{هـ \to 0} \frac{(١-٢س)^{٥} - ١}{٥س}$$

$$\frac{-٢}{٥} \text{نهـــا}_{س \to 0} \frac{(١-٢س)^{٥} - ١}{(١-٢س)-١}$$

$-٢س \to 0$

$١-٢س \to ١$

$$= \frac{-٢}{٥} \times ٥ \times ١^{٤} = -٢$$

$$\text{نهـــا}_{س \to ٧} \frac{\sqrt[٥]{س+٢٥} - ٢}{س-٧}$$

$$\text{نهـــا}_{س \to ٧} \frac{(س+٢٥)^{\frac{١}{٥}} - ٢}{س-٧}$$

$س+٢٥ \to ٧+٢٥$

$س+٢٥ \to ٣٠$

$$\text{نهـــا}_{س+٢٥ \to ٣٠} \frac{(س+٢٥)^{\frac{١}{٥}} - ٣٢^{\frac{١}{٥}}}{(س+٢٥)-٣٢}$$

$$= \frac{١}{٥} \times (٣٢)^{\frac{-٤}{٥}} = \frac{١}{٥} \times ٢^{-٤} = \frac{١}{٨٠}$$

$$\text{نهـــا}_{س \to ٢} \frac{(س-٤)^{٥} + ٣٢}{س-٢}$$

نظرية ٤

$$\text{نهـــا}_{س-٤ \to -٢} \frac{(س-٤)^{٥} - (-٢)^{٥}}{(س-٤) - (-٢)}$$

اللي بين علامة تؤول في البسط والمقام موجود

$$= ٥ \times (-٢)^{٤} = ٥ \times ١٦ = ٨٠$$

نهاية الدالة عند اللانهاية

$$\text{نهـا}_{س \to \infty} \frac{٥}{س} = ٠$$

$$\text{نهـا}_{س \to \infty} \frac{٢}{س^{٣}} = ٠$$

$$\text{نهـا}_{س \to \infty} \frac{١}{س} = ٠$$

$$\text{نهـا}_{س \to \infty} \text{ثابت} = \text{ثابت}$$

$$\text{نهـا}_{س \to \infty} \text{ط}^{٤٥} = ١$$

$$\text{نهـا}_{س \to \infty} س^{ن} = \infty$$

ن عدد موجب

$$\text{نهـا}_{س \to \infty} \frac{١}{|س|^{٣}}$$

$$\text{نهـا}_{س \to \infty} \frac{١}{س^{٣}} = ٠$$

$$\text{نهـا}_{س \to \infty} \frac{أ}{س^{ن}} = \text{صفر}$$

ن ∈ ح$^{+}$

فرق بين

$$\text{نهـا}_{س \to \infty} (س^{٣} + ٧س^{٢} + ٢) = \infty$$

الخطوات

$$\text{نهـا}_{س \to \infty} س^{٣} \left(١ + \frac{٧}{س} + \frac{٢}{س^{٣}}\right)$$

$$\text{نهـا}_{س \to \infty} س^{٣} \times (١ + ٠ + ٠) = \infty$$

$$\text{نهـا}_{س \to \infty} \left(\frac{٧}{س^{٢}} + \frac{٢}{س} - ٣\right)$$

= صفر + صفر - ٣ = -٣

$$\text{نهـا}_{س \to \infty} (٤ + ٣س - س^{٣}) = -\infty$$

$$\text{نهـا}_{س \to \infty} س^{٣} \left(\frac{٤}{س^{٣}} + \frac{٣}{س^{٢}} - ١\right)$$

$$= \text{نهـا}_{س \to \infty} س^{٣} \times \text{نهـا}_{س \to \infty} \left(\frac{٤}{س^{٣}} + \frac{٣}{س^{٢}} - ١\right)$$

$$= \infty \times -١ = -\infty$$

$$\text{نهـــا}_{س \to \infty} \frac{\text{دالة كثيرة الحدود}}{\text{دالة كثيرة الحدود}}$$

نقسم البسط والمقام على
أعلى أس للمتغير "س" في المقام

٣ أفكار

درجة البسط = درجة المقام
النهاية عدد حقيقي ≠ صفر

$$\text{نهـــا}_{س \to \infty} \frac{٣س^{٢} + ٥س + ٧}{٤س + ٢س^{٢} - ٣} \quad \text{نقسم على } +س^{٢}$$

$$\text{نهـــا}_{س \to \infty} \frac{٣ + \frac{٥}{س} + \frac{٧}{س^{٢}}}{\frac{٤}{س} + ٢ - \frac{٣}{س^{٢}}} = \frac{٣}{٢}$$

درجة البسط < درجة المقام
النهاية = صفر

$$\text{نهـــا}_{س \to \infty} \frac{٣س + ٨}{٢س^{٢} - ٥} \quad \text{نقسم على } +س^{٢}$$

$$\text{نهـــا}_{س \to \infty} \frac{\frac{٣}{س} + \frac{٨}{س^{٢}}}{٢ - \frac{٥}{س^{٢}}} = \text{صفر}$$

درجة البسط > درجة المقام
النهاية = ± ∞

$$\text{نهـــا}_{س \to \infty} \frac{٢س^{٢} - ٥}{٣س + ٨} \quad \text{نقسم على } +س$$

$$\text{نهـــا}_{س \to \infty} \frac{٢س - \frac{٥}{س}}{٣ + \frac{٨}{س}} = \frac{\infty - ٠}{٠ + ٢} = \infty$$

فـكـرة

$$\text{نهـــا}_{س \to \infty} \frac{(٣س+٩)(٢س+٧)}{(س+١)(٥س+٤)}$$

نقسم على س^{٢} بسطا ومقاما

$$\text{نهـــا}_{س \to \infty} \frac{\left(\frac{٣س+٩}{س}\right) \times \left(\frac{٢س+٧}{س}\right)}{\left(\frac{س+١}{س}\right) \times \left(\frac{٥س+٤}{س}\right)}$$

$$\text{نهـــا}_{س \to \infty} \frac{\left(٣+\frac{٩}{س}\right)\left(٢+\frac{٧}{س}\right)}{\left(١+\frac{١}{س}\right)\left(٥+\frac{٤}{س}\right)}$$

$$= \frac{٢ \times ٣}{٥ \times ١} = \frac{٦}{٥}$$

$$\text{نهـــا}_{س \to \infty} \frac{٣س^{٢} - ٤س + ٥}{(س + ٢)^{٢}}$$

$$\text{نهـــا}_{س \to \infty} \frac{\sqrt{٩س^{٢} + ٧}}{٥س - ٦}$$

÷ س

الإجابة $= \frac{\sqrt{٩}}{٥} = \frac{٣}{٥}$

$$\text{نهـــا}_{س \to \infty} \frac{\sqrt{٩ + \frac{٧}{س^{٢}}}}{٥ - \frac{٦}{س}}$$

خلي بالك ان $س = \sqrt{س^{٢}}$ $\quad س \to \infty$

العكس

$$\text{نهـــا}_{س \to \infty} \frac{٥س - ٦}{\sqrt{٩س^{٢} + ٧}}$$

نقسم على س$=\sqrt{س^{٢}}$ بسط ومقام

$$\text{نهـــا}_{س \to \infty} \frac{٥ - \frac{٦}{س}}{\sqrt{٩ + \frac{٧}{س^{٢}}}} = \frac{٥}{٣}$$

فـكـرة

$$\text{نهـــا}_{س \to \infty} \frac{\sqrt[3]{27س^3 + 2}}{\sqrt[5]{32س^5 + 7}}$$

نقسم البسط والمقام على

$$س = \sqrt[3]{س^3} = \sqrt[5]{س^5}$$

$$\text{نهـــا}_{س \to \infty} \frac{\sqrt[3]{27 + \frac{2}{س^3}}}{\sqrt[5]{32 + \frac{7}{س^5}}} = \frac{3}{2}$$

$$\text{نهـــا}_{س \to \infty} \left(\sqrt{س^2 + 2س} - س\right)$$

نضرب كل من البسط والمقام في المرافق للبسط

$$\text{نهـــا}_{س \to \infty} \frac{\sqrt{س^2 + 2س} - س}{1} \times \frac{\sqrt{س^2 + 2س} - س}{\sqrt{س^2 + 2س} + س}$$

$$= \text{نهـــا}_{س \to \infty} \frac{س^2 + 2س - س^2}{\sqrt{س^2 + 2س} + س} \quad \div س$$

$$\text{نهـــا}_{س \to \infty} \frac{2}{\sqrt{1 + \frac{2}{س}} + 1} = \frac{2}{2} = 1$$

نهاية الدوال المثلثية

إذا كانت : س
قياس زاوية بالتقدير الدائري

$$\lim_{س \to 0} \frac{جاس}{س} = 1$$

$$\lim_{س \to 0} \frac{طاس}{س} = 1$$

$$\lim_{س \to 0} \frac{جاس}{س}$$

$$\lim_{س \to 0} جتاس$$

جتا صفر

$$\lim_{س \to \infty} س\ جا\left(\frac{1}{س}\right)$$

$$\lim_{س \to \infty} \frac{جا\left(\frac{1}{س}\right)}{\left(\frac{1}{س}\right)}$$

$$\lim_{س \to 0} \frac{جا\left(\frac{1}{س}\right)}{\left(\frac{1}{س}\right)}$$

$$\lim_{س \to 0} \frac{جاس^{2}}{س^{2}}$$

$$\lim_{س \to 0} \frac{جاس}{س^{2}}$$

$$\lim_{س \to \frac{\pi}{2}} \frac{جتاس}{\left(\frac{\pi}{2}-س\right)}$$

$$\lim_{(س \to \frac{\pi}{2})} \frac{جا\left(\frac{\pi}{2}-س\right)}{\left(\frac{\pi}{2}-س\right)}$$

1

$$\lim_{س \to 0} \frac{جاس}{س}$$

حيث س بالتقدير الستيني

$$\lim_{س \to 0} \frac{جاس}{س} = \lim_{س \to 0} \frac{جا\left(س \times \frac{\pi}{180}\right)}{س \times \frac{\pi}{180}}$$

$$\frac{\pi}{180} = 1$$

س قياس زاوية تقدير دائري

$$\text{نهـا}_{س \leftarrow 0} \frac{\text{جا أس}}{\text{ب س}} = \frac{\text{أ}}{\text{ب}}$$

$$\text{نهـا}_{س \leftarrow 0} \frac{\text{جا ٣س}}{٤\text{س}} = \frac{٣}{٤}$$

$$\text{نهـا}_{س \leftarrow 0} \frac{\text{جا} (\frac{\text{س}}{٢})}{٣\text{س}} = \frac{\frac{١}{٢}}{٣} = \frac{١}{٦}$$

$$\text{نهـا}_{س \leftarrow 0} \frac{\text{ظا أس}}{\text{ب س}} = \frac{\text{أ}}{\text{ب}}$$

$$\text{نهـا}_{س \leftarrow 0} \frac{\text{ظا ٥س}}{٤\text{س}} = \frac{٥}{٤}$$

$$\text{نهـا}_{س \leftarrow 0} \frac{\text{جا} (\frac{\text{س}}{٣})}{\text{س}} = \frac{١}{٣}$$

فرق بين

$$\text{نهـا}_{س \leftarrow 0} \frac{\text{جا أس}^{٢}}{\text{س}^{٢}} = \text{أ}^{٢}$$

$$\text{نهـا}_{س \leftarrow 0} \frac{\text{جا ٥س}^{٢}}{\text{س}^{٢}} = ٢٥$$

$$\text{نهـا}_{س \leftarrow 0} \left(\frac{\text{جا ٥س}}{\text{س}}\right)^{٢} = (٥)^{٢}$$

$$\text{نهـا}_{س \leftarrow 0} \frac{\text{جا ٣س}^{٢}}{٥\text{س}^{٢}}$$

$$= \frac{١}{٥} \text{نهـا}_{س \leftarrow 0} \left(\frac{\text{جا ٣س}}{\text{س}}\right)^{٢} = \frac{٩}{٥}$$

$$\text{نهـا}_{س \leftarrow 0} \frac{\text{جا ٥س}^{٢}}{\text{س}^{٢}} = ٥$$

$$\text{نهـا}_{س \leftarrow 0} \frac{\text{جا}(٩\text{س}^{٢}) \times \text{جتا س}}{٢٥\text{س}^{٢}}$$

$$= \frac{٩}{٢٥} \text{نهـا}_{س \leftarrow 0} \text{جتا س}$$

$$= \frac{٩}{٢٥} \times ١ = \frac{٩}{٢٥}$$

صـــفـــر

$$\text{نهـــا}_{س \leftarrow 0} \frac{1-\text{جتاس}}{س}$$

$$\text{نهـــا}_{س \leftarrow 0} \frac{1-\text{جتاس}}{\text{جا س}}$$

$$\text{نهـــا}_{س \leftarrow 0} \frac{1-\text{جتاس}}{س} \times \frac{1+\text{جتاس}}{1+\text{جتاس}}$$

$$\text{نهـــا}_{س \leftarrow 0} \frac{1-\text{جتا}^2 س}{س(1+\text{جتاس})}$$

$$\text{نهـــا}_{س \leftarrow 0} \frac{\text{جا}^2 س}{س(1+\text{جتاس})}$$

$$\text{نهـــا}_{س \leftarrow 0} \frac{\text{جا}^2 س}{س^2} \times \text{نهـــا}_{س \leftarrow 0} \frac{س}{1+\text{جتاس}}$$

= ١ × صفر = صفر

$$\text{نهـــا}_{س \leftarrow 0} \frac{1-\text{جتاس}}{\text{جاس}} \times \frac{1+\text{جتاس}}{1+\text{جتاس}}$$

$$\text{نهـــا}_{س \leftarrow 0} \frac{1-\text{جتا}^2 س}{\text{جاس}(1+\text{جتاس})}$$

$$\text{نهـــا}_{س \leftarrow 0} \frac{\text{جا}^2 س}{\text{جاس}(1+\text{جتاس})}$$

$$\text{نهـــا}_{س \leftarrow 0} \frac{\text{جاس}}{1+\text{جتاس}}$$

$$\text{نهـــا}_{س \leftarrow 0} \frac{\text{جاس}}{س} \times \text{نهـــا}_{س \leftarrow 0} \frac{س}{1+\text{جتاس}}$$

= ١ × صفر = صفر

لايجاد نهاية دالة عند نقطة نوجد د(أ) بالتعويض

عدد حقيقي

صفر

صفر / صفر

عدد≠٠ / صفر

نهاية الدالة

نهاية الدالة

غير معرفة

١ حلل البسط والمقام نختصر العامل الصفري

٢ القسمة على العامل الصفري

٣ الضرب في المرافق في حالة √

٤ استخدام النظرية

$$\text{نهـا}_{س \to أ} \frac{س^{م} - أ^{م}}{س^{ن} - أ^{ن}}$$

$$= \frac{م}{ن} \times أ^{م - ن}$$