الجزء
1
الأول

المُسند في الرياضيات

السادس العلمي

الأستاذ
حيدر وليد
07701780364

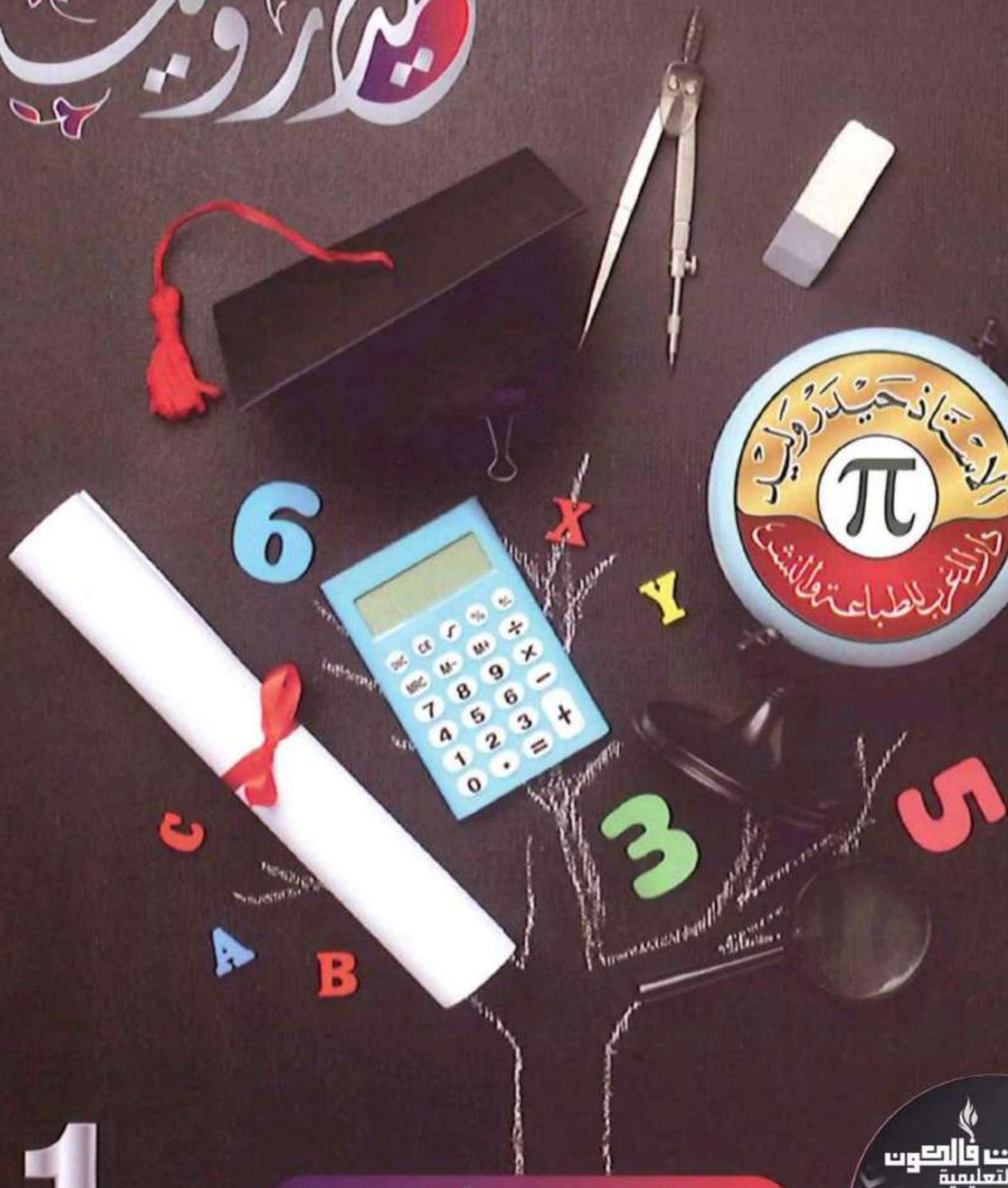
ملازم دار المغرب
ALMaghrib Pamphlets
1985

2024

ملازم دار المغرب
6561
077 100 55555

الأستاذ

حيدر وليد



1

الفصل الأول

الأعداد المركبة

ملازم دار المغرب

Mob: 6561

077 100 55555

مدخل إلى موضوع الأعداد المركبة

نعلم ان الجذور التربيعية للأعداد الموجبة هي:

$\sqrt{1}=1$, $\sqrt{9}=3$, $\sqrt{25}=5$, $\sqrt{100}=10$

أي هناك قيمة لعدد موجب تحت الجذر التربيعي.

لكن

$\sqrt{-9}=?$ → 3 (خطأ) , −3 (خطأ)

$\sqrt{-16}=?$ → 4 (خطأ) , −4 (خطأ)

* إذن لا توجد قيمة حقيقية لعدد سالب تحت الجذر التربيعي.

أو جذر دليله زوجي مثل: $\sqrt[6]{\ }$, $\sqrt[4]{\ }$, $\sqrt[8]{\ }$ ... الخ.

لذلك نفرض ان هناك قيمة لعدد سالب تحت الجذر التربيعي هو (i)

$$\sqrt{-1}=i \Rightarrow i^2=-1$$

وبتربيع المعادلة الاخيرة

$$i^4=1$$

خلاصة (حفظ)

$i^2=-1$

$i^4=1$

$i^3=(i^2)(i)$

$i^3=(-1)(i)$

$i^3=-i$

إستراحة شعرية:

ما مرّ ذكركَ إلّا وابتسمتُ له
كأنك العيد والباقون أيامُ
أو هام طيفك إلا طرتُ اتبعهُ
أنتَ الحقيقة والجُلّاسَ اوهامُ

كيف نكتب عدد سالب تحت الجذر التربيعي بدلالة (i):

$\sqrt{-36} = \sqrt{36} \cdot \sqrt{-1}$
$= 6i$

$\sqrt{-25} = \sqrt{25}.\sqrt{-1}$
$= 5i$

$\sqrt{-16} = \sqrt{16}.\sqrt{-1}$
$= 4i$

$\sqrt{-20} = \sqrt{20} \cdot \sqrt{-1}$
$= \sqrt{5\times4}\ (i) = 2\sqrt{5}i$

$\sqrt{-18} = \sqrt{18} \cdot \sqrt{-1}$
$= \sqrt{9\times2}\ (i) = 3\sqrt{2}i$

$\sqrt{-12} = \sqrt{12} \cdot \sqrt{-1}$
$= \sqrt{4\times3}\ (i) = 2\sqrt{3}i$

تعريف

العدد المركب: هو العدد الذي يكتب بصيغة (a+bi) حيث يسمى:

- a جزؤه الحقيقي
- b جزؤه التخيلي

$a, b \in R$

يُرمز لمجموعة الاعداد المركبة بالرمز $\mathbb{C}$

* تسمى الصيغة a+bi الصيغة العادية للعدد المركب.
أو الصيغة الجبرية للعدد المركب.

* يمكن كتابة العدد المركب بشكل زوج مرتب (a ، b) وتسمى الصيغة الديكارتية للعدد المركب.

العدد المركب الصيغة الجبرية	الصيغة الديكارتية	الجزء الحقيقي	الجزء التخيلي
2 + 3i	(2 , 3)	2	5
-2 + 3i	(-2 , -3)	-2	-3
$\sqrt{3} - i$	$(\sqrt{3}\ ,\ -1)$	$\sqrt{3}$	-1
2i	(0 , 2)	0	2
3	(3 , 0)	3	0

$\rightarrow 2i = 0 + 2i$

$\rightarrow 3 = 3 + 0i$

قوى (i)

عند تبسيط i^n نقسم الأس على 4 وكما في الصيغة التالية :

$$i^n = \{ i \ , \ -i \ , \ 1 \ , \ -1 \}$$

الباقي =1 ، الباقي =3 ، الباقي =0 ، الباقي =2

$$i^n = \left(i^4\right)^{\text{ناتج القسمة}} \cdot \left(i\right)^{\text{باقي القسمة}}$$

مثال بسط ما يلي :

1 $i^{25} = \left(i^4\right)^6 \cdot \left(i\right)^1$

ناتج القسمة على (4) — باقي القسمة

$= (1)^6 \cdot i = i$

2 $i^{58} = \left(i^4\right)^{14} \cdot i^2$

$= (1)^{14} \cdot i^2 = 1 * -1 = -1$

3 $i^5 = \left(i^4\right)^1 \cdot i$

$= 1\,(i) = i$

4 $i^6 = \left(i^4\right)^1 \cdot i^2$

$= (1)\,(-1) = -1$

5 $i^{999} = \left(i^4\right)^{249} \cdot i^3$

$= (1)^{249}\ (-i) = -i$

6 $i^{4n+1} = \left(i^4\right)^n \cdot i$

$= (1)^n \cdot i = i$

ناتج i^n هو:

$\{ i \ , \ -i \ , \ 1 \ , \ -1 \}$

ملاحظة إذا كان اس (i) سالب نضرب بـ i مرفوعة إلى اس من مضاعفات العدد (4) وأكبر من الاس المعطى .

7 $i^{-17} = i^{-17} . i^{20} = i^{3} = -i$

8 $i^{-13} = i^{-13} . i^{\boxed{16}} = i^{3} = -i$

مضاعفات (4) وأكبر من اس السؤال (13).

9 $i^{-35} = i^{-35} . i^{36} = i$

10 $i^{-8} = i^{8} . i^{12} = i^{4} = 1$

اتفاق كل سؤال في أي موضوع في هذا الفصل عندما نرى i مرفوعة إلى الاس نقوم بتبسيط (i) قبل التفكير بأي شيء مهما كان السؤال (ونبسطها كما في الطريقة السابقة).

إني أحبك.. قلتها..
فبَنت بقلبي منزلك
هذا قلبي
اصطفاك على البرايا..
واصْطفاكَ..
وفَضَّلَكْ
وأقامَ روحَكَ ..
قِبْلةً لوَجيبه ..
واسْتقبَلَكْ !!
وتَلاكَ ترنيماً سماويَّ اللحُونِ ..
ورَتَّلَكْ !!
يا آخرَ الحبِّ الجميلِ ..
ولسْتُ أدرِكُ أوَّلَكْ !!

العمليات على مجموعة الأعداد المركبة

في مجموعة الأعداد المركبة يوجد عمليات رياضية كالتي مرت عليك (الجمع - الطرح - الضرب - القسمة - الجذور التربيعية والتكعيبية - النظير الجمعي والضربي ... الخ) وسنتطرق إليها بالتفصيل.

أولاً: عملية الجمع: عند جمع عددين مركبين نجمع الجزء الحقيقي مع الجزء الحقيقي والجزء التخيلي مع الجزء التخيلي وبحسب الاشارة.

مثال جد مجموع العددين المركبين في كل مما يأتي:

1 $(3+4i)+(2+5i)$

توضيح قبل الحل: نقوم بجمع الجزء الحقيقي (3) مع (2) ونجمع (4i) مع (5i) حسب الاشارات.

جمع

$(3+4i) + (2+5i) = (3+2)+(4i+5i)$

جمع

$= 5+9i$

2 $(5+7i)+(-3-9i)$

توضيح قبل الحل: نقوم بجمع (5) مع (3-) وتكون طرح لأن الاشارات مختلفة ثم نجمع (7i) مع (9i-) وكذلك طرح لأن الاشارات مختلفة.

جمع

$(5+7i) + (-3-9i) = (5-3)+(7i-9i)$

$= 2-2i$

3 $(-7+2i) + (2-5i)$

$= (-7+2)+(2i-5i) = -5-3i$

4 $(3+4\sqrt{2}\,i)+(-3-2\sqrt{2}\,i) = (3-3)+(4\sqrt{2}\,i-2\sqrt{2}\,i)$

$= 0+2\sqrt{2}\,i$

5 $3+2-5i = 5-5i \rightarrow$

إنتبه! هنا نجمع فقط (3) مع (2) حيث لايوجد تخيلي حتى نجمعه مع (5i-)

6 $\left(\frac{3}{2}-i\right)+\left(\frac{1}{5}+2i\right) = \left(\frac{3}{2}+\frac{1}{5}\right)+(-i+2i)$

$= \frac{17}{10}+i$

إنتبه! تم الجمع بعد توحيد المقامات بين $\frac{3}{2}$ و $\frac{1}{5}$

ثانياً: عملية الطرح: عند الطرح يتم توزيع اشارة السالب على القوس ثم نجري عملية الجمع أو الطرح بحسب الاشارات .

مثال جد ناتج ما يأتي :

1) $(7-13i)-(9+4i)$

$(7-13i)+(-9-4i)$

$(7-9)+(-13-4i)=-2-17i$

2) $(5+3i)-(2-4i)$

$(5+3i)+(-2+4i)$

$(5-2)+(3i+4i)=3+7i$

3) $\left(3\sqrt{2}+\sqrt{5}\,i\right)-\left(\sqrt{2}+3\sqrt{5}\,i\right)$

$\left(3\sqrt{2}+\sqrt{5}\,i\right)+\left(-\sqrt{2}-3\sqrt{5}\,i\right)$

$\left(3\sqrt{2}-\sqrt{2}\right)+\left(\sqrt{5}i-3\sqrt{5}\,i\right)=2\sqrt{2}-2\sqrt{5}\,i$

4) $3-(5-3i)$

$(3+0i)+(-5+3i)$

$(3-5)+(0i+3i)=-2+3i$

ثالثاً: عملية الضرب: عند ضرب عددين مركبين نوزع الاقواس. هنا نتذكر أن $(i^2=-1)$.

مثال جد ناتج ما يأتي :

1) $(3+2i)(5+4i)$

$15+12i+10i+8i^2$

$15+22i-8=7+22i$

((i^2 تعكس اشارة ما قبلها و تحذف))

2) $(2-3i)(3+5i)$

$6+\underbrace{10i-9i}_{\text{طرح}}-15i^2$

((تعكس الاشارة وتحذف))

$6+i+15=21+i$

3) $(10+3i)(0+6i)$

$0+60i+0i+18i^2=-18+60i$

((نعكس))

4) $(2+3i)(-3+5i)$

$-6+10i-9i+15i^2$

$-6+i-15=-21+i$

5) $i(1+i)=i+i^2=-1+i$

6) $\frac{-5}{2}(4+3i)=\left(\frac{-5}{2}\times 4\right)+\left(\frac{-5}{2}\times 3i\right)$

$=-10-\frac{15}{2}i$

رابعاً: عملية القسمة: قبل التطرق الى القسمة يجب التعرف على مُرافق العدد المركب .

مُرافق العدد المركب :

هو عكس اشارة الجزء التخيلي للعدد المركب فقط . نرمز له بالرمز $\overline{C}$.

$$C = a + bi \Rightarrow \overline{C} = a - bi$$

$$C_1 = 2 + 3i \rightarrow \overline{C_1} = 2 - 3i$$

$$C_2 = 4 + 5i \rightarrow \overline{C_2} = 4 - 5i$$

$$\overline{1 + i} = 1 - i$$

أنتبه !

$\begin{cases} C_1 = -3 + 4i \\ C_2 = 3 - 4i \end{cases}$ غير مترافقات لأن اشارة الجزء الحقيقي تغيرت أيضاً .

$\begin{cases} C_1 = (3i - 5) \\ C_2 = (-3i - 5) \end{cases}$ العددان مترافقان لأن اشارة الجزء التخيلي هي فقط التي تغيرت والاختلاف فقط في الترتيب .

عند ضرب عددان مترافقان فيكون الناتج : $(C . \overline{C} = a^2 + b^2)$

^{2}(التخيلي) + ^{2}(الحقيقي)

1 $(2 + 3i)(2 - 3i) = 2^2 + 3^2$

$= 4 + 9 = 13$

أنتبه ! الجزء التخيلي بدون i فقط الرقم نأخذه

2 $(1 - i)(1 + i) = (1)^2 + (1)^2 = 2$

أنتبه ! الجزء التخيلي بدون i فقط الرقم

3 $(-2 + i)(-2 - i) = (-2)^2 + (1)^2$

$= 4 + 1 = 5$

أنتبه ! الجزء التخيلي بدون i فقط الرقم

* عند وجود البسط والمقام في الاعداد المركبة نضرب البسط والمقام في مرافق العدد المركب الموجود في المقام .

ممنوع (i) بالمقام... كل i بالمقام تعني مرافق

$$\frac{\text{مرافق المقام}}{\text{مرافق المقام}} \times \frac{\text{بسط}}{\text{مقام }(i)}$$

مثال * جد ناتج ما يأتي بصيغة $a + bi$

1

$$\frac{3+4i}{3-4i} = \frac{3+4i}{3-4i} \cdot \frac{3+4i}{3+4i}$$

((مترافقات))

$$= \frac{9+12i+12i+\overset{-16}{16i^2}}{(3)^2+(4)^2}$$

$$= \frac{-7+24i}{25} = \frac{-7}{25} + \frac{24}{25}i$$

2

$$\frac{2-i}{3+4i} = \frac{2-i}{3+4i} \cdot \frac{3-4i}{3-4i}$$

$$= \frac{6-8i-3i+\overset{=(-4)}{4i^2}}{(3)^2+(4)^2}$$

$$= \frac{2-11i}{25} = \frac{2}{25} - \frac{11}{25}i$$

3

$$\frac{1+i}{1-i} = \frac{1+i}{1-i} \cdot \frac{1+i}{1+i}$$

$$= \frac{\cancel{1}+i+i+\cancel{i^2}}{(1)^2+(1)^2} = \frac{2i}{2} = i$$

$$= 0 + i$$

4

$$\frac{1+2i}{-2+i} = \frac{1+2i}{-2+i} \cdot \frac{-2-i}{-2-i}$$

$$= \frac{-2-i-4i-\overset{=+2}{2i^2}}{(-2)^2+(1)^2}$$

$$= \frac{\cancel{-2}-5i+\cancel{2}}{5} = \frac{-5i}{5} = 0-i$$

5

$$\frac{12+i}{i} = \frac{12+i}{i} \cdot \frac{0-i}{0-i}$$

$$= \frac{-12i-i^2}{0+1} = \frac{1-12i}{1} = 1-12i$$

6

$$\frac{i}{2+3i} = \frac{i}{2+3i} \cdot \frac{2-3i}{2-3i}$$

$$= \frac{2i-3i^2}{(2)^2+(3)^2} = \frac{3+2i}{13}$$

$$= \frac{3}{13} + \frac{2}{13}i$$

8

$$Z=\frac{7+\sqrt{3}i}{1+2\sqrt{3}i}$$

$$Z=\frac{7+\sqrt{3}i}{1+2\sqrt{3}i}\cdot\frac{1-2\sqrt{3}i}{1-2\sqrt{3}i}$$

$$Z=\frac{7-14\sqrt{3}i+\sqrt{3}i+6}{1+12}=\frac{13-13\sqrt{3}i}{13}$$

$$Z=\frac{13}{13}-\frac{13\sqrt{3}}{13}i=1-\sqrt{3}i$$

$$Z=\frac{1-\sqrt{3}i}{1+\sqrt{3}i}$$

$$Z=\frac{1-\sqrt{3}i}{1+\sqrt{3}i}\cdot\frac{1-\sqrt{3}i}{1-\sqrt{3}i}$$

$$Z=\frac{1-\sqrt{3}i-\sqrt{3}i-3}{1+3}=\frac{-2-2\sqrt{3}i}{4}$$

$$Z=\frac{-2}{4}-\frac{2\sqrt{3}}{4}i=\frac{-1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$$

9

$$\frac{2+3i}{1-i}\times\frac{1+4i}{4+i}=\frac{2+8i+3i-12}{4+i-4i+1}$$

$$\frac{-10+11i}{5-3i}=\frac{-10+11i}{5-3i}\cdot\frac{5+3i}{5+3i}$$

$$=\frac{-50-30i+55i-33}{5^2+3^2}=\frac{-83+25i}{34}=\frac{-83}{34}+\frac{25}{34}i$$

خامساً: النظير الضربي هو مقلوب العدد المركب $\frac{1}{C}$ أو C^{-1}

مثال جد النظير الضربي لعدد $C=2-2i$ وضعه بالصيغة العادية للعدد المركب.

$$\frac{1}{C}=\frac{1}{2-2i}\cdot\frac{2+2i}{2+2i}=\frac{2+2i}{2^2+2^2}=\frac{2+2i}{8}=\frac{2}{8}+\frac{2}{8}i$$

$$=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}i$$

سادساً: النظير الجمعي هو عكس العدد المركب في الاشارة $(-c)$ (نعكس اشارة الجزئين الحقيقي والتخيلي).

$C=2+3i \rightarrow -C=-2-3i$

$C=-2+2i \rightarrow -C=2-2i$

$\longrightarrow$ مجموع عدد مركب ونظيره الجمعي = صفر

القوس المرفوع إلى الاس

أولاً: إذا كان القوس $(a+bi)^2$ نفتح القوس مربع حدانية .

ثانياً: إذا كان القوس $(a+bi)^3$ نجزء القوس $(\quad)^1(\quad)^2$ نفتح التربيع مربع حدانية ثم نضرب الناتج بالقوس الثاني .

ثالثاً: إذا كان القوس $(a+bi)^4$ يصبح $\left[(a+bi)^2\right]^2$ ثم نفتح القوس مربع حدانية والناتج أيضاً مربع حدانية .

رابعاً: القوى الاكبر :

$(a+bi)^n =$

n زوجي $\rightarrow \left[(a+bi)^2\right]^{\frac{n}{2}}$

مربع الحدانية

n فردي $\rightarrow \left[(a+bi)^2\right]^{\frac{n-1}{2}} \cdot (a+bi)^1$

مربع الحدانية

تنويه : راجع السؤال (9) و (10) في صفحة (20) بما يخص الأس الفردي والسؤال الإضافي في نفس الصفحة يخص الأس الزوجي .

خامساً: إذا كان لدينا $\left(\frac{\text{بسط}}{\text{مقام}}\right)^n$ حيث نتخلص من المشكلة الداخلية بالدرجة الأولى (المرافق) ثم نتخلص من المشكلة الخارجية وهو الأس

$$\left(\frac{\text{بسط}}{\text{مقام فيه } (i)}\right)^n$$

مشكلة خارجية

مشكلة داخلية نبدأ بحلها عن طريق الضرب بالمرافق

تنويه : راجع المثال (6) في صفحة (16) والسؤال (2) في صفحة (19) بما يخص الملاحظة (خامساً) .

مثال 1 ضع بالصيغة العادية $(3+4i)^2$

* نفتح التربيع مربع حدانية

i^2 تحذف وتعكس اشارة ما قبلها

$$(3+4i)^2 = 9+24i+16i^2$$
$$=9+24i-16=-7+24i$$

مثال 2 ضع بالصيغة العادية للعدد المركب:

$$(2+3i)^2+(12+2i)^2$$

$$(4+12i+9i^2)+(144+48i+4i^2)$$
$$4+12i-9+144+48i-4$$
$$(4-9+144-4)+(12i+48i)=135+60i$$

تخيلي حقيقي

مثال 3 ضع بصورة a + bi

$$(1+i)^2+(1-i)^2$$

$$(1+2i+i^2)+(1-2i+i^2)$$
$$(\cancel{1}+2i-\cancel{1})+(\cancel{1}-2i-\cancel{1})=0+0i$$

مثال 4 ضع بصورة a + bi

$$(1+i)^4-(1-i)^4$$

$$\left[(1+i)^2\right]^2-\left[(1-i)^2\right]^2$$
$$(\cancel{1}+2i-\cancel{1})^2-(\cancel{1}-2i-\cancel{1})^2$$
$$(2i)^2-(-2i)^2$$
$$4i^2-4i^2=0+0i$$

مثال 5 ضع بالصيغة العادية للعدد المركب:

$$(1+i)^3+(1-i)^3$$

$$(1+i)^2(1+i)+(1-i)^2(1-i)$$
$$(\cancel{1}+2i-\cancel{1})(1+i)+(\cancel{1}-2i-\cancel{1})(1-i)$$
$$2i(1+i)-2i(1-i)$$
$$\cancel{2i}+2i^2-\cancel{2i}+2i^2=4i^2=-4+0i$$

مثال 6 ضع بصورة $a+bi$ $\left(\frac{3+i}{1+i}\right)^3$

تحليل السؤال لدينا مشكلتين في السؤال داخلية وخارجية

$$\left(\frac{3+i}{1+i}\right)^3$$

الداخلية (i) بالمقام

الخارجية هي بالتكعيب

نفكر بحل المشكلة الداخلية وهي (i) المقام وذلك عن طريق الضرب بالمرافق

$$\left(\frac{3+i}{1+i}\right)^3=\left(\frac{3+i}{1+i}\cdot\frac{1-i}{1-i}\right)^3$$

ينزل كما هو

$$=\left(\frac{3-3i+i+1}{1+1}\right)^3=\left(\frac{4-2i}{2}\right)^3$$
$$=\left(\frac{4}{2}-\frac{2i}{2}\right)^3=(2-i)^3$$

الان نتخلص من الخارجية وهي التكعيب

$$=(2-i)^3=(2-i)^2(2-i)$$
$$=(4-4i-1)(2-i)$$
$$=(3-4i)(2-i) \quad \text{توزيع}$$
$$=6-3i-8i-4$$
$$=2-11i$$

أمثلة من نمط أخر

مثال 1 اثبت ان :

$$(1-i)\,(1-i^2)\,(1-i^3)=4$$

الطرف الايسر $=(1-i)\big(1-(-1)\big)\big(1-(-i)\big)$

$=(1-i)\,(1+1)\,(1+i)$

$=2\,(1-i)\,(1+i)$ مترافقات

$=2\,(1+1)=2\,(2)$

2013 / د 1

الطرف الايمن $=4=$

مثال 2 اثبت ان :

$$\frac{1}{(2-i)^2}-\frac{1}{(2+i)^2}=\frac{8}{25}\,i$$

2020 - تمهيدي / احيائي

تحليل السؤال

المشكلة	الحل
1 وجود قوس تربيع	نفتح التربيع مربع حدانية
2 وجود (i) بالمقام	نضرب الكسر بالمرافق
3 وجود عملية طرح	نطرح الناتجين

نفتح التربيع الذي بالمقام

الطرف الايسر $=\dfrac{1}{4-4i+\underbrace{i^2}_{(-1)}}-\dfrac{1}{4+4i+\underbrace{i^2}_{(-1)}}$

$=\dfrac{1}{4-4i-1}-\dfrac{1}{4+4i-1}$

$=\dfrac{1}{3-4i}-\dfrac{1}{3+4i}$

نضرب كل كسر بالمرافق (مشكلة 2)

$=\dfrac{1}{3-4i}\cdot\dfrac{3+4i}{3+4i}-\dfrac{1}{3+4i}\cdot\dfrac{3-4i}{3-4i}$

$=\dfrac{3+4i}{9+16}-\dfrac{3-4i}{9+16}$

$=\dfrac{\cancel{3}+4i-\cancel{3}+4i}{25}=\dfrac{8}{25}\,i$

الطرف الايسر =

مثال 3 إثبت أن

$$\frac{(1-i)^2}{1+i}+\frac{(1+i)^2}{1-i}=-2$$

تحليل السؤال

المشكلة	الحل
1 وجود قوس تربيع	نفتح التربيع مربع حدانية
2 وجود (i) بالمقام	نضرب الكسر بالمرافق
3 وجود عملية جمع	نجمع الكسرين

الطرف الايسر $=\dfrac{1-2i+i^2}{1+i}+\dfrac{1+2i+i^2}{1-i}$

$=\dfrac{\cancel{1}-2i\cancel{-1}}{1+i}+\dfrac{\cancel{1}+2i\cancel{-1}}{1-i}$

$=\dfrac{-2i}{1+i}\cdot\dfrac{1-i}{1-i}+\dfrac{2i}{1-i}\cdot\dfrac{1+i}{1+i}$

$=\dfrac{-2i+2i^2}{1+1}+\dfrac{2i+2i^2}{1+1}$

$=\dfrac{-2i-2}{2}+\dfrac{2i-2}{2}$

$=\dfrac{-\cancel{2i}-2+\cancel{2i}-2}{2}=\dfrac{-4}{2}$

الطرف الايمن $=-2=$

2012 / د 3 | 2020 - تمهيدي / تطبيقي

مثال 4 إذا كان $C_1 = 1+i$, $C_2 = 3-2i$ تحقق من أن:

1 $\overline{C_1 + C_2} = \overline{C_1} + \overline{C_2}$

$\overline{(1+i)+(3-2i)} = \overline{(1+i)} + \overline{(3-2i)}$

نجمع ثم نأخذ مرافق للناتج نأخذ المرافق ثم نجمع

$\overline{4-i} = (1-i)+(3+2i)$

$4+i = 4+i$

R.H.S = L.H.S

2 $\overline{C_1 - C_2} = \overline{C_1} - \overline{C_2}$

$\overline{(1+i)-(3-2i)} = \overline{(1+i)} - \overline{(3-2i)}$

$\overline{(1+i)+(-3+2i)} = (1-i)-(3+2i)$

$\overline{-2+3i} = (1-i)+(-3-2i)$

$-2-3i = -2-3i$

L.H.S = R.H.S

3 $\overline{C_1 \cdot C_2} = \overline{C_1} \cdot \overline{C_2}$

$\overline{(1+i)(3-2i)} = \overline{(1+i)}\ \overline{(3-2i)}$

نضرب ثم نأخذ مرافق للناتج نأخذ المرافق ثم نضرب

$\overline{3-2i+3i+2} = (1-i)(3+2i)$

$\overline{5+i} = 3+2i-3i+2$

$5-i = 5-i$

R.H.S = L.H.S

4 $\overline{\left(\frac{C_1}{C_2}\right)} = \frac{\overline{C_1}}{\overline{C_2}}$

$\overline{\left(\frac{1+i}{3-2i}\right)} = \frac{\overline{1+i}}{\overline{3-2i}}$

$\overline{\left(\frac{1+i}{3-2i} \cdot \frac{3+2i}{3+2i}\right)} = \frac{1-i}{3+2i} \cdot \frac{3-2i}{3-2i}$

$\overline{\left(\frac{3+2i+3i-2}{9+4}\right)} = \frac{3-2i-3i-2}{9+4}$

$\frac{1}{13} - \frac{5}{13}i = \frac{1}{13} - \frac{5}{13}i$

R.H.S = L.H.S

إستراحة شعرية

يكفي بأني مُذ وجدتك صرتُ أعرفُ ما أريدُ

ووجدتُ روحي خلفَ بسمتك التي صارت بها الأيام عيدُ

بالله قُل لي... كيفَ احلمُ بالمزيدُ؟!

أسئلة وزارية حول الحالات السابقة

سؤال 1 ضع بالصورة العادية للعدد المركب: $(1+3i)^2+(3-2i)^2$

1998 - د (1)

$(1+6i-9)+(9-12i-4)$

$(-8+6i)+(5-12i)$

$(-8+5)+(6i-12i)=-3-6i$

سؤال 2 ضع بالصورة العادية للعدد المركب: $\left(\frac{3-i}{1+i}\right)^2=\left(\frac{3-i}{1+i}\cdot\frac{1-i}{1-i}\right)^2$

1999 - د (1)

$=\left(\frac{3-3i-i-1}{1+1}\right)^2$

$=\left(\frac{2-4i}{2}\right)^2=(1-2i)^2$

$=1-4i-4=-3-4i$

سؤال 3 إذا كان $y=3-i$ ، $x=2+3i$ جد قيمة x^2+2y^2

نعوض x ، y بالعلاقة اعلاه

2000 - د (1)

$(2+3i)^2+2(3-i)^2$

$(4+12i-9)+2(9-6i-1)$

$-5+\cancel{12i}+18-\cancel{12i}-2=11+0i$

سؤال 4 ضع ما يأتي بالصيغة العادية ثم جد نظيره الضربي $(3+2i)(-2+i)$

2002 - د (1)

$-6+3i-4i-2=-8-i$

$\frac{1}{C}=\frac{1}{-8-i}\cdot\frac{-8+i}{-8+i}$

$=\frac{-8+i}{64+1}=\frac{-8}{65}+\frac{1}{65}i$

سؤال 5 جد النظير الضربي للعدد المركب $(3+5i)$ ثم ضعه بالصيغة العادية.

2003 - د (1)

$\frac{1}{C}=\frac{1}{3+5i}\cdot\frac{3-5i}{3-5i}$

$=\frac{3-5i}{9+25}=\frac{3}{34}-\frac{5}{34}i$

سؤال 6 جد الصيغة العادية للعدد المركب: $\left(1-\sqrt{3}i\right)^2-\left(2-\sqrt{3}i\right)^2$

2004 - د (2)

$\left(1-2\sqrt{3}i-3\right)-\left(4-4\sqrt{3}i-3\right)$

$\left(-2-2\sqrt{3}i\right)-\left(1-4\sqrt{3}i\right)$

$\left(-2-2\sqrt{3}i\right)+\left(-1+4\sqrt{3}i\right)=-3+2\sqrt{3}i$

سؤال 7 جد ناتج ما يأتي بالصيغة الديكارتية: $(3+4i)^2+(5-3i)(1+i)$

2005 - د (1)

$(9+24i-16)+(5+5i-3i+3)$

$(-7+24i)+(8+2i)$

$(-7+8)+(24i+2i)=1+26i$

$(1,26)$

سؤال 8 إذا كان $x = 2i - 1$ جد قيمة $x^2 + 2x + 6$

2000 خارج القطر

$x = -1 + 2i$ (ترتيب)

تعويض بالعلاقة $\underbrace{(-1+2i)^2}_{\text{مربع حدانية}} + \underbrace{2(-1+2i)}_{\text{توزيع}} + 6$

تبسيط واختصار $1 - \cancel{4i} - 4 - 2 + \cancel{4i} + 6$

الناتج $= 1 + 0i$

سؤال 9 ضع المقدار $\frac{(1-i)^{13}}{64}$ بالصيغة العادية .

2013 خارج القطر

$$\frac{(1-i)^{13}}{64} = \frac{\left[(1-i)^2\right]^6 . (1-i)}{64}$$

$$= \frac{(\cancel{1} - 2i - \cancel{1})^6 (1-i)}{64} = \frac{(-2i)^6 (1-i)}{64}$$

$$= \frac{\cancel{64} i^6 (1-i)}{\cancel{64}} = -1(1-i) = -1 + i$$

ضع بالصورة العادية للعدد المركب $(1+i)^5 - (1-i)^5$

2012 - د (2)

$$= \left[(1+i)^2\right]^2 (1+i) - \left[(1-i)^2\right]^2 (1-i)$$

$$= \left[(\cancel{1} + 2i + \cancel{i^2})^2 (1+i)\right] - \left[(\cancel{1} - 2i + \cancel{i^2})^2 (1-i)\right]$$

$$= \left[(2i)^2 (1+i)\right] - \left[(-2i)^2 (1-i)\right]$$

$$= \left[4i^2 (1+i)\right] - \left[4i^2 (1-i)\right]$$

$$= \left[-4(1+i)\right] - \left[-4(1-i)\right]$$

$$= -4 - 4i - (-4 + 4i)$$

$$= -\cancel{4} - 4i + \cancel{4} - 4i = 0 - 8i$$

سؤال 11 ضع بصورة $a + bi$

إضافي

$$\frac{(1+i)^{12}}{32}$$

$$\frac{(1+i)^{12}}{32} = \frac{\left[(1+i)^2\right]^6}{32} = \frac{(1+2i-1)^6}{32}$$

$$= \frac{(2i)^6}{32} = \frac{64i^6}{32} = -2 + 0i$$

التحليل في مجموعة الاعداد المركبة

أولاً: مجموع مربعين: عندما يكون لدينا مجموع مربعين $(x^2 + y^2)$ نضرب الحد الثاني بـ $(-i^2)$ ثم يصبح فرق بين مربعين ونحلل.

أي: نضع i^2 مع الحد الثاني ونعكس اشارته.

1 $x^2 + y^2$

$x^2 - y^2 i^2 = (x - yi)(x + yi)$

2 $x^2 + 4$

$x^2 - 4i^2 = (x - 2i)(x + 2i)$

3 $a^2 + 36b^2$

$a^2 - 36b^2 i^2 = (a + 6bi)(a - 6bi)$

4 $y^2 + 100$

$y^2 - 100i^2 = (y - 10i)(y + 10i)$

ملاحظة إذا طلب في السؤال تحليل عدد الى حاصل ضرب عددين مركبين يكون التحليل كما ورد اعلاه. (مجموع مربعين).

$11^2=121$	$6^2=36$	$1^2=1$
$12^2=144$	$7^2=49$	$2^2=4$
$13^2=169$	$8^2=64$	$3^2=9$
$14^2=196$	$9^2=81$	$4^2=16$
$15^2=225$	$10^2=100$	$5^2=25$

* عندما يعطي في السؤال رقم نبحث عن عددين من الارقام اعلاه عند جمعهم يعطي العدد الذي في السؤال ويصبح مجموع مربعين.

مثلاً: العدد $25 \leftarrow 16+9$

العدد $85 \leftarrow 81+4$

وبعدها نغير اشارة الـ + الى − ونضع i^2 ونحلل كما في الامثلة:

مثال * حلل كل مما يأتي الى حاصل ضرب عاملين بصورة $a+bi$

1

$10=9+1$
$=9-i^2$
$=(3-i)(3+i)$

أو

$10=1+9$
$=1-9i^2$
$=(1-3i)(1+3i)$

2

$29=25+4$
$=25-4i^2$
$=(5-2i)(5+2i)$

أو

$29=4+25$
$=4-25i^2$
$=(2-5i)(2+5i)$

3

$41=25+16$
$=25-16i^2$
$=(5-4i)(5+4i)$

أو

$41=16+25$
$=16-25i^2$
$=(4-5i)(4+5i)$

4

$53=4+49$
$=4-49i^2$
$=(2-7i)(2+7i)$

أو

$53=49+4$
$=49-4i^2$
$=(7-2i)(7+2i)$

5

$85=81+4$
$=81-4i^2$
$=(9-2i)(9+2i)$

أو

$85=4+81$
$=4-81i^2$
$=(2-9i)(2+9i)$

6

$125=121+4$
$=121-4i^2$
$=(11-2i)(11+2i)$

أو

$125=4+121$
$=4-121i^2$
$=(2-11i)(2+11i)$

الصفحة للإطلاع فقط

ثانياً: مجموع مكعبين / فرق بين مكعبين : نضرب الحد الثاني بـ $(-i^2)$
ثم نحلل (فرق / مجموع) مكعبين .

$-i^2$

$x^3 - 27i$

تذّكر قانون مكعبين

$x^3 + 27i^3 = (x+3i)(x^2 - 3xi - 9)$

مربع الأول (عكس الاشارة) الأول × الثاني + مربع الثاني

ثالثاً: التجربة : في حالة وجود (i) في الحد الوسط نضرب الأخير بـ $(-i^2)$ ثم نحلل تجربه .

أنظر

$x^2 - 3ix + 4$

$x^2 - 3ix - 4i^2 = (x+i)(x-4i)$

$x^2 + xi + 6$

$x^2 + xi - 6i^2 = (x+3i)(x-2i)$

رابعاً: اكمال المربع: عندما لا يحلل السؤال بالتجربة ولا يوجد (i) في الوسط نضيف $\left(\frac{1}{2} \text{ معامل } x\right)^2$ ونطرحهُ .

$x^2 + 6x + 25$ نصف معامل × هو (3)

$(x^2 + 6x + 9) - 9 + 25$ تربيع (3) هو 9

نضيف 9 ونطرح 9

$(x+3)^2 + 16$ أصبح مجموع مربعين

$(x+3)^2 - 16i^2$

$(x+3+4i)(x+3-4i)$

ايجاد قيم $x, y \in R$

أولاً: أنظر إلى السؤال بتركيز وقمْ بحل المشاكل وكما موضح في الجدول ادناه.

المشكلة	طريقة حل المشكلة	نموذج من الأسئلة المحلولة
الأقواس ( )( )	توزيع الاقواس	مثال (4) و (6)
$\left(\frac{\text{بسط}}{\text{مقام}}\right)$	نضرب بالمرافق	مثال (7)
$(a+bi)^n$	نبسط حسب ملاحظات صفحة (13)	سؤال (3) وزاريات
وجود التحليل	نحلل حسب الملاحظات حسب صفحة (19)	مثال (8)

تنويه من الممكن ان يحوي السؤال اكثر من مشكلة.

ثانياً: حاول تصفية الطرفين بحيث يصبح

الحقيقي = الحقيقي

التخيلي = التخيلي (نأخذ المعاملات فقط بدون i)

ثالثاً: انتبه لوجود التحليل "فرق مربعين / تجربة / عدد ... الخ"

رابعاً: لا تقوم بضرب المرافق في حالة وجود x أو y في البسط أو المقام وحاول أن تجد مخرج أخر لحل السؤال حسب الصيغة.

خامساً: إذا أعطى في السؤال مقدارين وذكر عبارة ان المقدارين مترافقان نقوم بوضع علامة (=) بين المقدارين مع تغيير اشارات كل الأجزاء التخيلية ولأحد الأطراف فقط ثم نكمل الحل كسؤال اعتيادي.

تنويه راجع المثال (9) و (10) في الصفحة 28 و 29

مثال 1 جد قيم y ، x الحقيقتين :

التخيلي = التخيلي

$$3x + 4i = 2 + 8yi$$

الحقيقي = الحقيقي

$$(3x = 2) \div 3 \Rightarrow x = \frac{2}{3}$$

$$(8y = 4) \div 8 \Rightarrow y = \frac{4}{8} \Rightarrow y = \frac{1}{2}$$

مثال 2 جد قيم $x, y \in R$

$$2y + 1 - (2x - 1)i = -8 + 3i$$

تخيلي

$$(2y + 1) - (2x - 1)i = -8 + 3i$$

حقيقي

$$2y + 1 = -8 \Rightarrow 2y = -8 - 1$$

$$[2y = -9] \div 2$$

$$y = \frac{-9}{2}$$

$$-(2x - 1) = 3$$

$$-2x + 1 = 3 \Rightarrow -2x = 3 - 1$$

$$[-2x = 2] \div -2$$

$$x = -1$$

مثال 3 جد قيم $x, y \in R$

تخيلي

$$2x - 1 + 2i = 1 + (y + 1)i$$

حقيقي

$$2x - 1 \xrightarrow{+1} = 1 \Rightarrow 2x = 1 + 1 \Rightarrow [2x = 2] \div 2$$

$$\Rightarrow x = 1$$

$$y + 1 \xrightarrow{-1} = 2 \Rightarrow y = 2 - 1 \Rightarrow y = 1$$

مثال 4 جد قيم $x, y \in R$

$$y + 5i = (2x + i)(x + 2i)$$

تحليل السؤال

1. الطرف الايسر y+5i لا يحوي اي مشاكل (ينزل نصاً)
2. الطرف الايمن (2x+i) (x+2i) فيه اقواس تحتاج توزيع .

$$y + 5i = (2x + i)(x + 2i)$$

$$y + 5i = 2x^2 + 4xi + xi - 2$$

$$y + 5i = (2x^2 - 2) + 5xi$$

$$y = 2x^2 - 2 \ ..... \ (1)$$

$$[5 = 5x] \div 5 \Rightarrow \boxed{x = 1}$$

تعويض

$$y = 2x^2 - 2$$

2020 - تمهيدي / احيائي

$$y = 2(1)^2 - 2 \Rightarrow y = 2 - 2$$

$$\boxed{y = 0}$$

مثال 5 جد قيم $x, y \in R$

$$\frac{1-i}{1+i}+x+yi=(1+2i)^2$$

تحليل السؤال

1. $\frac{1-i}{1+i} \rightarrow$ نضرب الكسر بالمرافق
2. $x+yi \rightarrow$ ينزل (بدون مشاكل)
3. $(1+2i)^2 \rightarrow$ التربيع مربع حدانية

$$\left(\frac{1-i}{1+i}\cdot\frac{1-i}{1-i}\right)+x+yi=1+4i-4$$

$$\frac{\cancel{1}-i-i-\cancel{1}}{1+1}+x+yi=-3+4i$$

$$\frac{-\cancel{2}i}{\cancel{2}}+x+yi=-3+4i$$

$$-i+x+yi=-3+4i$$

$$x+yi=-3+4i+i$$

2012 - د (1)/ خارج

2015 - تمهيدي

$$\boxed{x}+yi=\boxed{-3}+5i$$

$$\boxed{x=-3}\ ,\ \boxed{y=5}$$

مثال 6 جد قيم $x, y \in R$

$$8i=(x+2i)(y+2i)+1$$

تحليل السؤال

1. $8i \rightarrow$ لاتوجد مشكلة في الطرف الايسر
2. $(x+2i)(y+2i) \rightarrow$ أقواس تتوزع

$$0+8i=(x+2i)(y+2i)+1$$

$$0+8i=xy+2xi+2yi-4+1$$

$$0+8i=(xy-3)+2xi+2yi$$

الحقيقي = الحقيقي $\leftarrow 0=xy-3$

$$[xy=3]\div x \Rightarrow y=\boxed{\frac{3}{x}}\ ...(1)$$

التخيلي = التخيلي

$$[2x+2y=8]\div 2$$

$$\boxed{x+y=4}\ .....(2)$$

يعوض معادلة (1) في (2)

$$\left[x+\frac{3}{x}=4\right].x$$

$$x\,(x)+\frac{3}{x}\,(x)=4\,(x)$$

$$x^2+3=4x \Rightarrow x^2-4x+3=0$$

$$(x-3)(x-1)=0$$

أما $x-3=0 \Rightarrow \boxed{x=3}$

أو $x-1=0 \Rightarrow \boxed{x=1}$

عندما $x=3 \rightarrow y=\frac{3}{x}=\frac{3}{3}\Rightarrow\boxed{y=1}$

عندما $x=1 \rightarrow y=\frac{3}{x}=\frac{3}{1}\Rightarrow\boxed{y=3}$

مثال 7 جد قيم $x , y \in R$

$$\left(\frac{2-i}{1+i}\right)x+\left(\frac{3-i}{2+i}\right)y=\frac{1}{i}$$

تحليل السؤال

1. $\left(\frac{2-i}{1+i}\right) \longrightarrow$ نضرب الكسر بالمرافق
2. $\left(\frac{3-i}{2+i}\right) \longrightarrow$ نضرب الكسر بالمرافق
3. $\frac{1}{i} \longrightarrow$ نضرب بـ (i^4) أو بالمرافق

مُرافق مُرافق

$$\left(\frac{2-i}{1+i}\cdot\frac{1-i}{1-i}\right)x+\left(\frac{3-i}{2+i}\cdot\frac{2-i}{2-i}\right)y=\frac{1}{i}\cdot(i^4)$$

$$\left(\frac{2-2i-i-1}{1+1}\right)x+\left(\frac{6-3i-2i-1}{4+1}\right)y=i^3$$

$$\left(\frac{1-3i}{2}\right)x+\left(\frac{5-5i}{5}\right)y=-i$$

$$\left(\frac{1}{2}-\frac{3}{2}i\right)x+(1-i)y=0-i$$

$$\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}xi+y-yi=0-i$$

$$\left[\frac{1}{2}x+y=0\right].2 \Rightarrow x+2y=0 \quad \text{........(1)}$$

$$\left[\frac{-3}{2}x-y=-1\right].2 \Rightarrow -3x-2y=-2 \text{.....(2)}$$

بحل المعادلتين انياً

$$x+2\cancel{y}=0$$
$$-3x-2\cancel{y}=-2$$

بالجمع

2004 - د (2)

2005 - د (2)

$$-2x=-2 \xRightarrow{\div(-2)} x=1$$

$$1+2y=0 \Rightarrow 2y=-1 \xRightarrow{\div 2} y=\frac{-1}{2}$$

مثال 8 جد قيم $x , y \in R$

$$\frac{y}{1+i}=\frac{x^2+4}{x+2i}$$

2018 - تمهيدي أحيائي

* راجع تحليل مجموع مربعين (x^2+4)

$$\frac{y}{1+i}=\frac{x^2-4i^2}{x+2i}$$

$$\frac{y}{1+i}=\frac{(x-2i)\cancel{(x+2i)}}{\cancel{(x+2i)}}$$

$$y=(x-2i)(1+i)$$

$$y+0i=x+xi-2i+2$$

$$y+0i=(x+2)+(x-2)i$$

تخيلي حقيقي

$$x-2=0 \Rightarrow x=2$$
$$y=x+2$$
$$y=2+2 \Rightarrow y=4$$

مثال 9 إذا كان $\frac{x-yi}{1+5i}$, $\frac{3-2i}{i}$ مترافقان جد قيم $x , y \in R$

$$\frac{3-2i}{i} \times \frac{x+yi}{1-5i}$$

$$i\,(x+yi)=(3-2i)(1-5i)$$

$$xi+yi^2=3-15i-2i-10$$

$$xi-y=-7-17i$$

الحقيقي = الحقيقي $\Leftarrow$ $-y=-7$

$$y=7$$

التخيلي = التخيلي $\Leftarrow$ $x=-17$

2016 - د (3)

2017 - د (3)/احيائي

2020 - د (3)/تطبيقي

مثال 10 جد قيم $x , y \in R$ إذا علمت ان $\frac{6}{x+yi}$, $\frac{3+i}{2-i}$ مترافقان

$$\frac{6}{x-yi} \times \frac{3+i}{2-i}$$

$$(x-yi)\,(3+i)=6\,(2-i)$$

$$3x+xi-3yi+y=12-6i$$

الحقيقي = الحقيقي $\Leftarrow$ $3x+y=12 \ldots (1)$

التخيلي = التخيلي $x-3y=-6 \ldots (2)$

نضرب معادلة (x) في (3) تتساوى معاملات الـ (y) بعكس الاشارة

$$9x+\cancel{3y}=36$$

$$x-\cancel{3y}=-6$$

$$10x=30 \Rightarrow x=3$$

نعوض (x) في معادلة (1)

$$3x+y=12 \ldots (1)$$

$$3\,(3)+y=12 \Rightarrow y=12-9 \Rightarrow y=3$$

2015 - د (3)

2017 - تمهيدي/ أحيائي

2020 - د (3)/احيائي

مجموعة من الأسئلة الوزارية حول موضوع إيجاد قيم $x , y \in R$

سؤال 1 جد قيمتي $x، y$ التي تحقق

$(2x+i)(y-2i)=-2-9i$

$2xy-4xi+yi+2=-2-9i$

$(2xy+2)+(-4x+y)i=-2-9i$

(الحقيقي = الحقيقي)

$2xy+2=-2$

$2xy=-2-2 \Rightarrow [2xy=-4] \div 2x$

1996 - د (1)

$\boxed{y=\frac{-2}{x} \quad .... (1)}$

(التخيلي = التخيلي)

$-4x+y=-9 \quad .... (2)$

بتعويض (1) في (2) ينتج

$\left[-4x+\left(\frac{-2}{x}\right)=-9\right] . x$

$-4x^2-2=-9x \Rightarrow 4x^2-9x+2=0$

$(4x-1)(x-2)=0$

أما $4x-1=0 \Rightarrow [4x=1] \div 4 \Rightarrow x=\frac{1}{4}$

أو $x-2=0 \Rightarrow x=2$

نعوض x في (1) لايجاد y

$y=\frac{-2}{x}=\frac{-2}{\frac{1}{4}}=-8 \quad , \quad y=\frac{-2}{2}=-1$

x	y
$\frac{1}{4}$	-8
2	-1

سؤال 2 جد قيم $x , y \in R$ التي تحقق $x(x+i)+y(y-i)+i=13$

$x^2+xi+y^2-yi=13-i$

$(x^2+y^2)+(x-y)i=13-i$

حقيقي تخيلي

2000 - د (2)

$x^2+y^2=13 \quad .... (1)$

$x-y=-1 \Rightarrow x=-1+y \quad .... (2)$

نعوض (2) في (1) لينتج

$(-1+y)^2+y^2=13$

$1-2y+y^2+y^2-13=0$

$[2y^2-2y-12=0] \div (2)$

$y^2-y-6=0$ تجربة

$(y+2)(y-3)=0$

أما $y+2=0 \Rightarrow y=-2$

أو $y-3=0 \Rightarrow y=3$

نعوض y في معادلة (1)

$x=-1+y$

عندما $y=-2 \Leftarrow x=-1+(-2)$

$x=-3$

عندما $y=3 \Leftarrow x=-1+3$

$x=2$

x	y
-3	-2
2	3

سؤال 3 جد قيمتي $x, y \in R$ التي تحقق $(3+2i)^2\ y = (x+3i)^2$

$$(9+12i-4)y = x^2+6xi-9$$

$$(5+12i)y = (x^2-9)+6xi$$

$$5y+12yi = (x^2-9)+6xi$$

2009 تمهيدي

$5y = x^2-9$ .... (1) (الحقيقي = الحقيقي)

تعويض

(التخيلي = التخيلي)

$12y = 6x \Rightarrow x = 2y$ .... (2)

نعوض (2) في (1)

$$5y = (2y)^2-9$$

$$5y = 4y^2-9 \Rightarrow 4y^2-5y-9=0$$

$$(4y-9)(y+1)=0$$

أما $4y-9=0 \Rightarrow [4y=9]\div 4 \Rightarrow y=\frac{9}{4}$

أو $y+1=0 \Rightarrow y=-1$

نعوض y في معادلة (2)

$$x=2y=\cancel{2}\left(\frac{9}{\cancel{4}}\right) \Rightarrow x=\frac{9}{2}$$

$$x=2y=2(-1) \Rightarrow x=-2$$

x	y
$\frac{9}{2}$	$\frac{9}{4}$
-2	-1

سؤال 4 جد قيم $x, y \in R$ والتي تحقق: $(3x+2yi)^2 = \frac{200}{4+3i}$

$$9x^2+12xyi-4y^2 = \frac{200}{4+3i} \cdot \frac{4-3i}{4-3i}$$

$$(9x^2-4y^2)+12xyi = \frac{800-600i}{(4)^2+(3)^2}$$

$$(9x^2-4y^2)+12xyi = \frac{800}{25}-\frac{600}{25}i$$

$$(9x^2-4y^2)+12xyi = 32-24i$$

$9x^2-4y^2=32$ .... (1)

$[12xy=-24]\div 12x \Rightarrow y=\frac{-2}{x}$ .... (2)

نعوض (2) في (1)

$$9x^2-4\left(\frac{-2}{x}\right)^2 = 32 \Rightarrow \left[9x^2-\frac{16}{x^2}=32\right].x^2$$

$$9x^4-16=32x^2 \Rightarrow 9x^4-32x^2-16=0$$

$$(9x^2+4)(x^2-4)=0$$

أما $9x^2+4=0$ يُهمل $\notin R$

أو $x^2-4=0 \Rightarrow x^2=4$ بالجذر

$$x = \pm 2$$

1999 - د (2)

$$y=\frac{-2}{x}=\frac{-2}{2}=-1$$

$$y=\frac{-2}{x}=\frac{-2}{-2}=1$$

x	y
2	-1
-2	1

سؤال 5 جد قيمتي x،y الحقيقيتين التي تحقق المعادلة: $\left(\frac{125}{11+2i}\right)x+(1-i)^2 y=11$

$$\left(\frac{125}{11+2i}\cdot\frac{11-2i}{11-2i}\right)x+(\cancel{1}-2i\cancel{-1})y=11$$

$$\left(\frac{125(11-2i)}{(11)^2+(2)^2}\right)x-2yi=11$$

$$\left(\frac{\cancel{125}(11-2i)}{\cancel{125}}\right)x-2yi=11$$

$$(11-2i)x-2yi=11+0i$$

$$11x-2xi-2yi=11+0i$$

$$(11x)+(-2x-2y)i=11+0i$$

$$[11x=11]\div 11 \Rightarrow x=1$$

(حقيقي = حقيقي)

$$[-2x-2y=0]\div -2$$

(تخيلي = تخيلي)

2016 تمهيدي

$$x+y=0$$

$$1+y=0 \Rightarrow y=-1$$

ووقفتُ حينَ لقائه متسائلاً
هل يقدرُ الشعراءُ وصفَ كماله
سبحانَ من سوّى الجمالَ بوجهه
وتقاسمَ الباقونَ ثلثَ جماله

سؤال 6 جد قيمتي $x, y \in R$ والتي تحقق: $y+5i=(2x+i)(x+i)$

$$y+5i=2x^2+2xi+xi-1$$

$$y+5i=(2x^2-1)+3xi$$

$$y=2x^2-1 \quad ....(1)$$

تعويض

$$3x=5 \Rightarrow x=\frac{5}{3}$$

$$y=2\left(\frac{5}{3}\right)^2-1 \Rightarrow y=\frac{50}{9}-1$$

2008 - د (2)

$$y=\frac{41}{9}$$

سؤال 7 جد قيمتي $x, y \in R$ إذا علمت: $(x+2i)(x-i)=\frac{121+9y^2}{11+3yi}$

$$x^2-xi+2xi+2=\frac{121-9y^2i^2}{11+3yi}$$

$$(x^2+2)+xi=\frac{\cancel{(11+3yi)}(11-3yi)}{\cancel{(11+3yi)}}$$

تخيلي = تخيلي

$$(x^2+2)+xi=11-3yi$$

حقيقي = حقيقي

2016 - د (2)

بالجذر $x^2+2=11 \Rightarrow x^2=11-2 \Rightarrow x^2=9$

$$\boxed{x=\mp 3}$$

$$x=-3y\div -3 \Rightarrow y=\frac{x}{-3}=\frac{\mp 3}{-3}$$

$$\boxed{y=\pm 1}$$

الجذور التربيعية للعدد المركب

* كل i موجودة تحت الجذر التربيعي يتم حل السؤال عن طريق الفرضية وقبل حل السؤال يجب وضع العدد المركب بابسط صورة (الصيغة العادية).

$\sqrt{a+bi} = x+yi$ الفرضية

$a+bi = (x+yi)^2$ تربيع الطرفين

$a+bi = x^2 + 2xyi - y^2$ فتح التربيع $\Rightarrow \boxed{a+bi = (x^2 - y^2) + 2xyi}$ ((ثابتة في الحل))

ترتيب

$x^2 - y^2 = a \quad ....(1)$ حقيقي = حقيقي

$2xy = b ......(2)$ تخيلي = تخيلي

بحل المعادلتين بالتعويض وإيجاد x ، y

الناتج:

قيمة قيمة

$C = \mp(\; x \bigcirc y\, i \;)$

اشارة الجزء التخيلي من السؤال

ملاحظة

تم حل المثال الاول بخطوات تفصيلية مع الشرح وباقي الامثلة بخطوات نموذجية يمكن للطالب ضبط الخطوات من المثال الاول وحل باقي الامثلة على ضوء المثال الأول.

مثال * جد الجذور التربيعية للعدد المركب:

1 $8+6i$

* نبدأ الحل مباشرة لأن العدد $8+6i$ بالصيغة العادية وهو يريد الجذر التربيعي أي $\sqrt{8+6i}$

$$\sqrt{8+6i}=x+yi$$

العدد من السؤال ← فرضية من عندنا ←

الان نقوم بتربيع الطرفين

$$8+6i=(x+yi)^2$$

يلغي الجذر ← الطرف يصبح اس (2) ←

ثم نفتح التربيع (الايمن)

$$8+6i=x^2+2xyi-y^2$$

$$8+6i=(x^2-y^2)+2xyi$$

حقيقي تخيلي حقيقي تخيلي

وبعدها الحقيقي = الحقيقي

$$\boxed{x^2-y^2=8} \quad .....(1)$$

ثم التخيلي = التخيلي

$$[2xy=6]\div 2x$$

دائماً هنا في الموضوع نقسم على $2x$

$$y=\frac{6}{2x} \Rightarrow \boxed{y=\frac{3}{x}} \quad ....(2)$$

نعوض معادلة (2) في (1)

$$x^2-y^2=8 \Rightarrow x^2-\left(\frac{3}{x}\right)^2=8 \Rightarrow \left[x^2-\frac{9}{x^2}=8\right].x^2$$

$$x^4-9=8x^2 \Rightarrow x^4-8x^2-9=0$$

$$(x^2-9)(x^2+1)=0 \quad \text{(تجربة)}$$

(أما) $x^2-9=0 \Rightarrow x^2=9 \Rightarrow \boxed{x=\mp 3} \rightarrow y=\frac{3}{\mp 3}=\mp 1$

$$C=\mp(3+i)$$

$$\boxed{C_1=3+i},\ \boxed{C_2=-3-i}$$

(أو) $x^2+1=0 \qquad \notin R$

2 $7+24i$

$\sqrt{7+24i}=x+yi$ بالتربيع

$7+24i=(x^2-y^2)+2xyi$

$x^2-y^2=7 \quad ......(1)$

$[2xy=24]\div 2x \Rightarrow y=\dfrac{12}{x} \quad ....(2)$

تعويض في معادلة (1)

$x^2-y^2=7$

$x^2-\left(\frac{12}{x}\right)^2=7 \Rightarrow \left[x^2-\frac{144}{x^2}=7\right].x^2$

$x^4-144=7x^2 \Rightarrow x^4-7x^2-144=0$

$(x^2+9)(x^2-16)=0$

أما $x^2+9=0$ يُهمل $\notin R$

أو $x^2-16=0 \Rightarrow x^2=16$ بالجذر

$\boxed{x=\mp 4}$

تعويض

$y=\dfrac{12}{x}=\dfrac{12}{\mp 4}=\mp 3$

$C_1=\mp(4+3i)$

$C_1=4+3i \quad , \quad C_2=-4-3i$

توضيح

في حالة $(+)$ $C_1=+(4+3i)=4+3i$

في حالة $(-)$ $C_2=-(4+3i)=-4-3i$

3 $-i$

$\sqrt{0-i}=x+yi$ بالتربيع

$0-i=(x^2-y^2)+2xyi$

$x^2-y^2=0 \quad ......(1)$

$[2xy=-1]\div 2x \Rightarrow y=\dfrac{-1}{2x} \quad ......(2)$

$x^2-y^2=0$

$x^2-\left(\frac{-1}{2x}\right)^2=0 \Rightarrow \left[x^2-\frac{1}{4x^2}=0\right].4x^2$

$4x^4-1=0$ ((فرق بين مربعين))

$(2x^2+1)(2x^2-1)=0$

أما $2x^2+1=0$ يُهمل $\notin R$

أو $2x^2-1=0 \Rightarrow [2x^2=1]\div 2$

$x^2=\dfrac{1}{2}$ بالجذر $\boxed{x=\mp\dfrac{1}{\sqrt{2}}}$

$y=\dfrac{-1}{2x}=\dfrac{-1}{\sqrt{2}.\cancel{\sqrt{2}}\left(\mp\frac{1}{\cancel{\sqrt{2}}}\right)}=\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$C=\mp\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}i\right)$

اشارة الجزء التخيلي لعدد السؤال

$C_1=\dfrac{1}{\sqrt{2}}-\dfrac{1}{\sqrt{2}}i$

$C_2=\dfrac{-1}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{2}}i$

4 $-6i$

$\sqrt{0-6i}=x+yi$ بالتربيع

$0-6i=(x^2-y^2)+2xyi$

$x^2-y^2=0 \quad ....(1)$

$[2xy=-6]\div 2x \Rightarrow y=\frac{-3}{x} \quad ....(2)$

تعويض

$x^2-y^2=0$

$x^2-\left(\frac{-3}{x}\right)^2=0 \Rightarrow \left[x^2-\frac{9}{x^2}=0\right].x^2$

$x^4-9=0$ ((فرق بين مربعين))

$(x^2-3)(x^2+3)=0$

أما $x^2-3=0 \Rightarrow x^2=3$ بالجذر

$\boxed{x=\mp\sqrt{3}}$

أو $x^2+3=0$ يُهمل $\notin R$

$y=\frac{-3}{x}=\frac{-3}{+\sqrt{3}}=\frac{-\left(\sqrt{3}.\cancel{\sqrt{3}}\right)}{\mp\cancel{\sqrt{3}}}$

$\boxed{y=\pm\sqrt{3}}$

$C=\mp\left(\sqrt{3}-\sqrt{3}\,i\right)$

$C_1=\sqrt{3}-\sqrt{3}i$

$C_2=-\sqrt{3}+\sqrt{3}i$

5 $8i$

$\sqrt{0+8i}=x+yi$ بالتربيع

$0+8i=(x^2-y^2)+2xyi$

$x^2-y^2=0 \quad ....(1)$

$\left[\frac{2xy}{2x}=\frac{8}{2x}\right]\div 2x \Rightarrow y=\frac{4}{x} \quad ....(2)$

$x^2-y^2=0$

$x^2-\left(\frac{4}{x}\right)^2=0 \Rightarrow \left[x^2-\frac{16}{x^2}=0\right].x^2$

$x^4-16=0$ ((فرق بين مربعين))

$(x^2-4)(x^2+4)=0$

أما $x^2-4=0 \Rightarrow x^2=4$ بالجذر

$\boxed{x=\pm 2}$

أو $x^2+4=0$ يُهمل $\notin R$

$y=\frac{4}{x}=\frac{4}{+2}=\pm 2 \Rightarrow \boxed{y=\pm 2}$

$C=\pm(2+2i)$

$C_1=2+2i$

$C_2=-2-2i$

6 $\frac{4}{1-\sqrt{3}i}$

$$\frac{4}{1-\sqrt{3}i}\cdot\frac{1+\sqrt{3}i}{1+\sqrt{3}i}=\frac{4\left(1+\sqrt{3}i\right)}{(1)^2+\left(\sqrt{3}\right)^2}$$

$$\frac{\cancel{4}\left(1+\sqrt{3}i\right)}{\cancel{4}}=1+\sqrt{3}i$$

$\sqrt{1+\sqrt{3}i}=x+yi$ بالتربيع

$$1+\sqrt{3}i=(x^2-y^2)+2xyi$$

$$x^2-y^2=1 \quad \ldots\ldots(1)$$

$$\left[2xy=\sqrt{3}\right]\div 2x \Rightarrow y=\frac{\sqrt{3}}{2x}$$

تعويض

$$x^2-y^2=1$$

$$x^2-\left(\frac{\sqrt{3}}{2x}\right)^2=1$$

$$\left[x^2-\frac{3}{4x^2}=1\right].4x^2$$

$$4x^4-3=4x^2$$

$4x^4-4x^2-3=0$ (تجربة)

$$(2x^2+1)(2x^2-3)=0$$

$2x^2+1=0$ يُهمل $\notin R$

أو $2x^2-3=0 \Rightarrow \left[2x^2=3\right]\div 2$

$x^2=\frac{3}{2}$ بالجذر $x=\mp\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$

$$y=\frac{\sqrt{3}}{2x}=\frac{\sqrt{3}}{2\left(\mp\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\right)}=\mp\frac{1}{\sqrt{2}}$$

توضيح

$$\frac{\cancel{\sqrt{3}}}{\sqrt{2}.\cancel{\sqrt{2}}\left(\frac{\cancel{\sqrt{3}}}{\cancel{\sqrt{2}}}\right)}$$

$$C=\mp\left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i\right)$$

$$C_1=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i$$

$$C_2=\frac{-\sqrt{3}}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}i$$

7 -25

$$x=\sqrt{-25}$$

$$x=\pm 5i$$

8 -17

$$x=\sqrt{17}.\sqrt{-1}$$

$$x=\pm\sqrt{17}i$$

أسئلة الوزارية حول موضوع الجذور التربيعية

سؤال 1 إذا كان $C+di=\dfrac{7-4i}{2+i}$ $c,d\in R$ $\sqrt{2c-di}$

ملاحظة

عندما يعطي سؤال فيه علاقة تحتوي مجهول نقوم بتبسيط العلاقة ونجد منها المجهول.

$\therefore$ نجد قيم $c,d\in R$ من العلاقة أولاً.

$$c+di=\frac{7-4i}{2+i}\cdot\frac{2-i}{2-i}$$

$$c+di=\frac{14-7i-8i-4}{(2)^2+(1)^2}=\frac{10-15i}{5}$$

$$C+di=2-3i \qquad C=2$$

$$d=-3$$

$$\sqrt{2c-di}=\sqrt{2(2)-(-3)i}$$

بالتربيع $\sqrt{4+3i}=x+yi$

$$4+3i=(x^2-y^2)+2xyi$$

$$x^2-y^2=4 \quad ....(1)$$

$$\left[\frac{2xy}{2x}=\frac{3}{2x}\right]\div 2x \Rightarrow y=\frac{3}{2x} \quad ....(2)$$

1997 - د(1)

2019 - د(2)

تعويض

$$x^2-y^2=4$$

$$x^2-\left(\frac{3}{2x}\right)^2=4$$

$$\left[x^2-\frac{9}{4x^2}=4\right].4x^2 \Rightarrow 4x^4-9=16x^2$$

$$4x^4-16x^2-9=0$$

$$(2x^2-9)(2x^2+1)=0$$

أما $2x^2-9=0 \Rightarrow \left[2x^2=9\right]\div 2$

$$x^2=\frac{9}{2} \overset{\text{بالجذر}}{\Rightarrow} x=\pm\frac{3}{\sqrt{2}}$$

أو $2x^2+1=0$ يُهمل $\notin R$

$$y=\frac{3}{2x}=\frac{3}{2.\left(\pm\frac{3}{\sqrt{2}}\right)}=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$C=\pm\left(\frac{3}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i\right)$$

((اشارة الجزء التخيلي))

$$C_1=\frac{3}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i \quad , \quad C_2=-\frac{3}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}i$$

توضيح لخطوة (y)

$$y=\frac{3}{2x}=\frac{3}{2.\left(\pm\frac{3}{\sqrt{2}}\right)}=\frac{\cancel{3}}{\cancel{\sqrt{2}}.\sqrt{2}\left(\pm\frac{\cancel{3}}{\cancel{\sqrt{2}}}\right)}=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$$

سؤال 2 جد الجذرات التربيعيات للعدد المركب $\frac{14+2i}{1+i}$

ملاحظة يجب وضع العدد بصيغة (a+bi)

$$\frac{14+2i}{1+i}\cdot\frac{1-i}{1-i}=\frac{14-14i+2i+2}{(1)^2+(1)^2}$$

2004 - د (2)

$$\frac{16-12i}{2}=8-6i$$

$\sqrt{8-6i}=x+yi$ بالتربيع

$$8-6i=(x^2-y^2)+2xyi$$

$x^2-y^2=8$ ....(1) , [2xy=-6] ÷ 2X

$y=\frac{-3}{x}$ ....(2)

$$x^2-\left(\frac{-3}{x}\right)^2=8$$

$$\left[x^2-\frac{9}{x^2}=8\right].x^2 \Rightarrow x^4-9=8x^2$$

$$x^4-8x^2-9=0$$

$$(x^2-9)(x^2+1)=0$$

أما $x^2-9=0 \Rightarrow x^2=9$ بالجذر $x=\mp3$

أو $x^2+1=0 \Rightarrow$ يُهمل $\notin R$

$$y=\frac{-3}{x}=\frac{-3}{\mp3}=\pm1$$

$$C=\mp(3-i)$$

$$C_1=3-i$$

$$C_2=-3+i$$

النّور اشرق في الصّباح وبجّلك
والحسن يأتي خاضعاً كي يسألك
مَن اين تأتي بالجمال رفيقه
سبحان من خلق الجمال وجمّلك
يا من فتنت الحسن حتّى انّه
قد مال في شغفٍ اليك وقبّلك
ارفق بمفتون الفؤاد إذا اتى
واذا ظلمت اقولها ما اعدلك

تكوين المعادلة التربيعية إذا عُلِمَ جذرها

عندما يطلب معادلة تربيعية ويعطي جذريّ المعادلة:

1. يجب وضع الجذرين بصورة $a+bi$
2. نجد مجموع الجذرين وحاصل ضرب الجذرين .
3. نطبق العلاقة التالية:

((صيغة قياسية)) $x^2 - ($ مجموع الجذرين $)x + ($ حاصل ضرب الجذرين $) = 0$

* عندما يقول في السؤال ان المعادلة ذات معاملات حقيقية هذا يعني ان الجذران مترافقان .

مثال 1 كوّن المعادلة التربيعية التي جذرها m, L حيث $m = 1-i,\ L = 1+2i$

$m+L = (1-i)+(1+2i)$

مجموع الجذرين $= 2+i$

$m.L = (1-i)(1+2i)$

ضرب الجذرين $= 1+2i-i+2$

$= 3+i$

$x^2 - (2+i)x + (3+i) = 0$

مثال 2 كوّن المعادلة التربيعية التي جذرها $\mp(2+2i)$

$m = 2+2i \quad , \quad L = -2-2i$

$m+L = (2+2i)+(-2-2i) = 0$

$m.L = (2+2i)(-2-2i)$

$= -\cancel{4} - 4i - 4i + \cancel{4} = -8i$

$x^2 - (0)x + (-8i) = 0$

$x^2 - 8i = 0$

2020 - د (2)/احيائي

مثال 3 كوّن المعادلة التربيعية التي جذرها $m = \dfrac{3-i}{1+i}\ ,\ L = (3-2i)^2$

* يجب تبسيط الجذور أولاً

$m = \dfrac{3-i}{1+i} \cdot \dfrac{1-i}{1-i} = \dfrac{3-3i-i-1}{(1)^2+(1)^2}$

$m = \dfrac{2-4i}{2} \Rightarrow m = 1-2i$

$L = (3-2i)^2 = 9-12i-4$

$L = 5-12i$

مجموع الجذرين $m+L = (1-2i)+(5-12i)$

$= 6-14i$

$m.L = (1-2i)(5-12i)$

$= 5-12i-10i-24 = -19-22i$

$x^2 - (6-14i)x + (-19-22i) = 0$

مثال 1 كوّن المعادلة التربيعية ذات المعاملات الحقيقية والتي احد جذورها (i).

((المعاملات حقيقية أي ان الجذران مترافقان)).

$$\left.\begin{matrix} m=i \\ L=-i \end{matrix}\right]$$

$$m+L=(i)+(-i)=0$$

$$m.L=(i)(-i)=-i^2=1$$

$$x^2-(0)x+1=0$$

$$x^2+1=0$$

مثال 2 كوّن المعادلة التربيعية ذات المعاملات الحقيقية والتي احد جذورها (3-4i).

((مترافقان)) $m=3-4i \quad , \quad L=3+4i$

$$m+L=(3-\cancel{4i})+(3+\cancel{4i})$$

$$=6$$

$$m.L=(3-4i)(3+4i)$$

$$=3^2+4^2=9+16=25$$

$$x^2-6x+25=0$$

2020 - د (1) /احيائي+ تطبيقي

مثال 3 كوّن المعادلة التربيعية ذات المعاملات الحقيقية والتي احد جذورها (5-i).

$$m+L=(5-\cancel{i})+(5+\cancel{i})$$

$$=10$$

$$m.L=(5-i)(5+i)$$

$$=(5)^2+(1)^2=25+1=26$$

$$x^2-10x+26=0$$

مثال 4 كوّن المعادلة التربيعية ذات المعاملات الحقيقية والتي احد جذورها $\frac{\sqrt{3}+3i}{4}$.

$$\frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{3}{4}i \quad , \quad \frac{\sqrt{3}}{4}-\frac{3}{4}i$$

$$m+L=\left(\frac{\sqrt{3}}{4}+\cancel{\frac{3}{4}i}\right)+\left(\frac{\sqrt{3}}{4}-\cancel{\frac{3}{4}i}\right)$$

$$=\frac{2\sqrt{3}}{4}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$m.L=\left(\frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{3}{4}i\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{4}-\frac{3}{4}i\right)$$

$$=\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^2+\left(\frac{3}{4}\right)^2$$

$$=\frac{3}{16}+\frac{9}{16}=\frac{12}{16}=\frac{3}{4}$$

$$x^2-\frac{\sqrt{3}}{2}x+\frac{3}{4}=0$$

أسئلة مختلفة ذات صلة

* إذا أعطى في السؤال معادلة تربيعية تحوي مجاهيل نتبع الخطوات التالية :

أولاً: نضع المعادلة بالشكل القياسي حيث الطرف الايمن = 0 ثم نجعلها بالصيغة التالية :

$x^2 -($ مجموع الجذرين $) x + ($حاصل ضرب الجذرين$) = 0$

ثانياً: إذا وجد أكثر من حد فيه x نسحب الـ x عامل مشترك ويسحب باشارة سالب لأن الشكل القياسي فيه معامل x سالب

ثالثاً: نقسم على معامل x^2 دائماً لجعله =1

رابعاً: نحدد مجموع الجذرين وحاصل ضرب الجذرين .

خامساً: إذا كان في المعادلة مجهول واحد فقط نحاول البدء بالجزء المعلوم كلياً .

(حاصل الضرب أو حاصل الجمع)

كما في السؤال (2)

سؤال 1 إذا كان $(2+4i)$ هو أحد جذري المعادلة $2x^2 - x - bx + c - 6 = 0$ معاملاتها حقيقية، جد $b, c \in R$

2015 - د (2)

الجذران مترافقان لان المعادلة ذات معاملات حقيقية

$m = 2+4i \quad , L = 2-4i$

$2x^2 - x - bx + c - 6 = 0$

$\left[2x^2 - x(1+b) + (c-6) = 0\right] \div 2$

أنظر هنا

$$x^2 - x\underbrace{\left(\frac{1+b}{2}\right)}_{\text{مجموع الجذرين}} + \overbrace{\left(\frac{C-6}{2}\right)}^{\text{حاصل ضرب الجذرين}} = 0$$

$m + L = \dfrac{1+b}{2}$ نعوض الجذران m, L

$(2+\cancel{4i}) + (2-\cancel{4i}) = \dfrac{1+b}{2}$

$4 = \dfrac{1+b}{2} \Rightarrow 1+b = 8 \Rightarrow b = 7$

$m . L = \dfrac{c-6}{2}$ نعوض الجذران m, L

$(2+4i)(2-4i) = \dfrac{c-6}{2}$

$4 + 16 = \dfrac{c-6}{2} \Rightarrow \left[20 = \dfrac{c-6}{2}\right] . 2$

$40 = c - 6 \Rightarrow c = 46$

سؤال 2 إذا كان $(3+i)$ هو أحد جذري المعادلة $x^2 - ax + (5+5i) = 0$ فما قيمة $a \in \mathbb{C}$ وما قيمة الجذر الآخر؟

نبدأ بالجزء الكامل وهو حاصل ضرب الجذرين

$$m.L = 5+5i \Rightarrow (3+i)(L) = 5+5i$$

$$L = \frac{5+5i}{3+i} \cdot \frac{3-i}{3-i} = \frac{15-5i+15i+5}{9+1}$$

$$L = \frac{20+10i}{10} = \frac{20}{10} + \frac{10}{10}i$$

$$L = 2+i$$

الان نجد قيمة a وهي تمثل مجموع الجذرين

$$a = m+L$$

$$a = (3+i)+(2+i)$$

$$a = 5+2i$$

2011 - د (1)   2020 - د (2) /احيائي

شرح كلامي للسؤال (2)

1. ذكر في السؤال ان $(3+1)$ هو احد جذري المعادلة اي انه جذري المعادلة (m) أو (L) اعتبرناه m
2. المعادلة قياسية $\boxed{x^2 - ax + 5 + 5i = 0}$
   حددنا المجموع $a = \underline{m+L}$ (مجهول)
   حاصل الضرب $5+5i = \underline{m\ .\ L}$ (معلوم)
3. بدأنا من المعلوم ثم عوضنا m و اوجدنا L
4. نذهب للمجهول $L+m$ نجد منها a

سؤال 3 إذا كان $(2+i)$ يمثل أحد جذري المعادلة $x^2 - 4ix + a = 0$ جد الجذر الاخر. ثم جد قيمة a.

$$x^2 - 4ix + a = 0 \Rightarrow x^2 - (4i)x + a = 0$$

مجموع الجذرين

$$m + L = +4i$$

$$2+i+L = 4i \Rightarrow L = -2+4i-i$$

$L = -2+3i$ الجذر الأخر

$a =$ حاصل ضرب الجذرين

$$a = m.L$$

$$a = (2+i)(-2+3i)$$

$$a = -4+6i-2i-3$$

$$a = -7+4i$$

حل المعادلة التربيعية في $\mathbb{C}$

* يتم حل المعادلة من الشكل $ax^2 + bx + c = 0$ باستخدام قانون الدستور.

حيث: a = معامل x^2
b = معامل x
c = الحد المطلق ((بدون X))

$$\boxed{x = \frac{-b \mp \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$$

مثال 1 جد مجموعة حل المعادلة الآتية $x^2 + 4x + 5 = 0$ في مجموعة الأعداد المركبة

$a = 1$
$b = 4$
$c = 5$

$$x = \frac{-b \mp \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-(4) \mp \sqrt{(4)^2 - 4(1)(5)}}{2(1)}$$

$$x = \frac{-4 \mp \sqrt{16 - 20}}{2}$$

$\sqrt{4} . \sqrt{-1} = 2i$

$$x = \frac{-4 \mp \sqrt{-4}}{2} = \frac{-4 \mp 2i}{2}$$

أما $x = \frac{-4 + 2i}{2} \Rightarrow x = -2 + i$

أو $x = \frac{-4 - 2i}{2} \Rightarrow x = -2 - i$

$$S = \{-2 + i \,,\, -2 - i\}$$

مثال 2 جد مجموعة حل المعادلة:

$$2Z^2 - 5Z + 13 = 0$$

$a = 2$
$b = -5$
$c = 13$

$$Z = \frac{-b \mp \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$Z = \frac{-(-5) \mp \sqrt{(-5)^2 - 4(2)(13)}}{2(2)}$$

$$Z = \frac{5 \mp \sqrt{25 - 104}}{4}$$

$$Z = \frac{5 \mp \sqrt{-79}}{4} = \frac{5 \mp \sqrt{79}i}{4}$$

أما $Z = \frac{5 + \sqrt{79}i}{4}$

أو $Z = \frac{5 - \sqrt{79}i}{4}$

$$S = \left\{ \frac{5 + \sqrt{79}i}{4} \,,\, \frac{5 + \sqrt{79}i}{4} \right\}$$

مثال 3 حل المعادلة في $\mathbb{C}$

$$Z^2 - 2Zi + 3 = 0$$

$a = 1$
$b = -2i$
$c = 3$

$$Z = \frac{-b \mp \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$Z = \frac{-(-2i) \mp \sqrt{(-2i)^2 - 4(1)(3)}}{2(1)}$$

$$Z = \frac{2i \mp \sqrt{4i^2 - 12}}{2}$$

$$Z = \frac{2i \mp \sqrt{-4-12}}{2} = \frac{2i \mp \sqrt{-16}}{2}$$

$\sqrt{16}.\sqrt{-1} = 4i$

$$Z = \frac{2i \mp 4i}{2}$$

2020 - تمهيدي / احيائي

أما $Z = \frac{2i+4i}{2} = \frac{6i}{2} = 3i$

أو $Z = \frac{2i-4i}{2} = \frac{-2i}{2} = -i$

$$S = \{3i, -i\}$$

ملاحظة إذا كان الجذر $\sqrt{b^2 - 4ac}$ فقط عدد سالب لا نستخدم الفرضية كما في مثال (1) و (2) و (3) حيث قمنا باستخراج الجذر التربيعي للعدد السالب كما تعلمنا في بداية الفصل.
أما إذا كان الجذر $\sqrt{b^2 - 4ac}$ يحوي (i) نأخذ الجذر ونجده بطريقة الفرضية كما في المثال (4) و (5).

مثال 4 جد مجموعة حل المعادلة:

$$Z^2 - 3Z + 3 + i = 0$$

$a = 1$
$b = -3$
$c = 3 + i$

$$Z = \frac{-b \mp \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$Z = \frac{-(-3) \mp \sqrt{(-3)^2 - 4(1)[3+i]}}{2(1)}$$

فرضية

$$Z = \frac{3 \mp \sqrt{9 - 12 - 4i}}{2} = \frac{3 \mp \sqrt{-3-4i}}{2}$$

$\sqrt{-3-4i} = x + yi$ بالتربيع

$-3 - 4i = (x^2 - y^2) + 2xyi$

$x^2 - y^2 = -3 \quad ....(1)$

$[2xy = -4] \div 2x \Rightarrow y = \frac{-2}{x} \quad ....(2)$

$x^2 - y^2 = -3 \Rightarrow x^2 - \left(\frac{-2}{x}\right)^2 = -3$

$\left[x^2 - \frac{4}{x^2} = -3\right].x^2 \Rightarrow x^4 - 4 = -3x^2$

$x^4 + 3x^2 - 4 = 0$

$(x^2 + 4)(x^2 - 1) = 0$

أما $x^2 + 4 = 0$ يُهمل $x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x = \mp 1$

$y = \frac{-2}{x} = \frac{-2}{\pm 1} = \pm 2 \Rightarrow \pm(1 - 2i)$

$$Z = \frac{3 \mp (1-2i)}{2}$$

$\rightarrow Z = \frac{3+(1-2i)}{2} = 2 - i$

$\rightarrow Z = \frac{3-1+2i}{2} = 1 + i$

$$S = \{2 - i, 1 + i\}$$

مثال 5 جد مجموعة حل المعادلة:

$$Z^2+2Z+i(2-i)=0$$

$$Z^2+2Z+2i-i^2=0$$

$$Z^2+2Z+(1+2i)=0$$

$a=1$

$b=2$

$c=1+2i$

$$Z=\frac{-b\mp\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$Z=\frac{-(2)\mp\sqrt{(2)^2-4(1)[1+2i]}}{2(1)}$$

$$Z=\frac{-2\mp\sqrt{\cancel{4}-\cancel{4}-8i}}{2}$$

$$Z=\frac{-2\mp\sqrt{-8i}}{2}$$

2017 - د (2) /تطبيقي موصل

((نجد $\sqrt{-8i}$ كما تعلمنا سابقاً)) لوجود i داخل الجذر

$\sqrt{0-8i}=x+yi$ بالتربيع

$$0-8i=(x^2-y^2)+2xyi$$

$$x^2-y^2=0 \quad ....(1)$$

$$[2xy=-8]\div 2x\Rightarrow y=\frac{-4}{x} \quad ....(2)$$

$$x^2-y^2=0$$

$$x^2-\left(\frac{-4}{x}\right)^2=0 \Rightarrow \left[x^2-\frac{16}{x^2}=0\right].x^2$$

$$x^4-16=0$$

$$(x^2+4)(x^2-4)=0$$

أما $x^2+4=0$ يُهمل $\notin R$

أو $x^2-4=0 \Rightarrow x^2=4$ بالجذر

$$x=\mp 2$$

$$y=\frac{-4}{x}=\frac{-4}{\mp 2}=\pm 2$$

هنا تعوض

$$\sqrt{-8i}=\mp(2-2i)$$

$$Z=\frac{-2\mp(2-2i)}{2}$$

أما $Z=\frac{-\cancel{2}+\cancel{2}-2i}{2}=\frac{-2i}{2}=-i$

أو $Z=\frac{-2-2+2i}{2}=\frac{-4+2i}{2}=-2+i$

$$S=\{-i\ ,\ -2+i\}$$

ملاحظة إذا أعطى المعادلة بطريقة مجموع مربعين نحلل كما تعلمنا طريقة تحليل مجموع مربعين .

مثال 6 حل المعادلة $4Z^2+25=0$
نضرب $(-i^2)$

$4Z^2-25i^2=0$

$(2Z-5i)(2Z+5i)=0$

أما $2Z+5i=0 \Rightarrow [2Z=-5i]\div 2$

$Z=\frac{-5}{2}i$

أو $2Z\pm 5i=0 \Rightarrow [2Z=5i]\div 2$

$Z=\frac{5}{2}i$

$S=\left\{\frac{-5i}{2}\ ,\ \frac{5i}{2}\right\}$

مثال 7 حل المعادلة $Z^2=-12$

بالجذر $Z^2=-12$

$Z=\sqrt{-12}$

$Z=\sqrt{12}\,.\sqrt{-1}$

$Z=\sqrt{12}i \Rightarrow Z=\mp 2\sqrt{3}i$

$S=\left\{-2\sqrt{3}i\ ,\ +2\sqrt{3}i\right\}$

شرح السؤال الخامس

هذا السؤال يفيد الطالب عند مراجعته المادة لغرض امتحان أو غيره .

$Z^2+2Z+i\,(2-i)=0$

1. ننظر للسؤال وماذا نجد؟
   ج توزيع القوس وترتيب المعادلة

$Z^2+2Z+2i-i^2=0$

$Z^2+2Z+1+2i=0$

2. أصبحت المعادلة جاهزة، ماذا بعد؟
   ج نجد قيم a,b,c

$\underset{a}{1Z^2}+\underset{b}{2Z}+\underset{c}{\underline{1+2i}}=0$

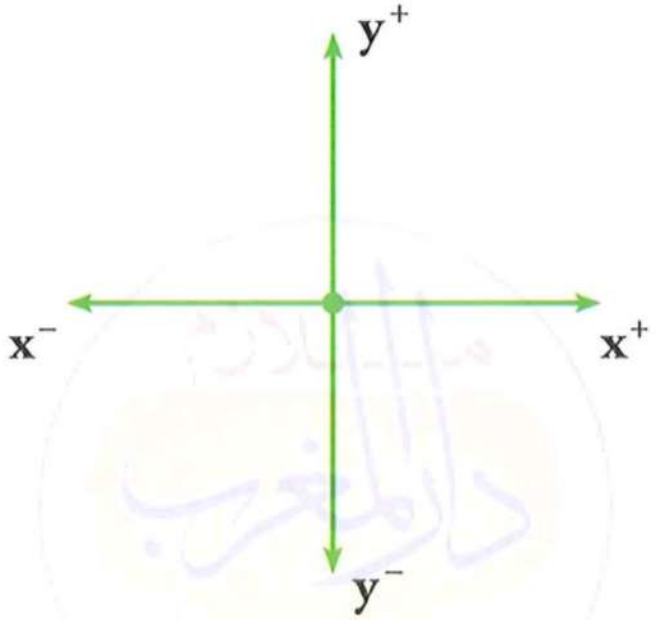
$a=1\ ,\ b=2\ ,\ c=1+2i$

3. نطبق قانون الدستور .
4. نعوض قيم a,b,c داخل القانون .
5. نبدأ بداخل الجذر حيث نوزع ونجمع أو نطرح حسب الاشارات .
6. داخل الجذر نتج لدينا نحله بالفرضية .
7. خطوات أخرى ونجد الناتج .
8. نكتب قيم المجهول $S=\{\quad ,\quad \}$ بشكل مجموعة أفضل .

التمثيل الهندسي للأعداد المركبة

العدد المركب $a + bi$ يمكن كتابتهُ بشكل زوج مرتب $P(a, b)$

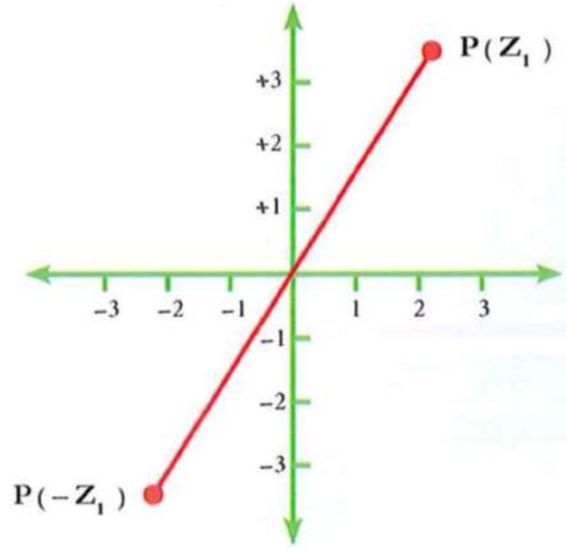
* مراجعة المستوي الاحداثي :



مثال 1 أكتب النظير الجمعي لكل من الاعداد التالية ثم مثّل هذه الاعداد ونظائرها الجمعية على شكل ارجاند :

1. $Z_1 = 2 + 3i \rightarrow (2, 3)$

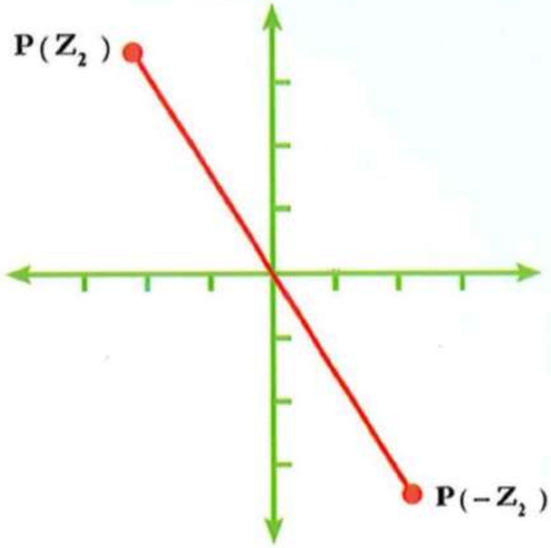
$-Z_1 = -2 - 3i \rightarrow (-2, -3)$



تذكّر النظير الجمعي نقلب اشارة الجزئين الحقيقي والتخيلي.

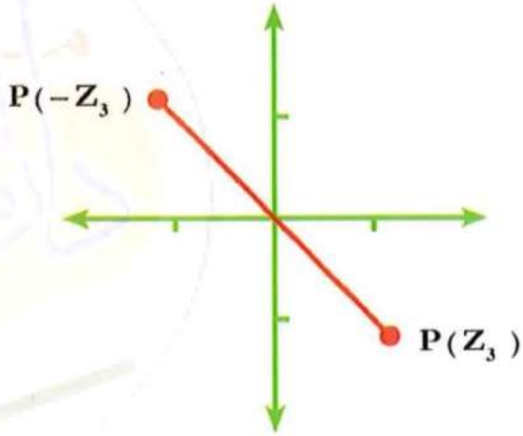
2 $Z_2 = -1+3i \rightarrow (-1,3)$

$-Z_2 = +1-3i \rightarrow (1,-3)$



3 $Z_3 = 1-i \quad (1,-1)$

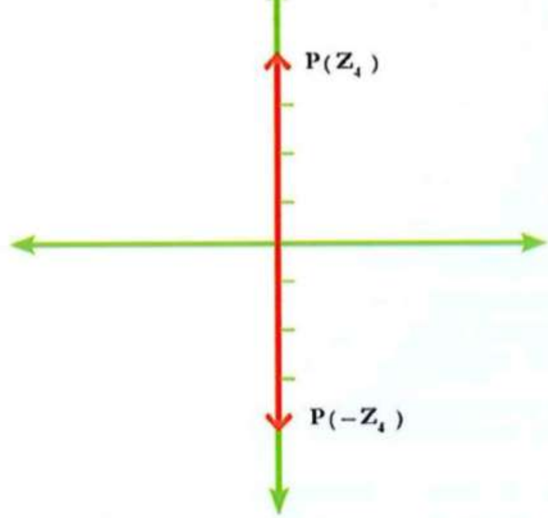
$-Z_3 = -1+i \quad (-1,1)$



4 $Z_4 = 4i$

$Z_4 = 0+4i \quad (0,4)$

$-Z_4 = 0-4i \quad (0,-4)$

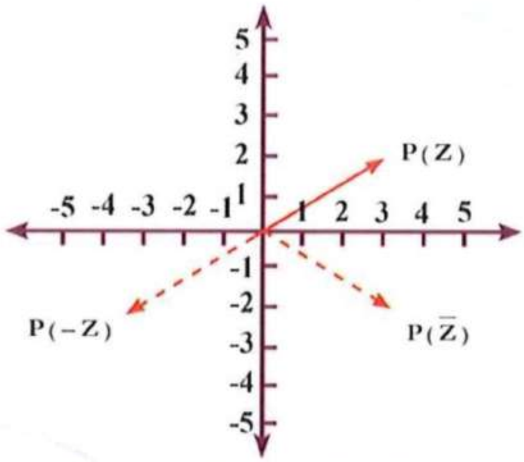


مثال 2 إذا كان ($Z = 4 + 2i$) فوضح على شكل ارجاند كلاً من : $-Z$, $\bar{Z}$, Z

$Z = 4 + 2i \rightarrow (4,2)$

$\bar{Z} = 4 - 2i \rightarrow (4,-2)$

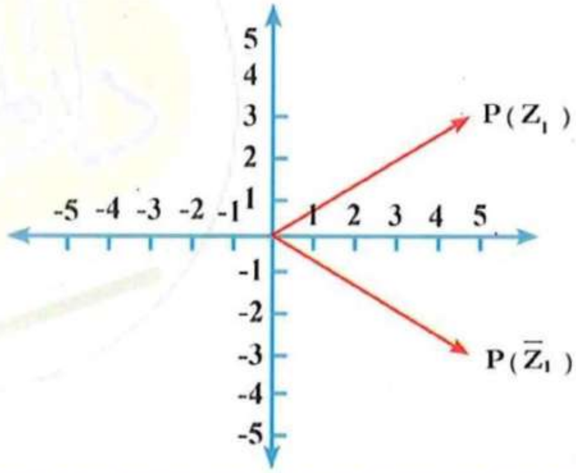
$-Z = -4 - 2i \rightarrow (-4,-2)$



مثال 3 أكتب العدد المرافق لكل من الأعداد الآتية ثم مثلها على شكل ارجاند :

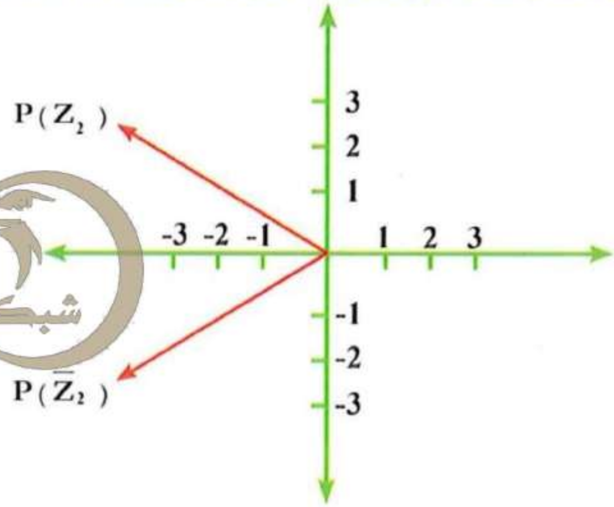
1. $Z_1 = 5 + 3i \rightarrow (5,3)$

   $\bar{Z}_1 = 5 - 3i \rightarrow (5,-3)$



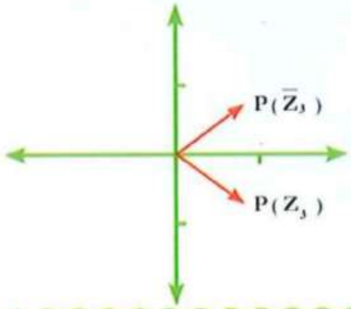
2. $Z_2 = -3 + 2i \rightarrow (-3,2)$

   $\bar{Z}_2 = -3 - 2i \rightarrow (-3,-2)$



2 $Z_3 = 1 - i \rightarrow (1, -1)$

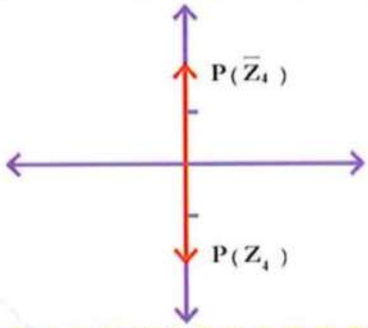
$\overline{Z}_3 = 1 + i \rightarrow (1, 1)$



3 $Z_4 = -2i$

$Z_4 = 0 - 2i \qquad (0, -2)$

$\overline{Z}_4 = 0 + 2i \qquad (0, 2)$



مثال 4 إذا كانت $Z_1 = 4 - 2i$ ، $Z_2 = 1 + 2i$ مثّل على شكل ارجاند $Z_1 + Z_2$.

$Z_1 + Z_2 = (4 - 2i) + (1 + 2i)$

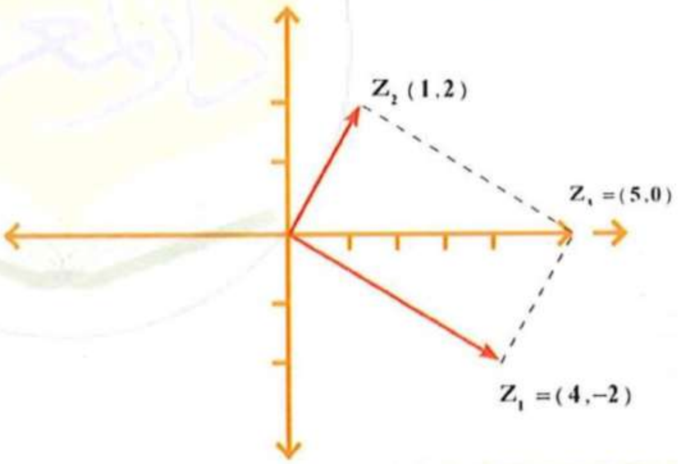
$= (4 + 1) + (-2 + 2i)$

$= 5 + 0i$

$Z_1 = 4 - 2i \qquad (4, -2)$

$Z_2 = 1 + 2i \qquad (1, 2)$

$Z_3 = 5 + 0i \qquad (5, 0)$



مثال 5 إذا كانت $Z_1 = 6 - 2i$ ، $Z_2 = 2 - 5i$ مثّل على شكل ارجاند $Z_1 - Z_2$.

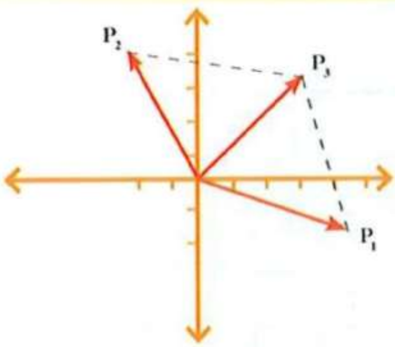
$Z_1 - Z_2 = (6 - 2i) - (2 - 5i)$

$= (6 - 2i) + (-2 + 5i) = 4 + 3i$

$P_1(Z_1) = P_1(6, -2)$

$P_2(Z_2) = P_2(-2, 5)$

$P_3(Z_3) = P_3(4, 3)$



مراجعة

θ	$\sin\theta$	$\cos\theta$
$\frac{3\pi}{2}=270^\circ$	-1	0
$\frac{\pi}{6}=30^\circ$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\frac{\pi}{3}=60^\circ$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{\pi}{4}=45^\circ$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$

θ	$\sin\theta$	$\cos\theta$
0°	0	1
$2\pi=360^\circ$	0	1
$\frac{\pi}{2}=90^\circ$	1	0
$\pi=180^\circ$	0	-1

إيجاد قيم ($\sin\theta$ – $\cos\theta$) لبعض الزوايا

أولاً: $n\pi$

- n فردي نعتبر الزاوية π
- n زوجي نعتبر الزاوية صفر

$\sin 20\pi=\sin 0=0$

$\cos 22\pi=\cos 0=1$

$\sin 10\pi=\sin 0=0$

((n عدد زوجي اعتبرنا الزاوية صفر))

$\cos 13\pi=\cos\pi=-1$

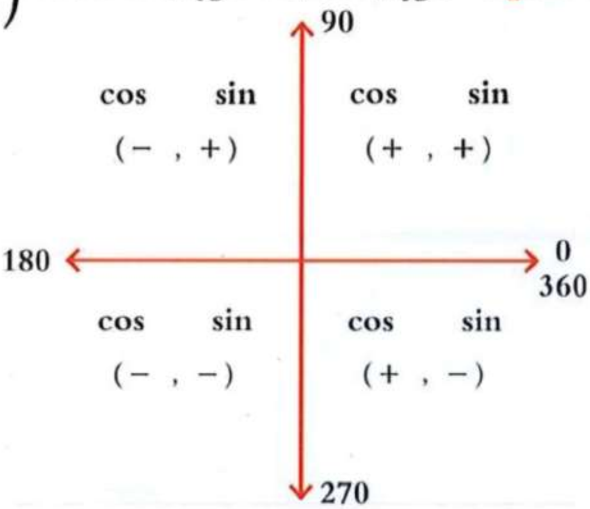
$\cos 15\pi=\cos\pi=-1$

$\sin 55\pi=\sin\pi=0$

((n فردي اعتبرنا الزاوية π))

ثانياً: الزوايا التابعة للزوايا الخاصة $\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{3}\right)$:

مثلاً: $\frac{5\pi}{4}$, $\frac{3\pi}{4}$, $\frac{5\pi}{6}$ ... الخ .



1) نهمل العدد في البسط ونأخذ الزاوية الخاصة فقط $\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{3}\right)$ ونجد $\frac{\sin}{\cos}$.

2) نضرب العدد × الزاوية ونحدد الربع ونضع الاشارات .

مثال جد : $\cos\frac{5\pi}{6}$

نهمل الـ (5) ونجد $\cos\frac{\pi}{6}$ وهو $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ من الجدول

الآن نضرب $30 \times 5 = 150$ وهي في الربع الثاني الـ cos سالب ← $\cos\frac{5\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

$30 \downarrow \frac{\pi}{6}$

مثال جد : $\sin\frac{7\pi}{4}$

نهمل الـ (7) ونجد $\frac{\pi}{4}$ وهو $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ من الجدول .

الآن نضرب $7 \times 45 = 315$ وهي في الربع الرابع الـ (sin) سالب ← $\sin\frac{7\pi}{4} = \frac{-1}{\sqrt{2}}$

$45 \downarrow \left(\frac{\pi}{4}\right)$

ثالثاً: إذا كان البسط أكبر من ضعف المقام نقسّم البسط على المقام ويجب ان يكون الناتج زوجي وسوف اوضح الطريقة في المثال .

1 $\cos\frac{49\pi}{4}$

$$\begin{array}{r|l} & 12 \\ \hline 4 & 49 \\ & \underline{4} \\ & 09 \\ & \underline{8} \\ & 1 \end{array}$$

12 ← ناتج زوجي (o.k)

نضع الباقي في البسط

$\cos\frac{1\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

2 $\sin\frac{37\pi}{6}$

$$\begin{array}{r|l} & 6 \\ \hline 6 & 73 \\ & \underline{36} \\ & 1 \end{array}$$

6 ← زوجي o.k

$\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$

3 $\sin\frac{47\pi}{4}$

$$\begin{array}{r|l} & 11 \\ \hline 4 & 47 \\ & \underline{4} \\ & 07 \\ & \underline{4} \\ & 3 \end{array}$$

لأن الناتج فردي نعيد القسمة ونجعل الناتج زوجي (دائماً)

$\sin\frac{47\pi}{4}$

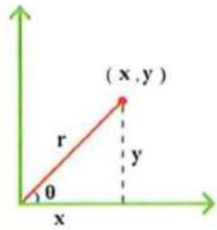
$$\begin{array}{r|l} & 10 \\ \hline 4 & 47 \\ & \underline{4} \\ & 7 \end{array}$$

$\sin\frac{7\pi}{4} = \frac{-1}{\sqrt{2}}$ (نفس الطريقة أعلاه)

المقياس والقيمة الاساسية لسعة العدد المركب ـ الصيغة القطبية

أولاً: إذا طلب المقياس والسعة للعدد المركب

$Z = x + yi \Rightarrow Z = (x, y)$

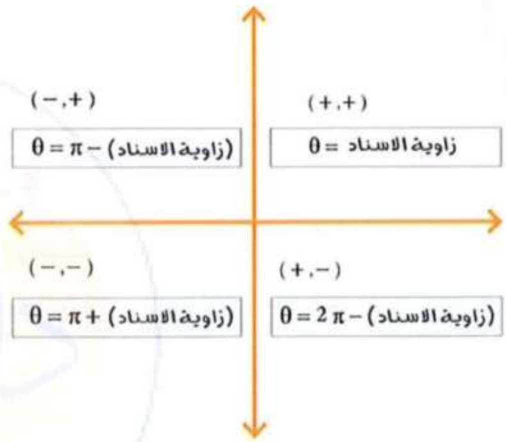


$$\boxed{r = \sqrt{x^2 + y^2}} \quad \ldots\ldots. (1)$$

$$\boxed{\cos\theta = \frac{x}{r}} \quad \ldots\ldots. (2)$$

$$\boxed{\sin\theta = \frac{y}{r}} \quad \ldots\ldots. (3)$$

نجد زاوية الاسناد بالاستعانة بالجدول ((ونحدد الربع))



يرمز للمقياس بالرمز r أو $\|Z\|$ ويُقرأ Mod (Z) ، ويرمز للسعة بالرمز θ وتكتب org (Z) أو θ

ثانياً: الصيغة القطبية: هناك صيغة أخرى للعدد المركب وهي الصيغة القطبية والتي تكتب بالشكل:

$$\boxed{Z = r(\cos\theta + i\sin\theta)}$$

* لاستخراج الصيغة القطبية يجب علينا ايجاد كل من السعة = θ , المقياس = r وذلك حسب الملاحظات المذكورة اعلاه

* يجب وضع العدد المركب بصيغة a + bi أي الصيغة العددية للعدد المركب ثم نبدأ بتطبيق القوانين اعلاه (1) و (2) و (3) .

مثال 1 إذا كان $Z=1+\sqrt{3}i$ فجد المقياس والقيمة الاساسية لسعة Z .

$Z=1+\sqrt{3}i \rightarrow Z=(\underset{x}{\overset{+}{1}},\underset{y}{\overset{+}{\sqrt{3}}})$ الربع الأول

2006 - د (2)

$r=\sqrt{x^2+y^2}$

$r=\sqrt{(1)^2+(\sqrt{3})^2}=\sqrt{1+3}=\sqrt{4}$

$r=2$ (المقياس)

$\cos\theta=\frac{x}{r}=\frac{1}{2}$

$\sin\theta=\frac{y}{r}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

زاوية الأسناد هي $\frac{\pi}{3}$ في الربع الأول

السعة $\theta=$ زاوية الأسناد $\Rightarrow \theta=\frac{\pi}{3}$

مثال 2 إذا كان $Z=-1-i$ فجد المقياس والقيمة الاساسية لسعة Z .

$Z=-1-i \rightarrow Z=(\underset{x}{\overset{-}{-1}},\underset{y}{\overset{-}{-1}})$ الربع الثالث

$r=\sqrt{x^2+y^2}$

$r=\sqrt{(-1)^2+(-1)^2}=\sqrt{1+1}$

$r=\sqrt{2}$ (المقياس)

$\cos\theta=\frac{x}{r}=\frac{-1}{\sqrt{2}}$

$\sin\theta=\frac{y}{r}=\frac{-1}{\sqrt{2}}$

زاوية الأسناد هي $\frac{\pi}{4}$ في الربع الثالث

السعة $\theta=\pi+\frac{\pi}{4} \underset{\text{مقام}}{\overset{\text{توحيد}}{\Rightarrow}} \theta=\frac{5\pi}{4}$

مثال 3 عبر عن العدد المركب $-2+2i$ بالصيغة القطبية .

2013 - د (1)

$-2+2i \rightarrow (\underset{x}{\overset{-}{-2}},\underset{y}{\overset{+}{2}})$ ((الربع الثاني))

$r=\sqrt{x^2+y^2}$

(المقياس)

$r=\sqrt{(-2)^2+(2)^2}=\sqrt{4+4}=\sqrt{8}\Rightarrow r=2\sqrt{2}$

$\cos\theta=\frac{x}{r}=\frac{-\cancel{2}}{\cancel{2}\sqrt{2}}=\frac{-1}{\sqrt{2}}$

$\sin\theta=\frac{y}{r}=\frac{\cancel{2}}{\cancel{2}\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$

زاوية الأسناد $\frac{\pi}{4}$ الربع الثاني

$\theta=\pi-\frac{\pi}{4} \underset{\text{مقام}}{\overset{\text{توحيد}}{\Rightarrow}} \theta=\frac{3\pi}{4}$

$Z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$

$Z=2\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$

مثال 4 ضع العدد $2\sqrt{3}-2i$ بالصيغة القطبية .

2012 - د (2) | 2014 - نازحين | 2013 - د (1) خارج القطر

2020 - تمهيدي / تطبيقي

$2\sqrt{3}-2i \rightarrow (\underset{x}{\overset{+}{2\sqrt{3}}},\underset{y}{\overset{-}{-2}})$ ((الربع الرابع))

$r=\sqrt{x^2+y^2}$

$r=\sqrt{(2\sqrt{3})^2+(-2)^2}=\sqrt{12+4}=\sqrt{16}\Rightarrow r=4$

$\cos\theta=\frac{x}{r}=\frac{\overset{1}{\cancel{2}}\sqrt{3}}{\underset{2}{\cancel{4}}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\sin\theta=\frac{y}{r}=\frac{-2}{4}=\frac{-1}{2}$

زاوية الأسناد $\frac{\pi}{6}$ ربع رابع

$\theta=2\pi-\frac{\pi}{6} \underset{\text{مقام}}{\overset{\text{توحيد}}{\Rightarrow}} \theta=\frac{11\pi}{6}$

$Z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$

$Z=4\left(\cos\frac{11\pi}{6}+i\sin\frac{11\pi}{6}\right)$

ثالثاً: إذا أعطى المقياس والقيمة الأساسية للسعة ويطلب العدد المركب :

* إذا لم يعطي زاوية مباشرة فراجع طريقة أيجاد قيم $\sin\theta \quad \cos\theta$

$$x = r \cos\theta$$

$$y = r \sin\theta$$

حيث $Z = x + yi$

$Z =$ الجزء الحقيقي + الجزء التخيلي (i)

مثال 1 عدد مركب مقياسه $\left(2\sqrt{2}\right)$ والقيمة الأساسية للسعة $\left(\frac{3\pi}{4}\right)$ جد العدد بصورة $a + bi$

$r = 2\sqrt{2} \quad , \quad \theta = \frac{3\pi}{4}$

$x = r \cos\theta$

$x = 2\sqrt{2} \cdot \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)$

$x = 2\cancel{\sqrt{2}} \cdot \left(\frac{-1}{\cancel{\sqrt{2}}}\right) \Rightarrow x = -2$ الجزء الحقيقي

$y = r \sin\theta$

$y = 2\sqrt{2} \cdot \sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)$

$y = 2\cancel{\sqrt{2}} \cdot \left(\frac{1}{\cancel{\sqrt{2}}}\right) \Rightarrow y = 2$ الجزء التخيلي

$Z = x + yi \Rightarrow Z =$ الجزء الحقيقي + الجزء التخيلي (i)

$Z = -2 + 2i$

مثال 2 إذا كان مقياس عدد مركب $= 4$ والقيمة الاساسية لسعته $\left(\frac{11\pi}{6}\right)$ جد العدد بصورة $a + bi$

$r = 4 \quad , \quad \theta = \frac{11\pi}{6}$

$x = r \cos\theta$

$x = 4\cos\left(\frac{11\pi}{6}\right)$

$x = \overset{2}{\cancel{4}} \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{\underset{1}{\cancel{2}}}\right) \Rightarrow x = 2\sqrt{3}$ الجزء الحقيقي

$y = r \sin\theta$

$y = 4\sin\left(\frac{11\pi}{6}\right)$

$y = \overset{2}{\cancel{4}}\left(\frac{-1}{\underset{1}{\cancel{2}}}\right) \Rightarrow y = -2$ الجزء التخيلي

$Z = x + yi \Rightarrow Z =$ الجزء الحقيقي + الجزء التخيلي (i)

$Z = 2\sqrt{3} - 2i$

فكرة إثرائية: يمكن ربط هذه الحالة مع موضوع تكوين المعادلة التربيعية وكما في المثال التالي:

مثال 3 كوّن المعادلة التربيعية ذات المعاملات الحقيقية والتي أحد جذورها مقياسه (2) وسعته الاساسية $\left(\frac{5\pi}{3}\right)$

ملاحظة يجب أن نجد العدد المركب وهو أحد جذور المعادلة أما الجذر الأخر فهو مرافقة لأن المعادلة ذات معاملات حقيقية .

$$x = r\cos\theta$$

$$x = 2\cos\left(\frac{5\pi}{3}\right)$$

$$x = 2\left(\frac{1}{2}\right) \Rightarrow x = 1$$

$$y = r\sin\theta$$

$$y = 2\sin\left(\frac{5\pi}{3}\right)$$

$$y = \cancel{2}\left(\frac{-\sqrt{3}}{\cancel{2}}\right) \Rightarrow y = -\sqrt{3}$$

$$Z = x + yi \Rightarrow Z_1 = 1 - \sqrt{3}i$$

الجذر الأخر $Z_2 = 1 + \sqrt{3}i$

مجموع الجذرين $= \left(1 - \cancel{\sqrt{3}i}\right) + \left(1 + \cancel{\sqrt{3}i}\right)$

$= 2$

حاصل ضرب الجذرين $= \left(1 - \sqrt{3}i\right)\left(1 + \sqrt{3}i\right)$

$$= (1)^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2$$

$$= 1 + 3 = 4$$

$$x^2 - 2x + 4 = 0$$

مثال 4 إضافي إذا علمت ان $Z = -1 + hi$ عدد مركب القيمة الاساسية لسعته $\frac{3\pi}{4}$ جد قيمة (h) .

$$Z = -1 + hi \Rightarrow (-1, h) \Rightarrow x = -1,\ y = h$$

$$\cos\theta = \frac{x}{r}$$

$$\cos\frac{3\pi}{4} = \frac{-1}{r}$$

$$\frac{-1}{\sqrt{2}} = \frac{-1}{r} \Rightarrow r = \sqrt{2}$$

$$y = r\ \sin\theta$$

$$y = \sqrt{2}\,.\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)$$

$$y = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \Rightarrow y = 1 \quad , \quad h = 1$$

مبرهنة ديموافر

أولاً: إذا كان لدينا $(a+bi)^n$ حيث n عدد صحيح (ليس كسراً) .

$$Z^n = r^n\left[\cos\theta + i\sin\theta\right]^n \Rightarrow Z^n = r^n\left[\cos(\theta.n) + i\sin(\theta.n)\right]$$

ملاحظة إذا كان n عدد صحيح سالب تصبح العلاقة :

$$\cos(-\theta) = \cos\theta$$
$$\sin(-\theta) = -\sin\theta$$

$$Z^{-n} = r^{-n}\left[\cos(\theta.n) - i\sin(\theta.n)\right]$$

أي أن السالب الذي مع الزاوية يُهمل مع دالة الـ cos ويتم وضعه قبل دالة الـ sin

ملاحظة لحل سؤال ديموافر وكان الاس عدد صحيح يجب توفير ثلاث اركان وهي r المقياس ، θ السعة ، n وهو اس القوس

وقد تعلمت سابقاً كيف تجد r و θ . ثم تطبق قانون مبرهنة ديموافر أعلاه .

الجزء الأول: يعطي صيغة قطبية جاهزة ما عليك سوى ضرب (الأس × الزاوية) كما في الأمثلة التالية:

مثال 1 أحسب:

① $\left[\cos\frac{3\pi}{8}+i\sin\frac{3\pi}{8}\right]^4$

$=\cos\left(\frac{3\pi}{\cancel{8}}.\cancel{4}\right)+i\sin\left(\frac{3\pi}{\cancel{8}}.\cancel{4}\right)$

$=\cos\frac{3\pi}{2}+i\sin\frac{3\pi}{2}$

$=0+i(-1)=0-i$

② $\left[\cos\frac{5}{24}\pi+i\sin\frac{5}{24}\pi\right]^4$ 2012 - تمهيدي

$=\cos\left(\frac{5\pi}{24}.4\right)+i\sin\left(\frac{5\pi}{24}.4\right)$

$=\cos\frac{5\pi}{6}+i\sin\frac{5\pi}{6}$

$=\frac{-\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$

③ $\left[\cos\frac{7\pi}{12}+i\sin\frac{7\pi}{12}\right]^{-3}$ 2015 - د (1) خارج — 2017 - د (1) خارج/أحيائي

$=\cos\left(\frac{7\pi}{12}.(-3)\right)+i\sin\left(\frac{7\pi}{12}.(-3)\right)$

يهمل

$=\cos\left(\frac{-7\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{-7\pi}{4}\right)$

إنتبه ! السالب يهمل مع cos ويتم وضح السالب قبل الـ sin

$=\cos\frac{7\pi}{4}-i\sin\frac{7\pi}{4}$

اشارة الربع الرابع

$=\frac{1}{\sqrt{2}}-\left(\frac{-1}{\sqrt{2}}i\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i$

الأشارة الاصلية

مثال 2 بسّط ما يلي:

① $\frac{(\cos2\theta+i\sin2\theta)^5}{(\cos3\theta+i\sin3\theta)^3}$

$\frac{(\cos\theta+i\sin\theta)^{10}}{(\cos\theta+i\sin\theta)^9}=(\cos\theta+i\sin\theta)$

1- لايمكن ان نستخدم قانون عند القسمة تطرح الاسس لأن الاقواس مختلفة، لذلك سوف نضرب العدد الذي بجانب θ (معامل θ) بأس القوس ((عكس العملية السابقة بالضبط)).

2- لا تأتي هذه المعاملات مختلفة

$\frac{(\cos2\theta+i\sin2\theta)^5}{(\cos3\theta+i\sin3\theta)^3}$

② $(\cos\theta+i\sin\theta)^8\ (\cos\theta-i\sin\theta)^4$

$=(\cos\theta+i\sin\theta)^8\ (\cos\theta+i\sin\theta)^{-4}$

$=(\cos\theta+i\sin\theta)^4=\cos4\theta+i\sin4\theta$

2015 - د (1) خارج

"توضيح"

$\cos\theta-i\sin\theta=(\cos\theta+i\sin\theta)^{-1}$

* بمعنى ان الصيغة القطبية اعلاه إذا كانت تحمل اشارة سالبة تقلب الى اشارة موجبة ونعكس اشارة الاس

الجزء الثاني: إذا اعطى عدد مركب مرفوع الى اس صحيح (الأس سالب أو موجب) فيجب علينا ان نتبع الخطوات التالية :

1. تبسيط العدد المركب الموجود داخل القوس وجعله بالصيغة العادية للعدد المركب (الاسئلة الثلاث الموجودة في المنهج والتي سوف نتطرق اليها لاتحتاج تبسيط لان داخل القوس عدد مركب بالصيغة العادية) .
2. نقوم بايجاد المقياس والسعة كما تعلمنا سابقاً .
3. بعد توفير الاركان الثلاث نطبق قانون مبرهنة ديموافر .

$$Z^n = r^n\left[\cos\theta + i\sin\theta\right]^n \Rightarrow Z^n = r^n\left[\cos(\theta . n) + i\sin(\theta . n)\right]$$

مثال 1 أحسب باستخدام ديموافر $(1+i)^{11}$

$$1+i \to \underset{x\,,\,y}{\overset{+\;+}{(1,1)}}$$

((الربع الأول))

الركن الأول (r)

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$r = \sqrt{(1)^2 + (1)^2} \Rightarrow \boxed{r = \sqrt{2}}$$

$$\cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

زاوية الأسناد $\frac{\pi}{4}$ الربع الأول

الركن الثاني $\boxed{\theta = \frac{\pi}{4}}$

الركن الثالث $n=11$

قانون ديموافر

$$Z^n = r^n\,(\cos\theta + i\sin\theta)^n$$

التعويض بالاركان الثلاث

$$Z^{11} = \left(\sqrt{2}\right)^{11}\left[\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right]^{11}$$

ضرب الاس في الزاوية (كما في الجزء الاول من الموضوع)

$$Z^{11} = 32\sqrt{2}\left(\cos\frac{11\pi}{4} + i\sin\frac{11\pi}{4}\right)$$

تبسيط الزاوية

$$= 32\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$$

الناتج

$$= 32\sqrt{2}\left(\frac{-1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -32 + 32i$$

2015 - د (2)

2019 - تمهيدي/تطبيقي

2020 - تمهيدي/ احيائي

مثال 2 أحسب باستخدام ديموافر $(1-i)^7$

$$1-i \rightarrow (\overset{+}{\underset{x}{1}},\overset{-}{\underset{y}{-1}})$$ الربع الرابع

الركن الأول (r) $r=\sqrt{x^2+y^2}$

$$r=\sqrt{(1)^2+(-1)^2} \rightarrow r=\sqrt{2}$$

$$\cos\theta=\frac{x}{r}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\sin\theta=\frac{y}{r}=\frac{-1}{\sqrt{2}}$$

زاوية الأسناد $\frac{\pi}{4}$

الربع الرابع

الركن الثالث $\theta=2\pi-\frac{\pi}{4} \Rightarrow \theta=\frac{7\pi}{4}$ ، $n=7$

قانون ديموافر

$$Z^n=r^n(\cos\theta+i\sin\theta)^n$$

تعويض

$$Z^7=(\sqrt{2})^7\left[\cos\frac{7\pi}{4}+i\sin\frac{7\pi}{4}\right]^7$$

الاس × الزاوية

$$Z^7=8\sqrt{2}\left(\cos\frac{49\pi}{4}+i\sin\frac{49\pi}{4}\right)$$

تبسيط الزاوية

$$=8\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

الناتج

$$=8\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i\right)=8+8i$$

2012 - د (1) | 2015 - د (1) خارج | 2013 - تمهيدي

2017 - د (2) تطبيقي | 2020 - د (1) تطبيقي

مثال 3 أحسب باستخدام ديموافر $(\sqrt{3}+i)^{-9}$

$$\sqrt{3}+i \rightarrow (\overset{+}{\sqrt{3}},\overset{+}{1})$$ الربع الأول

2014 - د (2)

$$r=\sqrt{x^2+y^2}$$

$$r=\sqrt{(\sqrt{3})^2+(1)^2}=\sqrt{3+1}=\sqrt{4}$$

$$r=2$$

$$\cos\theta=\frac{x}{r}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin\theta=\frac{y}{r}=\frac{1}{2}$$

زاوية الأسناد $\frac{\pi}{6}$

الربع الأول $\theta=\frac{\pi}{6}$

$$Z^n=r^n(\cos\theta+i\sin\theta)^n$$

$$Z^{-9}=(2)^{-9}\left[\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right]^{-9}$$

يُهمل — يخرج قبل sin

$$=\frac{1}{2^9}\left[\cos\frac{-9\pi}{6}+i\sin\frac{-9\pi}{6}\right]$$

$$=\frac{1}{512}\left(\cos\frac{3\pi}{2}-i\sin\frac{3\pi}{2}\right)$$

تذكّر $\frac{3\pi}{2}=270^\circ$

$$=\frac{1}{512}(0-(-1)i)$$

$$=0+\frac{1}{512}i$$

نتيجة مبرهنة ديموافر

عندما يكون اس القوس كسر وبشكل ($\frac{1}{n}$) أي ان الكسر بسطهُ = 1 يكون السؤال نتيجة ديموافر .

$$Z^{\frac{1}{n}} = r^{\frac{1}{n}}\left[\cos\theta + i\sin\theta\right]^{\frac{1}{n}} \Rightarrow Z^{\frac{1}{n}} = r^{\frac{1}{n}}\left[\cos\frac{\theta+2k\pi}{n} + i\sin\frac{\theta+2k\pi}{n}\right]$$

* ولحل سؤال النتيجة توفير أربع اركان وهي :

$r =$ المقياس , $\theta =$ السعة , $n =$ مقام الاس , $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$

ملاحظة عندما يطلب (الجذور التربيعية - التكعيبية - الجذور الاربعة . . .الخ) لعدد مركب غير مرفوع الى اس يعني نتيجة والاس كسر ولا يعطي قوس في هذه الحالة انت عليك التمييز :

جذور تربيعية $\overset{\text{معناها}}{\Rightarrow} (a+bi)^{\frac{1}{2}} \rightarrow n = 2, \quad k = 0, 1$

جذور تكعيبية $\overset{\text{معناها}}{\Rightarrow} (a+bi)^{\frac{1}{3}} \rightarrow n = 3, \quad k = 0, 1, 2$

جذور الأربعة $\overset{\text{معناها}}{\Rightarrow} (a+bi)^{\frac{1}{4}} \rightarrow n = 4, \quad k = 0, 1, 2, 3$

k نقف قبل الـ n برقم كما تلاحظ الامثلة التوضيحية

* إذا كان العدد المركب مرفوع الى اس كسر ولكن (البسط $\neq 1$) للأس فيكون السؤال (مبرهنة ونتيجة) .

مثلاً $(a+bi)^{\frac{3}{2}} = \left[(a+bi)^3\right]^{\frac{1}{2}}$ $\begin{cases} (a+bi)^3 \\ (\text{ناتج المبرهنة})^{\frac{1}{2}} \end{cases}$

مثلاً $(a+bi)^{\frac{-5}{2}} = \left[(a+bi)^{-5}\right]^{\frac{1}{2}}$ $\begin{cases} (a+bi)^{-5} \\ (\text{الناتج})^{\frac{1}{2}} & \text{نتيجة ديموافر} \end{cases}$

مثلاً $(a+bi)^{\frac{2}{-3}} = \left[(a+bi)^{-2}\right]^{\frac{1}{3}}$ $\begin{cases} (a+bi)^{-2} & \text{مبرهنة} \\ (\text{الناتج})^{\frac{1}{3}} & \text{نتيجة} \end{cases}$

إنتبه !
ضع اشارة السالب مع القوس الداخلي (مع المبرهنة) مهما كان موقع السالب في الأس.

* عند قراءة الملاحظة الاخيرة انظر الى سؤال 2017 دور أول فيه شرح مفصل لهذه الحالة (سؤال 20) في الاسئلة الوزارية .

مثال 1 جد الجذور التربيعية للعدد المركب $-1+\sqrt{3}i$ باستخدام نتيجة مبرهنة ديموافر.

$$-1+\sqrt{3}i \Rightarrow (\underset{-}{-1},\underset{+}{\sqrt{3}}) \quad (x,y)$$ الربع الثاني

$$r=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{(-1)^2+\left(\sqrt{3}\right)^2}$$

$$r=\sqrt{1+3}=\sqrt{4} \Rightarrow r=2$$

$$\cos\theta=\frac{x}{r}=\frac{-1}{2}$$

$$\sin\theta=\frac{y}{r}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

زاوية الأسناد $\frac{\pi}{3}$ الربع الثاني

$$\theta=\pi-\frac{\pi}{3} \Rightarrow \theta=\frac{2\pi}{3}$$

الاركان الاربعة

$$r=2,\ \theta=\frac{2\pi}{3},\ n=2,\ k=0\ ,\ 1$$

$$Z^{\frac{1}{n}}=r^{\frac{1}{n}}\left[\cos\theta+i\sin\theta\right]^{\frac{1}{n}}$$

$$Z^{\frac{1}{n}}=r^{\frac{1}{n}}\left[\cos\frac{\theta+2k\pi}{n}+i\sin\frac{\theta+2k\pi}{n}\right]$$

$$k=0,\ \frac{\theta+2k\pi}{n}=\frac{\frac{2\pi}{3}+0}{2}=\frac{2\pi}{6}=\frac{\pi}{3}$$

$$Z_1=2^{\frac{1}{2}}\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$$

$$Z_1=\sqrt{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}i$$

$$k=1\ ,\ \frac{\theta+2k\pi}{n}=\frac{\frac{2\pi}{3}+2\pi}{2}=\frac{\frac{2\pi+6\pi}{3}}{2}=\frac{4\pi}{3}$$

$$Z_2=\sqrt{2}\left(\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}\right)$$

$$Z_2=\sqrt{2}\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)=\frac{-1}{\sqrt{2}}-\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}i$$

2017 - د (1) تطبيقي/موصل | 2017 - د (3) أحيائي

2020 - د (2) أحيائي | 2020 - د (3) تطبيقي

صيغة اخرى للسؤال

حل المعادلة $x^2+1-\sqrt{3}\ i=0$ باستخدام نتيجة مبرهنة ديموفر

ننقل المعاليم في طرف والمجاهيل في طرف

$$x^2+1-\sqrt{3}\ i=0$$

بالجذر التربيعي

$$x^2=-1+\sqrt{3}\ i$$

$$x=\sqrt{-1+\sqrt{3}\ i}=(-1+\sqrt{3}\ i)^{\frac{1}{2}}$$

ثم نكمل الحل كما في السابق

* إذا كانت قيمة زاوية الاسناد المستخرجة من الجدول هي $\left(\pi, 2\pi, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$ لانطبق القوانين الاربعة لان هذه الزوايا تقع على الحدود بين الارباع لذلك تكون هي θ وزاوية الاسناد بنفس الوقت. في الامثلة التالية سوف تصادفنا هذه الزوايا.

مثال 2 جد الجذور التكعيبية للعدد المركب $27i$ باستخدام نتيجة مبرهنة ديموافر.

$0+27i \Rightarrow (0,27)$

$r=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{(0)^2+(27)^2}=\sqrt{27^2}$

$r=27$

$\cos\theta=\frac{x}{r}=\frac{0}{27}=0$

$\sin\theta=\frac{y}{r}=\frac{27}{27}=1$

هنا لا نطبق قانون الأرباع لأن الزاوية $\frac{\pi}{2}$ لا تنتمي الى ربع وتقع على الحدود بين الربعين الأول والثاني.

$\boxed{\theta=\frac{\pi}{2}}$

$Z^{\frac{1}{n}}=r^{\frac{1}{n}}\left[\cos\frac{\theta+2k\pi}{n}+i\sin\frac{\theta+2k\pi}{n}\right]$

عندما $k=0,\ \frac{\theta+2k\pi}{n}=\frac{\frac{\pi}{2}+0}{3}=\frac{\pi}{6}$

$Z_1=27^{\frac{1}{3}}\left[\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right]$

$Z_1=3\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)=\frac{3\sqrt{3}}{2}+\frac{3}{2}i$

عندما $k=1,\ \frac{\theta+2k\pi}{n}=\frac{\frac{\pi}{2}+2\pi}{3}=\frac{\frac{\pi+4\pi}{2}}{3}=\frac{5\pi}{6}$

$Z_2=3\left(\cos\frac{5\pi}{6}+i\sin\frac{5\pi}{6}\right)$

$Z_2=3\left(\frac{-\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)=\frac{-3\sqrt{3}}{2}+\frac{3}{2}i$

عندما $k=2,\ \frac{\theta+2k\pi}{n}=\frac{\frac{\pi}{2}+4\pi}{3}=\frac{\frac{\pi+8\pi}{2}}{3}=\frac{9\pi}{6}=\frac{3\pi}{2}$

$Z_3=3\left(\cos\frac{3\pi}{2}+i\sin\frac{3\pi}{2}\right)$

$Z_3=3(0-i)=-3i$

2019 - د (1) تطبيقي/خارج

مثال 3 جد الجذور الاربعة للعدد (-16).

$-16+0i \Rightarrow \overset{(x,y)}{(-16,0)}$

$r=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{(-16)^2+(0)^2}=\sqrt{256}$

$r=16$

$\cos\theta=\frac{x}{r}=\frac{-16}{16}=-1$

$\sin\theta=\frac{y}{r}=\frac{0}{16}=0$

لا نطبق قانون الأرباع لأن π تقع على الحدود بين الربعين الثاني والثالث.

$\theta=\pi$

$Z^{\frac{1}{n}}=r^{\frac{1}{n}}\left[\cos\frac{\theta+2k\pi}{n}+i\frac{\theta+2k\pi}{n}\right]$

$k=0,\ \frac{\theta+2k\pi}{n}=\frac{\pi+0}{4}=\frac{\pi}{4}$

$Z_1=(16)^{\frac{1}{4}}\left(\cos\frac{\pi}{4}+\sin\frac{\pi}{4}\right)$

$Z_1=2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i\right) \Rightarrow Z_1=\sqrt{2}+\sqrt{2}i$

عندما $k=1,\ \frac{\theta+2k\pi}{n}=\frac{\pi+2\pi}{4}=\frac{3\pi}{4}$

$Z_2=2\left(\cos\frac{3\pi}{4}+\sin\frac{3\pi}{4}\right)$

$Z_2=2\left(\frac{-1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i\right) \Rightarrow Z_2=-\sqrt{2}+\sqrt{2}i$

عندما $k=2,\ \frac{\theta+2k\pi}{n}=\frac{\pi+4\pi}{4}=\frac{5\pi}{4}$

$Z_3=2\left(\cos\frac{5\pi}{4}+\sin\frac{5\pi}{4}\right)$

$Z_3=2\left(\frac{-1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}i\right) \Rightarrow Z_3=-\sqrt{2}-\sqrt{2}i$

عندما $k=3,\ \frac{\theta+2k\pi}{n}=\frac{\pi+6\pi}{4}=\frac{7\pi}{4}$

$Z_4=2\left(\cos\frac{7\pi}{4}+\sin\frac{7\pi}{4}\right)$

$Z_4=2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}i\right) \Rightarrow Z_4=\sqrt{2}-\sqrt{2}i$

مثال 4 أوجد قيم $(-64\,i)^{\frac{1}{6}}$ باستخدام مبرهنة ديموافر .

$$0-64i \Rightarrow \overset{(x,y)}{(0,-64)}$$

$$r=\sqrt{x^2+y^2}$$

$$r=\sqrt{0+(-64)^2} \Rightarrow r=64$$

$$\left.\begin{aligned}\cos\theta&=\frac{x}{r}=\frac{0}{64}=0\\ \sin\theta&=\frac{y}{r}=\frac{-64}{64}=-1\end{aligned}\right]\quad \theta=\frac{3\pi}{2}$$

$$Z^{\frac{1}{n}}=r^{\frac{1}{n}}\left[\cos\frac{\theta+2k\pi}{n}+i\sin\frac{\theta+2k\pi}{n}\right]$$

عندما $k=0,\ \dfrac{\theta+2k\pi}{n}=\dfrac{\frac{3\pi}{2}+0}{6}=\dfrac{3\pi}{12}=\dfrac{\pi}{4}$

$$Z_1=(64)^{\frac{1}{6}}\left[\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right]$$

$$Z_1=2\left(\frac{1}{\sqrt2}+\frac{1}{\sqrt2}i\right) \Rightarrow Z_1=\sqrt2+\sqrt2 i$$

عندما $k=1,\ \dfrac{\theta+2k\pi}{n}=\dfrac{\frac{3\pi}{2}+2\pi}{6}=\dfrac{\frac{3\pi+4\pi}{2}}{6}=\dfrac{7\pi}{12}$

$$Z_2=2\left(\cos\frac{7\pi}{12}+i\sin\frac{7\pi}{12}\right)$$

عندما $k=2,\ \dfrac{\theta+2k\pi}{n}=\dfrac{\frac{3\pi}{2}+4\pi}{6}=\dfrac{\frac{3\pi+8\pi}{2}}{6}=\dfrac{11\pi}{12}$

$$Z_3=2\left(\cos\frac{11\pi}{12}+i\sin\frac{11\pi}{12}\right)$$

$k=3,\ \dfrac{\theta+2k\pi}{n}=\dfrac{\frac{3\pi}{2}+6\pi}{6}=\dfrac{\frac{3\pi+12\pi}{2}}{6}=\dfrac{5\pi}{4}$

$$Z_4=2\left(\cos\frac{5\pi}{4}+i\sin\frac{5\pi}{4}\right)$$

$$Z_4=2\left(-\frac{1}{\sqrt2}-\frac{1}{\sqrt2}i\right) \Rightarrow Z_4=-\sqrt2-\sqrt2 i$$

عندما $k=4,\ \dfrac{\theta+2k\pi}{n}=\dfrac{\frac{3\pi}{2}+8\pi}{6}=\dfrac{19\pi}{12}$

$$Z_5=2\left(\cos\frac{19\pi}{12}+i\sin\frac{19\pi}{12}\right)$$

عندما $k=5,\ \dfrac{\theta+2k\pi}{n}=\dfrac{\frac{3\pi}{2}+10\pi}{6}=\dfrac{23\pi}{12}$

$$Z_6=2\left(\cos\frac{23\pi}{12}+i\sin\frac{23\pi}{12}\right)$$

مثال 5 أوجد الصيغة القطبية للمقدار $\left(\sqrt{3}+i\right)^2$ ثم جد الجذور الخمسة له .

$$\sqrt{3}+i \rightarrow \overset{(x,y)}{\left(\sqrt{3},1\right)}$$ الربع الأول

$$r=\sqrt{x^2+y^2}$$

$$r=\sqrt{(\sqrt{3})^2+(1)^2}=\sqrt{3+1}=\sqrt{4}$$

$$r=2$$

$$\left.\begin{aligned}\cos\theta=\frac{x}{r}=\frac{\sqrt{3}}{2}\\ \sin\theta=\frac{y}{r}=\frac{1}{2}\end{aligned}\right]$$

زاوية الأسناد $\frac{\pi}{6}$

ربع أول $\theta=\frac{\pi}{6}$

$$Z^n=r^n\ (\cos\theta+\sin\theta)^n$$

$$Z^2=2^2\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)^2$$

الصيغة القطبية $$Z^2=4\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$$

الجذور الخمسة $Z^{\frac{1}{5}}$

$$Z^{\frac{1}{5}}=4^{\frac{1}{5}}\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)^{\frac{1}{5}}$$

$$Z^{\frac{1}{n}}=r^{\frac{1}{n}}\left[\cos\frac{\theta+2k\pi}{n}+i\sin\frac{\theta+2k\pi}{n}\right]$$

عندما $k=0,\frac{\theta+2k\pi}{n}=\frac{\frac{\pi}{3}+0}{5}=\frac{\pi}{15}$

$$Z_1=\sqrt[5]{4}\left(\cos\frac{\pi}{15}+i\sin\frac{\pi}{15}\right)$$

عندما $k=1\quad \frac{\frac{\pi}{3}+2\pi}{5}=\frac{\frac{\pi}{3}+2\pi}{5}=\frac{7\pi}{15}$

$$Z_2=\sqrt[5]{4}\left(\cos\frac{7\pi}{15}+i\sin\frac{7\pi}{15}\right)$$

عندما $k=2\quad \frac{\frac{\pi}{3}+4\pi}{5}=\frac{13\pi}{15}$

$$Z_3=\sqrt[5]{4}\left(\cos\frac{13\pi}{15}+i\sin\frac{13\pi}{15}\right)$$

عندما $k=3\quad \frac{\frac{\pi}{3}+6\pi}{5}=\frac{19\pi}{15}$

$$Z_4=\sqrt[5]{4}\left(\cos\frac{19\pi}{15}+i\sin\frac{19\pi}{15}\right)$$

عندما $k=4\quad \frac{\frac{\pi}{3}+8\pi}{5}=\frac{25\pi}{15}=\frac{5\pi}{3}$

$$Z_5=\sqrt[5]{4}\left(\cos\frac{5\pi}{3}+i\sin\frac{5\pi}{3}\right)$$

مثال 6 حل المعادلة $x^3+1=0$ باستخدام مبرهنة ديموافر .

بالجذر التكعيبي $x^3=-1$

$$x=\sqrt[3]{-1} \Rightarrow x=(-1+0i)^{\frac{1}{3}}$$

$$r=\sqrt{x^2+y^2}$$

$$r=\sqrt{(-1)^2+(0)^2} \Rightarrow r=1$$

$$\left.\begin{array}{l}\cos\theta=\frac{x}{r}=\frac{-1}{1}=-1\\ \sin\theta=\frac{y}{r}=\frac{0}{1}=0\end{array}\right]\ \theta=\pi$$

$$Z^{\frac{1}{n}}=r^{\frac{1}{n}}\left[\cos\theta+i\sin\theta\right]^{\frac{1}{n}}$$

$$Z^{\frac{1}{n}}=r^{\frac{1}{n}}\left[\cos\frac{\theta+2k\pi}{n}+i\sin\frac{\theta+2k\pi}{n}\right]$$

عندما $k=0 \quad \frac{\pi+0}{3}=\frac{\pi}{3}$

$$Z_1=(1)^{\frac{1}{3}}\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$$

$$Z_1=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$$

عندما $k=1 \quad \frac{\pi+2\pi}{3}=\frac{3\pi}{3}=\pi$

$$Z_2=(1)^{\frac{1}{3}}(\cos\pi+i\sin\pi)$$

$$Z_2=-1+0i$$

عندما $k=2$

$$\theta=\frac{\pi+4\pi}{3} \Rightarrow \theta=\frac{5\pi}{3}$$

$$Z_3=(1)^{\frac{1}{3}}\left(\cos\frac{5\pi}{3}+i\sin\frac{5\pi}{3}\right)$$

$$Z_3=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$$

2017 - د (2)/ تطبيقي

2019 - د (3)/ أحيائي

* يمكن ان يكون منطوق السؤال بصيغة مختلفة مثل :

باستخدام ديموافر جد الجذور التكعيبية للعدد (-1)

معناها $x^3=-1 \Rightarrow (-1+0i)^{\frac{1}{3}}$

ثم نكمل الحل كما موضح اعلاه

الأسئلة الوزارية حول موضوع المقياس والسعة والصيغة القطبية ومبرهنة ديموافر

سؤال 1 إذا كان $Z=(-\sqrt{3},1)$ عدداً مركباً أكتب الشكل الجبري له ثم جد مقياسه والقيمة الاساسية للسعة.

2002 - د (2)

$$Z=-\sqrt{3}+i \rightarrow \underset{(x,y)}{(-\sqrt{3},1)}$$

$$r=\sqrt{x^2+y^2}$$

$$r=\sqrt{(-\sqrt{3})^2+(1)^2}=\sqrt{3+1}=\sqrt{4}$$

$r=2$ ((المقياس))

$$\cos\theta=\frac{x}{r}=\frac{-\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin\theta=\frac{y}{r}=\frac{1}{2}$$

زاوية الأسناد $\frac{\pi}{6}$ / الربع الثاني

$$\theta=\pi-\frac{\pi}{6} \Rightarrow \theta=\frac{5\pi}{6}$$ ((السعة))

سؤال 3 إذا كان $(-1+\sqrt{3}i)$ عدداً مركباً جد مقياسه والقيمة الاساسية لسعته.

2008 خارج القطر

$$Z=-1+\sqrt{3}i \rightarrow \underset{(x,y)}{(-1,\sqrt{3})}$$ الربع الثاني

$$r=\sqrt{x^2+y^2}$$

$$r=\sqrt{(-1)^2+(\sqrt{3})^2}=\sqrt{1+3}=\sqrt{4} \Rightarrow r=2$$

$$\cos\theta=\frac{x}{r}=\frac{-1}{2}$$

$$\sin\theta=\frac{y}{r}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

زاوية الأسناد $\frac{\pi}{3}$ / الربع الثاني

$$\theta=\pi-\frac{\pi}{3} \Rightarrow \theta=\frac{2\pi}{3}$$

سؤال 2 ضع المقدار $\frac{7+\sqrt{3}i}{1+2\sqrt{3}i}$ بالصيغة العادية للعدد المركب ثم جد مقياسه وسعته الأساسية.

2001 - د (1)

$$Z=\frac{7+\sqrt{3}i}{1+2\sqrt{3}i}\cdot\frac{1-2\sqrt{3}i}{1-2\sqrt{3}i}$$

$$Z=\frac{7-14\sqrt{3}i+\sqrt{3}i+6}{(1)^2+(2\sqrt{3})^2}=\frac{13-13\sqrt{3}i}{13}$$

$$Z=\frac{13}{13}-\frac{13\sqrt{3}i}{13} \Rightarrow Z=1-\sqrt{3}i$$

$$Z=\underset{(x,y)}{(1,-\sqrt{3})}$$

$$r=\sqrt{x^2+y^2}$$

$$r=\sqrt{(1)^2+(-\sqrt{3})^2}=\sqrt{1+3}=\sqrt{4}$$

$r=2$ ((المقياس))

$$\cos\theta=\frac{x}{r}=\frac{1}{2}$$

$$\sin\theta=\frac{y}{r}=\frac{-\sqrt{3}}{2}$$

زاوية الأسناد $\frac{\pi}{3}$ / الربع الرابع

$$\theta=2\pi-\frac{\pi}{3} \Rightarrow \theta=\frac{5\pi}{3}$$ ((السعة))

سؤال 4 جد المقياس والقيمة الاساسية للسعة للعدد المركب $\frac{2i}{1+i}$

2007 - د (2)

$$Z=\frac{2i}{1+i}\cdot\frac{1-i}{1-i}\Rightarrow Z=\frac{2i-2i^2}{(1)^2+(1)^2}$$

$$Z=\frac{2+2i}{2}\Rightarrow Z=1+i \qquad \begin{matrix}(1,1)\\(x,y)\end{matrix}$$

$$r=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{(1)^2+(1)^2}\Rightarrow r=\sqrt{2}$$

$$\cos\theta=\frac{x}{r}=\frac{1}{\sqrt{2}} \qquad \sin\theta=\frac{y}{r}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

زاوية الأسناد $\frac{\pi}{4}$ / الربع الأول

السعة $\theta=\frac{\pi}{4}$

سؤال 5 جد المقياس والقيمة الاساسية للسعة للعدد المركب $\frac{4}{1-\sqrt{3}i}$

2008 - د (2)

$$Z=\frac{4}{1-\sqrt{3}i}\cdot\frac{1+\sqrt{3}i}{1+\sqrt{3}i}$$

$$Z=\frac{4(1+\sqrt{3}i)}{(1)^2+(\sqrt{3})^2}=\frac{\cancel{4}(1+\sqrt{3}i)}{\cancel{4}}$$

$$Z=1+\sqrt{3}i\rightarrow(1,\sqrt{3})$$

$$r=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{(1)^2+(\sqrt{3})^2}\Rightarrow r=2$$

$$\cos\theta=\frac{x}{r}=\frac{1}{2} \qquad \sin\theta=\frac{y}{r}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

زاوية الأسناد $\frac{\pi}{3}$ / الربع الأول

$$\theta=\frac{\pi}{3}$$

سؤال 6 جد المقياس والقيمة الاساسية للسعة للعدد المركب $(1+\sqrt{3}i)^2$

إنتبه ! يجب وضع العدد المركب بصيغة a+bi والتخلص من التربيع .

$$Z=1+2\sqrt{3}i-3\Rightarrow Z=-2+2\sqrt{3}i$$

$$Z=(-2,2\sqrt{3})$$

2008 - د (1)

$$r=\sqrt{x^2+y^2}$$

$$r=\sqrt{(-2)^2+(2\sqrt{3})^2}=\sqrt{4+12}$$

$r=4$ ((المقياس))

$$\cos\theta=\frac{x}{r}=\frac{-2}{4}=\frac{-1}{2} \qquad \sin\theta=\frac{y}{r}=\frac{2\sqrt{3}}{4}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

زاوية الأسناد $\frac{\pi}{3}$ / الربع الثاني

$$\theta=\pi-\frac{\pi}{3}\Rightarrow\theta=\frac{2\pi}{3}$$

سؤال 7 إذا كان $Z=1+\sqrt{3}i$ عدداً مركباً أكتب الشكل الديكارتي له ثم جد المقياس والسعة .

2006 - د (2)

$$Z=1+\sqrt{3}i\rightarrow(1,\sqrt{3})$$

$$r=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{(1)^2+(\sqrt{3})^2}\Rightarrow r=2$$

$$\cos\theta=\frac{x}{r}=\frac{1}{2} \qquad \sin\theta=\frac{y}{r}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

زاوية الأسناد $\frac{\pi}{3}$ / الربع الأول

$$\theta=\frac{\pi}{3}$$

سؤال 8 إذا كان عدداً مركباً مقياسه 3 وسعته $\frac{\pi}{3}$ جد الشكل الديكارتي والجبري له.

2003 - د (2)

$r = 3, \quad \theta = \frac{\pi}{3}$

$x = r.\cos\theta$

$x = 3\cos\frac{\pi}{3} = 3\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2}$

$y = r.\sin\theta$

$y = 3\ \sin\frac{\pi}{3} = 3\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{2}$

$Z = \left(\frac{3}{2}\ ,\ \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$ ((الديكارتي)) , $Z = \frac{3}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2}i$ ((الجبري))

سؤال 9 إذا كان عدداً مركباً مقياسه (4) وسعته $\left(\frac{5\pi}{6}\right)$ جد الشكل الديكارتي والجبري له.

2006 - د (1)

$r = 4 \quad , \quad \theta = \frac{5\pi}{6}$

$x = r.\cos\theta$

$x = 4.\cos\frac{5\pi}{6} = 4\left(\frac{-\sqrt{3}}{2}\right) = -2\sqrt{3}$

$y = r.\sin\theta$

$y = 4\sin\frac{5\pi}{6} = 4\left(\frac{1}{2}\right) = 2$

$Z = \left(-2\sqrt{3}, 2\right)$ ((الديكارتي)) , $Z = -2\sqrt{3} + 2i$ ((الجبري))

سؤال 10 أكتب الصيغة القطبية للعدد المركب $3 - 3\sqrt{3}i$

2015 - د (3)

$Z = 3\sqrt{3}i \rightarrow Z = \left(3, -3\sqrt{3}\right)$
(x, y) الربع الرابع

$r = \sqrt{x^2 + y^2}$

$r = \sqrt{(3)^2 + (-3\sqrt{3})^2} = \sqrt{9+27} = \sqrt{36}$

$r = 6$

$\cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

$\sin\theta = \frac{y}{2} = \frac{-3\sqrt{3}}{6} = \frac{-\sqrt{3}}{2}$

زاوية الأسناد هي $\frac{\pi}{3}$

$\theta = 2\pi - \frac{\pi}{3} \Rightarrow \theta = \frac{5\pi}{3}$

$Z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$

$Z = 6\left(\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3}\right)$

سؤال 11 جد الصيغة القطبية للعدد المركب $5 - 5i$

$Z = 5 - 5i \rightarrow (5, -5)$
(x, y) الربع الرابع

$r = \sqrt{x^2 + y^2}$

$r = \sqrt{(5)^2 + (-5)^2} = \sqrt{25+25} = \sqrt{50}$

$r = 5\sqrt{2}$

2014 - د (3)

$$\cos\theta=\frac{x}{r}=\frac{5}{5\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\sin\theta=\frac{y}{r}=\frac{-5}{5\sqrt{2}}=\frac{-1}{\sqrt{2}}$$

زاوية الأسناد $\frac{\pi}{4}$ الربع الرابع

$$\theta=2\pi-\frac{\pi}{4} \Rightarrow \theta=\frac{7\pi}{4}$$

$$Z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$$

$$Z=5\sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4}+i\sin\frac{7\pi}{4}\right)$$

سؤال 12

اكتب العدد $Z=\left(1+\sqrt{3}i\right)^2$ بالصيغة القطبية .

2016 - د (1)
خارج القطر

$$Z=\left(1+\sqrt{3}i\right)^2=1+2\sqrt{3}i-3$$

$$=-2+2\sqrt{3}i \qquad \left(\overset{-}{-2},\overset{+}{2\sqrt{3}}\right)$$
$$(x,y)$$

$$r=\sqrt{x^2+y^2}$$

$$r=\sqrt{(-2)^2+(2\sqrt{3})^2}=\sqrt{4+12}=\sqrt{16}$$

$$r=4$$

$$\cos\theta=\frac{x}{r}=\frac{-2}{4}=\frac{-1}{2}$$

$$\sin\theta=\frac{y}{r}=\frac{2\sqrt{3}}{4}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

زاوية الأسناد $\frac{\pi}{3}$ الربع الثاني

$$\theta=\pi-\frac{\pi}{3} \Rightarrow \theta=\frac{2\pi}{3}$$

$$Z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$$

$$Z=4\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$$

تنويه ! لو قال باستخدام ديموافر لا نفتح التربيع ونحل ديموافر $n=2$

سؤال 13

هل :

$$\frac{(\cos2\theta+i\sin2\theta)^5}{(\cos4\theta+i\sin4\theta)^2}-(\cos\theta+i\sin\theta)^2=0$$

الطرف الأيسر

$$=\frac{\left[(\cos\theta+i\sin\theta)^2\right]^5}{\left[(\cos\theta+i\sin\theta)^4\right]^2}-(\cos\theta+i\sin\theta)^2$$

$$\frac{(\cos\theta+i\sin\theta)^{10}}{(\cos\theta+i\sin\theta)^8}-(\cos\theta+i\sin\theta)^2$$

$$(\cos\theta+i\sin\theta)^2-(\cos\theta+i\sin\theta)^2$$

$$=0$$

2016 - د (2)
خارج القطر

يا سارقَ الأرواحِ يا منْ لا يُرىٰ
يا مقلتيْ يا مُتعتيْ وجنانيْ
أنتَ الذيْ لولاكَ ما ذقتُ الهنا
لا والذيْ بالروحِ قدْ أحيانيْ

سؤال 14 جد الجذور التكعيبية للعدد المركب $(1+i)^2$ على وفق مبرهنة ديموافر .

الربع الأول

$Z=1+i \rightarrow Z=(1,1)$
(x,y)

$r=\sqrt{x^2+y^2}$

$r=\sqrt{(1)^2+(1)^2} \Rightarrow r=\sqrt{2}$

2015 - د (2) خارج القطر

$\cos\theta=\frac{x}{r}=\frac{1}{\sqrt{2}}$

زاوية الأسناد

$\sin\theta=\frac{y}{r}=\frac{1}{\sqrt{2}}$

$\theta=\frac{\pi}{4}$

$Z^n=r^n(\cos\theta+i\sin\theta)^n$

$Z^n=(\sqrt{2})^2\left[\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right]^2$

$Z^2=2\left[\cos\left(\frac{\pi}{4}.2\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}.2\right)\right]$

$Z^2=2\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)$

$(Z^2)^{\frac{1}{3}}=2^{\frac{1}{3}}\left[\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right]^{\frac{1}{3}}$

$Z^{\frac{1}{n}}=r^{\frac{1}{n}}\left[\cos\frac{\theta+2k\pi}{n}+i\sin\frac{\theta+2k\pi}{n}\right]$

$(Z^2)^{\frac{1}{3}}$

الجذور التكعيبية

$\theta=\frac{\pi}{2},\ r=2,\ n=3,\ k=0,1,2$

عندما $k=0$ $\quad \frac{\frac{\pi}{2}+0}{3}=\frac{\pi}{6}$

$Z_1=\sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)$

$\boxed{Z_1=\sqrt[3]{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)}$

عندما $k=1$ $\quad \frac{\frac{\pi}{2}+2\pi}{3}=\frac{\frac{\pi+4\pi}{2}}{3}=\frac{5\pi}{6}$

$Z_2=\sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{5\pi}{6}+i\sin\frac{5\pi}{6}\right)$

$\boxed{Z_2=\sqrt[3]{2}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)}$

عندما $k=2$ $\quad \frac{\frac{\pi}{2}+4\pi}{3}=\frac{\frac{\pi+8\pi}{2}}{3}=\frac{9\pi}{6}=\frac{3\pi}{2}$

$Z_3=\sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{3\pi}{2}+i\sin\frac{3\pi}{2}\right)$

$\boxed{Z_3=\sqrt[3]{2}\,(0-i)}$

ملاحظة: في السؤال (14) لم نفتح التربيع كما في سؤال (6) و (12) وذلك لان سؤال (14) باستخدام ديموافر ولايجوز فتح الأسس في ديموافر .

سؤال 15 باستخدام ديموافر احسب

$$\left(\sqrt{3}+i\right)^{\frac{-3}{2}}.$$

$$\left(\sqrt{3}+i\right)^{\frac{-3}{2}}=\left[\left(\sqrt{3}+i\right)^{-3}\right]^{\frac{1}{2}}$$

المبرهنة , $\left(\sqrt{3}+i\right)^{-3}$

$$z=\sqrt{3}+i \Rightarrow (\sqrt{3},1)$$

$$r=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{3+1}=\sqrt{4}$$

$$r=2$$

$$\left.\begin{array}{l}\cos\theta=\frac{x}{r}=\frac{\sqrt{3}}{2}\\ \sin\theta=\frac{y}{r}=\frac{1}{2}\end{array}\right]$$ زاوية الاسناد $=\frac{\pi}{6}$

$\theta=$ زاوية الاسناد $\Rightarrow \theta=\frac{\pi}{6}$, $n=-3$

$$z^n=r^n\left[\cos\theta+i\sin\theta\right]^n$$

$$z^{-3}=(2)^{-3}\left[\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right]^{-3}$$

$$z^{-3}=\frac{1}{8}\left[\cos\frac{\pi}{2}-i\sin\frac{\pi}{2}\right]$$

نرفع الناتج الى الأس $\frac{1}{2}$ ونحل نتيجة

$$(z^{-3})^{\frac{1}{2}}=\left(\frac{1}{8}\right)^{\frac{1}{2}}\left[\cos\frac{\pi}{2}-i\sin\frac{\pi}{2}\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$r=\frac{1}{8},\ \theta=\frac{\pi}{2},\ n=2,\ k=0,1$$

$$k=0,\ \frac{\theta+2k\pi}{n}=\frac{\frac{\pi}{2}}{2}=\frac{\pi}{4}$$

$$z_1=\left(\frac{1}{8}\right)^{\frac{1}{2}}\left[\cos\frac{\pi}{4}-i\sin\frac{\pi}{4}\right]$$

$$z_1=\frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}i\right)$$

$$z_1=\frac{1}{4}-\frac{1}{4}i$$

$$k=1$$

$$\frac{\theta+2k\pi}{n}=\frac{\frac{\pi}{2}+2\pi}{2}=\frac{5\pi}{4}$$

$$z_2=\frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\cos\frac{5\pi}{4}-i\sin\frac{5\pi}{4}\right)$$

اشارات الربع الثالث

$$z_2=\frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\frac{-1}{\sqrt{2}}-\left(\frac{-1}{\sqrt{2}}\right)\right)=\frac{-1}{4}+\frac{1}{4}i$$

الاشارة الاصلية

2017 - د (1) أحيائي

سؤال 16 إذا كان $Z=(\cos\theta+i\sin\theta)$ أثبت ان $(1+\bar{Z})Z=1+Z$

2018 - د (2)/تطبيقي/خارج

الطرف الأيسر = $(1+\bar{Z})\,Z=\left[1+\overline{(\cos\theta+i\sin\theta)}\right](\cos\theta+i\sin\theta)$

$=\left[1+(\cos\theta-i\sin\theta)\right](\cos\theta+i\sin\theta)$

$=\left[(\cos\theta+i\sin\theta)+(\cos\theta+i\sin\theta)(\cos\theta-i\sin\theta)\right]$

$=(\cos\theta+i\sin\theta)+(\cos^2\theta+\sin^2\theta)$

$=(\cos\theta+i\sin\theta)+1=Z+1$ = الطرف الأيمن

سؤال 17 إذا كان $Z=\cos\theta+i\sin\theta$ أثبت ان $\dfrac{Z^n}{1+Z^{2n}}=\dfrac{1}{2\cos n\theta}$

2019 - د (2)/احيائي

الطرف الأيسر = $\dfrac{Z^n}{1+Z^{2n}}=\dfrac{1}{Z^{-n}(1+Z^{2n})}$

$=\dfrac{1}{Z^{-n}+Z^n}=\dfrac{1}{(\cos\theta+i\sin\theta)^{-n}+(\cos\theta+i\sin\theta)^n}$

$=\dfrac{1}{\cos n\theta\cancel{-i\sin n\theta}+\cos n\theta+\cancel{i\sin n\theta}}$

$=\dfrac{1}{2\cos n\theta}=$ الطرف الأيمن

الجذور التكعيبية للواحد الصحيح (الاوميكا) ω

(بالتكعيب) نفرض $x = \sqrt[3]{1}$

فرق بين مكعبين $x^3 = 1 \Rightarrow x^3 - 1 = 0$

$(x-1)(x^2+x+1) = 0$

الجذر الأول أما $x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$

بالدستور أو $x^2 + x + 1 = 0$

$a = 1 \quad , \quad b = 1 \quad , \quad c = 1$

قانون الدستور $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4(1)(1)}}{2(1)}$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4}}{2}$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2}$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{3}\ i}{2}$$

الجذر الثاني $x = \dfrac{-1 + \sqrt{3}\ i}{2} = \boxed{\dfrac{-1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2} i}$

الجذر الثالث $x = \dfrac{-1 - \sqrt{3}\ i}{2} = \boxed{\dfrac{-1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2} i}$

$$\sqrt[3]{1} = \{1 \ , \ \omega \ , \ \omega^2\}$$

*** خصائص الجذور التكعيبية للواحد الصحيح :**

1) الجذر الاول حقيقي والجذران الاخران تخيليان .

2) الجذران التخيليان مترافقان اي ان مرافق ω هو ω^2 مرافق ω^2 هو ω

3) حاصل ضرب الجذور الثلاثة يساوي واحد .

$(1)(\omega)(\omega^2) = \omega^3$

مهم $\boxed{\omega^3 = 1}$

4) حاصل جمع الجذور تساوي صفر

$\boxed{\omega^2 + \omega + 1 = 0}$

العلاقات الفرعية وتبسيط قوى ω

العلاقة الرئيسية $\boxed{\omega^2+\omega+1=0}$

علاقات فرعية	علاقات فرعية	علاقات فرعية
$\omega^2=-\omega-1$	$\omega=-\omega^2-1$	$1=-\omega^2-\omega$
$\omega^2+\omega=-1$	$\omega^2+1=-\omega$	$\omega+1=-\omega^2$

* كل ركنين موجودات في السؤال بنفس الاشارة فناتجهما الركن الثالث بعكس الاشارة .

مثلاً

$$\omega^2+\omega=-1$$

$$\omega+1=-\omega^2$$

$$-1-\omega^2=\omega$$

$$-\omega^2-\omega=1$$

* كل ركنين في السؤال اشارتهما مختلفة فهنا لا توجد علاقة فرعية تربطهم

مثلاً

$\boxed{\omega-1}$ لا توجد علاقة فرعية

$\boxed{+\omega^2-\omega}$ لان الاشارات مختلفة .

ملاحظات عامة

اولاً: العامل المشترك: يؤدي الى علاقة فرعية.

مثلاً

(1) $3\omega + 3\omega^2$

$= 3(\omega + \omega^2)$

$= 3(-1) = 3$

(2) $5 + 5\omega^2$

$= 5(1 + \omega^2)$

$= 5(-\omega) = -5\omega$

ثانياً: استخدام العلاقات الفرعية:

مثلاً

(1) $\omega^2 + 5 + \omega$

$= \underbrace{\omega^2 + \omega}_{\text{فرعية}=-1} + 5$

$= -1 + 5 = 4$

(2) $5 + 3\omega + 3\omega^2$ (عامل مشترك ثم علاقة فرعية)

$= 5 + 3(\omega + \omega^2)$

$= 5 + 3(-1) = 2$

ثالثاً: وجود ω أو ω^2 وحدها في المقام بدون شيء آخر نضرب الكسر بـ ω^3

مثلاً

(1) $\dfrac{2}{\omega}(\omega^3) = 2\omega^2$

(2) $\dfrac{5}{\omega^2}(\omega^3) = 5\omega$

(3) $\dfrac{-7}{\omega}(\omega^3) = -7\omega^2$

(4) $\dfrac{\sqrt{2}}{3\omega^2}(\omega^3) = \dfrac{\sqrt{2}}{3}\omega$

(5) $\dfrac{2}{2+\omega} \Rightarrow \omega^3$ لا يمكن الضرب لعدم الاستفادة من ذلك

إنتبه !

عند وجود رقم معامل جنب ω ، ω^2 فهنا لا يؤثر لانه ثابت أما إذا كان بينهم + ، - فهنا يؤثر

أنظر

رقم $\pm \omega$

رقم $\pm \omega^2$

لا نضرب الكسر بـ ω

أنظر

تبسيط قوى ω

تذكّر

$$\omega^3 = 1$$

$$\omega^n = (\omega^3)^{\text{ناتج القسمة}} \cdot (\omega)^{\text{باقي القسمة}}$$

(ω^3) دائماً تساوي واحد

* كل ω مرفوعة الى أس من مضاعفات العدد 3 فناتجها يساوي واحد .
* إذا كانت الاس سالب نضرب المقدار في اوميكا مرفوعة الى اس موجب من مضاعفات العدد 3 وأكبر من الأس الوارد في السؤال .

سؤال 1 اكتب المقادير الاتية بابسط صورة :

1. $\omega^{11} = \left(\omega^3\right)^3 \cdot \omega^2 = \omega^2$
2. $\omega^{17} = \left(\omega^3\right)^5 \cdot \omega^2 = \omega^2$
3. $\omega^{18} = \left(\omega^3\right)^6 \cdot \omega^0 = 1$
4. $\omega^{100} = \left(\omega^3\right)^{33} \cdot \omega^1 = \omega$
5. $\omega^{64} = (\omega^3)^{21} . \omega^1 = \omega$
6. $\omega^{-11} = \omega^{-11} . \omega^{12} = \omega$
7. $\omega^{-13} = \omega^{-13} . \omega^{15} = \omega^2$
8. $\omega^{-35} = \omega^{-35} . \omega^{36} = \omega$
9. $\omega^{-325} = \omega^{-325} . \omega^{327} = \omega^2$
10. $\omega^{-30} = \omega^{-30} . \omega^{33} = \omega^3 = 1$

سؤال 2 اكتب المقادير الاتية بابسط صورة :

1. $\omega^{9n+5} = \omega^{9n} . \omega^5$

$$= (\omega^3)^{3n} . (\omega^3)^1 . \omega^2$$

$$= (1)^{3n}(1)(\omega^2) = \omega^2$$

2. $(1+\omega^2)^{-4} = (-\omega)^{-4} = \omega^{-4} . \omega^6 = \omega^2$

3. $\dfrac{1}{(1+\omega^{-32})^{12}} = \dfrac{1}{(1+\omega^{-32} . \omega^{33})^{12}}$

$$= \frac{1}{(1+\omega)^{12}} = \frac{1}{(-\omega^2)^{12}}$$

$$= \frac{1}{\omega^{24}} = \omega^{-24} . \omega^{27} = \omega^3 = 1$$

سؤال 1 أثبت ان : $\dfrac{\omega^{14}+\omega^{7}-1}{\omega^{10}+\omega^{5}-2}=\dfrac{2}{3}$

2019 - د (3)

الطرف الايسر $=\dfrac{(\omega^{3})^{4}.\omega^{2}+(\omega^{3})^{2}.\omega-1}{(\omega^{3})^{3}.\omega+(\omega^{3})^{1}.\omega^{2}-2}$

$=\dfrac{\omega^{2}+\omega-1}{\omega+\omega^{2}-2}=\dfrac{-1-1}{-1-2}=\dfrac{-2}{-3}$

الطرف الايمن $=\dfrac{2}{3}=$

سؤال 2 أثبت ان : $\omega^7 + \omega^5 + 1 = 0$

$$\omega^7 + \omega^5 + 1 = 0$$

$$(\omega^3)^2 . \omega + (\omega^3)^1 \omega^2 + 1 = 0$$

$$\omega + \omega^2 + 1 = 0$$

$$0 = 0$$

الطرف الايمن = الطرف الايسر

سؤال 3 أثبت ان $4 = (5+3\omega+3\omega^2)^2$

الطرف الايسر $= \left[5+3(\underbrace{\omega+\omega^2}_{\text{فرعية}})\right]^2$

$$= \left[5+3(-1)\right]^2 = (5-3)^2$$

$= (2)^2 = 4 =$ الطرف الايمن

سؤال 4 أثبت ان :

$$-4(2+\omega+2\omega^2)^3 = 4$$

الطرف الايسر $= -4(2+\omega+2\omega^2)^3$

ترتيب الحدود $= -4 \ (2+2\omega^2+\omega)^3$

$$= -4 \ \left[2(\underbrace{1+\omega^2}_{\text{فرعية}})+\omega\right]^3$$

$$= -4 \ \left[2(-\omega)+\omega\right]^3$$

$$= -4(-2\omega+1\omega)^3$$

$$= -4(-\omega)^3$$

$= 4\omega^3 = 4(1) = 4$ الطرف الايمن

سؤال 5 أثبت ان :

$$(1+\omega^2)^3 + (1+\omega)^3 = -2$$

الطرف الايسر $= (\underbrace{1+\omega^2}_{\text{فرعية}})^3 + (\underbrace{1+\omega}_{\text{فرعية}})^3$

$$= (-\omega)^3 + (-\omega^2)^3$$

$$= -\omega^3 - \omega^6$$

$$= -\omega^3 - (\omega^3)^2$$

$= -1 - 1 = -2 =$ الطرف الايمن

سؤال 6 أثبت ان : $\left(1-\frac{2}{\omega^2}+\omega^2\right)\left(1+\omega-\frac{5}{\omega}\right)=18$

2014 - د (1)

2017 - د (1) تطبيقي-خارج

الطرف الايسر $=\left(1-\frac{2}{\omega^2}+\omega^2\right)\left(1+\omega-\frac{5}{\omega}\right)$

$=\left[\underbrace{1+\omega^2}_{\text{فرعية}}-\frac{2}{\omega^2}(\omega^3)\right]\left[\underbrace{1+\omega}_{\text{فرعية}}-\frac{5}{\omega}(\omega^3)\right]$

$=(-\omega-2\omega)(-\omega^2-5\omega^2)$

$=(-3\omega)(-6\omega^2)=18\omega^3$

$=18(1)=18=$ الطرف الايمن

سؤال 7 أثبت ان : $\left(\frac{1}{2+\omega}-\frac{1}{2+\omega^2}\right)^2=\frac{-1}{3}$

الطرف الايسر $=\left(\frac{1}{2+\omega}-\frac{1}{2+\omega^2}\right)^2$ توحيد مقامات

ضرب

2011 - د (1)

2022 - د (1) تطبيقي

$=\left[\frac{(2+\omega^2)-(2+\omega)}{(2+\omega).(2+\omega^2)}\right]$

$=\left(\frac{\cancel{2}+\omega^2-\cancel{2}-\omega}{4+2\omega^2+2\omega+\underset{(1)}{\omega^3}}\right)^2=\left[\frac{\omega^2-\omega}{5+2\underbrace{(\omega^2+\omega)}_{\text{فرعية }(-1)}}\right]^2$

$\boxed{\omega^3.\,\omega=\omega}$

$=\left(\frac{\omega^2-\omega}{5+2(-1)}\right)^2=\frac{(\omega^2-\omega)^2}{(3)^2}=\frac{\omega^4-2\omega^3+\omega^2}{9}$

$=\frac{\omega+\omega^2-2}{9}=\frac{-3}{9}=\frac{-1}{3}=$ الطرف الايمن

تكوين المعادلة التربيعية في موضوع الاوميكا

$x^2 -$ (مجموع الجذرين) $x +$ (حاصل ضرب الجذرين) $= 0$

سؤال 1 كوّن المعادلة التربيعية التي جذراها: $1+\omega$ ، $1+\omega^2$

مجموع الجذرين $= \underbrace{(1+\omega^2)}_{\text{فرعية}} + \underbrace{(1+\omega)}_{\text{فرعية}}$

$= -\omega - \omega^2$ فرعية

$= \boxed{1}$

حاصل ضرب الجذرين $= (1+\omega^2)(1+\omega)$

$= 1 + \underbrace{\omega + \omega^2}_{\text{فرعية}} + \omega^3$

$= \cancel{1} + (-\cancel{1}) + 1 = \boxed{1}$

$x^2 -$ (مجموع الجذرين) $x +$ (حاصل ضرب الجذرين) $= 0$

$$\boxed{x^2 - 1x + 1 = 0}$$

2007 - د (2) | 2016 - نازحين | 2017 - تمهيدي

سؤال 2 كوّن المعادلة التربيعية التي جذراها: $1 - i\,\omega$ ، $1 - i\,\omega^2$

مجموع الجذرين $= (1 - i\,\omega^2) + (1 - i\,\omega)$

$= 2 - i\,\omega^2 - i\,\omega$

عامل مشترك $(-i)$

$= 2 - i\,\underbrace{(\omega^2 + \omega)}_{\text{فرعية}}$

$= 2 - i\,(-1) = 2 + i$

حاصل ضرب الجذرين $= (1 - i\omega^2)(1 - i\omega)$

$= 1 - i\,\omega - i\,\omega^2 + \overset{(-1)}{i^2}\,\omega^3$

عامل مشترك

$= \cancel{1} - i(\omega + \omega^2) \cancel{-1}$

$= -i(-1) = i$

$x^2 -$ (مجموع الجذرين) $x +$ (حاصل ضرب الجذرين) $= 0$

$\Rightarrow \boxed{x^2 - (2+i)\,x + i = 0}$

سؤال 3 كوّن المعادلة التربيعية التي جذراها: $\frac{-3\omega^2}{i}$, $\frac{3i}{\omega^2}$

$$m=\frac{3i}{\omega^2}(\omega^3) \Rightarrow \boxed{m=3i\omega}$$

$$L=\frac{-3\omega^2}{i}(i^4)=-3\omega^2(i^3)$$

$$L=-3\omega^2(-i) \Rightarrow \boxed{L=3i\omega^2}$$

مجموع الجذرين $=\overset{\text{عامل مشترك}}{3i\omega+3i\omega^2}$

$=3i(\underbrace{\omega+\omega^2}_{\text{فرعية}})$

$=3i(-1)=\boxed{-3i}$

حاصل ضرب الجذرين $=(3i\omega)(3i\omega^2)$

$=9i^2\omega^3$

$=9(-1)(1)=\boxed{-9}$

$x^2-($ مجموع الجذرين $)x+($ حاصل ضرب الجذرين $)=0$

$$\boxed{x^2-(-3i)x+(-9)=0}$$

2011 - د (1)   2013 - د (2)

سؤال 4 كوّن المعادلة التربيعية التي جذراها: $\frac{\omega^2}{2-\omega}$, $\frac{\omega}{2-\omega^2}$

مجموع الجذرين $=\frac{\omega}{2-\omega^2}+\frac{\omega^2}{2-\omega}$ توحيد مقامات

$$=\frac{\omega(2-\omega)+\omega^2(2-\omega^2)}{(2-\omega^2)(2-\omega)}$$

$$=\frac{2\omega-\omega^2+2\omega^2-\omega^4}{4-2\omega-2\omega^2+\omega^3}$$

$\boxed{\omega^3.\omega=\omega}$ ، (1)

$$=\frac{2\omega-\omega^2+2\omega^2-\omega}{4-2\omega-2\omega^2+1}$$

$$=\frac{\omega+\omega^2}{5-2\omega-2\omega^2}$$

$$=\frac{-1}{5-2(\omega+\omega^2)}$$

$$=\frac{-1}{5-2(-1)}=\frac{-1}{5+2}=\boxed{\frac{-1}{7}}$$

حاصل ضرب الجذرين $=\frac{\omega}{2-\omega^2}\cdot\frac{\omega^2}{2-\omega}=\frac{\omega.\omega^2}{(2-\omega^2)(2-\omega)}$

$$=\frac{\omega^3}{4-2\omega-2\omega^2+\omega^3}=\boxed{\frac{1}{7}}$$

نفس المقام السابق

$x^2-($ مجموع الجذرين $)x+($ حاصل ضرب الجذرين $)=0$

$$\boxed{x^2-\left(\frac{-1}{7}\right)x+\left(\frac{1}{7}\right)=0}$$

سؤال 5 كوّن المعادلة التربيعية التي جذراها: $\frac{2}{1-\omega^2}$ ، $\frac{2}{1-\omega}$

$$m+L=\frac{2}{1-\omega}+\frac{2}{1-\omega^2}$$

$$=\frac{2(1-\omega^2)+2(1-\omega)}{(1-\omega)(1-\omega^2)}$$

$$=\frac{4-2\omega^2-2\omega}{2-\omega^2-\omega}=\frac{4-2(\omega+\omega^2)}{2+1}$$

$$=\frac{4-2(-1)}{3}=\frac{4+2}{3}=2$$

$$mL=\frac{2}{1-\omega}\cdot\frac{2}{1-\omega^2}$$

$$=\frac{4}{(1-\omega)(1-\omega^2)}=\frac{4}{1-\omega-^2+\omega^3}$$

$$=\frac{4}{3}$$

$$\boxed{x^2-2x+\frac{4}{3}=0}$$

سؤال من نمط آخر

سؤال 6 إذا كان $Z^2+Z+1=0$ جد قيمة $\dfrac{1+3\,Z^{10}+3\,Z^{11}}{1-3\,Z^{7}-3\,Z^{8}}$

2018 - تمهيدي

$$Z^2+Z+1=0$$

$$a=1\,.\,b=1\;,\;c=1$$

قانون الدستور

$$Z=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$Z=\frac{-1\pm\sqrt{(1)^2-4\,(1)\,(1)}}{2(1)}$$

$$=\frac{-1\pm\sqrt{-4}}{2}$$

$$Z=\frac{-1\pm\sqrt{-3}}{2}=\frac{-1\pm\sqrt{3}\;i}{2}$$

أما $Z=\dfrac{-1+\sqrt{3}\;i}{2}=\boxed{\dfrac{-1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\;i}=\omega$

أو $Z=\dfrac{-1-\sqrt{3}\;i}{2}=\boxed{\dfrac{-1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\;i}=\omega^2$

بوضع $Z=\omega$

$$\frac{1+3\,Z^{10}+3\,Z^{11}}{1-3\,Z^{7}-3\,Z^{8}}$$

$$\frac{1+3\,\omega^{10}+3\,\omega^{11}}{1-3\,\omega^{7}-3\,\omega^{8}}$$

$$=\frac{1+3\,(\omega^3)^3\,.\,\omega+3\,(\omega^3)^3\,.\,\omega^2}{1-3\,(\omega^3)^2\,.\,\omega-3\,(\omega^3)^3\,.\,\omega^2}$$

$$=\frac{1+3\,\omega+3\,\omega^2}{1-3\,\omega-3\,\omega^2}$$

$$\frac{1+3\,(\omega+\omega^2)}{1-3\,(\omega+\omega^2)}=\frac{1-3}{1+3}$$

$$=\frac{-2}{4}=\frac{-1}{2}$$

بوضع $Z=\omega^2$

$$=\frac{1+3\,(\omega^2)^{10}+3\,(\omega^2)^{11}}{1-3\,(\omega^2)^{7}-3\,(\omega^2)^{8}}$$

$$=\frac{1+3\,\omega^{20}+3\,\omega^{22}}{1-3\,\omega^{14}-3\,\omega^{16}}$$

$$=\frac{1+3\,(\omega^3)^6.\,\omega^2+3\,(\omega^3)^7.\omega}{1-3\,(\omega^3)^4.\,\omega^2-3\,(\omega^3)^5.\omega}$$

$$=\frac{1+3\,\omega^2+3\,\omega}{1-3\,\omega^2-3\,\omega}$$

$$=\frac{1+3\,(\omega^2+\omega)}{1-3\,(\omega^2+\omega)}$$

$$=\frac{1-3}{1+3}=\frac{-2}{4}=\frac{-1}{2}$$

الأسئلة الوزارية حول موضوع ω

سؤال 1

أثبت ان

$$\left(5-\frac{5}{\omega^2+1}+\frac{3}{\omega^2}\right)^6 = 64$$

$$\text{الطرف الايسر} = \left(5-\frac{5}{\underbrace{\omega^2+1}_{\text{فرعية}}}+\frac{3}{\omega^2}\right)$$

$$=\left(5-\frac{5}{-\omega}+\frac{3}{\omega^2}\right)^6$$

$$=\left[5+\frac{5}{\omega}(\omega^3)+\frac{3}{\omega^2}(\omega^3)\right]^6$$

$$=(5+5\,\omega^2+3\,\omega)^6$$

$$=\left[5\left(\underbrace{1+\omega^2}_{\text{فرعية}}\right)+3\omega\right]^6$$

$$=\left(5(-\omega)+3\omega\right)^3$$

$$=(-5\omega+3\omega)^6$$

$$=(-2\omega)^6$$

$$=64\omega^6=64(1)=64=\text{الطرف الايمن}$$

2016 - د (1)

سؤال 2

أثبت ان

$$\left(\frac{7+5\omega^2}{7\omega+5}-\frac{3-2\omega}{3\omega^2-2}\right)^4=9$$

$$=\left(\frac{7\omega^3+5\omega^2}{7\omega+5}-\frac{3\omega^3-2\omega}{3\omega^2-2}\right)^4$$

$$=\left[\frac{\omega^2\cancel{(7\omega+5)}}{\cancel{(7\omega+5)}}-\frac{\omega\cancel{(3\omega^2-2)}}{\cancel{(3\omega^2-2)}}\right]^4$$

$$=(\omega^2-\omega)^4=\left[(\omega^2-\omega)^2\right]^2$$

$$=\left(\omega^4-2\omega^3+\omega^2\right)^2=\left(\omega-2+\omega^2\right)^2$$

$$=\left(\omega+\omega^2-2\right)^2$$

$$=\left(-1-2\right)^2=\left(-3\right)^2$$

$$=9=\text{الطرف الايمن}$$

2018 - د (1) خارج

سؤال 3

جد قيمة

$$(-1+3\omega-\omega^2)(2+3\omega^2+2\omega)$$

$$=(-1-\omega^2+3\omega)\ (2+2\omega+3\omega^2)$$

$$=(\omega+3\omega)\left(2\ (1+\omega)+3\omega^2\right)$$

$$=(\omega+3\omega)\ (-2\omega^2+3\omega^2)$$

$$=(4\ \omega)\ (\omega^2)$$

$$=4\omega^3$$

2002 - د (2)

$$=4$$

سؤال 4

جد قيمة المقدار

$$\frac{1}{3+5\omega+4\omega^2}+\frac{1}{3+4\omega+5\omega^2}$$

$$=\frac{1}{3+5\omega+4\ (-1-\omega)}+\frac{1}{3+4\omega+5\ (-1-\omega)}$$

$$=\frac{1}{3+5\omega-4-4\omega}+\frac{1}{3+4\omega-5-5\omega}$$

$$=\frac{1}{-1+\omega}+\frac{1}{-2-\omega}$$ توحيد مقام

$$=\frac{-2-\cancel{\omega}-1+\cancel{\omega}}{(-1+\omega)(-2-\omega)}=\frac{-3}{2+\omega-2\omega-\omega^2}$$

$$=\frac{-3}{2-\omega-\omega^2}=\frac{-3}{2+1}=\frac{-3}{3}=-1$$

سؤال 5

جد قيم $x,y\in R$

$$(x+yi)(2+i)=\frac{1}{(1+\omega)^2}+\frac{1}{(1+\omega^2)^2}$$

$$2x+xi+2yi-y=\frac{1}{(-\omega^2)^2}+\frac{1}{(-\omega\ )^2}$$

$$2x+xi+2yi-y=\frac{1}{\omega^4}+\frac{1}{\omega^2}$$

$$2x+xi+2yi-y=\frac{1}{\omega}.\omega^3+\frac{1}{\omega^2}.\omega^3$$

$$2x+xi+2yi-y=\omega^2+\omega$$

$$2x+xi+2yi-y=-1+0i$$

$$2x-y=-1\ ....\ (1)\quad]*2$$

$$x+2y=0\ ....\ (2)$$

$$4x-2y=-2\ ....\ (1)$$

$$x+2y=0\ ....\ (2)$$

$$5x=-2\ \Rightarrow \boxed{x=-\frac{2}{5}}$$

$$x+2y=0\ ....\ (2)$$

$$\frac{-2}{5}+2y=0$$

2018 - د (2)

$$\left[2y=\frac{2}{5}\right]\div 2\ \Rightarrow \boxed{y=\frac{1}{5}}$$

سؤال 6 جد الجذر التربيعي للعدد المركب $4\omega^6 + 4i^7 + \omega^2 + \omega$

تبسيط قوى ω وقوى i

$\omega^6 = \left(\omega^3\right)^2 . \omega^0 = 1$

$i^7 = \left(i^4\right)^1 . i^3 = -i$

تعويض نواتج التبسيط

$4\omega^6 + 4i^7 + \omega^2 + \omega$

$= 4(1) + 4(-i) + (-1)$

$= 4 - 4i - 1 = 3 - 4i$

$\sqrt{3-4i} = x + yi$

$3 - 4i = x^2 - y^2 + 2xyi$

$x^2 - y^2 = 3 \ldots (1)$

$\left[2xy = -4\right] \div 2x$

$y = \dfrac{-2}{x} \ldots (2)$

$x^2 - \left(\frac{-2}{x}\right)^2 = 3$

$\left[x^2 - \frac{4}{x^2} = 3\right] . x^2$

$x^2 - 4 = 3x^2$

$x^4 - 4 = 3x^2$

$x^4 - 3x^2 - 4 = 0$

$(x^2 - 4)(x^2 + 1) = 0$

$x^4 - 3x^2 - 4 = 0$

$(x^2 - 4)(x^2 + 1) = 0$

$x^2 + 1 = 0 \notin R$

$x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x = \mp 2$

$y = \dfrac{-2}{x} = \dfrac{-2}{\pm 2} = \mp 1$

$C = \mp (2 - i)$

$C_1 = 2 - i \,,\, C_2 = -2 + i$

2022 - د (1) تطبيقي

سؤال 7 جد المقياس والقيمة الأساسية للسعة للعدد $Z=\dfrac{4+2i\,\omega+2i\,\omega^2}{3-i\,\omega^2-i\,\omega}$

$$Z=\frac{4+2i\,\omega+2i\,\omega^2}{3-i\,\omega^2-i\,\omega}$$

$$Z=\frac{4+2i\,(\omega+\omega^2)\rightarrow}{3-i\,\omega^2+\omega\ \rightarrow}$$ فرعية فرعية

$$Z=\frac{4+2i(-1)}{3-i(-1)}=\frac{4-2i}{3+i}$$

$$Z=\frac{4-2i}{3+i}\cdot\frac{3-i}{3-i}$$

$$Z=\frac{12-4i-6i+2i^2}{9+1}\quad 2i^2\rightarrow(-2)$$

$$Z=\frac{10-10i}{10}=\frac{10}{10}-\frac{10}{10}i$$

$$Z=1-i\Rightarrow Z=(1,-1)$$ الربع الرابع

$$\|Z\|=r=\sqrt{x^2+y^2}$$

2016 - تمهيدي   2021 - د (2) تطبيقي

$$=\sqrt{(1)^2+(-1)^2}=\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow\boxed{r=\sqrt{2}}$$ المقياس

$$\cos\theta=\frac{x}{r}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\sin\theta=\frac{y}{r}=\frac{-1}{\sqrt{2}}$$

زاوية الاسناد $\dfrac{\pi}{4}$

$\theta=2\pi-$ زاوية الاسناد

$$\theta=2\pi-\frac{\pi}{4}$$

$$\boxed{\theta=\frac{7\pi}{4}}$$ القيمة الاساسية لسعة العدد المركب Z

سؤال 8 باستخدام مبرهنة ديموافر

جد الجذور التربيعية للعدد

$$Z=\frac{1+\omega\, i+\omega^2\, i}{1-\omega\, i-\omega^2\, i}$$

$$Z=\frac{1+i\,(\omega+\omega^2)}{1-i\,(\omega+\omega^2)}\;\begin{matrix}\rightarrow \text{فرعية}\\ \rightarrow \text{فرعية}\end{matrix}$$

$$=\frac{1+i\,(-1)}{1-i\,(-1)}=\frac{1-i}{1+i}$$

$$Z=\frac{1-i}{1+i}\cdot\frac{1-i}{1-i}$$

2016 - د (2)

$$Z=\frac{\cancel{1}-i-i-\cancel{1}}{(1)^2+(1)^2}=\frac{-2i}{2}=-i$$

$$Z=0-i\Rightarrow Z=(0\,,\,-1)$$

$$r=\sqrt{x^2+y^2}$$

$$r=\sqrt{(0)^2+(-1)^2}=\sqrt{1}\Rightarrow \boxed{r=1}$$

$$\left.\begin{array}{l}\cos\theta=\dfrac{x}{r}=\dfrac{0}{1}=0\\[2ex] \sin\theta=\dfrac{y}{r}=\dfrac{-1}{1}=-1\end{array}\right]$$

زاوية الاسناد $\frac{3\pi}{2}$

* زاوية الاسناد $\frac{3\pi}{2}$ لا تنتمي لأي ربع فتبقى نفسها θ

$$\boxed{\theta=\frac{3\pi}{2}}$$

الاركان الاربعة:

$$r=1\,,\ \theta=\frac{3\pi}{2}\ ,\ n=2\ .\ k=0\,,\,1$$

$$Z^{\frac{1}{n}}=r^{\frac{1}{n}}\left[\cos\frac{\theta+2k\pi}{n}+i\sin\frac{\theta+2k\pi}{n}\right]$$

عندما $K=0$

$$\frac{\theta+2k\pi}{n}=\frac{\frac{3\pi}{2}}{2}=\frac{3\pi}{4}$$

$$Z_1=(1)^{\frac{1}{2}}\left[\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right]$$

$45\times3=135$
في الربع الثاني

$$Z_1=1\left(-\frac{1}{\sqrt2}+\frac{1}{\sqrt2}i\right)$$

$$\boxed{Z_1=-\frac{1}{\sqrt2}+\frac{1}{\sqrt2}\,i}$$

عندما $K=1$

$$\frac{\theta+2k\pi}{2}=\frac{\frac{3\pi}{2}+2\pi}{2}$$

$$=\frac{7\pi}{4}$$

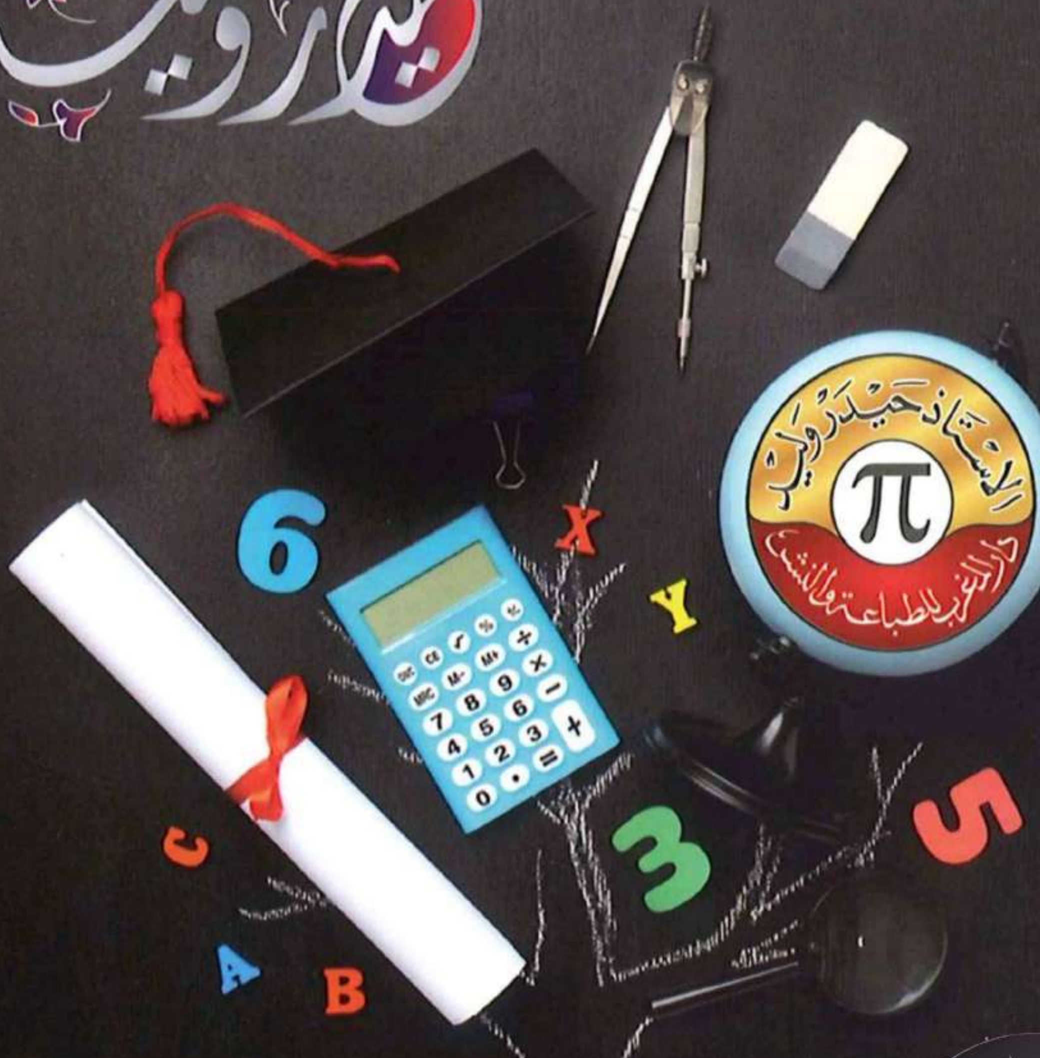
$7\times45=315$
الربع الرابع

$$Z_2=(1)^{\frac{1}{2}}\left[\cos\frac{7\pi}{4}+i\sin\frac{7\pi}{4}\right]$$

$$Z_2=\left(+\frac{1}{\sqrt2}-\frac{1}{\sqrt2}\,i\right)$$

الأستاذ

حيدر وليد



2

الفصل الثاني

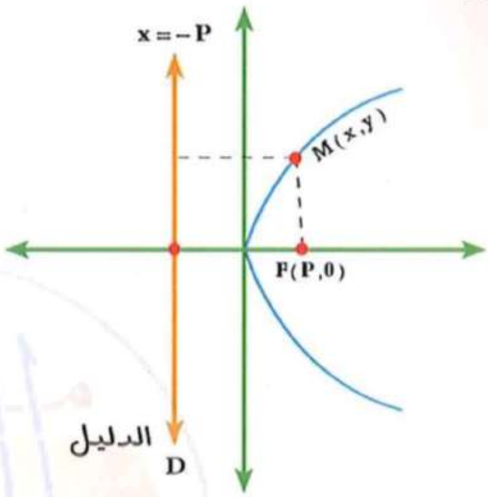
القطوع المخروطية

ملازم دار المغرب
ملازم دار المغرب
Mob: 6561

077 100 55555

القطع المكافئ

هو مجموعة النقاط في المستوي والتي يكون بعد كل منها عن نقطة ثابتة $F(P,0)$ تسمى البؤرة حيث $(P > 0)$ مساوياً دائماً لبعدها عن مستقيم معلوم (D) يسمى الدليل لا يحوي البؤرة .



البعد بين بؤرة ودليل القطع المكافئ $= 2P$

اشارة الدليل عكس اشارة البؤرة

للقطع المكافئ أربع حالات :

	البؤرة	معادلة الدليل	معادلة القطع القياسية
أولاً : فتحة القطع نحو اليمين	$F(P,0)$	$x = -P$	$y^2 = 4Px$
ثانياً : فتحة القطع نحو اليسار	$F(-P,0)$	$x = +P$	$y^2 = -4Px$
ثالثاً : فتحة القطع نحو الأعلى	$F(0,P)$	$y = -P$	$x^2 = 4Py$
رابعاً : فتحة القطع نحو الأسفل	$F(0,-P)$	$y = +P$	$x^2 = -4Py$

ملاحظة حول معادلة القطع المكافئ القياسية :

1) تحتوي على متغيرين x،y أحدهما تربيع والاخر اس (1) .
2) القطع على محور المتغير الذي لا يحتوي تربيع .
3) معامل متغير التربيع $= 1$. أنظر إلى معامل x^2 و y^2 في المعادلات كلها $= 1$.

إذا طلب البؤرة والدليل

مثال جد البؤرة ومعادلة الدليل لكل من القطوع المكافئ الآتية :

1 $y^2 = -8x$

$y^2 = -4Px \Rightarrow [4P = 8] \div 4 \Rightarrow P = 2$

معادلة الدليل $x = +2$ البؤرة $F(-2,0)$

2 $x^2 = 4y$

$x^2 = 4Py \Rightarrow [4P = 4] \div 4 \Rightarrow P = 1$

معادلة الدليل $y = -1$, البؤرة $F(0,1)$

3 $2x + 16y^2 = 0$

$[16y^2 = -2x] \div 16$

نحو اليسار $y^2 = \frac{-1}{8}x$

$y^2 = -4Px$

$\left[4P = \frac{1}{8}\right] \div 4 \Rightarrow P = \frac{1}{32}$

معادلة الدليل $x = \frac{1}{32}$, البؤرة $F\left(\frac{-1}{32},0\right)$

4 $\frac{1}{2}y^2 = 8x$

نضرب المعادلة اعلاه في (2) لجعل معامل y^2 يساوي واحد حسب ملاحظات معادلة القطع المكافئ القياسية .

$y^2 = 16x$

يمين $y^2 = 4Px \Rightarrow [4P = 16] \div 4$

$P = 4$

معادلة الدليل $x = -4$, البؤرة $F(4,0)$

5 $\frac{1}{5}x - y^2 = 0$

نحو اليمين $\frac{1}{5}x = y^2 \Rightarrow y^2 = \frac{1}{5}x$

$y^2 = 4Px$

$\left[4P = \frac{1}{5}\right] \div 4$

$P = \frac{1}{20}$

معادلة الدليل $x = \frac{-1}{20}$, البؤرة $F\left(\frac{1}{20},0\right)$

6 $3x^2 - 24y = 0$

$[3x^2 = 24y] \div 3 \Rightarrow x^2 = 8y$

$x^2 = 4Py$

$[4P = 8] \div 4 \Rightarrow P = 2$

معادلة الدليل $y = -2$, البؤرة $F(0,2)$

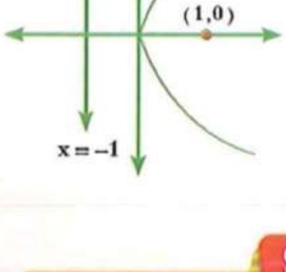
7 $y^2 = 4x$

$y^2 = 4Px \Rightarrow [4P = 4] \div 4 \Rightarrow P = 1$

$F(1,0)$, $x = -1$

إذا طلب الرسم : نأخذ قيم لـ x ونعوضها بالمعادلة ونجد y ثم نرسم .

x	y	(x,y)
0	0	(0,0)
1	± 2	$(1,\pm 2)$
3	$\pm 2\sqrt{3}$	$(3,\pm 2\sqrt{3})$



إيجاد معادلة القطع المكافئ

لايجاد معادلة القطع المكافئ هناك خمس حالات:

أولاً: إذا أعطى بؤرة القطع المكافئ F معناها أعطى P

1. نختار المعادلة المناسبة حسب البؤرة.
2. نعوض P مباشرة ⟵ **إنتبه!** نعوض P موجبة دائماً في المعادلة القياسية.

مثال 1 جد معادلة القطع المكافئ الذي بؤرته (0,5) ورأسه نقطة الاصل.

$F(0,5) \rightarrow$ أعلى $\rightarrow P=5$

$x^2=4Py$

$x^2=4(5)y \Rightarrow x^2=20y$

مثال 4 جد معادلة القطع المكافئ الذي رأسه نقطة الاصل وبؤرته (0,-4).

$(0,-4) \rightarrow$ أسفل $\rightarrow P=4$

$x^2=-4Py$

$x^2=-4(4)y \Rightarrow x^2=-16y$

مثال 2 جد معادلة القطع المكافئ الذي بؤرته (3,0) ورأسه نقطة الاصل.

$F(3,0) \rightarrow$ يمين $\rightarrow P=3$

$y^2=4Px$

$y^2=4(3)x \Rightarrow y^2=12x$

مثال 5 جد معادلة القطع المكافئ الذي بؤرته (5,0) ورأسه نقطة الاصل.

$(5,0) \Rightarrow$ يمين $\Rightarrow P=5$

$y^2=4Px$

$y^2=4(5)x \Rightarrow y^2=20x$

مثال 3 جد معادلة القطع المكافئ الذي رأسه نقطة الاصل وبؤرته $(0,\sqrt{2})$

$F(0,\sqrt{2}) \rightarrow$ أعلى $\rightarrow P=\sqrt{2}$

$x^2=4Py$

$x^2=4(\sqrt{2})y \Rightarrow x^2=4\sqrt{2}y$

مثال 6 جد معادلة القطع المكافئ الذي بؤرته (-4,0) ورأسه نقطة الاصل.

$(-4,0) \rightarrow$ يسار $\rightarrow P=4$ نعوض $(+)$

$y^2=-4Px \Rightarrow y^2=-16x$

ثانياً: إذا أعطى معادلة الدليل معناها أعطى (P) وتذكر ان اشارة الدليل عكس اشارة البؤرة.

مثلاً: إذا اعطى معادلة الدليل $x=+3$ البؤرة سالبة لأن الدليل + ((القطع يسار X))

$y=-5$ البؤرة موجبة لأن الدليل − ((القطع أعلى Y))

$x=-\sqrt{2}$ البؤرة موجبة لأن الدليل − ((القطع يمين X))

مثال 7 جد معادلة القطع المكافئ الذي معادلة دليله $y = 7$ والرأس نقطة الاصل .

$y = 7 \rightarrow P = 7$

البؤرة سالبة لأن الدليل (+) / أسفل (y)

$x^2 = -4Py$

$x^2 = -4(7)y$

$x^2 = -28y$

مثال 8 جد معادلة القطع المكافئ الذي رأسه نقطة الاصل ومعادلة دليله $2x - 6 = 0$.

$2x - 6 = 0$

$[2x = 6] \div 2 \Rightarrow x = 3$

البؤرة سالبة لأن الدليل موجب $P = 3$

$y^2 = -4Px \Rightarrow y^2 = -4(3)x$

$y^2 = -12x$

مثال 9 جد معادلة القطع المكافئ الذي معادلة دليله $4y + 3 = 0$ ورأسه نقطة الاصل .

$4y + 3 = 0$

$[4y = -3] \div 4 \Rightarrow y = \frac{-3}{4}$

البؤرة موجبة لأن الدليل سالب

$P = \frac{3}{4}$

$x^2 = 4Py \Rightarrow x^2 = 4\left(\frac{3}{4}\right)y$

$x^2 = 3y$

إنتبه ! لاتنسى ان تعويض P يكون موجب دائماً في المعادلة القياسية

ثالثاً : إذا أعطى في السؤال نقطتين وقال ان القطع يمر بالنقطتين فإن خطوات الحل هي :

1. نعين النقاط في الارباع لتحديد فتحة القطع .
2. نختار المعادلة المناسبة حسب فتحة القطع .
3. نعوض واحدة من النقاط بـ x , y ونجد P ونعوض (P) بالمعادلة القياسية .

مثال 10 جد معادلة القطع المكافئ الذي يمر بالنقطتين $(2,-4)$ ، $(2,4)$ والرأس نقطة الاصل .

$(2,4) \rightarrow$ ربع أول

$(2,-4) \rightarrow$ ربع رابع

تعيين النقاط في الارباع وتحديد القطع

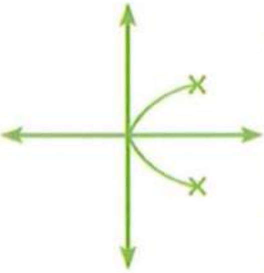
$y^2 = 4Px \rightarrow$ اختيار المعادلة المناسبة حسب فتحة القطع

$(4)^2 = 4P(2)$ تعويض واحدة من النقاط

$[16 = 8P] \div 8 \Rightarrow P = 2$ تعويض P في المعادلة القياسية

$y^2 = 8x$

مثال 11 جد معادلة القطع المكافئ الذي يمر بالنقطتين $(2,5)$ ، $(2,-5)$ والرأس نقطة الاصل .



$(2,5) \rightarrow$ ربع أول

$(2,-5) \rightarrow$ ربع رابع

القطع نحو اليمين .

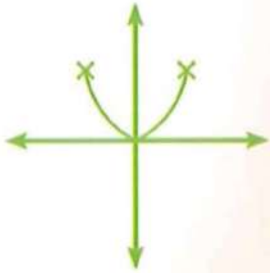
$y^2 = 4Px \qquad (2,5)$

$(5)^2 = 4(P)(2)$

$[25 = 8P] \div 8 \Rightarrow P = \frac{25}{8}$

$y^2 = 4\left(\frac{25}{8}\right)x \Rightarrow y^2 = \frac{25}{2}x$

مثال 12 جد معادلة القطع المكافئ الذي يمر من $(-1,2)$ $(\sqrt{3},6)$ ولأسه نقطة الاصل ... اضافي .



$(\sqrt{3},6)$ ربع أول

$(-1,2)$ ربع ثاني

القطع نحو الأعلى .

نختار أي نقطة $\overset{x}{\sqrt{3}},\overset{y}{6}$

$x^2 = 4Py \qquad (\sqrt{3},6)$

$(\sqrt{3})^2 = 4P(6)$

$[3 = 24P] \div 24 \Rightarrow P = \frac{3}{24} = \frac{1}{8}$

$x^2 = 4\left(\frac{1}{8}\right)y \Rightarrow x^2 = \frac{1}{2}y$

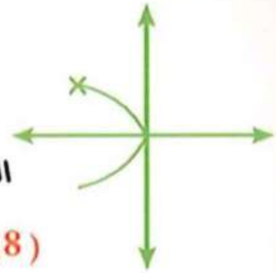
إستراحة شعرية:

رَماكَ الحاسدونَ بكُلِ عَيبٍ
وعيبكُ أنَ حسنكَ لا يُعابُ

رابعاً: إذا أعطى نقطة واحدة فقط (x,y) وقال ان القطع يمر من النقطة (x,y) هناك حالتان :

الأولى ان يحدد موقع البؤرة (على محور السينات أو الصادات) وهنا يوجد معادلة واحدة للقطع ⟵ تابع المثال .

مثال 13 جد معادلة القطع المكافئ الذي يمر من النقطة $(-1,8)$ وبؤرته على محور السينات ورأسه نقطة الأصل . . . اضافي .



$(-1,8) \rightarrow$ ربع ثاني

البؤرة سينات ⟵ يسار

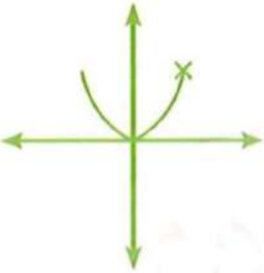
$y^2 = -4Px \qquad (-1,8)$

$8^2 = -4P(-1)$

$64 = 4P \Rightarrow P = \frac{64}{4} \Rightarrow P = 16$

$y^2 = -4(16)x \Rightarrow y^2 = -64x$

مثال 14 جد معادلة القطع المكافئ الذي رأسه نقطة الأصل ويمر من النقطة $(\sqrt{2},1)$ وبؤرته على محور الصادات . . . اضافي .



$(\sqrt{2},1) \rightarrow$ ربع أول

البؤرة صادات ⟵ أعلى

$x^2 = 4Py \qquad (\sqrt{2},1)$

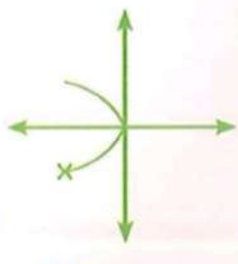
$(\sqrt{2})^2 = 4P(1)$

$[2 = 4P] \div 4 \Rightarrow P = \frac{1}{2}$

$x^2 = 4\left(\frac{1}{2}\right)y \Rightarrow x^2 = 2y$

الثانية لا يحدد موقع البؤرة لذلك هناك احتمالين
- بؤرة سينات
- بؤرة صادات

مثال 15 جد معادلة القطع المكافئ الذي يمر من النقطة $(-4,-2)$ ورأسه نقطة الأصل .



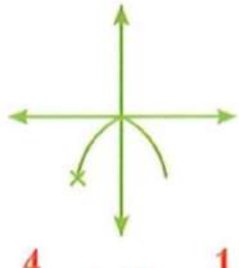
بؤرة سينات/يسار

$y^2 = -4Px$

$(-4)^2 = -4P(-2)$

$[16 = 8P] \div 8 \Rightarrow P = \frac{16}{8} \Rightarrow P = 2$

$y^2 = -8x$



بؤرة صادات/ اسفل

$x^2 = -4Py$

$(-2)^2 = -4P(-4)$

$[4 = 16P] \div 16 \Rightarrow P = \frac{4}{16} \Rightarrow P = \frac{1}{4}$

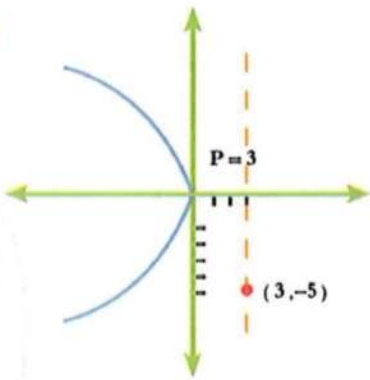
$x^2 = -\cancel{4}\left(\frac{1}{\cancel{4}}\right)y \Rightarrow x^2 = -y$

خامساً : إذا أعطى في السؤال نقطة (x, y) وقال ان دليل القطع يمر من هذه النقطة .

إنتبه ! لا نعوض هذه النقطة أبداً في معادلة القطع المكافئ القياسية لأن القطع لا يمر بها ولا تحقق معادلة القطع .

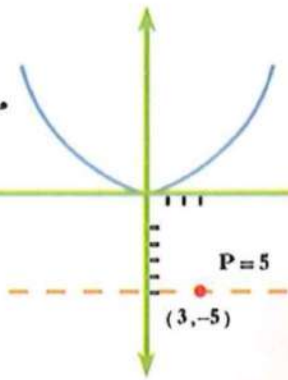
مثال 16 جد معادلة القطع المكافئ الذي رأسه نقطة الأصل ويمر دليل القطع بالنقطة $(3,-5)$.

الأحتمال الأول:



$$y^2 = -4Px$$
$$y^2 = -4(3)x$$
$$\boxed{y^2 = -12x}$$

الأحتمال الثاني:

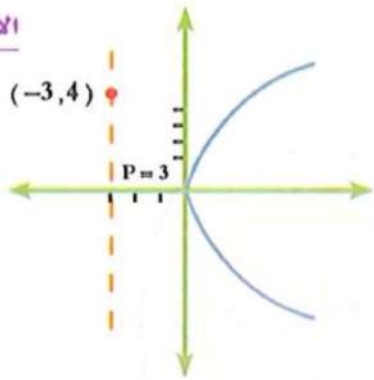


$(P = 5)$ موجبة لاتنسى

$$x^2 = 4Py$$
$$x^2 = 4(5)y$$
$$\boxed{x^2 = 20y}$$

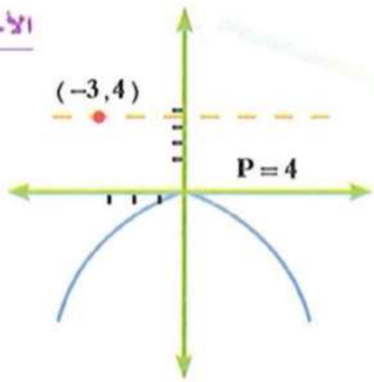
مثال 17 إذا كان دليل القطع المكافئ يمر بالنقطة $(-3,4)$ والرأس نقطة الأصل جد معادلة القطع .

الأحتمال الأول:



$$y^2 = 4Px$$
$$y^2 = 4(3)x$$
$$\boxed{y^2 = 12x}$$

الأحتمال الثاني:



$$x^2 = -4Py$$
$$x^2 = -4(4)y$$
$$\boxed{x^2 = -16y}$$

مثال 18 قطع مكافئ معادلته $Ax^2 + 8y = 0$ ويمر من النقطة $(1,2)$ جد قيمة (A) ثم جد البؤرة والدليل وارسم القطع .

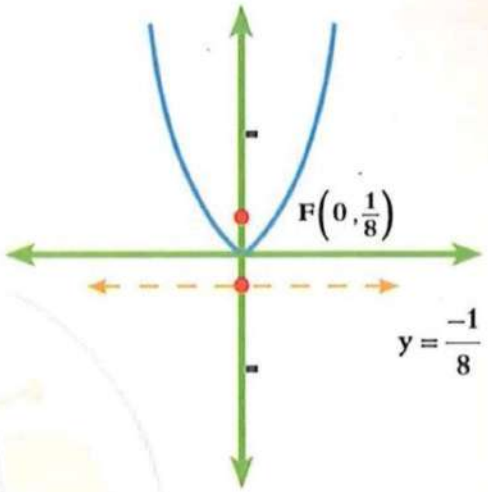
$$(x,y)$$
$$(1,2)$$

$$Ax^2 + 8y = 0$$
$$A(1)^2 + 8(2) = 0$$
$$A + 16 = 0 \Rightarrow A = -16$$

$$-16x^2 + 8y = 0 \Rightarrow [-16x^2 = -8y] \div -16$$

$$\frac{-16x^2}{-16} = \frac{-8y}{-16} \Rightarrow x^2 = \frac{1}{2}y$$ أعلى

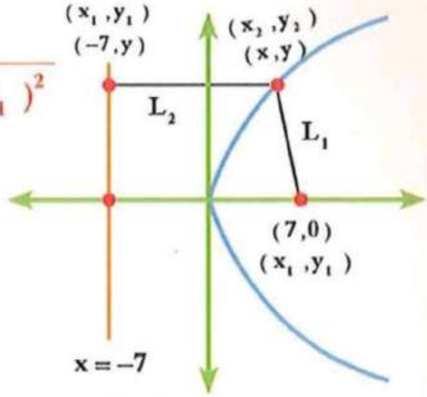
$$x^2 = 4Py$$
$$\left[4P = \frac{1}{2}\right] \div 4$$
$$P = \frac{1}{8}$$



البؤرة $F\left(0,\frac{1}{8}\right)$ معادلة الدليل $y = \frac{-1}{8}$

إيجاد معادلة القطع المكافئ باستخدام التعريف

مثال 19 باستخدام التعريف جد معادلة القطع المكافئ الذي بؤرته (7 , 0) والرأس نقطة الأصل .



حسب التعريف $L_1 = L_2$

$$\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

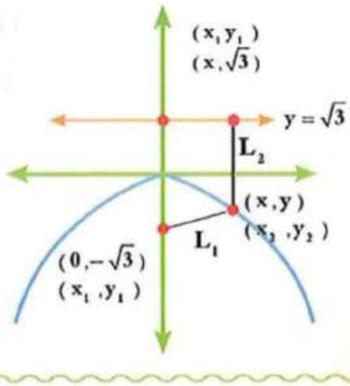
$$\sqrt{(x-7)^2 + (y-0)^2} = \sqrt{(x+7)^2 + (y-y)^2}$$ بالتربيع

$$\cancel{x^2} - 14x + \cancel{49} + y^2 = \cancel{x^2} + 14x + \cancel{49} + 0^2$$

مربع حدانية   مربع حدانية

$$y^2 = 14x + 14x \Rightarrow y^2 = 28x$$

مثال 20 جد معادلة القطع المكافئ الذي معادلة دليله $y = \sqrt{3}$ باستخدام التعريف .



حسب التعريف $L_1 = L_2$

$$\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

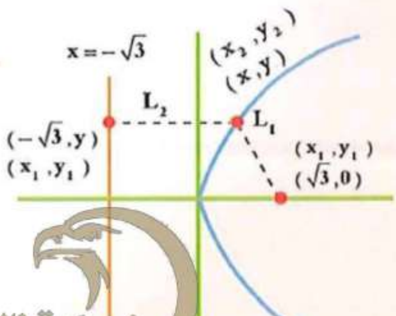
$$\sqrt{(x-0)^2 + (y+\sqrt{3})^2} = \sqrt{(x-x)^2 + (y-\sqrt{3})^2}$$ بالتربيع

$$x^2 + \cancel{y^2} + 2\sqrt{3}y + \cancel{3} = 0^2 + \cancel{y^2} - 2\sqrt{3}y + \cancel{3}$$

$$x^2 = -2\sqrt{3}y - 2\sqrt{3}y \Rightarrow x^2 = -4\sqrt{3}y$$

2005 - تمهيدي

مثال 21 باستخدام التعريف جد معادلة قطع مكافئ بؤرته ($\sqrt{3}$, 0) والرأس نقطة الأصل .



حسب التعريف $L_1 = L_2$

$$\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$\sqrt{(x-\sqrt{3})^2 + (y-0)^2} = \sqrt{(x+\sqrt{3})^2 + (y-y)^2}$$

بالتربيع

$$\cancel{x^2} - 2\sqrt{3}x + \cancel{3} + y^2 = x^2 + 2\sqrt{3}x + \cancel{3} + 0$$

$$y^2 = 4\sqrt{3}x$$

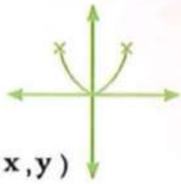
الأسئلة الوزارية حول موضوع القطع المكافئ

سؤال 1 جد معادلة القطع مكافئ الذي رأسه نقطة الأصل ويمر بالنقطتين $(-3,6)$, $(3,6)$ ثم جد معادلة دليله .

2006 - د (1)

$(3,6) \rightarrow$ ربع أول

$(-3,6) \rightarrow$ ربع رابع



$x^2 = 4Py$ ((نحو الأعلى))

(x,y)

$(3,6)$

$(3)^2 = 4P(6)$

$9 = 24P \Rightarrow P = \frac{9}{24} = \frac{3}{8}$

$x^2 = 4\left(\frac{3}{8}\right)y \Rightarrow \boxed{x^2 = \frac{3}{2}y}$

معادلة الدليل $y = -P \Rightarrow y = -\frac{3}{8}$

سؤال 2 جد معادلة القطع المكافئ الذي رأسه نقطة الأصل ويمر بالنقطتين $(1,3)$, $(1,-3)$ ثم جد معادلة دليله .

2006 - د (2)

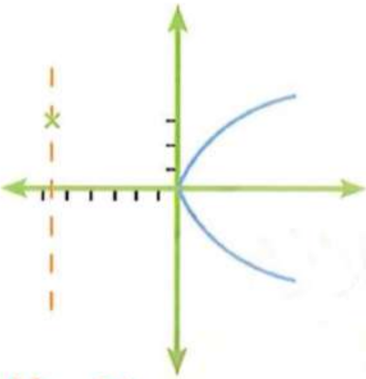
/ الجواب $y^2 = 9x$

معادلة الدليل $x = \frac{-9}{4}$

سؤال 3 قطع مكافئ معادلته $\frac{1}{4}y^2 = hx$ دليله يمر بالنقطة $(-6,3)$ جد قيمة h.

2008 تمهيدي

2018 - د (3)



$\left[\frac{1}{4}y^2 = hx\right].4$

$y^2 = 4hx$

$P = 6$

$y^2 = 4(6)x$

$y^2 = 24x$

$y^2 = 4hx \Rightarrow 4h = 24$

$h = 6$

ملاحظة

عرفنا ان القطع على محور السينات لأن المعادلة بدلالة (y^2) .

ولا يمكن تعويض النقطة $(-6,3)$ لأن الذي يمر بها الدليل وليس القطع .

إستراحة شعرية:

فيا ليتَ الذيْ بينيْ وبينك بابٌ يطرقُ

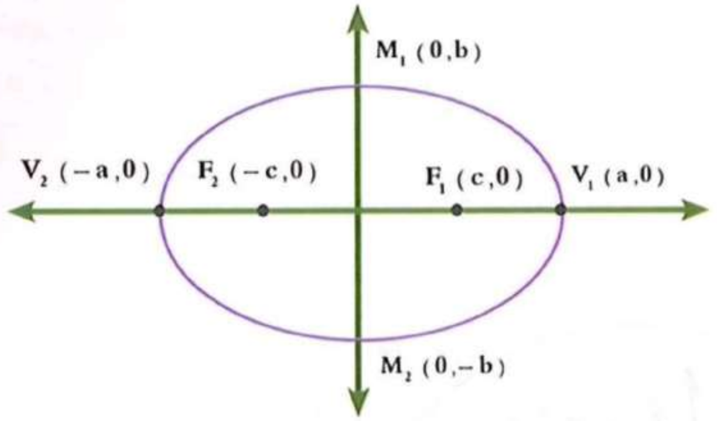
وياليتَ أطرافَ الأرض تُطوىْ فنلتقيْ

القطع الناقص Ellipse

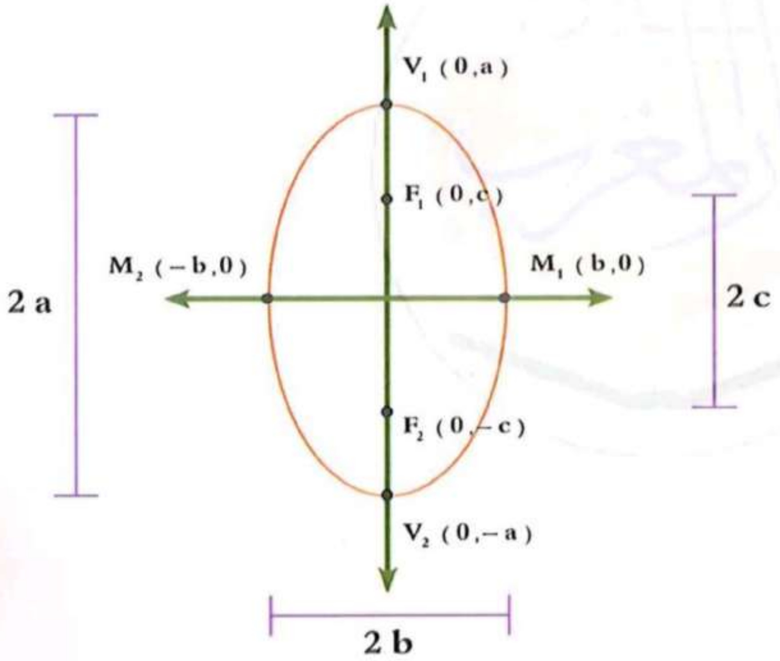
تعريف: هو مجموعة النقط على المستوي التي يكون مجموع بعديها عن نقطتين ثابتين (البؤرتان) عدد ثابت .

المصطلحات والرموز:

((قطع ناقص بؤرتاه تنتميان لمحور السينات))



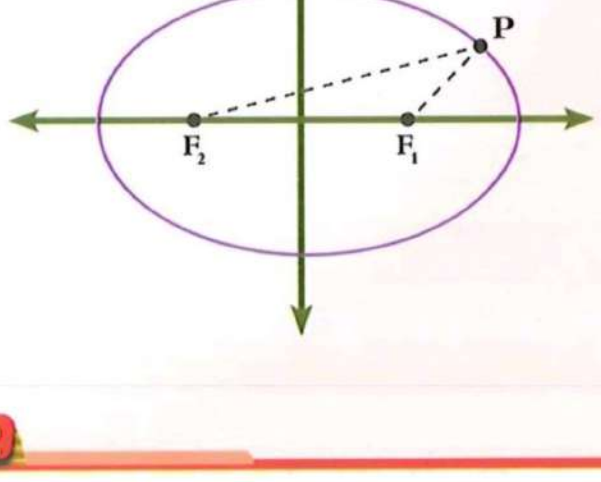
((قطع ناقص بؤرتاه تنتميان لمحور الصادات))



الرأسان $\leftarrow V_1 \; , V_2$

البؤرتان $\leftarrow F_1 \; , F_2$

القطبان $\leftarrow M_1 \; , M_2$



$$PF_1 + PF_2 = 2a$$

$PF_1 + PF_2$ / مجموع بعدي نقطة عن بؤرتيه

مصطلحات

$2a$ = طول المحور الكبير ((البعد بين الرأسين)) . . . ((العدد الثابت))...((مجموع بعدي نقطة عن بؤرتيه))

$2c$ = البعد بين البؤرتين ((البعد البؤري))

$2b$ = طول المحور الصغير ((البعد بين القطبين))

قوانين

1) معادلة القطع الناقص الذي بؤرتاه على محور السينات $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

2) معادلة القطع الناقص الذي بؤرتاه على محور الصادات $\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$

3) لايجاد مساحة القطع الناقص $A = a\ b\ \pi$

4) لايجاد محيط القطع الناقص $P = 2\pi\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$

5) لايجاد الاختلاف المركزي $e = \frac{c}{a}$ $\quad e < 1$ اصغر من (1)

6) القانون العام للقطع الناقص $a^2 = b^2 + c^2$

$b = \sqrt{a^2 - c^2}$ ⟵

$c = \sqrt{a^2 - b^2}$ ⟵

* معادلة المحور الكبير $x = 0$
معادلة المحور الصغير $y = 0$
إذا كان القطع بؤرتاه على محور الصادات .

* معادلة المحور الكبير $y = 0$
معادلة المحور الصغير $x = 0$
إذا كان القطع بؤرتاه على محور السينات .

إنتبه ! قيمة a أكبر من قيمة b وكذلك أكبر من قيمة c
الاختلاف المركزي في القطع الناقص اصغر من (1)

ملاحظات حول القطع الناقص

أولاً عندما يعطي
- إحداثي البؤرة يعني أعطى c
- إحداثي الرأس يعني أعطى a
- إحداثي القطب يعني أعطى b

ثانياً إذا اعطى :

1. طول المحور الكبير / مثلاً (12) ← $2a = 12$ ونجد a
2. طول المحور الصغير / مثلاً (16) ← $2b = 16$ ونجد b
3. البعد بين البؤرتين / مثلاً (8) ← $2c = 8$ ونجد c

ثالثاً إذا أعطى المساحة او المحيط أو الاختلاف المركزي فهذا يجعلك تفكر بهذه القوانين وذلك لايجاد مجهول إذا السؤال مباشر أو لايجاد علاقة من هذه القوانين تساعد في الحل .

رابعاً العلاقة بين القطعين المكافئ والناقص: عندما يكون السؤال يحوي قطع مكافئ وناقص يجب ترجمة الكلام وتحويله الى معادلة رياضية كما موضح في الامثلة التوضيحية أدناه:

جد معادلة القطع الناقص الذي احدى بؤرتيه هي بؤرة القطع المكافى . . . الخ .

$$c_{\text{ناقص}} = P_{\text{مكافئ}}$$

جد معادلة القطع الناقص الذي احد راسيه هو بؤرة القطع المكافى . . . الخ .

$$a_{\text{ناقص}} = P_{\text{مكافئ}}$$

جد معادلة القطع الناقص الذي احدى بؤرتيه تنطبق على بؤرة القطع المكافى . . . الخ .

$$c_{\text{ناقص}} = P_{\text{مكافئ}}$$

خامساً تحويل العبارات الى علاقات رياضية (معادلات):

1) مجموع طولي محوريه ← $2a+2b$

2) مجموع مربعي طولي محوريه ← $(2a)^2+(2b)^2$

3) الفرق بين طولي محوريه ← إذا كان الفرق (+) $2a-2b$

إذا كان الفرق (−) $2b-2a$

سادساً إذا أعطى في السؤال نقطة (x,y) يمر بها المنحني أو تنتمي الى المنحني نستفيد من معادلة القطع القياسية $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ أو $\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$ حيث يتم تعويض النقطة في المعادلة القياسية ولكن بشرط لا تحوي النقطة احداثي صفر.

سابعاً عبارات (يمر - يقطع - يمس):

1) إذا ذكر عبارة يمر بنقطة $(x,0)$ أو $(0,y)$ شرط ان يكون اما $x=0$ أو $y=0$ في النقطة. فهذا يعني أما (a) أو (b)

سوف يمثل اما (a) أو (b)

2) كل يمس سوف يمثل اما (a) أو (b)

* جد معادلة القطع الناقص الذي يمس دليل القطع المكافئ ... الخ.

أما a — أو b

P ← سوف يمثل اما (a) أو (b)

سادساً إذا ذكر عبارة نقطة التقاطع مع محور السينات أو الصادات :

1) نقطة التقاطع مع محور السينات معناها نعوض بمعادلة المنحني أو معادلة المستقيم المعطاة في السؤال $y=0$.

أمثلة توضيحية

جد معادلة القطع الناقص الذي احدى بؤرتيه نقطة تقاطع المستقيم $2x-y=8$ مع محور السينات . . .الخ

$2x-y=8 \qquad y=0 \longrightarrow$ نعوض

$$2x-0=8 \Rightarrow [2x=8] \div 2$$

$x=4 \Rightarrow (4,0) \longleftarrow$ تصبح بؤرة للقطع الناقص كما ذكر في السؤال

2) نقطة التقاطع مع محور الصادات معناها نعوض بمعادلة المنحني أو معادلة المستقيم المعطاة في السؤال $x=0$.

جد معادلة القطع الناقص الذي احدى رأساه نقطتا تقاطع المنحني $x^2+y^2-3x=16$ مع محور الصادات . . . الخ

$$x^2+y^2-3x=16 \quad , \quad x=0$$

$$(0)^2+y^2-3(0)=16 \Rightarrow y^2=16 \Rightarrow \boxed{y \pm 4}$$

$$\boxed{x=0}$$

$(0,4) \quad , \quad (0,-4) \longrightarrow$ يصبحان رأسان للقطع الناقص كما ذكر في السؤال

تاسعاً إذا ذكر عبارة يقطع فهي على نوعين :

النوع الأول يقطع محور السينات عند رقم $x=\pm$ أو يقطع محور الصادات عند رقم $y=\pm$

سوف يمثل اما (a) أو (b) ويؤخذ موجب

النوع الثاني إذا ذكر في السؤال ان القطع الناقص يقطع منحني ففي هذه الحالة نتبع ما يلي :

a) نعوض الاحداثي المعطى في السؤال بمعادلة المنحني .

b) بعد التعويض يصبح لدينا احداثي كامل من x و y .

c) نعوض هذه النقطة بمعادلة القطع القياسية ونكمل الحل .

عاشراً ملاحظات أخرى

1 النسبة : وهي على نوعين :

النوع الأول النسبة بين طولي محوريه

أما $\frac{2a}{2b}$ عندما النسبة أكبر من (1) أو $\frac{\text{رقم كبير}}{\text{رقم صغير}}$

أو $\frac{2b}{2a}$ عندما النسبة أصغر من (1) أو $\frac{\text{رقم صغير}}{\text{رقم كبير}}$

النوع الثاني النسبة بين أطوال أخرى

مثلاً :

النسبة بين طول محوره الكبير الى البعد بين البؤرتين $= \frac{2a}{2c}$

بسط (2a) مقام (2c)

مثلاً :

النسبة بين البعد بين بؤرتيه الى طول محوره الصغير $= \frac{2c}{2b}$

بسط (2c) مقام (2b)

بعد كلمة إلى يصبح مقام دائماً

يراجع السؤال الأول والثاني في الاسئلة الوزارية بما يخص فكرة النسبة

2 بعض المصطلحات الاضافية :

* مجموع طول محوره الكبير ونصف طول محوره الصغير

$$\underbrace{2a}_{\text{طول محوره الكبير}} \underbrace{+}_{\text{مجموع}} \underbrace{\frac{1}{2}(2b)}_{\text{نصف طول محوره الصغير}}$$

* طول محوره الكبير يزيد على طول محوره الصغير $\boxed{2a-2b}$

كل يزيد على الاشارة سالبة

3 وجود معادلة القطع المكافئ في سؤال القطع الناقص يجعلك تفكر بايجاد قيمة p من معادلة القطع المكافئ والعودة الى ملاحظات الربط الموضحة في النقطة (رابعاً) .

4 إذا ذكر عبارة القطع المكافئ ولم تجد في السؤال معادلة القطع المكافئ فعليك أولاً التفكير في ايجاد قيمة p ومعادلة القطع المكافئ لانها مفتاح الحل ولايجاد معادلة القطع المكافئ عليك ان تستند على الملاحظات التي سبق شرحها في القطع المكافئ .

الجزء الأول

إذا اعطى معادلة القطع الناقص وطلب معلومات القطع مثل (البؤرتان - الرأسان ... المساحة ... المحيط ... الخ) .

1 يجب ان نضع المعادلة بالشكل القياسي

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1}$$

سينات

$$\boxed{\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1}$$

صادات

2 يجب ان يكون معامل x^2 ومعامل y^2 يساوي واحد

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

هنا لازم واحد

3 إذا كان هناك ثابت (رقم) بعد اليساوي وكان عدد صحيح (ليس كسر) نقسم عليه المعادلة .

مثال توضيحي $16x^2+9y^2=144$

$$\left[16x^2+9y^2=144\right]\div 144$$

$$\frac{16x^2}{144}+\frac{9y^2}{144}=\frac{144}{144} \Rightarrow \frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}=1$$

وإذا كان بعد اليساوي كسر نضرب المعادلة في مقلوب الكسر تابع المثال التوضيحي التالي :

نضرب في مقلوب $\frac{2}{3}$ وهو $\frac{3}{2}$

$$\left.\frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{3}=\frac{2}{3}\right]*\frac{3}{2}$$

$$\frac{x^2}{\cancel{12}_{4}}\left(\frac{\cancel{3}^{1}}{2}\right)+\frac{y^2}{\cancel{3}}\left(\frac{\cancel{3}}{2}\right)=\frac{2}{3}\left(\frac{3}{2}\right) \Rightarrow \frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{2}=1$$

إنتبه !

في حالة وجود عدد (معامل) x^2 أو y^2 يصبح مقام للمقام ⟵ مثلاً

$$\frac{3x^2}{5}+\frac{2y^2}{7}=1$$

ينزل تحت المقام

$$\frac{x^2}{\frac{5}{3}}+\frac{y^2}{\frac{7}{2}}=1$$

مثال 1 جد طول كل من المحورين وإحداثي البؤرتين والرأسين والاختلاف المركزي ومساحة ومحيط القطع الناقص.

$$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$$ ((المعادلة بالشكل القياسي)) لاتحتاج ترتيب

العدد الاكبر هو 25 ← $a^2=25$

العدد الاصغر هو 16 ← $b^2=16$

$a^2=25 \Rightarrow a=5$

$b^2=16 \Rightarrow b=4$

$a^2=b^2+c^2 \Rightarrow c=\sqrt{a^2-b^2}$

$c=\sqrt{25-16}=\sqrt{9}$

$c=3$

طول المحور الكبير $=2a=2(5)=10$ وحدة

طول المحور الصغير $=2b=2(4)=8$ وحدة

((البؤرتان)) $F_1(c,0) \rightarrow F_1(3,0)$ ، $F_2(-c,0) \rightarrow F_2(-3,0)$

((الرأسان)) $V_1(a,0) \rightarrow V_1(5,0)$ ، $V_2(-a,0) \rightarrow V_2(-5,0)$

$$e=\frac{c}{a}=\frac{3}{5}=0.6<1 \quad \text{((أصغر))}$$

$A=a.b\pi \Rightarrow A=(5\times4)\pi=20\pi$ وحدة مربعة

$$P=2\pi\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}=2\pi\sqrt{\frac{25+16}{2}}$$

$$P=2\pi\sqrt{\frac{41}{2}}$$ وحدة

مثال 2 عين كل من البؤرتين والرأسين والقطبين والمركز ثم جد طول ومعادلة كل من المحورين والاختلاف المركزي القطع $x^2+2y^2=1$

$$\frac{x^2}{1}+\frac{2y^2}{1}=1 \Rightarrow \frac{x^2}{1}+\frac{y^2}{\frac{1}{2}}=1$$

((سينات)) الأكبر $a^2=1 \Rightarrow a=1$

الأصغر $b^2=\frac{1}{2} \Rightarrow b=\frac{1}{\sqrt{2}}$

$a^2=b^2+c^2 \Rightarrow c=\sqrt{a^2-b^2}$

$c=\sqrt{1-\frac{1}{2}}=\sqrt{\frac{1}{2}}$

$\therefore c=\frac{1}{\sqrt{2}}$

((البؤرتان)) $F_1(c,0) \rightarrow F_1\left(\frac{1}{\sqrt{2}},0\right)$ ، $F_2(-c,0) \rightarrow F_2\left(\frac{-1}{\sqrt{2}},0\right)$

((الرأسان)) $V_1(a,0) \rightarrow V_1(1,0)$ ، $V_2(-a,0) \rightarrow V_2(-1,0)$

((القطبان)) $M_1(0,b) \rightarrow M_1\left(0,\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ ، $M_2(0,-b) \rightarrow M_2\left(0,\frac{-1}{\sqrt{2}}\right)$

طول المحور الكبير $=2a=2(1)=2$ وحدة

طول المحور الصغير $=2b=2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\sqrt{2}$ وحدة

معادلة المحور الكبير ← $y=0$

معادلة المحور الصغير ← $x=0$

$$e=\frac{c}{a}=\frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{1}=\frac{1}{\sqrt{2}}<1 \quad \text{((أصغر))}$$

* المركز $O(0,0)$ نقطة الأصل

مثال 3 عين البؤرتان والرأسان والقطبان والمركز ثم جد طول ومعادلة المحورين والاختلاف المركزي للقطع $9x^2 + 13y^2 = 117$

((ملاحظة ثالثاً)) $9x^2 + 13y^2 = 117 \to \div 117$

$$\frac{9x^2}{117} + \frac{13y^2}{117} = \frac{117}{117} \Rightarrow \frac{x^2}{13} + \frac{y^2}{9} = 1$$

(سينات) $a^2 = 13 \Rightarrow a = \sqrt{13}$

$b^2 = 9 \Rightarrow b = 3$

$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{13 - 9}$

$c = \sqrt{4} \Rightarrow c = 2$

البؤرتان
$F_1\ (c, 0) \to F_1\ (2, 0)$
$F_2\ (-c, 0) \to F_2\ (-2, 0)$

الرأسان
$V_1\ (a, 0) \to V_1\ (\sqrt{13}, 0)$
$V_2\ (-a, 0) \to V_2\ (-\sqrt{13}, 0)$

((القطبان))
$M_1\ (0, b) \to M_1\ (0, 3)$
$M_2\ (0, -b) \to M_2\ (0, -3)$

طول المحور الكبير $= 2a = 2(\sqrt{13}) = 2\sqrt{13}$ وحدة

طول المحور الصغير $= 2b = 2(3) = 6$ وحدة

معادلة المحور الكبير $y = 0$

معادلة المحور الصغير $x = 0$

---

* المركز $(0, 0)$ O نقطة الأصل

الأختلاف المركزي $e = \frac{c}{a} = \frac{2}{\sqrt{13}}$

مثال 4 ناقش القطع الناقص $4x^2 + 3y^2 = \frac{4}{3}$

$$\cancel{4}x^2\left(\frac{3}{\cancel{4}}\right) + 3y^2\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{4}{3}\left(\frac{3}{4}\right)$$

$$\frac{3x^2}{1} + \frac{9y^2}{4} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{\frac{1}{3}} + \frac{y^2}{\frac{4}{9}} = 1$$

(صادات) الأكبر $\frac{4}{9} \to a^2 = \frac{4}{9} \Rightarrow a = \frac{2}{3}$

الأصغر $\frac{1}{3} \to b^2 = \frac{1}{3} \Rightarrow b = \frac{1}{\sqrt{3}}$

$c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{\frac{4}{9} - \frac{1}{3}} = \sqrt{\frac{4-3}{9}}$

$c = \sqrt{\frac{1}{9}} \Rightarrow c = \frac{1}{3}$

البؤرتان
$F_1\ (0, c) \to F_1\left(0, \frac{1}{3}\right)$
$F_2\ (0, -c) \to F_2\left(0, \frac{-1}{3}\right)$

الرأسان
$V_1\ (0, a) \quad V_1\left(0, \frac{2}{3}\right)$
$V_2\ (0, -a) \quad V_2\left(0, -\frac{2}{3}\right)$

((القطبان))
$M_1\ (b, 0) \quad M_1\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, 0\right)$
$M_2\ (-b, 0) \quad M_2\left(\frac{-1}{\sqrt{3}}, 0\right)$

طول المحور الكبير $= 2a = 2\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{4}{3}$ وحدة

طول المحور الصغير $= 2b = 2\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{2}{\sqrt{3}}$ وحدة

البعد بين البؤرتين $= 2c = 2\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{2}{3}$ وحدة

معادلة المحور الكبير $\Leftarrow x = 0$

معادلة المحور الصغير $\Leftarrow y = 0$

$A = a \cdot b\pi = \left(\frac{2}{3} \times \frac{1}{\sqrt{3}}\right)\pi = \frac{2}{3\sqrt{3}}\pi$ وحدة مربعة

$P = 2\pi\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} = 2\pi\sqrt{\frac{\frac{4}{9}+\frac{1}{3}}{2}} = 2\pi\sqrt{\frac{7}{18}}$ وحدة

$$e = \frac{c}{a} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{2}{3}} = \frac{1}{\cancel{3}} \times \frac{\cancel{3}}{2} = \frac{1}{2}$$

إيجاد معادلة القطع الناقص

الجزء الثاني

لإيجاد معادلة القطع الناقص يجب مراجعة الملاحظات السابقة وسوف نذكر كل ملاحظة مع الأمثلة الخاصة بها .

أولاً عندما يعطي
- إحداثي البؤرة يعني أعطى c
- إحداثي الرأس يعني أعطى a
- إحداثي القطب يعني أعطى b

ثانياً إذا اعطى :

1. طول المحور الكبير / مثلاً $(12) \leftarrow 2a = 12$ ونجد a
2. طول المحور الصغير / مثلاً $(16) \leftarrow 2b = 16$ ونجد b
3. البعد بين البؤرتين / مثلاً $(8) \leftarrow 2c = 8$ ونجد c

مثال 1 جد معادلة القطع الناقص الذي بؤرتاه $F_1(3,0)$, $F_2(-3,0)$ ورأساه النقطتان $V_1(5,0)$, $V_2(-5,0)$

(السينات) $c = 3 \rightarrow (c)$ (البؤرة)

(السينات) $a = 5 \rightarrow (a)$ (الرأس)

نجد b من القانون العام

$$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow b = \sqrt{a^2 - c^2}$$

$$b = \sqrt{(5)^2 - (3)^3}$$

$$b = \sqrt{25 - 9} = \sqrt{16}$$

$$b = 4$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$$

مثال 2 جد معادلة القطع الناقص الذي بؤرتاه $(5,0)$, $(-5,0)$ وطول محوره الكبير = 12 وحدة .

(السينات) $c = 5 \rightarrow (c)$ (البؤرة)

$$[2a = 12] \div 2 \Rightarrow a = 6$$

نجد b من القانون العام

$$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow b = \sqrt{a^2 - c^2}$$

$$b = \sqrt{(6)^2 - (5)^3}$$

$$b = \sqrt{36 - 25}$$

$$b = \sqrt{11} \Rightarrow b^2 = 11$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \boxed{\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{11} = 1}$$

مثال 3 جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الأصل والمسافة بين البؤرتين (8) وحدات ونصف طول محوره الصغير يساوي (3) وحدات .

المسافة بين البؤرتين $= 2c$

$$\left[2c = 8\right] \div 2$$

$$c = 4$$

$$\frac{1}{2}(2b) = 3 \Rightarrow b = 3$$

نصف

محوره الصغير

نجد a من القانون العام

$$a^2 = b^2 + c^2$$

$$a^2 = 3^2 + 4^2$$

$$a^2 = 9 + 16 \Rightarrow a^2 = 25 \Rightarrow a = 5$$

لم يحدد موقع البؤرة

السينات

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$$

أو

الصادات

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$$

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1$$

ثالثاً إذا أعطى المساحة او المحيط أو الاختلاف المركزي فهذا يجعلك تفكر بهذه القوانين وذلك لايجاد مجهول إذا السؤال مباشر أو لايجاد علاقة من هذه القوانين تساعد في الحل .

مثال 4 جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الأصل والاختلاف المركزي $\left(\frac{1}{2}\right)$ وطول محوره الصغير (12) وحدة .

طول محوره الصغير $(2b) \Rightarrow [2b = 12] \div 2$

$b = 6$

$e = \frac{c}{a}$

$\frac{1}{2} = \frac{c}{a} \Rightarrow a = 2c$ ....(1)

$a^2 = b^2 + c^2$

$(2c)^2 = (6)^2 + c^2$

$4c^2 = 36 + c^2 \Rightarrow 4c^2 - c^2 = 36$

$[3c^2 = 36] \div 3 \Rightarrow c^2 = 12 \Rightarrow c = 2\sqrt{3}$

$a = 2c \Rightarrow a = 2(2\sqrt{3}) \Rightarrow a = 4\sqrt{3}$

لم يتم تحديد موقع البؤرة ولها احتمالين :

أولاً : على محور السينات

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{48} + \frac{y^2}{36} = 1$$

ثانياً : على محور الصادات

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{48} = 1$$

مثال 5 جد معادلة القطع الناقص الذي بؤرتاه تنتميان لمحور السينات ومركزه نقطة الأصل ومساحته منطقته 7π وحدة مربعة ومحيطه يساوي 10π وحدة .

$A = a.b\pi \Rightarrow [7\cancel{\pi} = a.b\cancel{\pi}] \div b$

$a = \frac{7}{b}$ .... (1)

$p = 2\pi\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \Rightarrow \left[10\pi = 2\pi\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}\right] \div 2\pi$

$5 = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \xRightarrow{\text{بالتربيع}} \left[25 = \frac{a^2+b^2}{2}\right] \times 2$

$50 = a^2 + b^2$ .... (2)

$50 = \left(\frac{7}{b}\right)^2 + b^2 \Rightarrow \left[50 = \frac{49}{b^2} + b^2\right] . b^2$

$50b^2 = 49 + b^4 \Rightarrow b^4 - 50b^2 + 49 = 0$

$(b^2 - 1)(b^2 - 49) = 0$

2011 - د (2)

$b^2 - 1 = 0 \Rightarrow b = 1$

2015 - د (4)/ رصافة

$b^2 - 49 = 0 \Rightarrow b = 7$

2018 - د (1)/ احيائي

عندما b=1 $\quad a = \frac{7}{b} = \frac{7}{1} \Rightarrow a = 7$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{49} + \frac{y^2}{1} = 1$$

عندما b=7 $\quad a = \frac{7}{b} = \frac{7}{7} \Rightarrow a = 1$

هذا الاحتمال يهمل لأن قيمة a هنا اصغر من قيمة b وهذا غير ممكن .

رابعاً العلاقة بين القطعين المكافئ والناقص: عندما يكون السؤال يحوي قطع مكافئ وناقص يجب ترجمة الكلام وتحويله الى معادلة رياضية كما موضح في الامثلة التوضيحية أدناه:

جد معادلة القطع الناقص الذي احدى بؤرتيه هي بؤرة القطع المكافئ ... الخ.

$$\underset{\text{ناقص}}{c} = \underset{\text{مكافئ}}{P}$$

جد معادلة القطع الناقص الذي احد راسيه هو بؤرة القطع المكافئ ... الخ.

$$\underset{\text{ناقص}}{a} = \underset{\text{مكافئ}}{P}$$

جد معادلة القطع الناقص الذي احدى بؤرتيه تنطبق على بؤرة القطع المكافئ ... الخ.

$$\underset{\text{ناقص}}{c} = \underset{\text{مكافئ}}{P}$$

مثال 6 جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الأصل وإحدى بؤرتيه هي بؤرة القطع المكافئ $y^2 - 12x = 0$ وطول محوره الصغير يساوي (10) وحدات.

طول محوره الصغير $= 2b \Rightarrow [2b = 10] \div 2$

$b = 5$

القطع المكافئ: دائماً نجد P من معادلة القطع المكافئ.

$$y^2 - 12x = 0 \Rightarrow y^2 = 12x$$

$$y^2 = 4Px$$

$$[4P = 12] \div 4 \Rightarrow P = 3$$

$$F(3,0)$$

احدى بؤرتيه | هي | بؤرة القطع المكافئ

$$\underset{\text{ناقص}}{c} = \underset{\text{مكافئ}}{P}$$

$c = 3 \quad , \quad b = 5 \quad , \quad a = ?$

من القانون العام نجد a

$$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow a^2 = (5)^2 + (3)^2$$

$$a^2 = 25 + 9 \Rightarrow a^2 = 34$$

بؤرتا القطع الناقص على محور السينات لأن بؤرة القطع المكافئ على السينات.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{34} + \frac{y^2}{25} = 1$$

خامساً تحويل العبارات الى علاقات رياضية (معادلات):

1) مجموع طولي محوريه ← $2a+2b$

2) مجموع مربعي طولي محوريه ← $(2a)^2+(2b)^2$

3) الفرق بين طولي محوريه ← إذا كان الفرق (+) $2a-2b$

إذا كان الفرق (−) $2b-2a$

مثال 7 جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الأصل وبؤرتاه على محور السينات والمسافة بينهما (6) وحدات والفرق بين طولي محوريه (2).

$[2c=6]\div \Rightarrow c=3$

$[2a-2b=2]\div 2 \Rightarrow a-b=1$

$a=1+b \,........(1)$

$a^2=b^2+c^2$

$(1+b)^2=b^2+3^2$

$1+2b+\cancel{b^2}=\cancel{b^2}+9 \Rightarrow 2b=9-1$

$[2b=8]\div 2$

$b=4$ (نعوض في معادلة رقم (1))

$a=1+b$

2005 - د (1)

$a=1+4 \Rightarrow a=5$

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \Rightarrow \frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$$

مثال 8 جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الأصل وإحدى بؤرتيه هي بؤرة القطع المكافئ ($x^2=24y$) ومجموع طولي محوريه (36) وحدة.

* نستفد من معادلة المكافئ لنجد P

$x^2=24y$

$x^2=4Py \Rightarrow [4P=24]\div 4$

$P=6 \Rightarrow F(0,6)$

بؤرة القطع المكافئ	هي	إحدى بؤرتيه
P مكافئ	$=$	c ناقص $\Rightarrow c=6$

$[2a+2b=36]\div 2$ ← مجموع طولي محوريه

$a+b=18 \Rightarrow b=18-a \,.........(1)$

$a^2=b^2+c^2$

$a^2=(18-a)^2+(6)^2$

مربع حدانية

2012 / تمهيدي
2017 - د (2) / احيائي/خارج
2017 - د (2) / تطبيقي/موصل
2019 - تمهيدي/احيائي

$\cancel{a^2}=324-36a+\cancel{a^2}+36 \Rightarrow [36a=360]\div 36$

$a=10$

نعوض a في المعادلة (1)

$b=18-a$

$b=18-10 \Rightarrow b=8$

بؤرة الناقص على محور الصادات لذلك نستخدم معادلة الصادات.

$$\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1 \Rightarrow \frac{x^2}{64}+\frac{y^2}{100}=1$$

سادساً إذا أعطى في السؤال نقطة (x, y) يمر بها المنحني أو تنتمي الى المنحني نستفيد من معادلة القطع القياسية $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ أو $\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$ حيث يتم تعويض النقطة في المعادلة القياسية ولكن بشرط لا تحوي النقطة احداثي صفر .

مثال 9 جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الأصل وإحدى بؤرتيه هي بؤرة القطع المكافئ الذي معادلته $y^2+8x=0$ علماً ان القطع الناقص يمر بالنقطة $(2\sqrt{3}, \sqrt{3})$.

* نستفد من معادلة المكافئ لنجد P

$y^2=-8x$

$y^2=-4Px \Rightarrow [4P=8] \div 4 \Rightarrow P=2$

$F(-2,0)$

إحدى بؤرتيه	هي	بؤرة القطع المكافئ
$c_{\text{ناقص}}$	$=$	$P_{\text{مكافئ}}$

$c=2$

أنظر الى النقطة $(2\sqrt{3}, \sqrt{3})$ نستفيد من معادلة القطع الناقص القياسية .

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \Rightarrow \frac{(2\sqrt{3})^2}{a^2}+\frac{(\sqrt{3})^2}{b^2}=1$

$\left[\frac{12}{a^2}+\frac{3}{b^2}=1\right].a^2 \, . b^2$

$12b^2+3a^2=a^2 \, . b^2 \text{ ....}(1)$

$a^2=b^2+c^2$

$a^2=b^2+2^2 \Rightarrow a^2=b^2+4 \text{ ....}(2)$

بتعويض معادلة (2) في معادلة (1)

$12b^2+3\underbrace{(b^2+4)}_{a^2}=\underbrace{(b^2+4)}_{a^2}.b^2$

$\underbrace{12b^2+3b^2}_{\text{جمع}}+12=b^4+4b^2$

$15b^2+12=b^4+4b^2$

$0=b^4+\underbrace{4b^2-15b^2}_{\text{طرح}}-12$

$b^4-11b^2-12=0$

$(b^2+1)(b^2-12)=0$

أما $b^2+1=0$ يُهمل $\notin R$

أو $b^2-12=0 \Rightarrow b^2=12$

نعوض في معادلة (2)

$a^2=b^2+4 \text{ ....}(2)$

$a^2=12+4 \Rightarrow a^2=16$

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \Rightarrow \frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1$

تحليل السؤال

1. من المكافئ نجد (P) ونعتبر P هي C للناقص
2. من النقطة $(2\sqrt{3}, \sqrt{3})$ نجد معادلة وذلك بتعويض النقطة بالمعادلة القياسية .
2. نستعين بالقانون العام لنجد معادلة (2) نحلها مع معادلة رقم (1) بالتعويض ونجد a. b

2000 - د (1) | 2014 - د (2) | 2017 - تمهيدي / احيائي

2017 - تمهيدي / تطبيقي | 2017 - د (3) / موصل

2018 - د (1) / تطبيقي / خارج | 2018 - د (2) / احيائي / خارج

مثال 10 جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الأصل وبؤرتاه على محور السينات ويمر بالنقطتين $(3,4)$, $(6,2)$.

(البؤرة على محور السينات) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

$(3,4)$
(x,y) نعوض

$$\frac{(3)^2}{a^2}+\frac{(4)^2}{b^2}=1$$

$$\left[\frac{9}{a^2}+\frac{16}{b^2}=1\right].a^2\ .b^2$$

$$9b^2+16a^2=a^2b^2 \ ....(1)$$

(x,y)
ونعوض $(6,2)$

$$\frac{(6)^2}{a^2}+\frac{(2)^2}{b^2}=1$$

$$\left[\frac{36}{a^2}+\frac{4}{b^2}=1\right].a^2\ .b^2$$

$$36b^2+4a^2=a^2\ .b^2 \ ....(2)$$

نضرب المعادلة (1) في 4 لنساوي معامل b^2 ونحل بالحذف (الطرح)

$$36b^2+64a^2=4a^2b^2 \ ....(3)$$

نحل معادلة (2) و (3) انياً

$$\cancel{36b^2}+64a^2=4a^2b^2$$

$$\cancel{\pm 36b^2}\pm 4a^2=\pm a^2b^2$$

$$\left[60a^2=3a^2b^2\right]\div a^2 \qquad a^2\neq 0$$

$$\left[60=3b^2\right]\div 3 \Rightarrow b^2=20$$

نعوض في معادلة (1)

$$9b^2+16a^2=a^2b^2$$

$$9(20)+16a^2=a^2\,(20)$$

$$180+16a^2=20a^2$$

$$180=20a^2-16a^2 \Rightarrow \left[180=4a^2\right]\div 4$$

$$a^2=45$$

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \Rightarrow \frac{x^2}{45}+\frac{y^2}{20}=1$$

تحليل السؤال

1. يوجد في السؤال نقطتين (x,y) نعوض في المعادلة القياسية .
2. نعوض النقطة الأولى ونستخرج معادلة (1) .
3. نعوض النقطة الثانية ونستخرج معادلة (2) .
4. نحل المعادلتين آنياً بالحذف .

2016 - د (1) / خارج

سابعاً عبارات (يمر - يمس) :

1) إذا ذكر عبارة يمر بنقطة $(x,0)$ أو $(0,y)$ شرط ان يكون اما $x=0$ أو $y=0$ في النقطة . فهذا يعني أما (a) أو (b)

سوف يمثل اما (a) أو (b)

2) كل يمس سوف يمثل اما (a) أو (b)

* جد معادلة القطع الناقص الذي يمس دليل القطع المكافئ ... الخ .

أو b أما a

P ← سوف يمثل اما (a) أو (b)

ثامناً إذا ذكر عبارة نقطة التقاطع مع محور السينات أو الصادات :

نقطة التقاطع مع محور السينات y=0 ونقطة التقاطع مع محور الصادات x=0 حيث تعوض بمعادلة المنحني أو معادلة المستقيم المعطاة في السؤال .

مثال 11 جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الأصل وبؤرتاه نقطتا تقاطع المنحني $x^2+y^2-3x=16$ مع محور الصادات ويمس دليل القطع المكافئ $(y^2=12x)$.

نقطة التقاطع مع محور الصادات $x=0$

$x^2+y^2-3x=16$

$(0)^2+y^2-3(0)=16 \Rightarrow y^2=16$ بالجذر

$y=\mp 4$

$F_1(0,4) \quad F_2(0,-4) \rightarrow c=4$ (صادات)

استفد من معادلة القطع المكافئ لنجد P

$y^2=12x$

$y^2=4Px \Rightarrow [4P=12]\div 4$

$P=3$ (سينات)

كلمة يمس يعني أما a أو b

وهنا $\left(\underset{\text{مكافئ}}{P}=\underset{\text{ناقص}}{b}\right)$ لأن البؤرة صادات والمكافئ سينات والذي يخالف البؤرة هو (b)

$b=3$

نجد a من القانون العام

2014 - د (2)/خارج

2017 - د (3)/تطبيقي موصل

$a^2=b^2+c^2$

$a^2=3^2+4^2$

$a^2=9+16 \Rightarrow a^2=25 \Rightarrow a=5$

$$\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$$

$$\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1 \Rightarrow \frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{25}=1$$

تاسعاً إذا ذكر عبارة يقطع فهي على نوعين :

النوع الأول يقطع محور السينات عند $x = \pm$ رقم أو يقطع محور الصادات عند $y = \pm$ رقم

سوف يمثل اما (a) أو (b) ويؤخذ موجب

النوع الثاني إذا ذكر في السؤال ان القطع الناقص يقطع منحني ففي هذه الحالة نتبع ما يلي :

- (a) نعوض الاحداثي المعطى في السؤال بمعادلة المنحني .
- (b) بعد التعويض يصبح لدينا احداثي كامل من x و y .
- (c) نعوض هذه النقطة بمعادلة القطع القياسية ونكمل الحل .

تابعة للمثال (13)

مثال 12 جد المعادلة القياسية للقطع الناقص الذي مركزه نقطة الأصل وبؤرتاه $(0, \mp 2)$ ويتقاطع مع محور السينات عند $x = \mp 4$

2017 - د (1)/تطبيقي/موصل

البؤرة (c) $\rightarrow$ $c = 2$ (الصادات)

ملاحظة $x = 4$ تُعتبر (b) قطب لأن البؤرة على محور الصادات والذي يعاكس البؤرة هو القطب لذلك $(b = 4)$

$$a^2 = b^2 + c^2$$

$$a^2 = (4)^2 + (2)^2 \Rightarrow a^2 = 16 + 4 \Rightarrow a^2 = 20$$

معادلة الصادات $\dfrac{x^2}{b^2} + \dfrac{y^2}{a^2} = 1 \Rightarrow \dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{20} = 1$

يا فاتناً بالحبِّ قلبيَ قد هَلَك
هل أنتَ من حوّا وآدمَ أم مَلَك
عينيَ إذا نظرتْ لحُسنِكَ سبّحتْ
سبحانَ من خلقَ الجمالَ وجمّلك

مثال 13 جد معادلة القطع الناقص الذي بؤرتاه على محور السينات ومركزه نقطة الأصل وطول محوره الكبير ضعف طول محوره الصغير ويقطع القطع المكافئ $(y^2+8x=0)$ عند النقطة التي احداثيها السيني (-2).

يقطع القطع عند النقطة $x=-2$ نُعوضه قيمة x في معادلة القطع المكافئ

2013 - د (1)/ خارج

$$y^2+8(-2)=0 \Rightarrow y^2=16$$ بالجذر

$$y=\pm 4$$

$$(-2,4) \quad , \quad (-2,-4)$$

راجع السؤال (7) في الاسئلة الوزارية

$$\left[2a=2(2b)\right]\div 2$$

ضعف محوره الصغير = محوره الكبير

$$a=2b \,\ldots\ldots\ldots(1)$$

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

نعوض إحدى النقطتين ولتكن $(-2,4)$

$$\frac{(-2)^2}{a^2}+\frac{(4)^2}{b^2}=1 \Rightarrow \frac{4}{(2b)^2}+\frac{16}{b^2}=1$$

ونعوض أيضاً $a=2b$

$$\frac{\cancel{4}}{\cancel{4}b^2}+\frac{16}{b^2}=1 \Rightarrow \frac{1}{b^2}+\frac{16}{b^2}=1$$

$$\frac{17}{b^2}=\frac{1}{1}$$

$$b^2=17 \Rightarrow b=\sqrt{17}$$

$$a=2b \Rightarrow a=2\sqrt{17} \Rightarrow a^2=68$$

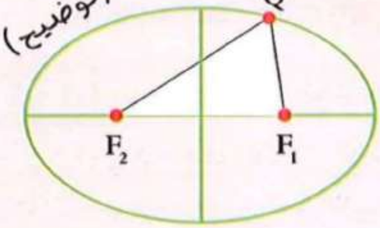
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \Rightarrow \frac{x^2}{68}+\frac{y^2}{17}$$

ملاحظة ومثال إذا أعطى محيط المثلث بين النقاط QF_1F_2 أي المحيط للمثلث المتكون من البؤرتين F_1 , F_2 ونقطة ثالثة على القطع يكون الحل كما يلي:

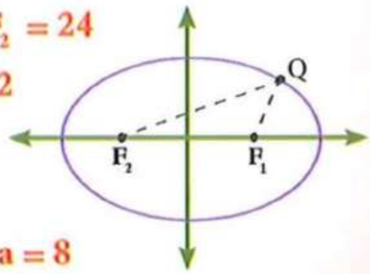
$$QF_1F_2 = QF_1 + QF_2 + F_1F_2$$

محيط المثلث $= \quad 2a \quad + 2c$

(توضيح)



مثال 14 جد معادلة القطع الناقص الذي بؤرتيه $F_1(4,0)$, $F_2(-4,0)$ والنقطة Q تنتمي للقطع الناقص بحيث ان محيط المثلث QF_1F_2 يساوي (24) وحدة.



$$QF_1 + QF_2 + F_1F_2 = 24$$

$$[2a + 2c = 24] \div 2$$

$$a + c = 12$$

$$a + 4 = 12 \Rightarrow a = 8$$

نجد b من القانون العام

$$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow b = \sqrt{a^2 - c^2}$$

$$b = \sqrt{64 - 16}$$

$$b = \sqrt{48} \Rightarrow b^2 = 48$$

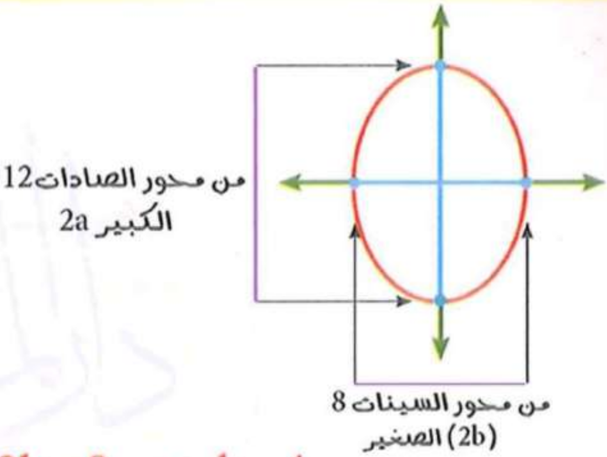
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \boxed{\frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{48} = 1}$$

2014 - د (1)

2016 - د (2)/ خارج/ المحيط =30 بدل 24

ملاحظة ومثال إذا قال في السؤال ان القطع الناقص يقطع من محور (جزءاً) طوله (رقم) فأن هذا الجزء المقطوع أما $2a$ أو $2b$

مثال 15 جد معادلة القطع الناقص الذي يقطع من محور السينات جزءاً طوله (8) وحدات ومن محور الصادات جزءاً طوله (12) وحدة. ثم جد المسافة بين البؤرتين والمساحة والمحيط.



$$2b = 8 \Rightarrow b = 4$$

$$2a = 12 \Rightarrow a = 6$$

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{36} = 1$$

$$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow c = \sqrt{a^2 - b^2}$$

$$c = \sqrt{36 - 16} = \sqrt{20} \Rightarrow c = 2\sqrt{5}$$

$$2c = 2\,(2\sqrt{5}) = 4\sqrt{5} \text{ unit}$$

$$A = ab\pi = 6\,(4)\,\pi = 24\pi \text{ unit}^2$$

$$p = 2\pi\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} = 2\pi\sqrt{\frac{36+16}{2}}$$

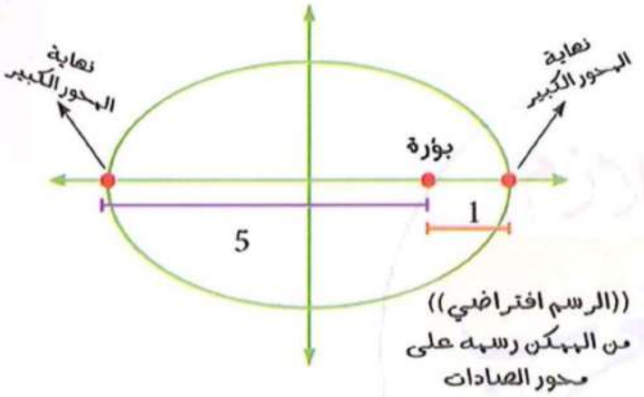
$$p = 2\sqrt{26}\,\pi \text{ unit}$$

ملاحظة ومثال عندما يعطي في السؤال بعدي احدى البؤرتين عن الرأسين بشكل عددين فأننا نستخدم المجموع والفرق.

مجموع البعدين $= 2a$

حاصل طرح البعدين $= 2c$

مثال 16 جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الأصل واحدى بؤرتيه تبعد عن نهايتي محوره الكبير بالعددين $1,5$ على الترتيب.



((الرسم افتراضي))
من الممكن رسمه على محور الصادات

مجموع البعدين $5 + 1 = 2a \Rightarrow [2a = 6] \div 2$

$$a = 3$$

حاصل طرح البعدين $5 - 1 = 2c \Rightarrow [2c = 4] \div 2$

$$c = 2$$

$$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow b = \sqrt{a^2 - c^2}$$

لم يحدد موقع البؤرة لذلك ناخذ احتمالين

$$b = \sqrt{9 - 4} \Rightarrow b = \sqrt{5}$$

السينات

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{5} = 1$$

الصادات

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{9} = 1$$

ملاحظة ومثال

إذا أعطى في السؤال معادلة قطع ناقص تحتوي على ثابت مجهول $h, k \in R$

الحالة الأولى: إذا كانت المعادلة تحتوي مجهول واحد فقط نستفاد من معادلة القطع المعطاة في السؤال لنجد a^2 او b^2 ونستخدم القانون العام $a^2 = b^2 + c^2$

مثال 17 لتكن $kx^2 + 4y^2 = 36$ معادلة قطع ناقص مركزه نقطة الأصل وإحدى بؤرتيه $(\sqrt{3}, 0)$ جد قيمة $k \in R$.

توضيح فقط

المعادلة $kx^2 + 4y^2 = 36$ تحوي مجهول واحد فقط لذلك نجعلها بالشكل القياسي ثم نجد منها أما a^2 أو b^2

$$\left[kx^2 + 4y^2 = 36\right] \div 36$$

$$\frac{kx^2}{36} + \frac{4y^2}{36} = \frac{36}{36} \Rightarrow \frac{x^2}{\frac{36}{k}} + \frac{y^2}{9} = 1$$

لأن البؤرة على محور السينات

إذن $\frac{36}{k} = a^2 \leftarrow \quad , \quad b^2 = 9 \quad , \quad c = \sqrt{3}$

$$a^2 = b^2 + c^2$$

$$\frac{36}{k} = 9 + (\sqrt{3})^2$$

$$\frac{36}{k} = 9 + 3 \Rightarrow \frac{36}{k} = 12 \Rightarrow k = \frac{36}{12} \Rightarrow \boxed{k = 3}$$

الحالة الثانية: إذا كانت معادلة القطع الناقص المعطاة في السؤال تحوي مجهولين فلا نستفيد منها بشيء، وانما نحل السؤال وكأن المطلوب هو معادلة القطع الناقص وبعدها نجعل معادلة المجاهيل بالشكل القياسي وبالمقارنة مع المعادلة التي وجدناها سوف نستخرج المجاهيل

مثال 18 قطع ناقص معادلته $hx^2 + ky^2 = 36$ مركزه نقطة الأصل ومجموع مربعي طولي محوريه يساوي (60) وإحدى بؤرتيه هي بؤرة القطع المكافئ الذي معادلته $y^2 = 4\sqrt{3}x$ جد قيمة $h, k \in R$.

لأن معادلة القطع الناقص تحتوي مجهولين لا نستفاد منها لذلك من معلومات السؤال نجد معادلة القطع الناقص.

$$y^2 = 4\sqrt{3}x$$

$$y^2 = 4Px \Rightarrow \left[4P = 4\sqrt{3}\right] \div 4 \Rightarrow P = \sqrt{3}$$

$$F(\sqrt{3}, 0)$$

$$\underset{\text{مكافئ}}{P} = \underset{\text{ناقص}}{c} \Rightarrow c = \sqrt{3}$$

$$\underbrace{\overbrace{(2a)^2 \;+\; (2b)^2}^{\text{مربعي}}}_{\text{مجموع طولي محوريه}} = 60$$

$$\left[4a^2 + 4b^2 = 60\right] \div 4$$

$$a^2 + b^2 = 15 \Rightarrow \boxed{a^2 = 15 - b^2} \;........(1)$$

تعويض

$$a^2 = b^2 + c^2$$

$$15 - b^2 = b^2 + (\sqrt{3})^2$$

1998 - د (1)

2017 - د (2)/تطبيقي/خارج   2017 - د (2)/احيائي

$$15 - b^2 = b^2 + 3$$

$$15 - 3 = b^2 + b^2 \Rightarrow \left[12 = 2b^2\right] \div 2$$

$b^2 = 6$ نعوض في معادلة (1)

$$a^2 = 15 - b^2$$

$$a^2 = 15 - 6 \Rightarrow a^2 = 9$$

الأن نجد معادلة القطع الناقص

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{6} = 1$$

بعد ذلك نجعل معادلة المجاهيل بالشكل القياسي ثم نقارنها

$$\left[hx^2 + ky^2 = 36\right] \div 36 \Rightarrow \frac{hx^2}{36} + \frac{ky^2}{36} = \frac{36}{36}$$

$$\frac{x^2}{\frac{36}{h}} + \frac{y^2}{\frac{36}{k}} = 1 \xrightarrow{\text{بالمقارنة}} \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{6} = 1$$

$$\frac{36}{h} = 9 \Rightarrow h = \frac{36}{9} \Rightarrow \boxed{h = 4}$$

$$\frac{36}{k} = 6 \Rightarrow k = \frac{36}{6} \Rightarrow \boxed{k = 6}$$

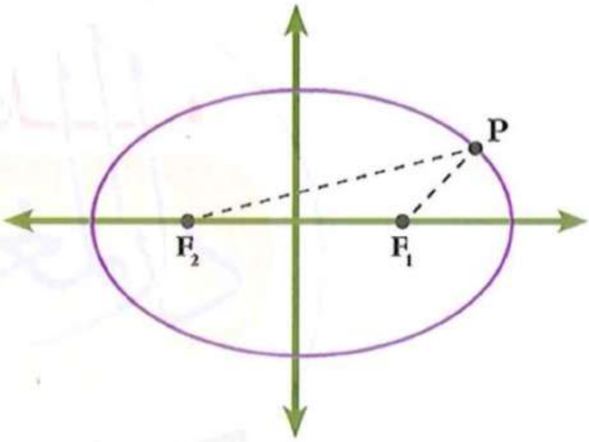
إيجاد معادلة القطع الناقص باستخدام التعريف

هناك عدة خطوات لحل السؤال

القانون ← التعويض ← التحويل ← التربيع ← الارجاع ← التربيع ثم تصفية الطرفين

التحويل: تحويل أحد الجذرين إلى الطرف الأيمن

الارجاع: ارجاع الجذر الى الطرف الأيسر



$$PF_1 + PF_2 = 2a$$

$$\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} + \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = 2a$$

توضيح

$$P(\underset{x_2}{x}, \underset{y_2}{y}) \xrightarrow{PF_1} F_1 (\overset{x_1}{C}, \overset{y_1}{0})$$

$$P(\underset{x_2}{x}, \underset{y_2}{y}) \xrightarrow{PF_2} F_2 (\overset{x_1}{-C}, \overset{y_1}{0})$$

مثال 19 باستخدام التعريف جد معادلة القطع الناقص الذي بؤرتاه النقطتان ($0, \pm 2$) ورأساه ($0, \pm 3$) ومركزه نقطة الأصل .

$$PF_1 + PF_2 = 2a$$

القانون $\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} + \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = 2a$

التعويض $\sqrt{(x-0)^2 + (y-2)^2} + \sqrt{(x-0)^2 + (y+2)^2} = 6$

التحويل (تحويل الجذر للطرف الاخر)

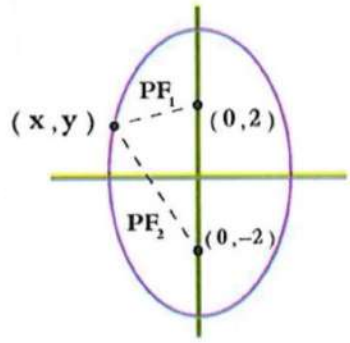
وبتربيع الطرفين $\sqrt{x^2 + y^2 - 4y + 4} = 6 - \sqrt{x^2 + y^2 + 4y + 4}$

فتح التربيع داخل الجذر اعلاه فتح التربيع داخل الجذر اعلاه

$$\cancel{x^2} + \cancel{y^2} - 4y + \cancel{4} = 36 - 12\sqrt{x^2 + y^2 + 4y + 4} + \cancel{x^2} + \cancel{y^2} + 4y + \cancel{4}$$

$$\left[12\sqrt{x^2 + y^2 + 4y + 4} = 36 + 8y\right] \div 4$$

$3\sqrt{x^2 + y^2 + 4y + 4} = 9 + 2y$ وبتربيع الطرفين



$$9(x^2 + y^2 + 4y + 4) = 81 + 36y + 4y^2$$

$$9x^2 + 9y^2 + \cancel{36y} + 36 = 81 + \cancel{36y} + 4y^2$$

$$9x^2 + 9y^2 - 4y^2 = 81 - 36$$

$$\left[9x^2 + 5y^2 = 45\right] \div 45$$

$\boxed{\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{9} = 1}$ معادلة القطع الناقص

مثال 20 باستخدام التعريف جد معادلة القطع الناقص اذا علمت ان المسافة بين بؤرتيه 6 وحدات والعدد الثابت =10 والبؤرتان تقعان على محور السينات :

$$PF_1 + PF_2 = 2a$$

القانون $\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} + \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = 2a$

التعويض $\sqrt{(x-3)^2 + (y-0)^2} + \sqrt{(x+3)^2 + (y-0)^2} = 10$

التحويل (تحويل الجذر للطرف الاخر)

وبتربيع الطرفين $\sqrt{x^2 - 6x + 9 + y^2} = 10 - \sqrt{x^2 + 6x + 9 + y^2}$

فتح التربيع داخل الجذر اعلاه   فتح التربيع داخل الجذر اعلاه

$$\cancel{x^2} - 6x + \cancel{9} + \cancel{y^2} = 100 - 20\sqrt{x^2 + 6x + 9 + y^2} + \cancel{x^2} + 6x + \cancel{9} + \cancel{y^2}$$

وبتربيع الطرفين $\left[20\sqrt{x^2 + 6x + 9 + y^2} = 100 + 12x\right] \div 4$

$$5\sqrt{x^2 + 6x + 9 + y^2} = 25 + 3x$$

$$25(x^2 + 6x + 9 + y^2) = 625 + 150x + 9x^2$$

$$25x^2 + \cancel{150x} + 225 + 25y^2 = 625 + \cancel{150x} + 9x^2$$

$$25x^2 + 25y^2 - 9x^2 = 625 - 225$$

$$\left[16x^2 + 25y^2 = 400\right] \div 400$$

معادلة القطع الناقص $\boxed{\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1}$

توضيح

$$2c = 6 \Rightarrow c = 3$$

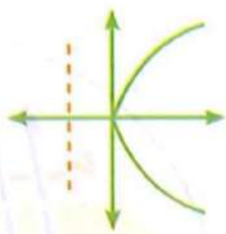
العدد الثابت $\boxed{2a = 10}$

$$P(\underset{x_2}{x}, \underset{y_2}{y}) \nearrow F_1(\overset{x_1}{3}, \overset{y_1}{0}) \qquad P(x,y) \searrow F_2(\underset{x_1}{-3}, \underset{y_1}{0})$$

الاسئلة الوزارية الخاصة بالقطع الناقص والربط بين القطعين المكافئ والناقص

سؤال 1 النقطة $\left(\frac{1}{3},2\right)$ تنتمي الى القطع المكافئ الذي راسه نقطة الاصل وبؤرته تنتمي الى محور السينات والتي هي احدى بؤرتي القطع الناقص الذي مركزه نقطة الاصل والنسبة بين طولي محوريه $\left(\frac{5}{4}\right)$ جد معادلة القطعين المكافئ والناقص.

القطع المكافئ:



الفتحة نحو اليمين لأن النقطة في الربع الأول والبؤرة على محور السينات.

$$y^2 = 4Px$$

$$(2)^2 = 4P\left(\frac{1}{3}\right) \Rightarrow 4 = \frac{4P}{3} \Rightarrow P = 3$$

$$y^2 = 4(3)x \Rightarrow \boxed{y^2 = 12x}$$

القطع الناقص:

$$\underset{\text{مكافئ}}{P} = \underset{\text{ناقص}}{C}$$

1999 - د (2)

2017 - د (2)/احيائي/خارج

$$\frac{\cancel{2}a}{\cancel{2}b} = \frac{5}{4} \Rightarrow [4a = 5b] \div 4$$

$$a = \frac{5}{4}b \,......(1)$$

$$a^2 = b^2 + c^2$$

$$\left(\frac{5}{4}b\right)^2 = b^2 + (3)^3$$

$$\left[\frac{25}{16}b^2 = b^2 + 9\right].\ 16$$

$$25b^2 = 16b^2 + 144$$

$$25b^2 - 16b^2 = 144$$

$$[9b^2 = 144] \div 9 \Rightarrow b^2 = 16 \Rightarrow b = 4$$

$$a = \frac{5}{4}b$$ نعوض في معادلة (1)

$$a = \frac{5}{\cancel{4}}(\cancel{4}) \Rightarrow a = 5$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \boxed{\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1}$$

سؤال 2 جد معادلة القطع الناقص الذي بؤرتاه تنتمي لمحور الصادات ومساحته (32π) وحدة مساحة والنسبة بين طولي محوريه كنسبة $\frac{1}{2}$.

2015 - د (2)

$$\frac{\cancel{2}b}{\cancel{2}a} = \frac{1}{2} \Rightarrow a = 2b \,........(1)$$

$A = a.b\pi$ نعوض معادلة (1) هنا

$$32\cancel{\pi} = a.b\cancel{\pi}$$

$$32 = (2b)(b) \Rightarrow [2b^2 = 32] \div 2$$

$b^2 = 16$ بالجذر

$b = 4$ نعوض معادلة (1)

$$a = 2(b) = 2(4) \Rightarrow a = 8$$

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{64} = 1$$

سؤال 3 لتكن $y^2+12x=0$, $y^2-12x=0$ معادلتي قطعين مكافئين جد بؤرة كل منهما ومعادلة دليله ثم جد معادلة القطع الناقص الذي بؤرتاه هما بؤرتي القطعين المكافئين وطول محوره الصغير يساوي (10) وحدات طول .

2005 - د (2)

القطع المكافئ:

$$y^2-12x=0$$
$$y^2=12x$$
$$y^2=4Px \Rightarrow [4P=12]\div 4 \Rightarrow P=3$$

البؤرة $F(3,0)$

معادلة الدليل $x=-3$

$$y^2+12x=0$$
$$y^2=-12x$$
$$y^2=4Px \Rightarrow [4P=12]\div 4 \Rightarrow P=3$$

البؤرة $F(-3,0)$

معادلة الدليل $x=+3$

القطع الناقص: $c_{\text{مكافئ}} = P_{\text{مكافئ}}$

بؤرتاه هما $F_1(3,0)$, $F_2(-3,0)$

$$\therefore\ c=3$$
$$[2b=10]\div 2 \Rightarrow b=5$$
$$a^2=b^2+c^2$$
$$a^2=5^2+3^2 \Rightarrow a^2=25+9$$
$$a^2=34$$
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \Rightarrow \frac{x^2}{34}+\frac{y^2}{25}=1$$

سؤال 4 جد معادلة القطع الناقص الناقص الذي إحدى بؤرتيه هي بؤرته القطع المكافئ $y^2=-8x$ وطول محوره الكبير ثلاث امثال طول محوره الصغير .

2010 تمهيدي

$$y^2=-8x$$
$$y^2=-4Px \Rightarrow [4P=8]\div 4 \Rightarrow P=2$$

((سينات)) $F(-2,0)$

$$[2a=3(2b)]\div 2$$
$$a=3b\ \ldots\ldots(1)$$
$$a^2=b^2+c^2$$
$$(3b)^2=b^2+4 \Rightarrow 9b^2=b^2+4$$
$$9b^2-b^2=4 \Rightarrow [8b^2=4]\div 8$$
$$b^2=\frac{1}{2} \Rightarrow b=\frac{1}{\sqrt{2}}$$
$$a=3b \Rightarrow a=3\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$
$$a=\frac{3}{\sqrt{2}} \Rightarrow a^2=\frac{9}{2}$$
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \Rightarrow \frac{x^2}{\frac{9}{2}}+\frac{y^2}{\frac{1}{2}}=1$$

سؤال 5 جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الأصل ومحوره على المحورين الاجداثيين ويمر من بؤرة القطع المكافئ $y^2-16x=0$ ومساحة منطقة القطع الناقص 20π وحدة مساحة.

2010 - د (1)

$y^2=16x$

$y^2=4Px \Rightarrow [4P=16]\div 4 \Rightarrow P=4$

البؤرة $F(4,0)$

القطع الناقص:

يمر من بؤرة المكافئ $F(4,0)$ أما $a=4$ أو $b=4$

$A=ab\pi$

$20\cancel{\pi}=a.b\cancel{\pi} \Rightarrow 20=a.b \quad ......(1)$

يوجد لدينا احتمالين:

الأول: $a=4$ نعوض بمعادلة (1)

$[20=4b]\div 4 \Rightarrow b=5$

هذا الاحتمال يُهمل لأن فيه a اصغر من b وهذا لايمكن في القطع الناقص.

الثاني: $b=4$ نعوض بمعادلة (1)

$[20=4a]\div 4 \Rightarrow a=5$

هذا الاحتمال صح لأن a أكبر من b.

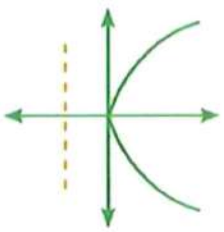
$$\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1 \Rightarrow \boxed{\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{25}=1}$$

ملاحظة القطع على محور الصادات لأن البؤرة $F(4,0)$ التي مر بها القطع اصبحت b أي انها قطب وبما ان القطب سيني فالقطع صادي لأن البؤرة عكس القطب.

سؤال 6 قطع ناقص راساه $(\pm 5,0)$ وإحدى بؤرتيه هي بؤره القطع المكافئ الذي راسه نقطة الأصل والمار دليله بالنقطة $(-3,4)$ جد معادلة القطعين المكافئ والناقص.

2012
خارج القطر

القطع المكافئ:



القطعان على محور السينات.

$y^2=4Px \qquad P=3$

معادلة القطع المكافئ $y^2=4(3)x \Rightarrow y^2=12x$

القطع الناقص:

بؤرتة القطع المكافئ والتي هي $\leftarrow F(3,0)$
إحدى بؤرتي الناقص رأساه $(\mp 5, 0)$

$c=3 \qquad a=5 \qquad b=?$

$a^2=b^2+c^2 \Rightarrow b=\sqrt{a^2-c^2}$

$b=\sqrt{25-9}=\sqrt{16}$

$b=4$

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \Rightarrow \frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$$

سؤال 7 جد معادلة القطع الناقص الذي تقع بؤرتاه على محور السينات ومركزه نقطة الأصل والنسبة بين طولي محوريه $1:2$ ويقطع القطع المكافئ $y^2 = 8x$ عند $x = 2$

2013 خارج القطر

$$y^2 = 8x$$

$$y^2 = 8(2) \Rightarrow y^2 = 16$$ بالجذر

$$y = \mp 4 \quad (2,4)\ ,\ (2,-4)$$

$$\frac{\cancel{2}b}{\cancel{2}a} = \frac{1}{2} \Rightarrow a = 2b ....(1)$$

لأن لدينا (x, y) نستفيد من معادلة القطع الناقص القياسية .

نعوض $(2,4)$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$\frac{(\cancel{2})^2}{(2b)^2} + \frac{(4)^2}{b^2} = 1$$

$$\frac{\cancel{4}}{\cancel{4}b^2} + \frac{16}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{1}{b^2} + \frac{16}{b^2} = 1$$

$$\frac{17}{b^2} = \frac{1}{1} \Rightarrow b^2 = 17$$

$$b = \sqrt{17} \Rightarrow a = 2b$$

$$a = 2\sqrt{17} \Rightarrow a^2 = 68$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{68} + \frac{y^2}{17} = 1$$

سؤال 8 جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الأصل وينطبق محوراه على المحورين الاحداثيين ويقطع من محور السينات جزءاً طوله (8) وحدات ومساحة منطقته 24π وحدة مساحة .

2012 - د (2)

الجزء المقطوع من محور السينات

أما $2a = 8 \Rightarrow a = 4$

أو $2b = 8 \Rightarrow b = 4$

$$A = a\,.\,b\pi$$

$$24\cancel{\pi} = a\,.\,b\cancel{\pi} \Rightarrow a\,.\,b = 24$$

نعوض أولاً $a = 4$

يُهمل $[4b = 24] \div 4 \Rightarrow b = 6$

لأن $a < b$ أصغر

ثم نعوض $b = 4$

$$[4a = 24] \div 4 \Rightarrow a = 6 \quad o.k$$

الأكبر $a > b$

$$a = 6\ ,\ b = 4$$

القطع على محور الصادات لأن الجزء المقطوع منه محور السينات اصبح يمثل $(2b)$ أي محور القطب .

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{36} = 1$$

سؤال 9 جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الأصل وبعده البؤري مساوياً لبعد بؤرة القطع المكافئ $y^2 + 24x = 0$ عن دليله إذا علمت ان مساحة القطع الناقص تساوي $80\pi cm^2$.

2016 - د (1)

2019 - د (1)/تطبيقي

$$y^2 = -24x$$

$$y^2 = -4Px \Rightarrow [4P = 24] \div 4$$

$$P = 6$$

البعد بين بؤرة القطع المكافئ ودليله $= 2P$

$$\underbrace{2c}_{\text{بعده البؤري}} = \underbrace{2P}_{\text{لبعد بؤرة القطع المكافئ عن دليله}}$$

مساوياً

$\therefore c = P \Rightarrow \boxed{c = 6}$ (للناقص)

$$A = a \cdot b\pi$$

$$80\cancel{\pi} = a \cdot b\cancel{\pi} \Rightarrow b = \frac{80}{a} \text{.......}(1)$$

$$a^2 = b^2 + c^2$$

$$a^2 = \left(\frac{80}{a}\right)^2 + (6)^2$$

$$\left[a^2 = \frac{6400}{a^2} + 36\right] \cdot a^2$$

$$a^4 = 6400 + 36a^2$$

$$a^4 - 36a^2 - 6400 = 0$$

$$(a^2 + 64)(a^2 - 100) = 0$$

أما $a^2 + 64 = 0 \quad \notin R$

أو $a^2 - 100 = 0 \Rightarrow a^2 = 100 \Rightarrow a = 10$

$$b = \frac{80}{a} = \frac{80}{10} \Rightarrow b = 8$$

لم يحدد بؤرة القطع

إنتبه ! على الرغم ان القطع المكافئ على محور السينات إلا ان لم يحدد موقع البؤرة وانما اطوال فقط .

فقال $2c = 2P$ وهذا لا يعني انهما يقعان على نفس المحور .

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{64} = 1$$

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{100} = 1$$

سؤال 10 إذا كان $e+id=\frac{4+2i}{1-i}$ جد معادلة القطع الناقص الذي إحدى بؤرتيه $(0,d)$ وطول محوره الكبير يساوي $2\|e+di\|$

2014 نازحين
2016 نازحين

$$e+id=\frac{4+2i}{1-i}\cdot\frac{1+i}{1+i}$$

$$e+id=\frac{4+4i+2i-2}{(1)^1+(1)^2}=\frac{2+6i}{2}$$

$$e+di=1+3i \Rightarrow e=1$$

$$d=3$$

إحدى بؤرتي القطع الناقص $(0,d)=(0,3)$

$$r=\|e+di\|=\sqrt{e^2+d^2}$$

$$=\sqrt{(1)^2+(3)^2}=\sqrt{10}$$

$$2a=2\sqrt{10} \Rightarrow a=\sqrt{10} \Rightarrow a^2=10$$

$$c=3 \quad , a=\sqrt{10} \quad , \ b=?$$

$$a^2=b^2+c^2 \Rightarrow b=\sqrt{a^2-c^2}$$

$$b=\sqrt{10-9}=\sqrt{1}$$

$$b=1$$

$$\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1 \Rightarrow \boxed{\frac{x^2}{1}+\frac{y^2}{10}=1}$$

سؤال 11 قطع ناقص معادلته $4x^2+2y^2=k$ والبعد بين بؤرتيه $2\sqrt{3}$ وحدة طول جد قيمه k.

2008 - د (1)

$$\left[4x^2+2y^2=k\right]\div k$$

$$\frac{4x^2}{k}+\frac{2y^2}{k}=1 \Rightarrow \frac{x^2}{\frac{k}{4}}+\frac{y^2}{\frac{k}{2}}=1$$

$$\left[2c=2\sqrt{3}\right]\div 2 \Rightarrow \boxed{c=\sqrt{3}}$$

$\frac{k}{2}$ أكبر من $\frac{k}{4}$ ((كلما صغر المقام كبر الكسر))

((القطع صادي)) لأن الكبير $\frac{k}{2}$ يقع على محور (y)

$$a^2=\frac{k}{2},\ b^2=\frac{k}{4},\ c=\sqrt{3}$$

$$a^2=b^2+c^2$$

$$\frac{k}{2}=\frac{k}{4}+\left(\sqrt{3}\right)^2$$

$$\left[\frac{k}{2}=\frac{k}{4}+3\right].4$$

$$2k=k+12$$

$$2k-k=12 \Rightarrow \boxed{k=12}$$

سؤال 12 إذا كان $ky^2 + 3x^2 = z$ معادلة قطع ناقص بؤرتاه تنتميان الى محور السينات ويمر بنقطة تقاطع المستقيم $2x + y = \sqrt{3}$ مع المحور الصادي علماً ان مساحة القطع $2\sqrt{3}\pi$ وحدة مساحة جد $k, Z \in R$.

2010 - د (2)

((نقطة التقاطع مع محور الصادات)) $x = 0$ $2x + y = \sqrt{3}$

$2(0) + y = \sqrt{3}$

هذه النقطة تمثل القطب لانها على محور $y \rightarrow (0, \sqrt{3})$ $y = \sqrt{3}$

والبؤرة على محور X اي ان $b = \sqrt{3}$

$$A = a.b\pi \Rightarrow 2\cancel{\sqrt{3}}\cancel{\pi} = a(\cancel{\sqrt{3}})\cancel{\pi} \Rightarrow a = 2$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$$

$$[ky^2 + 3x^2 = Z] \div Z \Rightarrow \frac{3x^2}{Z} + \frac{ky^2}{Z} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{\underbrace{\frac{Z}{3}}_{a^2}} + \frac{y^2}{\underbrace{\frac{Z}{k}}_{b^2}}$$

$$\frac{Z}{3} = a^2 \Rightarrow \frac{Z}{3} = 4 \Rightarrow \boxed{Z = 12}$$

$$\frac{Z}{k} = b^2 \Rightarrow \frac{12}{k} = 3 \Rightarrow k = \frac{12}{3} \Rightarrow \boxed{k = 4}$$

ملاحظة: إذا جاء سؤال عبارة عن نصف قطع ناقص وكان معلوم المسافة بين القاعدتين والارتفاع نتبع ما يأتي:

1- نقسم البعد بين القاعدتين على (2) ونجد الناتج

2- إذا كان الارتفاع اصغر من ناتج القسمة (القطع سينات) واذا كان الارتفاع أكبر من الناتج (القطع صادات).

3- نستخدم المعادلة القياسية المناسبة حسب القطع ونعوض a،b ثم نجد المطلوب.

انتبه الارتفاع عند نقطة معينة معناها ان المطلوب هو (y).

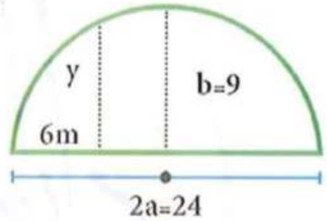
سؤال 13 جسر على شكل نصف قطع ناقص المسافة بين نهايتي قاعدتيه (24m) واعلى ارتفاع للجسر (9m) احسب ارتفاع الجسر عند النقطة التي تبعد 6m من بداية احدى قاعدتيه

$\div 2$ [المسافة بين القاعدتين $= 24$]

الناتج $\rightarrow 12$

الأرتفاع $\rightarrow 9$

الارتفاع اصغر من الناتج ← سينات



$$2a = 24 \Rightarrow \boxed{a = 12}$$

$$\boxed{b = 9}$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{144} + \frac{y^2}{81} = 1$$

2014 - تمهيدي

$x = 6m \ , \ y = ?$

نعوض x بالمعادلة الاخيرة ونجد (y)

$$\frac{x^2}{144} + \frac{y^2}{81} = 1 \Rightarrow \frac{\cancel{36}^{1}}{\cancel{144}_{4}} + \frac{y^2}{81} = 1$$

$$\frac{1}{4} + \frac{y^2}{81} = 1 \Rightarrow \frac{y^2}{81} = 1 - \frac{1}{4}$$

$$\frac{y^2}{81} = \frac{3}{4} \Rightarrow y^2 = \frac{3 * 81}{4}$$ بالجذر

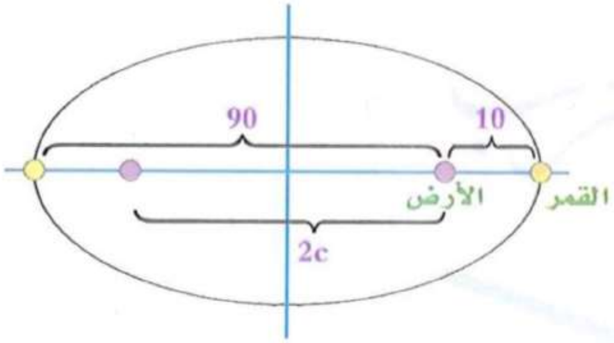
$$\boxed{y = \frac{9\sqrt{3}}{2}\ m}$$

سؤال 14 يدور القمر حول الأرض في مدار على شكل قطع ناقص سيني البؤرتين تقع الأرض في احدى بؤرتيه فاذا كانت اطول مسافة بين الأرض والقمر 90km وأقصر مسافة بينهما 10km جد الأختلاف المركزي للقطع

$$90 + 10 = 100 = 2a \rightarrow a = 50$$

$$90 - 10 = 80 = 2c \rightarrow c = 40$$

$$e = \frac{c}{a} = \frac{40}{50} = \frac{4}{5} < $$



2016 - د (2)/ خارج

الملحق الشرحي / الايضاحي

مثال 6 جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الاصل واحدى بؤرتيه هي بؤرة القطع المكافئ $y^2-12x=0$ وطول محوره الصغير (10) وحدات .

1 نبدأ من المعلومة المباشرة وهي طول المحور الصغير (10) حيث تمثل (2b) ومنها وجدنا (b) .

2 من المعادلة القطع المكافئ $y^2-12x=0$ نجد P وهي نفسها قيمة (C) لأنه ذكر عبارة [احدى بؤرتيه هي بؤرة القطع المكافئ].

3 أصبح لدينا (b) و (c) لذلك نجد (a) من القانون العام ونكتب المعادلة .

مثال 7 جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الاصل و بؤرتاه على محور السينات والمسافة بينهما (6) وحدات والفرق بين طولي محوريه (2) .

1 نبدأ من المعلومة المباشرة وهي المسافة بين البؤرتين 2c ومنها وجدنا (c) .

2 المعلومة الثانية هي (الفرق بين طولي محوريه) وهذه المعلومات تفيدنا ان نجد منها معادلة .

لذلك وجدنا منها (b+1=a) معادلة تساعد في الحل .

3 أصبح لدينا (c) ومعادلة نعوضهما في القانون العام وبحل المعادلة (اساسيات) نجد المجهول ⟵ قيمة (b) .

4 نعوض b في معادلة (1) ونجد (a) .

مثال 8 جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الاصل واحدى بؤرتيه هي بؤرة القطع المكافئ $x^2=24y$ ومجموع طولي محوريه (36) وحدة .

تنويه

لا يوجد معلومة مباشرة ويُفضل في مثل هذه الأسئلة استغلال معادلة القطع المكافئ لأن فيها مفتاح الحل غالباً

1 من المعادلة القطع المكافئ وجدنا P وهي تمثل قيمة (c) .

2 من مجموع طولي محوريه نجد معادلة لأننا ذكرنا سابقاً ونعيد التذكير ان هذه المعلومات تفيدنا ان نجد معادلة .

3 وجدنا (c) من معادلة المكافئ ووجدنا (b=18-a) من المعلومة الثانية نظيف بعدها القانون العام ونعوض ما لدينا ونجد المجهول وهو (a) .

4 نعوض (a) بمعادلة (1) ونجد (b) ونكتب المعادلة .

مثال 9 جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الاصل وإحدى بؤرتيه هي بؤرة القطع المكافئ $y^2+8x=0$ علماً ان القطع الناقص يمر بالنقطة $(2\sqrt{3}, \sqrt{3})$

1. لا توجد معلومة مباشرة لذلك نستخدم وجود معادلة القطع المكافئ ونجد منها (P) وهي تمثل (c) استناداً على عبارة السؤال.

2. النقطة $(2\sqrt{3}, \sqrt{3})$ يمر بها القطع الناقص نعوض بالقياسية كما تم توضيح ذلك في المحاضرات وبعد التعويض نجد معادلة.

3. نستخدم القانون العام ونعوض (c) وكذلك المعادلة المستخرجة بعد تعويض النقطة.

4. يتم حل المعادلة بالاساسيات ونجد المجاهيل.

مثال 10 جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الأصل وبؤرتاه نقطتا تقاطع المنحني $x^2+y^2-3x=16$ مع محور الصادات ويمس دليل القطع المكافئ $y^2=12x$

إنتبه رجاءاً

عندما يأتي سؤال يذكر فيه عبارة [نقطة تقاطع مع محور < السينات / الصادات] ابدأ مباشرة من هذه المعلومة لأنها تعطي معلومة للحل.

1. تقاطع مع محور الصادات $x=0$ عوض ثم أوجد $(y) \longleftarrow (0,y)$ هذه النقطة هنا تمثل البؤرة لأنه قال ذلك (اصبح لدينا c).

2. يمس دليل القطع المكافئ هنا نجد P ثم نقول أما a أو b

3. أوجدنا (c) ⟵ صادات
أوجدنا (P) ⟵ سينات
يخالف لذلك $b=P$

4. أصبح لدينا b و c نجد a من القانون العام ونكتب المعادلة.

مثال 17 لتكن $kx^2+4y^2=36$ معادلة قطع ناقص مركزه نقطة الاصل واحدى بؤرتيه $(\sqrt{3},0)$ جد قيمة $K \in R$

1. المعادلة $kx^2+4y^2=36$ فيها مجهول واحد لذلك نضع المعادلة بالشكل القياسي
2. لدينا البؤرة $(\sqrt{3},0)$ معلومة مباشرة تمثل (c).
3. من المعادلة حدد a^2 و b^2 ثم طبق القانون العام.

مثال 18 قطع ناقص معادلته $hx^2+ky^2=36$ مركزه نقطة الأصل ومجموع مربعي طولي محوريه يساوي (60) واحدى بؤرتيه هي بؤرة القطع المكافئ الذي معادلته $y^2=4\sqrt{3}x$ جد $h,K \in R$

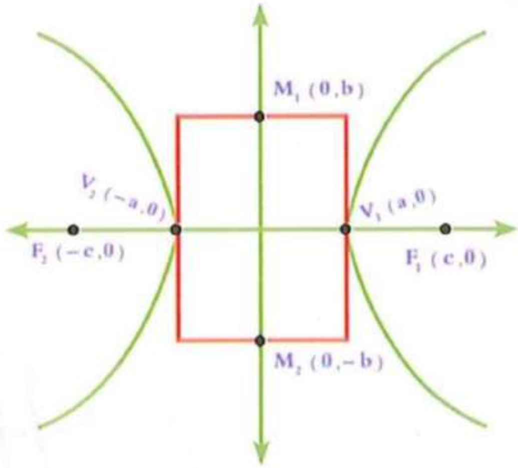
1. من معادلة القطع المكافئ نجد P تعتبر هي قيمة (c) حسب العبارة الواردة.
2. عبارة (مجموع مربعي طولي محوريه) نستخرج منها معادلة مساعدة في الحل.

$$(2a)^2+(2b)^2=60 \Rightarrow a^2=15-b^2 \ldots (1)$$

3. نعوض (c) والمعادلة ... (1) بالقانون العام ونجد المجاهيل.
4. نجعل معادلة السؤال قياسية ونكتب معادلة القطع الناقص وبالمقارنة نجد $h,K \in R$

القطع الزائد

تعريف: هو مجموعة من النقط في المستوي التي تكون القيمة المطلقة لفرق بعدي اي منها عن نقطتين ثابتين ((البؤرتان)) يساوي عدداً ثابتاً .



قطع زائد بؤرتاه على محور السينات

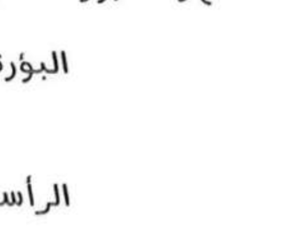
البؤرتان $F_1\ (c,0)$ ، $F_2\ (-c,0)$

الرأسان $V_1\ (a,0)$ ، $V_2\ (-a,0)$

القطبان $M_1\ (0\ ,\ b)$ ، $M_2\ (0\ ,\ -b)$

* النقطتان $(0,b)-(0,-b)$ سوف نسميها القطبان فقط للتوضيح لم يطلق عليها اسم اقطاب في المنهج .

المعادلة القياسية : $\boxed{\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1}$

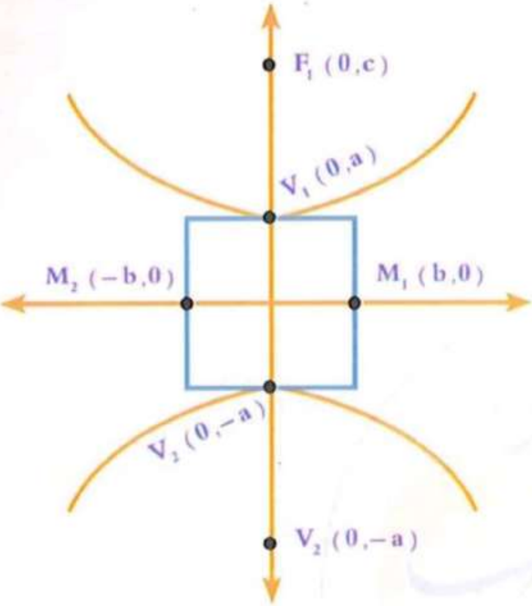


يُسمى نصف القطر البؤري الايمن PF_1

يُسمى نصف القطر البؤري الايسر PF_2

$|PF_1 - PF_2| = 2a$

$|PF_1 - PF_2|$ / القيمة المطلقة للفرق بين بعدي أي نقطة عن بؤرتيه .



قطع زائد بؤرتاه على محور الصادات

البؤرتان $F_1\ (0,c)$ ، $F_2\ (0,-c)$

الرأسان $v_1\ (0,a)$ ، $v_2\ (0,-a)$

القطبان $M_1\ (b\ ,\ 0)$ ، $M_2\ (-b\ ,0)$

المعادلة القياسية :

$$\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1$$

ملاحظات حول القطع الزائد

أولاً مصطلحات القطع الزائد :

$2a =$ طول المحور الحقيقي أو العدد الثابت أو البعد بين الرأسين .

$2b =$ طول المحور المرافق ((التخيلي)) وهو عمودي المحور الحقيقي .

$2c =$ البعد بين البؤرتين .

ثانياً في القطع الزائد $\begin{pmatrix} c & \text{أكبر} & a \\ c & \text{أكبر} & b \end{pmatrix}$ دائماً وقد تكون $a = b$

ثالثاً لاحظ المعادلة القياسية :

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad \frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$$

السينات الصادات

دائماً أول رقم يمثل a^2 والثاني (b^2) لا يتغير .

رابعاً لا يوجد قانون للمساحة والمحيط في القطع الزائد .

خامساً الاختلاف المركزي (e) أكبر من (1) لذلك ان وجدت اختلاف مركزي أكبر من (1) هذا قطع زائد حتى وإن لم يذكر نوع القطع .

سادساً في القطع الزائد :

1. كل كلمة يمر $(x, 0)$ أو $(0, y)$ يعني هنا (a)
2. كل يمس هذه a
3. كل يقطع عند رقم $x = \pm$ ، رقم $y = \pm$ هذا الرقم هو (a)

سابعاً القوانين :

$$c^2 = a^2 + b^2 \;\Rightarrow\; a = \sqrt{c^2 - b^2} \;,\; b = \sqrt{c^2 - a^2}$$

$e = \frac{c}{a}$ الاختلاف المركزي

ثامناً عندما يذكر عبارة قطع زائد قائم معناها طول المحور الحقيقي = طول المحور المرافق

$e = \sqrt{2}$ وأن $\boxed{2a = 2b} \Rightarrow \boxed{a = b}$

العلاقات بين القطوع

تعلم كيف تحدد العلاقة بين القطوع من خلال الأمثلة التوضيحية الآتية :

1 لو قال في السؤال مثلاً :

جد معادلة القطع الناقص الذي إحدى بؤرتيه // هي بؤرته القطع المكافئ

ناقص ، c ، P

معناها علامة يساوي =

$\underset{\text{ناقص}}{C} = \underset{\text{مكافئ}}{P}$

2 لو قال في السؤال مثلاً :

جد معادلة القطع الزائد الذي رأساه // هما بؤرتا القطع الناقص

زائد ، a ، ناقص c

$\underset{\text{زائد}}{a} = \underset{\text{ناقص}}{C}$

3 لو قال في السؤال مثلاً :

جد معادلة القطع الناقص الذي بؤرتاه تنطبقان // على بؤرتي القطع الزائد

ناقص ، c ، c ، زائد

معناها علامة يساوي =

$\underset{\text{ناقص}}{C} = \underset{\text{زائد}}{C}$

4 لو قال في السؤال مثلاً :

جد معادلة القطع الناقص الذي أحد قطباه // هو رأس القطع الزائد

ناقص ، b ، a ، زائد

معناها علامة يساوي =

$\underset{\text{ناقص}}{b} = \underset{\text{زائد}}{a}$

5 عبارة قطعان زائد وناقص كل منهما يمر ببؤرة الاخر معناها :

$\underset{\text{ناقص}}{a} = \underset{\text{زائد}}{c}$

$\underset{\text{زائد}}{a} = \underset{\text{ناقص}}{c}$

راجع السؤال الخامس والثامن عشر في الاسئلة الوزارية

* عندما يذكر عبارة قطع زائد قائم معناها
طول المحور الحقيقي = طول المحور المرافق
$\boxed{a = b} \Rightarrow \boxed{2a = 2b}$ وأن $e = \sqrt{2}$

مقارنة بين القطع الناقص والزائد

القطع الناقص	القطع الزائد
أولاً: له مساحة ومحيط فكل سؤال يحوي مساحة ومحيط هذه القطع ناقص	أولاً: لا يوجد له مساحة ومحيط لذلك السؤال الذي فيه مساحة أو محيط ولم يذكر نوع القطع فهو ناقص.
ثانياً: الاختلاف المركزي أصغر من (1)	ثانياً: الاختلاف المركزي أكبر من (1)
ثالثاً: a أكبر من b,c	ثالثاً: c أكبر من b,a
رابعاً: المعادلة القياسية ذات اشارة موجبة $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \quad , \quad \frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$	رابعاً: المعادلة القياسية ذات اشارة سالبة $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \quad , \quad \frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1$
خامساً: المصطلحات: طول المحور الكبير = 2a طول المحور الصغير = 2b	خامساً: المصطلحات: طول المحور الحقيقي = 2a طول المحور المرافق = 2b
سادساً: يقطع المحورين عند a,b	سادساً: يقطع محور واحد عند a

أمثلة توضيحية:

قطع مخروطي مساحته $20\pi\ cm^2$ ..... الخ ← القطع ناقص / فيه مساحة.

قطع مخروطي اختلافه المركزي 1.2 .... الخ ← القطع زائد / e أكبر من (1).

قطع مخروطي رأسه (5,0) وإحدى بؤرتيه (3,0) .... الخ / القطع ناقص/ $\overset{\text{أكبر}}{a} > c$

قطع مخروطي رأسه (10,0) ويمر من (0,6) ..... الخ / قطع ناقص يقطع المحورين a,b

قطع مخروطي طول محوره الحقيقي 12 وحدة .... الخ/ قطع زائد/ من مصطلح محور حقيقي.

مثال 1 عيّن البؤرتان والرأسان وطول المحورين والاختلاف المركزي للقطوع الزائدة التالية ثم ارسمها:

1 $\frac{x^2}{64}-\frac{y^2}{36}=1$

$a^2=64 \Rightarrow \boxed{a=8}$

$b^2=36 \Rightarrow \boxed{b=6}$

$c^2=a^2+b^2$

$c^2=64+36 \Rightarrow c^2=100 \Rightarrow c=10$

1. البؤرتان: $F_1\ (c,0) \Rightarrow F_1\ (10,0)$

$F_2\ (-c,0) \Rightarrow F_2\ (-10,0)$

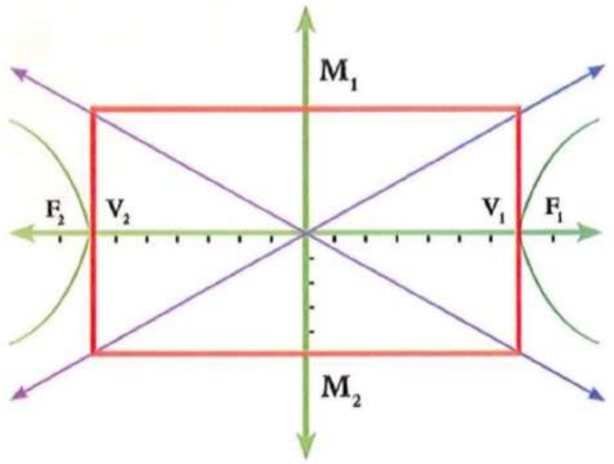
2. الرأسان:

$V_1\ (a,0) \Rightarrow V_1\ (8,0)$

$V_2\ (-a,0) \Rightarrow V_2\ (-8,0)$

3. طول المحور الحقيقي $=2a=16$ وحدة
4. طول المحور المرافق $=2b=12$ وحدة
5. الاختلاف المركزي:

$e=\frac{c}{a}=\frac{10}{8}=\frac{5}{4}$



2 $12x^2-4y^2=48$

$\left[12x^2-4y^2=48\right]\div 48$

$\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{12}=1$

$a^2=4 \Rightarrow \boxed{a=2}$

$b^2=12 \Rightarrow \boxed{b=2\sqrt{3}}$

$c^2=a^2+b^2$

$c^2=4+12 \Rightarrow c^2=16 \Rightarrow \boxed{c=4}$

1. البؤرتان:

$F_1\ (c,0) \Rightarrow F_1\ (4,0)$

$F_2\ (-c,0) \Rightarrow F_2\ (-4,0)$

2. الرأسان:

$V_1\ (a,0) \Rightarrow V_1\ (2,0)$

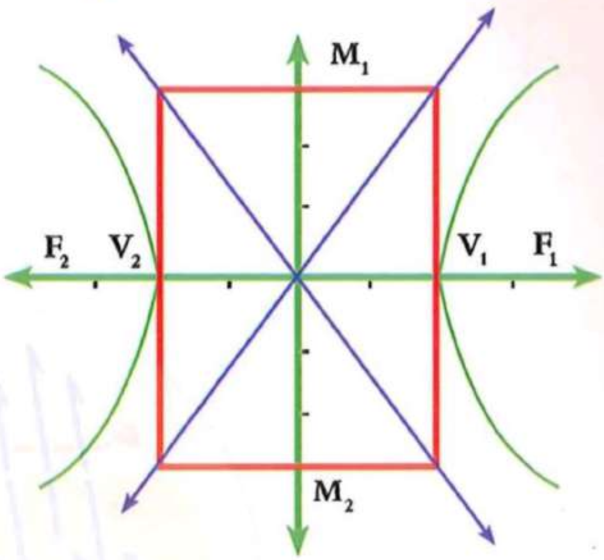
$V_2\ (-a,0) \Rightarrow V_2\ (-2,0)$

3. طول المحور الحقيقي $=2a=4$ وحدة
4. طول المحور المرافق $=2b=4\sqrt{3}$ وحدة

5 الاختلاف المركزي :

$$e=\frac{c}{a}$$

$$e=\frac{4}{2}=2\ >\ 1$$



3 $$\left[16\,x^2-9\,y^2=144\right]\div 144$$

2006 - تمهيدي

2014 - نازحين

$$\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$$

$$a^2=9 \Rightarrow \boxed{a=3}$$

$$b^2=16 \Rightarrow \boxed{b=4}$$

$$c^2=a^2+b$$

$$c^2=9+16 \Rightarrow c^2=25 \Rightarrow \boxed{c=5}$$

1 البؤرتان :

$$F_1\,(c,0) \Rightarrow F_1\,(5,0)$$

$$F_2\,(-c,0) \Rightarrow F_2\,(-5,0)$$

2 الرأسان :

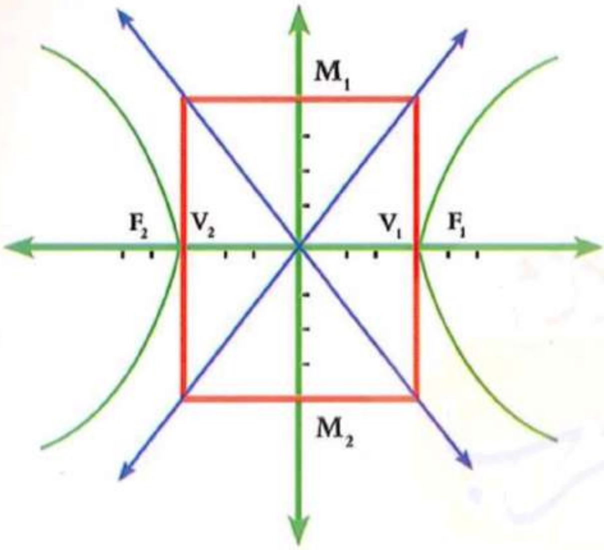
$$V_1\,(a,0) \Rightarrow V_1\,(3,0)$$

$$V_2\,(-a,0) \Rightarrow V_2\,(-3,0)$$

طول المحور الحقيقي ← وحدة $2\,a=2\times 3=6$

طول المحور المرافق ← وحدة $2\,b=2\times 4=8$

$$e=\frac{c}{a}=\frac{5}{3}$$



طريقة رسم القطع الزائد :

1. نعين الرأسان $V_1\ ,V_2$
2. نعين النقطتين $M_1\ ,\ M_2$
3. هذه النقاط الاربعة تكون مستطيل اضلاعه توازي المحورين .
4. نرسم قطري المستطيل فهما يمثلان المحاذيات .
5. نعين البؤرتين $F_1\ ,\ F_2$ ثم نرسم ذراعي القطع .

إذا طلب معادلة القطع الزائد نتبع ما سبق ذكره من الملاحظات

مثال 1 جد معادلة القطع الزائد الذي طول محوره الحقيقي (12) وحدة طول وطول محوره المرافق (10) وحدة طول .

طول محوره الحقيقي $= 2a \Rightarrow [2a = 12] \div 2$

$a = 6$

طول محوره المرافق $= 2b \Rightarrow [2b = 10] \div 2$

$b = 5$

لم يحدد موقع البؤرة

السينات:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{25} = 1$$

الصادات:

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$$

$$\frac{y^2}{36} - \frac{x^2}{25} = 1$$

مثال 2 جد معادلة القطع الزائد الذي مركزه نقطة الأصل وطول محوره المرافق (4) وحدات وبؤرتاه $(0, \sqrt{8})$, $(0, -\sqrt{8})$.

طول محوره المرافق $= 2b \Rightarrow [2b = 4] \div 2$

$b = 2$

$c = \sqrt{8}$ ((صادات))

$c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow a = \sqrt{c^2 - b^2}$

$a = \sqrt{8 - 4} = \sqrt{4}$

$a = 2$

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{4} = 1$$

مثال 3 جد معادلة القطع الزائد الذي بؤرتاه $(\mp 5, 0)$ ويتقاطع مع محور السينات عند $x = \mp 3$ ومركزه نقطة الأصل .

$c = 5$ ((سينات))

كل يتقاطع في القطع الزائد هو (a)

$a = 3$

$c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow b = \sqrt{c^2 - a^2}$

$b = \sqrt{25 - 9} = \sqrt{16}$

$b = 4$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$$

مثال 4 جد معادلة القطع الزائد الذي مركزه نقطة الأصل وطول محوره الحقيقي (6) وحدات والاختلاف المركزي (2) والبؤرتان على محور السينات .

طول محوره الحقيقي $= 2a \Rightarrow [2a = 6] \div 2$

$a = 3$

تعويض

$e = \frac{c}{a}$

2011 / خارج القطر

$2 = \frac{c}{3} \Rightarrow c = 6$

$c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow b = \sqrt{c^2 - a^2}$

$b = \sqrt{36 - 9} = \sqrt{27}$

$b^2 = 27$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{27} = 1$$

مثال 5 جد معادلة القطع الزائد الذي طول محوره المرافق ($2\sqrt{2}$) وحدة واختلافه المركزي يساوي (3) ومركزه نقطة الأصل وبؤرتاه على محور الصادات .

طول محوره المرافق $= 2b \Rightarrow [2b = 2\sqrt{2}] \div 2$

$b = \sqrt{2}$

$e = \frac{c}{a}$

2013 - د (2)

2017 - د (1)/تطبيقي/موصل

$3 = \frac{c}{a} \Rightarrow c = 3a \quad ....(1)$

$c^2 = a^2 + b^2$ القانون العام

$(3a)^2 = a^2 + (\sqrt{2})^2$

$9a^2 - a^2 = 2 \Rightarrow [8a^2 = 2] \div 8$

$a^2 = \frac{1}{4}$

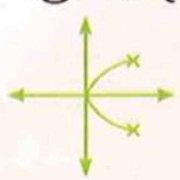
$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \boxed{\frac{y^2}{\frac{1}{4}} - \frac{x^2}{2} = 1}$

مثال 6 قطع زائد طول محوره الحقيقي (6) وحدات وإحدى بؤرتيه هي بؤرة القطع المكافئ الذي رأسه نقطة الأصل ويمر بالنقطتين ($1, 2\sqrt{5}$) ($1, -2\sqrt{5}$) جد معادلتي القطعين المكافئ والزائد .

ربع أول ربع رابع

$(1, 2\sqrt{5})$ $(1, -2\sqrt{5})$

القطع المكافئ : الفتحة يمين



$y^2 = 4Px$

$(2\sqrt{5})^2 = 4P(1)$

$[20 = 4P] \div 4 \Rightarrow P = 5$

$y^2 = 4(5)x \Rightarrow y^2 = 20x$

القطع الزائد :

طول محوره الحقيقي $= 2a \Rightarrow [2a = 6] \div 2$

$a = 3$

إحدى بؤرتيه	هي	بؤرة القطع المكافئ
$c_{\text{زائد}}$	$=$	$P_{\text{مكافئ}}$

$c = 5$

$\therefore c = 5$

$c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow b = \sqrt{c^2 - a^2}$

$b = \sqrt{25 - 9} = \sqrt{16}$

$b = 4$

$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \boxed{\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1}$

تحليل السؤال

1. نجد معادلة القطع المكافئ من النقطتين $(1, 2\sqrt{5})$, $(1, -2\sqrt{5})$
2. القطع الزائد فيه طول المحور الحقيقي معلوم نجد منه (a) زائد .
3. P=C تصبح لدينا (c) معلومة للقطع الزائد ونجد (b) من القانون العام .

1997 - د (1) 2013 - د (2)

2014 - د (1) 2016 - د (1)/ خارج

تذكّر في مثال (6) ذكرَ القطع المكافئ ولكنهُ لم يعطي معادلتهُ بل اعطى معلومة عن القطع المكافئ وهي نقطتان لذلك كان التفكير في البداية هو ان نجد معادلة القطع المكافئ عن طريق المعلومة المعطاة .

مثال 7 جد معادلة القطع الزائد الذي بؤرتاه هما بؤرتي القطع الناقص $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{25}=1$ ويمس دليل القطع المكافئ $x^2+12y=0$

القطع الناقص:

2001 - د (1) | 2011 - د (1) | 2009 - تمهيدي | 2014 - د (2) | 2015 - د (1) | 2017 - تمهيدي / تطبيقي | 2019 - تمهيدي / تطبيقي

$$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{25}=1$$

$$a^2=25 \Rightarrow a=5$$

$$b^2=9 \Rightarrow b=3$$

$$a^2=b^2+c^2 \Rightarrow c=\sqrt{a^2-b^2}$$

$$c=\sqrt{25-9}=\sqrt{16}$$

$$c=4$$

القطع المكافئ:

$$x^2+12y=0$$

$$x^2=-12y$$

$$x^2=-4Py \Rightarrow [4P=12]\div 4$$

$$P=3$$

القطع الزائد:

بؤرتاه = هما = بؤرتي القطع الناقص

$$c_{\text{زائد}} = c_{\text{ناقص}}$$

$$\boxed{c=4}$$

كل يمس هو (a) $a=P \Rightarrow \boxed{a=3}$

$$c^2=a^2+b^2 \Rightarrow b=\sqrt{c^2-a^2}$$

$$b=\sqrt{16-9}=\sqrt{7}$$

$$b^2=7$$

$$\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1 \Rightarrow \frac{y^2}{9}-\frac{x^2}{7}=1$$

مثال 8 جد معادلة القطع الناقص الذي بؤرتاه هما بؤرتا القطع الزائد $x^2-3y^2=12$ والنسبة بين طولي محوريه $=\frac{5}{3}$ ومركزه نقطة الاصل

القطع الزائد:

2000 - د (2) | 2007 - تمهيدي | 2008 - د (2) / خارج | 2013 - د (3) | 2014 - أنبار | 2015 - نازحين | 2016 - نازحين | 2018 - تمهيدي / احيائي | 2019 - د (1) / احيائي / خارج

$$[x^2-3y^2=12]\div 12$$

$$\frac{x^2}{12}-\frac{y^2}{4}=1$$

$$c^2=a^2+b^2$$

$$c^2=12+4 \Rightarrow c^2=16 \Rightarrow c=4$$

القطع الناقص:

بؤرتاه هما بؤرتي القطع الزائد

$$c_{\text{زائد}} = c_{\text{ناقص}}$$

$$c=4$$

النسبة بين طولي محوريه $=\frac{\text{كبير}}{\text{صغير}}=\frac{5}{3}$

$$\frac{5}{3}=\frac{\cancel{2}a}{\cancel{2}b}$$

$$[3a=5b]\div 5 \Rightarrow b=\frac{3}{5}a \quad ......(1)$$

$$a^2=b^2+c^2$$

$$a^2=\left(\frac{3}{5}a\right)^2+(4)^2$$

$$\left[a^2=\frac{9}{25}a^2+16\right].25$$

$$25a^2-9a^2=400 \Rightarrow 25a^2-9a^2=400$$

$$[16a^2=400]\div 16 \Rightarrow a^2=25 \Rightarrow a=5$$

نعوض المعادلة (1)

$$b=\frac{3}{5}a$$

$$b=\frac{3}{\cancel{5}}(\cancel{5}) \Rightarrow b=3$$

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \Rightarrow \boxed{\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1}$$

ملاحظة ومثال عندما يعطي في السؤال بعدي احد الرأسين عن البؤرتين بشكل عددين فأننا نستخدم المجموع والفرق .

مجموع البعدين $= 2c$

حاصل طرح البعدين $= 2a$

مثال 9 أكتب معادلة القطع الزائد الذي مركزه نقطة الأصل إذا علمت ان أحد الرأسين يبعد بالبعد 1،9 وحدات بالترتيب عن البؤرتين وينطبق محوراه على المحورين الاحداثيين .

المجموع $9+1=2c \Rightarrow [2c=10]\div 2$

$c=5$

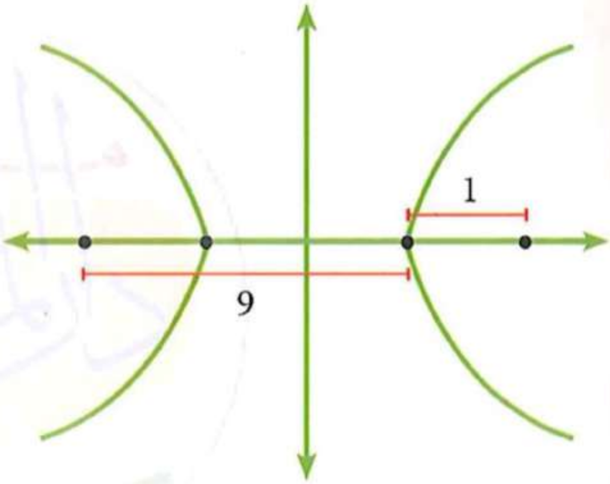
الطرح $9-1=2a \Rightarrow [2a=8]\div 2$

$a=4$

$c^2=a^2+b^2 \Rightarrow b=\sqrt{c^2-a^2}$

$b=\sqrt{25-16}=\sqrt{9}$

$b=3$



رسم توضيحي تم اخذه على محور السينات

2015 - تمهيدي

لم يحدد موقع البؤرة

① سينات $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \Rightarrow \frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$

② صادات $\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1 \Rightarrow \frac{y^2}{16}-\frac{x^2}{9}=1$

ملاحظة

1 كل نقطة تنتمي الى قطع أو منحني فأنَ هذه النقطة تحقق معادلة القطع أو المنحني أي يمكن تعويضها بمعادلة القطع أو المنحني خاصةً وان كانت معادلة القطع تحوي مجهول .

2 إذا طلب نصف القطر البؤري نستخدم قانون المسافة بين نقطتين .

$$PF=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

* إذا طلب نصف القطر البؤري الايمن PF_1 فنستخدم نقطة السؤال والبؤرة الموجبة .
* إذا طلب نصف القطر البؤري الايسر PF_2 فنستخدم نقطة السؤال والبؤرة السالبة .

مثال 10 النقطة $P(6,L)$ تنتمي الى القطع الزائد الذي مركزه نقطة الأصل ومعادلته $x^2-3y^2=12$ جد :

أولاً : قيمة (L) .

النقطة $\underset{x\,,\,y}{P(6,L)}$ تحقق معادلة القطع الزائد .

$$x^2-3y^2=12$$

$$(6)^2-3L^2=12 \Rightarrow 36-3L^2=12$$

$$36-12=3L^2 \Rightarrow [24=3L^2]\div 3$$

$$L^2=8 \text{ بالجذر } \Rightarrow L=\mp 2\sqrt{2}$$

ثانياً: نصف القطر البؤري الايمن PF_1 للقطع المرسوم من الجهة اليمنى للنقطة P

$$PF_1$$

النقطة $P(\quad)$ البؤرة $F_1(\quad)$

* نجد البؤرة وبعدها نجد المسافة بين البؤرة الموجبة والنقطة

نجد F_1 اولاً ثم نجد المسافة بين F_1 والنقطة P

$$[x^2-3y^2=12]\div 12$$

$$\frac{x^2}{12}-\frac{y^2}{4}=1 \Rightarrow a^2=12\ ,\ b^2=4$$

$$c^2=a^2+b^2 \Rightarrow c^2=12+4 \Rightarrow c^2=16$$

$$c=4 \rightarrow F_1\ \underset{x_1\ y_1}{(4,0)} \qquad P\,\underset{x_2\qquad y_2}{(6,2\sqrt{2})}$$

(قيمة L)

$$PF_1=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

$$PF_1=\sqrt{(6-4)^2+(2\sqrt{2}-0)^2}$$

$$PF_1=\sqrt{(2)^2+(2\sqrt{2})^2}$$

$$PF_1=\sqrt{4+8}=\sqrt{12}$$

$$PF_1=2\sqrt{3} \text{ وحدة}$$

1999 - د (1) | 2010 - تمهيدي

2017 - د (2)/تطبيقي/خارج

2018 - د (2)/احيائي/خارج

مثال 10 قطع زائد مركزه نقطة الأصل ومعادلته $hx^2 - ky^2 = 90$ وطول محوره الحقيقي ($6\sqrt{2}$) وحدة وبؤرتاه تنطبقان على بؤرتا القطع الناقص الذي معادلته $9x^2 + 16y^2 = 576$ جد قيمة $h, k \in R$.

$$\left[9x^2 + 16y^2 = 576\right] \div 576$$

$$\frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{36} = 1 \quad , \quad a^2 = 64 \quad b^2 = 36$$

$$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow c = \sqrt{a^2 - b^2}$$

$$c = \sqrt{64 - 36} = \sqrt{28}$$

$$c = 2\sqrt{7}$$

القطع الزائد :

طول محوره الحقيقي $= 2a \Rightarrow \left[2a = 6\sqrt{2}\right] \div 2$

زائد $a = 3\sqrt{2}$

بؤرتاه	تنطبقان	على بؤرة القطع الناقص
$c_{\text{زائد}}$	$=$	$c_{\text{ناقص}}$

زائد $c = 2\sqrt{7}$

$$c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow b = \sqrt{c^2 - a^2}$$

$$b = \sqrt{28 - 18}$$

$$b = \sqrt{10} \Rightarrow b^2 = 10$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \boxed{\frac{x^2}{18} - \frac{y^2}{10} = 1}$$

معادلة السؤال (التي تحوي مجاهيل)

$$\left[hx^2 - ky^2 = 90\right] \div 90 \Rightarrow \frac{hx^2}{90} - \frac{ky^2}{90} = 1$$

$$\frac{x^2}{\frac{90}{h}} - \frac{y^2}{\frac{90}{k}} = 1$$

$$\frac{x^2}{18} - \frac{y^2}{10} = 1$$

1998 - د (1)

2012 - د (2)

2017 - د (1)/ احيائي

2017 - د (1)/ احيائي/خارج

2018 - د (2)/ تطبيقي/خارج

2019 - د (2)/ تطبيقي

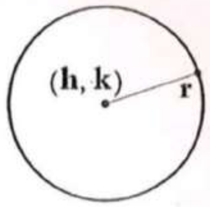
$$\frac{90}{h} = 18 \Rightarrow h = \frac{90}{18} \Rightarrow h = 5$$

$$\frac{90}{k} = 10 \Rightarrow k = \frac{90}{10} \Rightarrow k = 9$$

إستراحة شعرية :

ويا ليتَ أبوابَ المدينةِ كُلَّها
تُسَدُّ وبابٌ في فؤادِك يُفتَحُ

ربط الدائرة مع القطوع



المعادلة العامة للدائرة $\longrightarrow$ $x^2+y^2+Ax+By+C=0$

$A \leftarrow$ معامل x

$B \leftarrow$ معامل y

$C \leftarrow$ الحد المطلق (بدون x أو y)

(تؤخذ قيم A,B,C من المعادلة مع الاشارات)

| * معامل y^2 = معامل x^2 = 1 | $\leftarrow$ إنتبه

أولاً: نجد المركز $c\ (h, k)$

$$\left.\begin{array}{l}\boxed{h=\frac{-A}{2}}\\ \boxed{k=\frac{-B}{2}}\end{array}\right\} \Rightarrow c\ (h, k)$$

ثانياً: نجد نصف القطر

$$\boxed{r=\sqrt{h^2+k^2-c}}$$

مثال/ جد نصف القطر واحداثي المركز للدائرة التي معادلتها $x^2+y^2-2x-4y-4=0$ (مراجعة من الخامس علمي)

$x^2+y^2-2x-4y-4=0$

$A=-2\ ,\ B=-4\ ,\ C=-4$

$$\left.\begin{array}{l}h=\frac{-A}{2}=\frac{-(-2)}{2}=1\\ k=\frac{-B}{2}=\frac{-(-4)}{2}=2\end{array}\right\} \Rightarrow c\ (1, 2)$$

مركز

$r=\sqrt{h^2+k^2-c}$

$r=\sqrt{(1)^2+(2)^2-(-4)}$

$r=\sqrt{1+4+4}=\sqrt{9}$

$\boxed{r=3}$ unit

نصف القطر

سؤال * جد معادلة القطع الزائد الذي احدى بؤرتيه هي مركز الدائرة $x^2+y^2-16y+15=0$ ونصف طول محوره المرافق يساوي نصف قطر تلك الدائرة .

2018 - د (3)/احيائي

$$x^2+y^2-16y+15=0 \rightarrow x^2+y^2+0x-16y+15=0$$

$$A=0\ ,\ B=-16\ ,\ C=15$$

$$\left.\begin{array}{l} h=\dfrac{-A}{2}=\dfrac{0}{2}=0 \\ k=\dfrac{-B}{2}=\dfrac{-(-16)}{2}=8 \end{array}\right\} \Rightarrow C\,(h,k) \Rightarrow (0,8)$$

احداثي المركز

$$r=\sqrt{h^2+k^2-c}=\sqrt{(0)^2+(8)^2-15}=\sqrt{64-15}=\sqrt{49}$$

$\boxed{r=7}$ unit

القطع الزائد احدى بؤرتيه هي مركز الدائرة ← البؤرة هي $(0,8)$

$\boxed{c=8}$ صادات

نصف طول محوره الصغير يساوي نصف قطر الدائرة

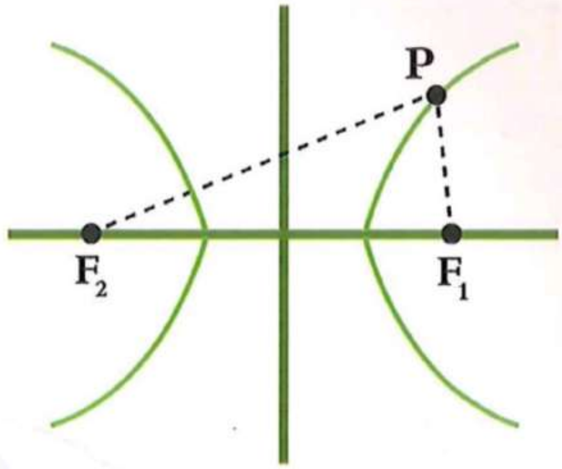
$$r=\frac{1}{\cancel{2}}(\cancel{2}b) \Rightarrow r=b \Rightarrow \boxed{b=7}$$

$$c^2=a^2+b^2 \Rightarrow a=\sqrt{c^2-b^2}=\sqrt{64-49}=\sqrt{15} \Rightarrow \boxed{a=\sqrt{15}}$$

$$\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1 \Rightarrow \boxed{\frac{y^2}{15}-\frac{x^2}{49}=1}$$

والكوخُ عِندي في جِوارِكَ جَنّةٌ
والقَصرُ دونَكَ كالفَضا المَهجورُ

إيجاد معادلة القطع الزائد بإستخدام التعريف



القانون $|PF_1 - PF_2| = 2a$

$$\left|\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2} - \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}\right| = 2a$$

هناك عدة خطوات لحل السؤال

القانون ← التعويض ← التحويل ← التربيع ← الارجاع ← التربيع ثم تصفية الطرفين

التحويل: تحويل أحد الجذرين إلى الطرف الأيمن

الارجاع: ارجاع الجذر الى الطرف الأيسر

$$\overset{x_2\ \ y_2}{P\,(x,\ y)}$$

$$\overset{x_1\ \ y_1}{F_1\,(C,\ 0)} \qquad \overset{x_2\ \ y_2}{F_2\,(-C,\ 0)}$$

مثال 1 باستخدام التعريف جد معادلة القطع الزائد الذي بؤرتاه $(-2\sqrt{2},0)$, $(2,\sqrt{2},0)$ وينطبق محوره على المحورين الاحداثيين والقيمه المطلقة للفرق بين بعدي أي نقطة عن بؤرتيه = 4 وحدات .

$$P(\overset{x_2}{x},\overset{y_2}{y})$$

$$F_1(\overset{x_1}{2\sqrt{2}},\overset{y_1}{0}) \qquad F_2(\overset{x_2}{-2\sqrt{2}},\overset{y_2}{0})$$

$$|PF_1 - PF_2| = 2a$$

القانون
$$\left|\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2} - \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}\right| = 2a$$

التعويض
$$\underbrace{\sqrt{(x-2\sqrt{2})^2+(y-0)^2}}_{\text{هذا الجذر يبقى}} - \underbrace{\sqrt{(x+2\sqrt{2})^2+(y-0)^2}}_{\text{ننقل الجذر للطرف الاخر}} = \pm 4$$

تربيع الطرفين
$$\sqrt{(x-2\sqrt{2})^2+y^2} = \pm 4 + \sqrt{(x+2\sqrt{2})^2+y^2}$$

$$\underbrace{(x-2\sqrt{2})^2 + \cancel{y^2}}_{\text{الجذر حذف مع التربيع}} = 16 \pm 8\sqrt{(x+2\sqrt{2})^2+y^2} + \underbrace{(x+2\sqrt{2})^2}_{\text{هذا الطرف مربع حدانية}} + \cancel{y^2}$$

فتح القوس
$$\cancel{x^2} - 4\sqrt{2}x + \cancel{8} = 16 \pm 8\underbrace{\sqrt{x^2+4\sqrt{2}\,x+8+y^2}}_{\text{ارجاع الجذر الى الطرف الاصلي}} + \cancel{x^2} + 4\sqrt{2}x + \cancel{8}$$

التصفية
$$\mp 8\sqrt{x^2+4\sqrt{2}\,x+8+y^2} = 16+4\sqrt{2}x+4\sqrt{2}x$$

$$\left[\mp 8\sqrt{x^2+4\sqrt{2}\,x+8+y^2} = 16+8\sqrt{2}x\right] \div 8$$

تربيع الطرفين
$$\mp\sqrt{x^2+4\sqrt{2}\,x+8+y^2} = (2+\sqrt{2}\,x)$$

$$x^2 + \cancel{4\sqrt{2}x} + 8 + y^2 = 4 + \cancel{4\sqrt{2}x} + 2x^2$$

$$2x^2 - x^2 - y^2 = 8-4 \Rightarrow \left[x^2 - y^2 = 4\right] \div 4$$

$$\boxed{\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{4} = 1}$$

الملحق الشرحي / الايضاحي

مثال 6 قطع زائد طول محوره الحقيقي (6) وحدات وإحدى بؤرتيه هي بؤرة القطع المكافئ الذي رأسه نقطة الأصل ويمر بالنقطتين $(1,-2\sqrt{5})$, $(1,2\sqrt{5})$ جد معادلتي القطعين المكافئ والزائد.

إنتبه رجاءاً

عندما يطلب معادلة قطعين قم بعزل معلومات كل قطع لايجاد معادلة القطع من معلوماته.

1. **القطع المكافئ:** يمر بنقطتين منها نجد معادلة المكافئ (حالة ثالثة) من القطع المكافئ.
2. (P) المكافئ هي نفسها (c) زائد حسب عبارة السؤال.
3. **القطع الزائد:** فيه معلومة مباشرة 65a2 نجد منها (a) ولدينا (c) نجد b من القانون العام.

مثال 7 جد معادلة القطع الزائد الذي بؤرتاه هما بؤرتي القطع الناقص $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{25}=1$ الذي بؤرتاه ويمس دليل القطع المكافئ $x^2+12y=0$

* السؤال شامل لثلاثة قطوع

1. القطع الزائد بؤرتاه هما بؤرتي القطع الناقص لذلك من معادلة الناقص نجد c وتعتبر c للزائد.
2. عندما يمس دليل القطع المكافئ قطع زائد a=P لذلك من المكافئ نجد P وتعتبر a.
3. أصبح لدينا من النقطة (1) قيمة (c) نجد b من القانون العام ونكتب المعادلة.

مثال 8 جد معادلة القطع الناقص الذي بؤرتاه هما بؤرتي القطع الزائد $x^2-3y^2=12$ والنسبة بين طولي محوريه $=\frac{5}{3}$ ومركزه نقطة الأصل.

1. بؤرتاه القطع الناقص هما بؤرتي القطع الزائد لذلك من الزائد نجد c ثم نعتبرها c للناقص.
2. النسبة $\frac{5}{3}$ عائدة للقطع الناقص وليس الزائد لأن الزائد معلوم لماذا يعطي معلومة لقطع معلوم؟! $\left[\frac{2a}{2b}=\frac{5}{3}\right]$ نجد منها معادلة.
3. لدينا (c) ومعادلة من النسبة تُطبق بالقانون العام ونجد المجاهيل والمعادلة.

الاسئلة الوزارية الخاصة بالقطع الزائد والربط بين القطوع الثلاثة

سؤال 1 جد معادلة القطع الزائد الذي بؤرتاه هما بؤرتي القطع الناقص $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{20}=1$ وأحد رأسيه بؤرة القطع المكافئ $y^2+8x=0$.

1997 - د (2)   2017 - د (2)

القطع الناقص:

$$\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{20}=1$$

$a^2=36 \quad , \quad b^2=20$ ((سينات))

$$a^2=b^2+c^2 \Rightarrow c=\sqrt{a^2-b^2}$$

$$c=\sqrt{36-20}=\sqrt{16}$$

$$c=4$$

القطع المكافئ:

$$y^2=-8x$$

$$y^2=-4Px \Rightarrow [4P=8]\div 4$$

القطع الزائد:

$$\underset{\text{زائد}}{C}=\underset{\text{ناقص}}{C} \Rightarrow c=4$$

$$\underset{\text{مكافئ}}{P}=\underset{\text{زائد}}{a} \Rightarrow a=2$$

$$c^2=a^2+b^2 \Rightarrow b=\sqrt{c^2-a^2}$$

$$b=\sqrt{16-4}=\sqrt{12}$$

$$b^2=12$$

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \Rightarrow \frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{12}=1$$

سؤال 2 جد معادلة القطع الزائد الذي بؤرتاه تنطبقان على بؤرتي القطع الناقص $3x^2+5y^2=120$ والنسبة بين طول محوره الحقيقي والبعد بين بؤرتيه كنسبة $\frac{1}{2}$.

2001 - د (1)

القطع الناقص:

$$\left[\frac{3x^2}{120}+\frac{5y^2}{120}=\frac{120}{120}\right]\div 120$$

$\frac{x^2}{40}+\frac{y^2}{24}=1 \quad , \quad a^2=40 \quad , \quad b^2=24$ ((سينات))

$$a^2=b^2+c^2 \Rightarrow c=\sqrt{a^2-b^2}$$

$$c=\sqrt{40-24}=\sqrt{16}$$

$$c=4$$

القطع الزائد:

$$\underset{\text{زائد}}{C}=\underset{\text{ناقص}}{C} \Rightarrow c=4$$

$$\frac{\cancel{2}a}{\cancel{2}c}=\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{a}{c}=\frac{1}{2}$$

$$\frac{a}{4}=\frac{1}{2} \Rightarrow [2a=4]\div 2$$

$$a=2$$

$$c^2=a^2+b^2 \Rightarrow b=\sqrt{c^2-a^2}$$

$$b=\sqrt{16-4}=\sqrt{12}$$

$$b^2=12$$

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \Rightarrow \frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{12}=1$$

سؤال 3 جد معادلة القطع الزائد الذي بؤرتاه هما بؤرتي القطعين المكافئين $y^2=20x$, $y^2=-20x$ والفرق بين طولي محوريه الحقيقي والمرافق يساوي (2) وحدة .

القطع المكافئ: $y^2=20x$

$y^2=4Px \Rightarrow [4P=20]\div 4 \Rightarrow P=5, F(5,0)$

2001 - د (2)

$y^2=-20x$

$y^2=-4Px \Rightarrow [4P=20]\div 4 \Rightarrow P=5, F(-5,0)$

القطع الزائد:

$\underset{\text{زائد}}{C} = \underset{\text{مكافئ}}{P} \Rightarrow c=5$

الفرق بين طولي محوريه الحقيقي والمرافق

$[2a-2b=2]\div 2$

$a-b=1 \Rightarrow a=1+b$ ....(1)

تعويض

$c^2=a^2+b^2$

مربع حدانية

$(5)^2=(1+b)^2+b^2 \Rightarrow 25=1+2b+b^2+b^2$

$2b^2+2b+1-25=0$

$[2b^2+2b-24=0]\div 2$

$b^2+b-12=0$

$(b+4)\ (b-3)=0$

أما $b+4=0$ لا يمكن ان تكون سالبة لذلك يُهمل

أو $b-3=0 \Rightarrow b=3$ نعوض في معادلة (1)

$a=1+b=1+3 \Rightarrow a=4$

$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \Rightarrow \frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$

ملاحظة حرف العطف (و) في اللغة العربية ((الفرق بين طولي محوريه الحقيقي والمرافق)) تحمل وجهين :

الأول ← $2a-2b=2$

الثاني ← $2b-2a=2$

تم حل السؤال على الاحتمال الأول وسنتطرق الى الوجه الثاني من الحل .

$[2b-2a=2]\div 2$

$b-a=1 \Rightarrow b=1+a$ ....(1)

$c^2=a^2+b^2$

$(5)^2=a^2+(1+a)^2$

مربع حدانية

$25=a^2+1+2a+a^2$

$2a^2+2a-24=0\div 2$

$a^2+a-12=0$

$(a+4)\ (a-3)=0$

$a+4=0$ لا يمكن ان تكون سالبة لذلك يُهمل

$a-3=0 \Rightarrow a=3$

$b=1+a=1+3=4$

$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \Rightarrow \frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$

سؤال 4 جد معادلة القطع الزائد الذي يمر ببؤرتي القطع الناقص $\frac{x^2}{49}+\frac{y^2}{24}=1$ والنسبة بين البعد بين بؤرتيه وطول محوره المرافق كنسبة $\frac{5}{4}$.

القطع الناقص: $\frac{x^2}{49}+\frac{y^2}{24}=1$

$a^2=49 \quad , \quad b^2=24$ ((سينات))

$a^2=b^2+c^2 \Rightarrow c=\sqrt{a^2-b^2}$

$c=\sqrt{49-24}=\sqrt{25}$

$c=5$

القطع الزائد:

$\underset{\text{ناقص}}{c} = \underset{\text{زائد}}{a}$

قال يمر وكل يمر a في القطع الزائد

$a=5$

$\frac{\cancel{2}c}{\cancel{2}b}=\frac{5}{4} \quad [4c=5b]\div 4 \Rightarrow c=\frac{5}{4}b \quad .....(1)$

$c^2=a^2+b^2$

$\left(\frac{5}{4}b\right)^2=(5)^2+b^2$

$\left[\frac{25}{16}b^2=25+b^2\right].16 \Rightarrow 25b^2=400+16b^2$

$25b^2-16b^2=400 \Rightarrow 9b^2=400$

$b^2=\frac{400}{9}$

$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \Rightarrow \frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{\frac{400}{9}}=1$

2003 - د (2)   2009 - د (2)

سؤال 5 قطعان زائد وناقص كل منهما يمر ببؤرة الاخر جد معادلة القطع الزائد اذا علمت ان معادلة القطع الناقص هي $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$ علماً ان محوريهما على المحورين الاحداثيين .

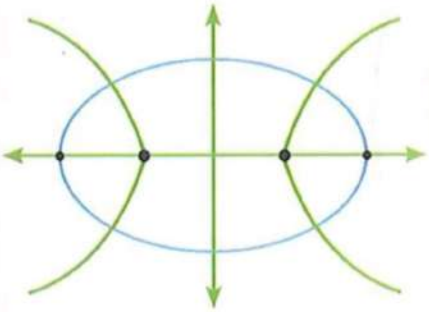
القطع الناقص: $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$

$a^2=25 \rightarrow a=5 \quad , \quad b^2=9 \rightarrow b=3$

$a^2=b^2+c^2 \Rightarrow c=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{25-9}$

$c=\sqrt{16} \Rightarrow c=4$

رسم توضيحي



القطع الزائد:

للزائد $\underset{\text{زائد}}{a} = \underset{\text{ناقص}}{c} \Rightarrow a=4$

للزائد $\underset{\text{زائد}}{c} = \underset{\text{ناقص}}{a} \Rightarrow c=5$

$b=\sqrt{c^2-a^2}=\sqrt{25-16}=\sqrt{9}$

للزائد $b=3$

$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \Rightarrow \frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$

2004 - د (2)   2005 - تمهيدي   2006 - د (2)

2008 - د (2)   2014 - د (3)

سؤال 6 جد معادلة القطع المخروطي الذي محوراه هما المحورين الاحداثيين وإحدى بؤرتيه $(-5,0)$ واحد رأسيه $(3,0)$

2004 - د (2) 2005 - تمهيدي 2006 - د (2) 2008 - د (2) 2014 - د (3)

البؤرة $(-5,0) \rightarrow c=5$

الرأس $(3,0) \rightarrow a=3$

$a<c$ «أصغر» أي ان القطع زائد

$$c^2=a^2+b^2 \Rightarrow b=\sqrt{c^2-a^2}$$

$$b=\sqrt{25-9}=\sqrt{16} \Rightarrow b=4$$

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \Rightarrow \frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$$

سؤال 7 جد معادلة القطع الزائد الذي إحدى بؤرتيه نقطة تقاطع المستقيم $2x-y=8$ مع محور السينات وطول محوره محوره التخيلي (4) وحدات.

(نقطة التقاطع مع محور السينات) $y=0$

$$2x-0=8 \Rightarrow [2x=8]\div 2 \Rightarrow x=4$$

$(4,0)\rightarrow \quad , \quad c=4$

طول محوره التخيلي $=2b \Rightarrow [2b=4]\div 2$

$$b=2$$

$$c^2=a^2+b^2 \Rightarrow a=\sqrt{c^2-b^2}$$

$$a=\sqrt{16-4}=\sqrt{12}$$

$$a^2=12$$

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \Rightarrow \boxed{\frac{x^2}{12}-\frac{y^2}{4}=1}$$

2007 تمهيدي

سؤال 8 جد معادلة القطع الزائد الذي بؤرتاه هما بؤرتي القطعين المكافئين $y^2=20x$, $y^2=-20x$ وطول محوره المرافق (8) وحدات.

2005 - د (1) 2008 - د (1) 2015 - د (4) رصافة

القطع المكافئ: $y^2=20x$

$$y^2=4Px \Rightarrow [4P=20]\div 4 \Rightarrow P=5$$

$$F(5,0)$$

$$y^2=-20x$$

$$y^2=-4Px \Rightarrow 4P=20\div 4 \Rightarrow P=5$$

$$F(-5,0)$$

القطع الزائد: $P = c \Rightarrow c=5$

طول محوره التخيلي $=2b \Rightarrow [2b=8]\div 2$

$$b=4$$

$$c^2=a^2+b^2 \Rightarrow a=\sqrt{c^2-b^2}$$

$$a=\sqrt{25-16}=\sqrt{9}$$

$$a=3$$

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \Rightarrow \frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$$

سؤال 9 جد معادلة القطع الناقص الذي بؤرتاه هما بؤرتي القطع الزائد $8y^2 - x^2 = 32$ ويمس دليل القطع المكافئ $y^2 + 16x = 0$.

القطع الزائد:

$$\left[8y^2 - x^2 = 32\right] \div 32 \Rightarrow \frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{32} = 1$$

$a^2 = 4,\ b^2 = 32\ ,\ c = ?$

$c^2 = a^2 + b^2$

بالجذر

$c^2 = 4 + 32 \Rightarrow c^2 = 36 \Rightarrow c = 6$

القطع المكافئ:

$y^2 = -16x$

$y^2 = -4Px \Rightarrow \left[4P = 16\right] \div 4$

$P = 4$

القطع الناقص بؤرتاه هما بؤرتي القطع الزائد

$\underset{\text{زائد}}{c} = \underset{\text{ناقص}}{c} \Rightarrow c = 6$

$\underset{\text{مكافئ}}{P} = \underset{\text{ناقص}}{b} \Rightarrow b = 4$

* كل يمس في القطع الناقص اما a أو b هنا اصبحت b لسببين:

1. لأن a يجب ان تكون اكبر من c إذا اصبحت a=4 تكون أصغر من c وهي (6).
2. لأن البؤرة صادات والمكافئ سينات والذي يخالف البؤرة هو قطب b

$a^2 = b^2 + c^2$

2006 - د (1)

$a^2 = 4^2 + 6^2$

2016 - د (2)

$a^2 = 16 + 36 \Rightarrow a^2 = 52$

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{52} = 1$$

سؤال 10 جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الأصل والبعد بين بؤرتيه (8) وحدات ورأساه بؤرتا القطع الزائد $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$.

القطع الزائد:

$$\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$$

$a^2 = 16\ ,\ b^2 = 9$ سينات

$c^2 = a^2 + b^2$

$c^2 = 16 + 9 \Rightarrow c^2 = 25 \Rightarrow c = 5$

القطع الناقص:

$\underset{\text{ناقص}}{a} = \underset{\text{زائد}}{c} \Rightarrow a = 5$

البعد بين بؤرتيه $= 2c \Rightarrow \left[2c = 8\right] \div 2$

$c = 4$

$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow b = \sqrt{a^2 - c^2}$

$b = \sqrt{25 - 16} = \sqrt{9}$

$b = 3$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$$

2007 - د (1)

سؤال 11 جد معادلة القطع الزائد الذي بؤرتاه هما رأسا القطع الناقص $\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{64}=1$ وطول محوره الحقيقي (12) وحدة وينطبق محوراه على المحورين الاحداثيين .

القطع الناقص:

$$\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{64}=1 \qquad a^2=100 \Rightarrow a=10$$

$$V_1\ (10,0),V_2\ (-10,0)$$

القطع الزائد :

القطع الزائد بؤرتاه	هما	رأسا القطع الناقص
c	=	a

للزائد $c=10$

طول محوره الحقيقي $=2a \Rightarrow [2a=12]\div 2$

للزائد $a=6$

$$c^2=a^2+b^2 \Rightarrow b=\sqrt{c^2-a^2}$$

$$b=\sqrt{100-36}$$

$$b=\sqrt{64} \Rightarrow b=8$$

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \Rightarrow \frac{x^2}{36}-\frac{y^2}{64}=1$$

2007
خارج القطر

سؤال 12 جد معادلة القطع الزائد الذي بؤرتاه تنطبقان على بؤرتي القطع الناقص $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$ والنسبة بين طول محوره الحقيقي الى البعد بين بؤرتيه تساوي $\left(\frac{1}{2}\right)$

$$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1 \qquad \boxed{\begin{array}{l} a^2=25 \\ b^2=9 \\ c=? \end{array}}$$

$$a^2=b^2+c^2$$

$$c=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{25-9}=\sqrt{16}$$

$$c=4$$

القطع الزائد :

بؤرتاه	تنطبقان	على بؤرتي القطع الناقص
$c_{\text{زائد}}$	=	$c_{\text{ناقص}}$

$$c=4$$

$$\text{النسبة}=\frac{\text{طول محوره الحقيقي}}{\text{البعد بين بؤرتيه}}=\frac{2a}{2c}$$

$$\frac{\cancel{2}a}{\cancel{2}c}=\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{a}{c}=\frac{1}{2}$$

$$\frac{a}{4}=\frac{1}{2} \Rightarrow [2a=4]\div 2 \Rightarrow a=2$$

نجد (b) من القانون العام

$$c^2=a^2+b^2$$

$$b=\sqrt{c^2-a^2}$$

$$b=\sqrt{16-4} \Rightarrow b=\sqrt{12}$$

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{2}=1 \Rightarrow \frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{12}=1$$

سؤال 13 جد معادلة القطع الناقص الذي يمر ببؤرتي القطع الزائد $9y^2 - 16x^2 = 144$ ويقطع من محور السينات جزءاً طوله 12 وحدة .

القطع الزائد :

$$\left[9y^2 - 16x^2 = 144\right] \div 144$$

2009 - د (1)

صادات $\dfrac{y^2}{16} - \dfrac{x^2}{9} = 1 \quad a^2 = 16 \;,\; b^2 = 9$

$$c^2 = a^2 + b^2$$

$$c^2 = 16 + 9$$

$$c^2 = 25 \rightarrow c = 5 \rightarrow F_1\,(0,5), F_2\,(0,-5)$$

القطع الناقص:

القطع الناقص يمر من بؤرة الزائد $(0,5)$

$b = 5$ أو $a = 5$

الجزء المقطوع يمر من محور السينات

أما $[2a = 12] \div 2 \qquad a = 6$

أو $[2b = 12] \div 2 \qquad b = 6$

الأكبر $a \leftarrow a = 6$ سينات

الأصغر $b \leftarrow b = 5$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \boxed{\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{25} = 1}$$

سؤال 14 جد معادلة القطع المخروطي الذي مركزه نقطة الأصل وينطبق محوراه على المحورين الاحداثيين واختلافه المركزي يساوي (3) ويمر بالنقطة $(0,2)$

* القطع زائد لأن $e > 1$

الاختلاف المركزي أكبر من (1)

(رأس صادات) $(0,2) \rightarrow a = 2$

2016 تمهيدي

$$e = \frac{c}{a} \Rightarrow \frac{3}{1} = \frac{c}{2}$$

$$c = 6$$

$$c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow b = \sqrt{c^2 - a^2}$$

$$b = \sqrt{36 - 4}$$

$$b = \sqrt{32} \Rightarrow b^2 = 32$$

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{32} = 1$$

إستراحة شعرية

دعْ حب أو من كلفت بحبه
ما الحبُ إلا للحبيب الأخر

ما قد تولى لا ارتجاع لطيبه
هل غائب اللذات مثل الحاضر

سؤال 15 جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الأصل وبؤرتاه تقعان على محور السينات ومجموع طولي محوريه يساوي (18) وحدة وبؤرتاه تنطبقان على بؤرتي القطع الزائد $x^2 - 2y^2 = 6$.

القطع الزائد: $\left[x^2-2y^2=6\right]\div 6$

$\frac{x^2}{6}-\frac{y^2}{3}=1 \quad , \quad a^2=6, b^2=3$

$c^2=a^2+b^2 \Rightarrow c^2=6+3$

$c^2=9 \to c=3$

القطع الناقص:

$\underset{\text{ناقص}}{c} = \underset{\text{زائد}}{c}$

$c=3$

مجموع طولي محوريه $\left[2a+2b=18\right]\div 2$

$a+b=9 \Rightarrow a=9-b \quad ....(1)$

$a^2=b^2+c^2$

2014
نازحين

$(9-b)^2=b^2+(3)^2$

$81-18b+\cancel{b^2}=\cancel{b^2}+9 \Rightarrow 18b=81-9$

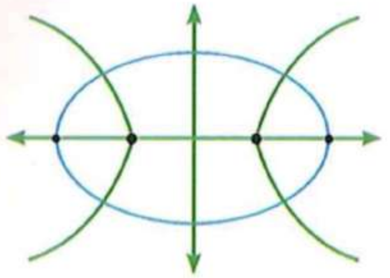
$\left[18b=72\right]\div 18 \Rightarrow b=4$

$a=9-b$

$a=9-4 \Rightarrow a=5$

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \Rightarrow \frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$

سؤال 16 جد معادلة القطع الزائد والناقص اذا كان كل منهما يمر ببؤرتي الاخر وكلاهما تقعان على محور السينات وطول المحور الكبير يساوي $6\sqrt{2}$ وحدة طول وطول المحور الحقيقي يساوي (6) وحدة طول .



2016 - د (1)

2017 - د (2)/تطبيقي/موصل

القطع الزائد: $\left[2a=6\right]\div 2$

$a=3$ زائد

القطع الناقص: $\left[2a=6\sqrt{2}\right]\div 2$

$a=3\sqrt{2}$ ناقص

$\underset{\text{زائد}}{a} = \underset{\text{ناقص}}{c} \to c=3$ ناقص

$\underset{\text{ناقص}}{a} = \underset{\text{زائد}}{c} \to c=3\sqrt{2}$ زائد

الزائد	الناقص
$b=\sqrt{c^2-a^2}$	$b=\sqrt{a^2-c^2}$
$b=\sqrt{18-9}=\sqrt{9}$	$b=\sqrt{18-9}=\sqrt{9}$
$b=3$	$b=3$
$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$
$\boxed{\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{9}=1}$	$\boxed{\frac{x^2}{18}+\frac{y^2}{9}=1}$

سؤال 17 عيّن النقاط على القطع الزائد الذي معادلته $\frac{x^2}{3}-\frac{y^2}{1}=1$ والتي تبعد من البؤرة في الفرع الايمن بمقدار $\frac{1}{\sqrt{3}}$ وحدة.

$$\frac{x^2}{3}-\frac{y^2}{1}=1 \Rightarrow a^2=3 \ , b^2=1 \ , c=?$$

$$c^2=a^2+b^2 \Rightarrow c^2=3+1$$

$$c^2=4$$

2005 - د (2)

$$c=2$$

$$\overset{x_1,y_1}{F_1(2,0)} \qquad \overset{x_2,y_2}{P(x,y)}$$

$$PF_1=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}}=\sqrt{(x-2)^2+(y-0)^2}$$ بالتربيع

$$\frac{1}{3}=\underbrace{(x-2)^2}_{\text{مربع حدانية}}+y^2$$

$$\left[\frac{1}{3}=x^2-4x+4+y^2\right].3$$

$$1=3x^2-12x+12+3y^2$$

$$3x^2+3y^2-12x+11=0 \quad \text{........}(1)$$

نتخلص من y^2 ونجدها من معادلة القطع

$$\frac{x^2}{3}-y^2=1 \Rightarrow y^2=\frac{x^2}{3}-1 \quad \text{........}(2)$$

$$3x^2+3\left(\frac{x^2}{3}-1\right)-12x+11=0$$

$$3x^2+x^2-3-12x+11=0$$

$$\left[4x^2-12x+8=0\right]\div 4$$

$$x^2-3x+2=0$$

$$(x-1)(x-2)=0$$

$$x-1=0 \Rightarrow x=1$$

$$x-2=0 \Rightarrow x=2$$

عندما $x=1$ $\quad y^2=\frac{x^2}{3}-1$

$$y^2=\frac{1}{3}-1=\frac{-2}{3}$$ يُهمل $\notin R$

عندما $x=2$

بالجذر $\quad y^2=\frac{2^2}{3}-1 \Rightarrow y^2=\frac{1}{3}$

توحيد مقامات

$$y=\mp\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$P_1\left(2,\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \quad P_2\left(2,\frac{-1}{\sqrt{3}}\right)$$

إستراحة شعرية

وهواك في قلب الظنون حقيقة
لا ريب فيه وحبُ غيرك باطلُ

إن كان حبك في الفؤاد فريضةٌ
فسواك في شرع الغرام نوافلُ

سؤال 18 لتكن $x^2 - ky^2 = 3$ تمثل معادلة قطع زائد احدى بؤرتيه هي بؤرة القطع المكافئ $y^2 + 8x = 0$ جد قيمة k.

القطع المكافئ:

$$y^2 = -8x$$

$$y^2 = -4Px \Rightarrow [4P = 8] \div 4$$

$$P = 2$$

القطع الزائد:

$$\underset{\text{زائد}}{c} = \underset{\text{مكافئ}}{P}$$

$$c = 2$$

$$[x^2 - ky^2 = 3] \div 3 \Rightarrow \frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{\frac{3}{k}} = 1$$

$$a^2 = 3 \quad , \quad b^2 = \frac{3}{k} \quad , \quad c = 2$$

$$c^2 = a^2 + b^2$$

2007 - د (1)

$$(2)^2 = 3 + \frac{3}{k}$$

$$4 = 3 + \frac{3}{k} \Rightarrow 4 - 3 = \frac{3}{k} \Rightarrow 1 = \frac{3}{k}$$

$$\boxed{k = 3}$$

سؤال 19 لتكن $5y^2 - 4x^2 = h$ معادلة قطع زائد واحدى بؤرتيه هي بؤرة القطع المكافئ $4y - 5x^2 = 0$ جد قيمه h.

القطع المكافئ:

2003 - د (1)

2015 - د (2)

$$4y - 5x^2 = 0$$

$$[5x^2 = 4y] \div 5$$

$$x^2 = \frac{4}{5}y$$

$$x^2 = \frac{4}{5}y$$

$$x^2 = 4Py \Rightarrow \left[4P = \frac{4}{5}\right] \div 4$$

$$P = \frac{\cancel{4}}{\cancel{4} \times 5} \Rightarrow P = \frac{1}{5}$$

القطع الزائد:

$$\underset{\text{مكافئ}}{P} = \underset{\text{زائد}}{c} \Rightarrow c = \frac{1}{5}$$

$$[5y^2 - 4x^2 = h] \div h$$

$$\frac{y^2}{\frac{h}{5}} - \frac{x^2}{\frac{h}{4}} = 1$$

$$a^2 = \frac{h}{5} \quad , \quad b^2 = \frac{h}{4} \quad , \quad c = \frac{1}{5}$$

$$c^2 = a^2 + b^2$$

$$\left(\frac{1}{5}\right)^2 = \frac{h}{5} + \frac{h}{4}$$ توحيد مقامات

$$\frac{1}{25} = \frac{4h + 5h}{20} \Rightarrow \frac{1}{25} = \frac{9h}{20}$$

$$h = \frac{\cancel{20}^{4}}{9 \times \cancel{25}_{5}} \Rightarrow h = \frac{4}{45}$$

سؤال 20 قطع مكافئ معادلته $x^2 = 10y - 3ky$ ومعادلة دليله $y = 2k$ جد قيمة k ثم جد معادلة القطع الزائد الذي احدى بؤرتيه بؤرة القطع المكافئ اعلاه وطول محوره المرافق 2 وحدة

لوجود المجهول k في معادلة القطع والدليل لا يمكن تحديد إتجاه القطع لذلك نأخذ احتمالين للمقارنة :

الإحتمال الأول

القطع نحو الأعلى

المعادلة القياسية $x^2 = 4py$

معادلة السؤال $x^2 = (10-3k)\,y$

بالمقارنة

$4p = 10 - 3k$ .... (1)

الدليل نحو الأسفل

المعادلة القياسية $y = -p$

معادلة الدليل في السؤال $y = 2k$

$[-p = 2K] * -1$

$p = -2k$ .... (2) نعوض في معادلة 1

$4(-2k) = 10 - 3k$

$-8k = 10 - 3k$

2017 - د (3)/تطبيقي

$-8k + 3k = 10 \Rightarrow -5k = 10$

$k = -2$

نعوض في معادلة 2

بؤرة المكافئ $p = -2k \Rightarrow p = -2\,(-2) \Rightarrow p = 4 \rightarrow (0,4)$

بؤرتي الزائد هما $(0,4)\ ,\ (0,-4)$

$c = 4 \Rightarrow c^2 = 16$

طول المحور المرافق $= 2 \Rightarrow 2b = 2 \Rightarrow b = 1 \Rightarrow b^2 = 1$

$c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow 16 = a^2 + 1 \Rightarrow a^2 = 15$

معادلة القطع الزائد $\frac{y^2}{15} - \frac{x^2}{1} = 1$

الإحتمال الثاني

القطع أسفل

$x^2 = -4py$

$x^2 = (10-3k)\,y$

بالمقارنة

$-4p = 10 - 3k$ .... (1)

الدليل أعلى

المعادلة القياسية $y = -p$

$y = 2k$

$p = -2k$ .... (2) نعوض في معادلة 1

$-4\,(2k) = 10 - 3k$

$-8k = 10 - 3k$

$-8k + 3k = 10 \Rightarrow -5k = 10$

$k = -2$ نعوض في معادلة 1

$p = 2\,(-2) \Rightarrow p = -4$ وهذا غير ممكن لأن p دائماً موجبة

واجب:

F_1 بؤرة القطع المكافئ $x^2+24y=0$. F_2 هي بؤرة القطع المكافئ الذي معادلته $y^2=32x$ القطع الزائد الذي إحدى بؤرتيه F_2 وطول محوره المرافق يساوي طول $\overline{F_1F_2}$

الجواب $\frac{x^2}{39} - \frac{y^2}{25} = 1$

توضيح:

$\overline{F_1F_2}$ هنا المسافة بين بؤرة القطبين ونستخدم قانون المسافة بين نقطتين

$\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

سؤال 21 جد معادلة القطع الزائد الذي مركزه نقطة الأصل وبؤرتاه هما بؤرتي القطع الناقص $\frac{x^2}{164}+\frac{y^2}{64}=1$ ومجموع طول محوريه الحقيقي والمرافق يساوي (28) وحدة.

$\frac{x^2}{164}+\frac{y^2}{64}=1 \Rightarrow a^2=164\ ,\ b^2=64$

$a^2=b^2+c^2 \Rightarrow 164=64+c^2$

$c^2=164-64 \Rightarrow c^2=100$

$c=10 \quad c_{\text{ناقص}}=c_{\text{زائد}}$

$c=10$

$2a+2b=28\,]\div 2$

$a+b=14 \Rightarrow a=14-b$

$c^2=a^2+b^2 \Rightarrow 100=(14-b)^2+b^2$

$100=196-28+b^2+b^2$

$100=196-28b+2b^2\,]\div 2$

$50=98-14b+b^2$

$b^2-14b+98-50=0$

$b^2-14b+48=0$

$(b-8)(b-6)=0$

أما $b-8=0 \Rightarrow b=8$

$a=14-8 \Rightarrow a=6$

$\frac{x^2}{36}-\frac{y^2}{64}=1$

أو $b-6=0 \Rightarrow b=6$

$a=14-6 \Rightarrow a=8$

$\frac{x^2}{64}-\frac{y^2}{36}=1$

2019 - د (2) /احيائي

انسحاب المحاور للقطع المكافئ

أولاً معادلة القطع المكافئ الذي محوره يوازي محور السينات ورأسه $o\ (h,k)$

1 الفتحة لليمين:

المعادلة القياسية $(y-k)^2 = 4P(x-h)$

الرأس $\bar{o}\ (h,k)$

البؤرة $\bar{F}\ (P+h,k)$

معادلة الدليل $\bar{x} = -P+h$

معادلة المحور $\bar{y} = k$

2 الفتحة لليسار:

المعادلة القياسية $(y-k)^2 = -4P\ (x-h)$

الرأس $\bar{o}\ (h,k)$

البؤرة $\bar{F}\ (-P+h,k)$

معادلة الدليل $\bar{x} = P+h$

معادلة المحور $\bar{y} = k$

ثانياً معادلة القطع المكافئ الذي محوره يوازي محور الصادات ورأسه $o\ (h,k)$

1 الفتحة للأعلى:

المعادلة القياسية $(x-h)^2 = 4P\ (y-k)$

الرأس $\bar{o}\ (h,k)$

البؤرة $\bar{F}\ (h,\ P+k)$

معادلة الدليل $\bar{y} = -P+k$

معادلة المحور $\bar{x} = h$

2 الفتحة للأسفل:

المعادلة القياسية $(x-h)^2 = -4P(y-k)$

الرأس $\bar{o}\ (h,k)$

البؤرة $\bar{F}\ (h,-P+k)$

معادلة الدليل $\bar{y} = P+k$

معادلة المحور $\bar{x} = h$

مثال 1 جد الرأس والبؤرة ومعادلتي المحور والدليل للقطع المكافئ: $(y+1)^2 = 4\ (x-2)$

$h=2 \quad , \quad k=-1$

$(y+1)^2 = 4\ (x-2)$

$(y-k)^2 = 4P\ (x-h)$

$k=-1 \quad , \quad h=2$

$[4P=4] \div 4 \ \Rightarrow\ P=1$

الرأس: $\bar{o}\ (h,k) \Rightarrow (2,\ -1)$

البؤرة: $\bar{F}\ (P+h,\ k)$

$\bar{F}\ (1+2,\ -1) \ \Rightarrow\ \bar{F}\ (3,\ -1)$

معادلة الدليل: $x=-P+h$

$x=-1+2 \ \Rightarrow\ x=1$

معادلة المحور: $y=k$

$y=-1$

مثال 2 جد الرأس والبؤرة ومعادلتي المحور والدليل للقطع المكافئ: $(x-1)^2 = 8\ (y-1)$

$(x-1)^2 = 8\ (y-1)$

$(x-h)^2 = 4P\ (y-k)$

$h=1 \quad , \quad k=1$

$[4P=8] \div 4 \ \Rightarrow\ P=2$

الرأس: $\bar{o}\ (h,\ k) \Rightarrow (1,\ 1)$

البؤرة: $\bar{F}\ (h,\ P+k)$

$\bar{F}\ (1,\ 2+1) \ \Rightarrow\ \bar{F}\ (1,\ 3)$

معادلة الدليل: $y=-P+k$

$y=-2+1 \ \Rightarrow\ y=-1$

معادلة المحور: $x=h$

$x=1$

** ملاحظة حول استخراج قيم h ، k من معادلة القطع المكافئ القياسية:

مثال توضيحي

$$(y+1)^2 = 4\ (x-2)$$

الرقم الذي داخل قوس x يمثل قيمة h دائماً ولكن نعكس اشارته فهنا الرقم 2- فتكون h=2

الرقم الذي داخل قوس y يمثل قيمة k دائماً ولكن نعكس اشارته فهنا الرقم 1+ فتكون k=-1

مثال 3 ناقش القطع المكافئ $y = x^2 + 4x$

أولاً: اجعل المتغير الذي يحوي التربيع وكل ما يتعلق به في طرف والمتغير الذي لا يحوي التربيع في طرف اخر (وهذه الخطوة متحققة في هذا المثال ولا تحتاج الى ترتيب)

$$y = x^2 + 4x$$

ثانياً: نقوم بالنظر الى المتغير الذي يحوي التربيع وهنا هو المتغير X ثم نذهب لنأخذ نصف معامل X وليس X^2 ونقوم بتربيعه واضافته للطرفين فهنا معامل X هو 4 نأخذ نصفه وهو 2 وتربيع 2 هو 4 حيث نضيف الرقم 4 للطرفين كما موضح داخل الدائرة

$$y + 4 = x^2 + 4x + 4$$

ثالثاً: نحلل الطرف الذي يحوي التربيع مربع كامل وتصبح المعادلة بالشكل القياسي

$$(y+4) = (x+2)^2$$

$$(x+2)^2 = (y+4)$$

$$(x-h)^2 = 4P\,(y-k)$$

$$h = -2 \quad , \quad k = -4$$

$$[4P = 1] \div 4 \Rightarrow P = \frac{1}{4}$$

$\bar{o}\,(h, k) \Rightarrow (-2, -4)$ الرأس

$\bar{F}\,(h, P+k) \Rightarrow \left(-2\,,\, \frac{1}{4} - 4\right)$ البؤرة $\bar{F}\left(-2\,,\, \frac{-15}{4}\right)$

$\bar{y} = -P + k$ معادلة الدليل

$$\bar{y} = -\frac{1}{4} - 4 \Rightarrow \bar{y} = \frac{-17}{4}$$

$\bar{x} = h$ معادلة المحور

$$\bar{x} = -2$$

مثال 4 جد الرأس والبؤرة ومعادلتي المحور والدليل للقطع المكافئ: $y^2 + 4y + 2x = -6$

2012 - د (1)

$y^2 + 4y = -6 - 2x$

نضيف مربع نصف معامل y للطرفين

$y^2 + 4y + 4 = -6 - 2x + 4$

$(y+2)^2 = -2x - 2$

معادلة القطع القياسية $\boxed{(y+2)^2 = -2(x+1)}$

$k = -2 \quad , \quad h = -1$

$[4P = 2] \div 4 \Rightarrow P = \frac{1}{2}$

الرأس: $\bar{o}(h,k) \Rightarrow (-1,-2)$

البؤرة: $\bar{F}(-P+h, k)$

$\bar{F}\left(-\frac{1}{2} - 1, -2\right) \Rightarrow \bar{F}\left(-\frac{3}{2}, -2\right)$

معادلة الدليل: $\bar{x} = P + h$

$\bar{x} = \frac{1}{2} - 1 \Rightarrow \bar{x} = \frac{-1}{2}$

معادلة المحور: $\bar{y} = k$

$\bar{y} = -2$

مثال 5 جد الرأس والبؤرة ومعادلتي المحور والدليل للقطع المكافئ: $x^2 + 6x - y = 0$

$x^2 + 6x = y$

$x^2 + 6x + 9 = y + 9$

$\boxed{(x+3)^2 = (y+9)}$

$(x-h)^2 = 4P(y-k)$

$h = -3 \quad , \quad k = -9$

$[4P = 1] \div 4 \Rightarrow P = \frac{1}{4}$

الرأس: $\bar{o}(h, k) \Rightarrow (-3, -9)$

البؤرة: $\bar{F}(h, P+k)$

$\bar{F}\left(-3, \frac{1}{4} - 9\right) \Rightarrow \bar{F}\left(-3, \frac{-35}{4}\right)$

معادلة الدليل: $\bar{y} = -P + k$

$\bar{y} = -\frac{1}{4} - 9 \Rightarrow \bar{y} = \frac{-37}{4}$

معادلة المحور: $\bar{x} = h$

$\bar{x} = -3$

انسحاب المحاور للقطع الناقص

الانسحاب ← المعادلة بالشكل القياسي لا تحتاج ترتيب

الانسحاب ← المعادلة ليست بالشكل تحتاج إلى ترتيب

أولاً إذا أعطى معادلة بالشكل القياسي (لا تحتاج ترتيب)

على محور السينات

$$\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$$

معادلة المحور الكبير $y=k$

معادلة المحور الصغير $x=h$

على محور الصادات

$$\frac{(x-h)^2}{b^2}+\frac{(y-k)^2}{a^2}=1$$

معادلة المحور الكبير $x=h$

معادلة المحور الصغير $y=k$

ملاحظات

أولاً: نجد h,k وتمثل احداثي المركز $o(h,k) \Leftarrow h$ مع قوس x و k مع قوس y نأخذهما بعكس الاشارة .

ثانياً: نجد a^2 , b^2 من المعادلة القياسية ثم نجد c باستخدام القانون العام ادناه:

$$\boxed{a^2=b^2+c^2}$$

ثالثاً: نجد مطاليب السؤال .

مثال 1 جد البؤرتين والرأسين والقطبين وطول ومعادلة كل من المحورين للقطع الناقص ، $\frac{(x-2)^2}{9}+\frac{(y-1)^2}{25}=1$

$h=+2 \quad , \quad k=+1 \Rightarrow o(h,k) \Rightarrow o(2,1)$

$a^2=25 \Rightarrow a=5$ على محور الصادات

$b^2=9 \Rightarrow b=3$

$a^2=b^2+c^2 \Rightarrow c=\sqrt{a^2-b^2}$

$c=\sqrt{25-9}=\sqrt{16}=4$

البؤرتان:

$\overline{F}_1(h,c+k) \Rightarrow \overline{F}_1(2\,,\,4+1) \Rightarrow \overline{F}_1(2\,,\,5)$

$\overline{F}_2(h,-c+k) \Rightarrow \overline{F}_2(2\,,\,-4+1) \Rightarrow \overline{F}_2(2\,,\,-3)$

الرأسان:

$\overline{V}_1(h,a+k) \Rightarrow \overline{V}_1(2\,,\,5+1) \Rightarrow \overline{V}_1(2\,,\,6)$

$\overline{V}_2(h,-a+k) \Rightarrow \overline{V}_2(2\,,\,-5+1) \Rightarrow \overline{V}_2(2\,,\,-4)$

القطبان:

$\overline{M}_1(b+h,\,k) \Rightarrow \overline{M}_1(3+2,\,1) \Rightarrow \overline{M}_1(5\,,\,1)$

$\overline{M}_2(-b+h,\,k) \Rightarrow \overline{M}_2(-3+2,\,1) \Rightarrow \overline{M}_2(-1\,,\,1)$

طول المحور الكبير = $2a=2(5)=10$ وحدة طول

طول المحور الصغير = $2b=(2)(3)=6$ وحدة طول

الاختلاف المركزي $e=\frac{c}{a}=\frac{4}{5}=0.8$

$x=h \Rightarrow \boxed{x=2} \longrightarrow$ معادلة المحور الكبير

$y=k \Rightarrow \boxed{y=1} \longrightarrow$ معادلة المحور الصغير

مثال 2 عيّن كل من البؤرتين والرأسين والقطبين والمركز ثم جد طول ومعادلة المحورين والاختلاف المركزي $\frac{(x-4)^2}{81}+\frac{(y+1)^2}{25}=1$

مركز $h=4 \quad , \quad k=-1 \;\Rightarrow\; o\,(h,k) \;\Rightarrow\; o\,(4,-1)$

$a^2=81 \;\Rightarrow\; a=9$

$b^2=25 \;\Rightarrow\; b=5$

$a^2=b^2+c^2 \;\Rightarrow\; c=\sqrt{a^2-b^2} \;\Rightarrow\; c=\sqrt{81-25}=\sqrt{56}=\sqrt{4\times 14}$

$c=2\sqrt{14}$

البؤرتان:

$\overline{F}_1\,(c+h,k) \;\Rightarrow\; (2\sqrt{14}+4,-1)$

$\overline{F}_2\,(-c+h,k) \;\Rightarrow\; (-2\sqrt{14}+4,-1)$

الرأسان:

$\overline{V}_1\,(a+h,k) \;\Rightarrow\; \overline{V}_1\,(9+4,-1) \;\Rightarrow\; \overline{V}_1\,(13\,,\,-1)$

$\overline{V}_2\,(-a+h,k) \;\Rightarrow\; \overline{V}_2\,(-9+4,-1) \;\Rightarrow\; \overline{V}_2\,(-5\,,\,-1)$

القطبان:

$\overline{M}_1\,(h,b+k) \;\Rightarrow\; \overline{M}_1\,(4,\,5-1) \;\Rightarrow\; \overline{M}_1\,(4\,,\,4)$

$\overline{M}_2\,(h,-b+k) \;\Rightarrow\; \overline{M}_2\,(4,\,-5-1) \;\Rightarrow\; \overline{M}_2\,(4\,,\,-6)$

طول المحور الكبير = $2a=2\,(9)=18$ وحدة طول

طول المحور الصغير = $2b=2\,(5)=10$ وحدة طول

$y=k \;\Rightarrow\; \boxed{y=-1} \longrightarrow$ معادلة المحور الكبير

$x=h \;\Rightarrow\; \boxed{x=4} \longrightarrow$ معادلة المحور الصغير

ثانياً إذا أعطى معادلة غير مرتبة بالشكل القياسي **(تحتاج إلى ترتيب)**

أولاً نفتح قوسين ونضع بالأول x وجماعتها وفي القوس الثاني y وجماعتها وبين القوسين نضع +

العدد = (y وجماعتها) + (x وجماعتها)

ثانياً نسحب معامل x^2 ومعامل y^2 عامل مشترك

ثالثاً نضيف ^{2}(نصف معامل x) للقوس الذي يحوي جماعة x

ونضيف ^{2}(نصف معامل y) للقوس الذي جماعة y

* نضيف $\left(\text{نصف معامل } \begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\right)^2$ بعد ضربها بالعدد الموجود خارج القوس (العامل المشترك) الى الطرف الثاني الي يحتوي العدد.

رابعاً نحلل كل قوس باستخدام طريقة المربع الكامل كالتالي:

$$(\square \pm \square)^2$$

جذر الاول — اشارة الوسط — جذر الأخير

خامساً نقسم على العدد الذي في الطرف الثاني لكي تصبح المعادلة قياسية.

مثال 3 جد البؤرتين والرأسين والقطبين وطول ومعادلة كل من المحورين للقطع الناقص الذي معادلته $9x^2+16y^2-72x-96y+144=0$

جماعة x جماعة y العدد

$(9x^2-72x)+(16y^2-96y)=-144$

$9(x^2-8x)+16(y^2-6y)=-144$ نسحب معامل x^2 و y^2 عامل مشترك

$9(x^2-8x+16)+16(y^2-6y+9)=\cancel{-144}+\cancel{144}+144$

$\left[9(x-4)^2+16(y-3)^2=+144\right]\div 144$

$\frac{(x-4)^2}{16}+\frac{(y-3)^2}{9}=1$ القطع على السينات

$h=4 \quad , \quad k=3 \Rightarrow o(h,k) \Rightarrow o(4,3)$ المركز

$a^2=16 \Rightarrow \boxed{a=4} \quad , \quad b^2=9 \Rightarrow \boxed{b=3}$

$a^2=b^2+c^2 \Rightarrow c=\sqrt{a^2-b^2}$

$c=\sqrt{16-9} \Rightarrow \boxed{\sqrt{7}}$

البؤرتان:

$\bar{F}_1(c+h,k) \Rightarrow \bar{F}_1(\sqrt{7}+4\ ,\ 3)$

$\bar{F}_2(-c+h,k) \Rightarrow \bar{F}_2(-\sqrt{7}+4\ ,\ 3)$

الرأسان:

$\bar{V}_1(a+h,k) \Rightarrow \bar{V}_1(4+4\ ,\ 3) \Rightarrow \bar{V}_1(8\ ,\ 3)$

$\bar{V}_2(-a+h,k) \Rightarrow \bar{V}_2(-4+4\ ,\ 3) \Rightarrow \bar{V}_2(0\ ,\ 3)$

القطبان:

$\bar{M}_1(h,b+k) \Rightarrow \bar{M}_1(4\ ,\ 3+3) \Rightarrow \bar{M}_1(4\ ,\ 6)$

$\bar{M}_2(h,-b+k) \Rightarrow \bar{M}_2(4\ ,\ -3+3) \Rightarrow \bar{M}_2(4\ ,\ 0)$

طول المحور الكبير $2a=2(4)=8$ وحدة طول

طول المحور الصغير $2b=2(3)=6$ وحدة طول

$y=k \Rightarrow \boxed{y=3}$ معادلة المحور الكبير

$x=h \Rightarrow \boxed{x=4}$ معادلة المحور الصغير

مثال 4 ناقش خصائص القطع التالي : $x^2+25y^2+4x-150y+204=0$

2019 - د (1)/ خارج

$$(x^2+4x)+(25y^2-150y)=-204$$

$$1\,(x^2+4x)+25\,(y^2-6y)=-204$$

$$(x^2+4+4)+25\,(y^2-6y+9)=-204+4+225$$

$$\left[(x+2)^2+25\,(y-3)^2=25\right]\div 25 \Rightarrow \boxed{\frac{(x+2)^2}{25}+\frac{(y-3)^2}{1}=1}$$ القطع على السينات

المركز $\boxed{h=-2}\ ,\ \boxed{k=3} \Rightarrow o\,(h,k) \Rightarrow o\,(-2,3)$

$a^2=25 \Rightarrow \boxed{a=5}$

$b^2=1 \Rightarrow \boxed{b=1}$

$a^2=b^2+c^2 \Rightarrow c=\sqrt{a^2-b^2} \Rightarrow c=\sqrt{25-1}=\sqrt{24} \Rightarrow \boxed{c=2\sqrt{6}}$

البؤرتان

$\overline{F}_1\,(c+h,k) \Rightarrow \overline{F}_1\,(2\sqrt{6}-2\,,\,3)$

$\overline{F}_2\,(-c+h,k) \Rightarrow \overline{F}_2\,(-2\sqrt{6}-2\,,\,3)$

الرأسان

$\overline{V}_1\,(a+h,k) \Rightarrow \overline{V}_1\,(5-2\,,\,3) \Rightarrow \overline{V}_1\,(3\,,\,3)$

$\overline{V}_2\,(-a+h,k) \Rightarrow \overline{V}_2\,(-5-2\,,\,3) \Rightarrow \overline{V}_2\,(-7\,,\,3)$

القطبان

$\overline{M}_1\,(h,b+k) \Rightarrow \overline{M}_1\,(-2\,,\,1+3) \Rightarrow \overline{M}_1\,(-2\,,\,4)$

$\overline{M}_2\,(h,-b+k) \Rightarrow \overline{M}_2\,(-2\,,\,-1+3) \Rightarrow \overline{M}_2\,(-2\,,\,2)$

الأختلاف المركزي $e=\frac{c}{a}=\frac{2\sqrt{6}}{5}$

$A = a.b\pi$

$A = (5)(1)\pi \Rightarrow A = 5\pi$ وحدة مربعة

$P = 2\pi\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$

$P = 2\pi\sqrt{\frac{25+1}{2}} \Rightarrow P = 2\sqrt{13}\,\pi$ وحدة طول

طول المحور الكبير $= 2a = 2(5) = 10$ وحدة طول

طول المحور الصغير $= 2b = 2(1) = 2$ وحدة طول

المسافة بين بؤرتين $= 2c = 2(2\sqrt{6}) = 4\sqrt{6}$ وحدة طول

معادلة المحـــور الكبير $\boxed{y = 3}$

معادلة المحور الصغير $\boxed{x = -2}$

النوع الثالث من الأسئلة (انسحاب محاور القطع الزائد)

*** قطع زائد محوره الحقيقي يوازي محور (x)**

المعادلة
$$\boxed{\frac{(x-h)^2}{a^2}-\frac{(y-k)^2}{b^2}=1}$$

المركز:

$o\ (h,k)$

الرأسان :

$\overline{V}_1\ (a+h,k)\qquad \overline{V}_2\ (-a+h,k)$

البؤرتان :

$\overline{F}_1\ (c+h,k)\qquad \overline{F}_2\ (-c+h,k)$

*** قطع زائد محوره الحقيقي يوازي محور (y)**

المعادلة
$$\boxed{\frac{(y-k)^2}{a^2}-\frac{(x-h)^2}{b^2}=1}$$

المركز:

$o\ (h,k)$

الرأسان :

$\overline{V}_1\ (h,a+k)\qquad \overline{V}_2\ (h,-a+k)$

البؤرتان :

$\overline{F}_1\ (h,c+k)\qquad \overline{F}_2\ (h,-c+k)$

خطوات حل السؤال

1. نحدد (a^2) و (b^2) من المعادلة و a^2 هو دائماً في المقام الأول .
2. نستخدم قانون $c^2=a^2+b^2$ لايجاد قيمة (c) .
3. نجد (h,k) .
4. نجد المركز والرأسان والبؤرتان حسب القانون الوارد اعلاه .
5. $2a$ = طول المحور الحقيقي
   $2b$ = طول المحور الحقيقي
6. قانون الاختلاف المركزي نفسه $\left(e=\frac{c}{a}\right)$

مثال 1 جد احداثيا المركز والرأسين وطول المحورين والاختلاف المركزي للقطع الزائد الذي معادلته: $\frac{(x+2)^2}{9}-\frac{(y-1)^2}{4}=1$

$a^2=9 \Rightarrow a=3$

$b^2=4 \Rightarrow b=2$

$c^2=a^2+b^2$

$c^2=9+4=13 \Rightarrow c=\sqrt{13}$ بالجذر

$h=-2 \quad , \quad k=1$

1. المركز: $o(h,k) \Rightarrow (-2,1)$
2. البؤرتان: $\overline{F}_1(c+h,k) \Rightarrow \overline{F}_1(\sqrt{13}-2\ ,\ 1)$
   $\overline{F}_2(-c+h,k) \Rightarrow \overline{F}_2(-\sqrt{13}-2\ ,\ 1)$
3. الرأسان: $\overline{V}_1(a+h,k) \Rightarrow \overline{V}_1(3-2\ ,\ 1) \Rightarrow \overline{V}_1(1\ ,\ 1)$
   $\overline{V}_2(-a+h,k) \Rightarrow \overline{V}_2(-3-2\ ,\ 1) \Rightarrow \overline{V}_2(-5\ ,\ 1)$
4. طول المحور الحقيقي $= 2a = 6$ وحدة
5. طول المحور المرافق $= 2b = 4$ وحدة
6. الاختلاف المركزي: $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{13}}{3}>1$

مثال 2 عين المركز وبؤرتا ورأسا القطع الزائد الاتي ثم جد طول كل من المحورين والاختلاف المركزي: $2(y+1)^2-4(x-1)^2=8 \div 8$

$\left[2(y+1)^2-4(x-1)^2=8\right] \div 8$

$\frac{(y+1)^2}{4}-\frac{(x-1)^2}{2}=1$

$a^2=4 \Rightarrow a=2$

$b^2=2 \Rightarrow b=\sqrt{2}$

$c^2=a^2+b^2$

بالجذر
$c^2=4+2=6 \Rightarrow c=\sqrt{6}$

$k=-1 \quad , \quad h=1$

1. المركز: $o(h,k)=(1,-1)$
2. البؤرتان: $\overline{F}_1(h,c+k) \Rightarrow (1,\ \sqrt{6}-1)$
   $\overline{F}_2(h,-c+k) \Rightarrow (1,\ -\sqrt{6}-1)$
3. الرأسان: $\overline{V}_1(h,a+k) \Rightarrow \overline{V}_1(1\ ,2-1) \Rightarrow \overline{V}_1(1\ ,\ 1)$
   $\overline{V}_2(h,-a+k) \Rightarrow \overline{V}_2(1,\ -2-1) \Rightarrow \overline{V}_2(1\ ,\ -3)$
4. طول المحور الحقيقي $= 2a = 4$ وحدة
5. طول المحور المرافق $= 2b = 2\sqrt{2}$ وحدة
6. الاختلاف المركزي: $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{6}}{2}>1$

مثال 3 جد البؤرتين والرأسين والمركز وطول المحورين للقطع الزائد الذي معادلته :

$$16x^2 + 160x - 9y^2 + 18y = 185$$

$$(16x^2 + 160x) + (-9y^2 + 18y) = 185$$

$$16\,(x^2 + 10x) - 9\,(y^2 - 2y) = 185$$

$$16\,(x^2 + 10x + 25) - 9\,(y^2 - 2y + 1) = 185 + 400 - 9$$

$$\left[16\,(x^2 + 5)^2 - 9\,(y^2 - 1)^2 = 576\right] \div 576$$

$$\frac{(x+5)^2}{36} - \frac{(y-1)^2}{64} = 1$$

$$a^2 = 36 \Rightarrow a = 6$$

$$b^2 = 64 \Rightarrow b = 8$$

$$c^2 = a^2 + b^2$$

$$c^2 = 36 + 64 = 100 \xRightarrow{\text{بالجذر}} c = 10$$

$$h = -5 \;,\; k = 1$$

1 المركز: $o\,(h,k) \Rightarrow (-5\,,\,1)$

2 البؤرتان: $\bar{F}_1\,(c+h,k) \Rightarrow \bar{F}_1\,(10-5\,,\,1) \Rightarrow \bar{F}_1\,(5\,,\,1)$

$\bar{F}_2\,(-c+h,k) \Rightarrow \bar{F}_2\,(-10-5\,,\,1) \Rightarrow \bar{F}_2\,(-15\,,\,1)$

3 الرأسان: $\bar{V}_1\,(a+h,k) \Rightarrow \bar{V}_1\,(6-5\,,1) \Rightarrow \bar{V}_1\,(1\,,\,1)$

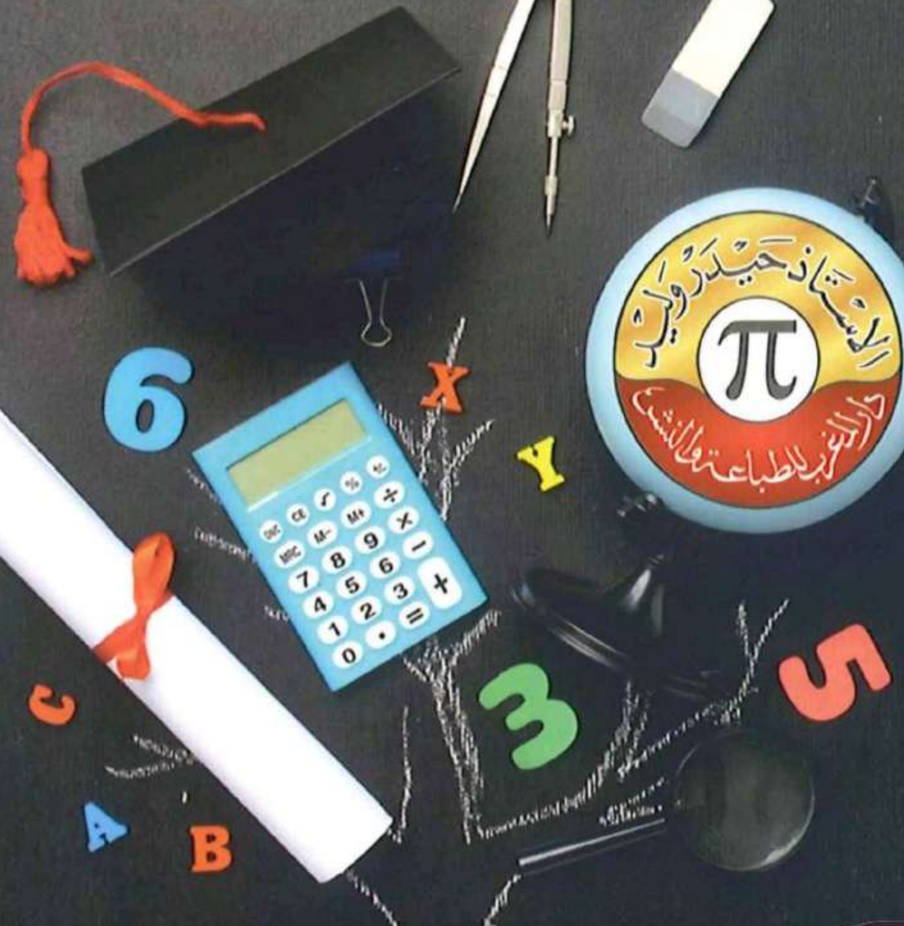
$\bar{V}_2\,(-a+h,k) \Rightarrow \bar{V}_2\,(-6-5\,,\,1) \Rightarrow \bar{V}_2\,(-11\,,\,1)$

4 طول المحور الحقيقي $= 2a = 12$ وحدة

5 طول المحور المرافق $= 2b = 16$ وحدة

6 الاختلاف المركزي: $e = \frac{c}{a} = \frac{10}{6} = \frac{5}{3} = \; > 1$

الأستاذ حيدر وليد



الفصل السادس

6 الهندسة الفضائية

ملازم دار المغرب Mob: 6561

077 100 55555

مراجعة في الهندسة

1 عبارة التوازي : يمكن رسم مستقيم واحد فقط موازٍ لمستقيم معلوم من نقطة لا تنتمي إليه .

2 لكل مستقيمين متقاطعين يوجد مستوٍ وحيد يحويهما .

3 لكل مستقيمين متوازيين يوجد مستوٍ وحيد يحويهما .

4 إذا تقاطع مستويان فان مجموعة التقاطع مستقيم .

5 مستقيم تقاطع مستويين يحوي النقاط المشتركة بينهما .

6 إذا وازى مستقيم مستوياً فانه يوازي جميع المستقيمات الناتجة من تقاطع هذا المستوي مع المستويات التي تحوي هذا المستقيم .

7 إذا وازى مستقيم مستوي فالمستقيم المار من نقطة من نقاط المستوي موازياً للمستقيم المعلوم يكون محتوى في المستقيم .

8 إذا وازى كل من مستقيمين متقاطعين مستوياً فان مستويهما يوازي هذا المستوي .

9 إذا وازى ضلعا زاوية ضلعي زاوية اخرى توازى مستويهما وتساوى قياس الزاويتين .

10 يتعامد المستقيمين اذا كان قياس الزاوية بينهما قائمة وبالعكس .

11 في المستوي الواحد : المستقيم العمودي على احد مستقيمين توازيين يكون عمودياً على الآخر .

12 في المستوي الواحد : يوجد مُستقيم وحيد عمودي على مستقيم معلوم من نقطة معلومة .

13 في الفراغ :

(أ) يوجد مستقيم وحيد عمودي على مستقيم معلوم من نقطة لا تنتمي اليه .

(ب) يوجد عدد غير منتهي من المستقيمات العمودية على مستقيم معلوم من نقطة تنتمي اليه .

14 المستقيم العمودي على مستوي يكون عمودياً على جميع المستقيمات المرسومة من اثره في ذلك المستوي وبالعكس .

15 المستقيم العمودي على مستقيمين متقاطعين من نقطة تقاطعهما يكون عمودياً على مستوٍ بهما .

16 يوجد مستقيم وحيد عمودي على مستوٍ معلوم من نقطة معلومة .

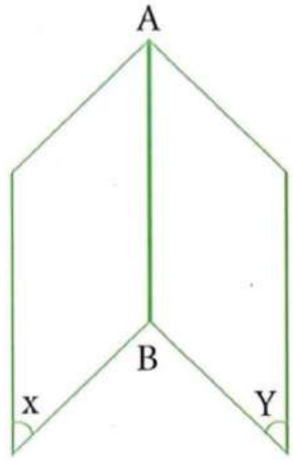
17 المستوي العمودي على احد مستقيمين متوازيين يكون عمودياً على الآخر .

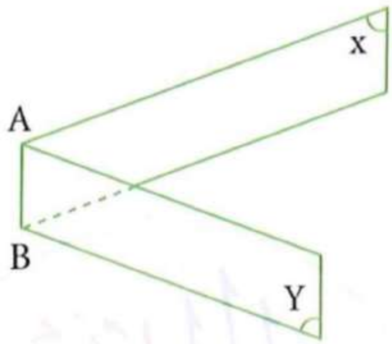
18 المستقيمان العموديان على مستوٍ واحد متوازيان .

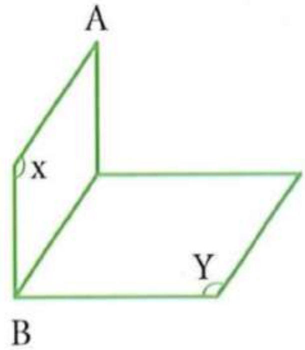
الزاوية الزوجية والمستويات المتعامدة

الزاوية الزوجية: إتحاد نصفي مستويين لهما حافة مشتركة.

تسمى الحافة المشتركة بـ (حرف الزاوية الزوجية) ويسمى كل من نصفي المستويين بـ (وجه الزاوية الزوجية) كما في الشكل.





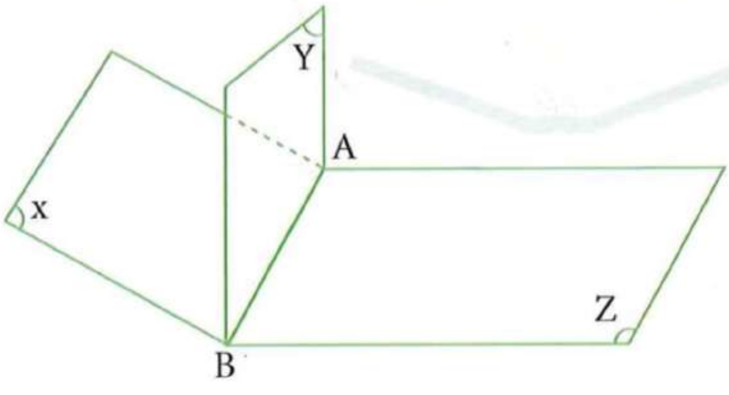


حيث $\overleftrightarrow{AB}$ هو حرف الزاوية الزوجية و هما وجهاها ويعبر عن الزاوية الزوجية بالتعبير:

$$(x)-\overleftrightarrow{AB}-(Y)$$

وقد يعبر عنها بحرف الزاوية الزوجية إن لم يكن مشتركاً مع زاوية إخرى.

مثلاً:



الزاوية الزوجية

$(x)-\overleftrightarrow{AB}-(Z)$

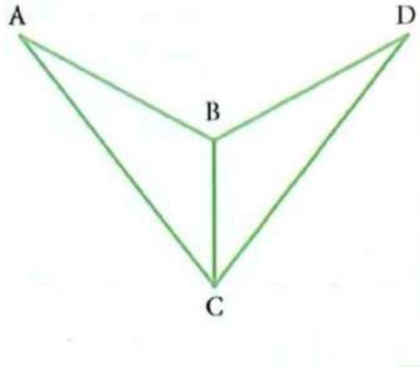
$(x)-\overleftrightarrow{AB}-(Y)$

$(Y)-\overleftrightarrow{AB}-(Z)$

ولا يمكن أن تكتب الزاوية الزوجية بشكل $\overleftrightarrow{AB}$ في هذا المثال لأن الحرف $\overleftrightarrow{AB}$ مشترك في أكثر من زاوية زوجية.

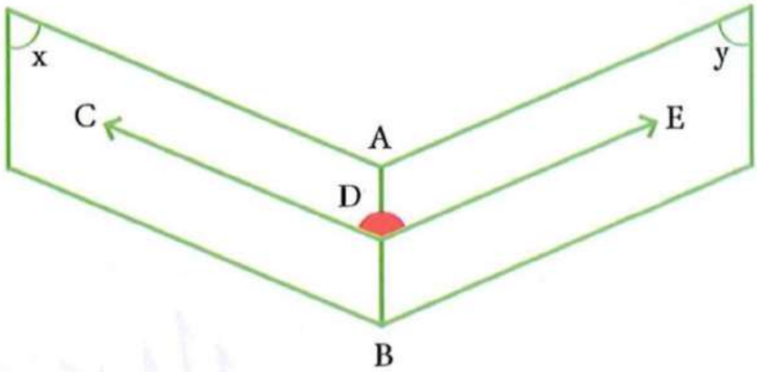
ملاحظة

عندما تكون أربع نقاط ليست في مستوٍ واحد. نكتب الزاوية الزوجية $A-\overleftrightarrow{BC}-D$ أو الزاوية الزوجية بين المستويين (ABC) , (DBC) كما في الشكل الآتي:



وتقاس الزاوية الزوجية كالآتي :

نأخذ نقطة D على الحافة المشتركة ونرسم من D العمود في (x) والعمود في (y) على الحرف فيكون قياس الزاوية الزوجية بين المستويين هو قياس الزاوية CDE وتسمى الزاوية العائدة للزاوية الزوجية كما في الشكل الآتي :



بعبارة اخرى لدينا الزاوية الزوجية

$$(x)-\overleftrightarrow{AB}-(Y)$$

ولدينا

$$\overrightarrow{DC}\subset(x)\ ,\ \overrightarrow{DE}\subset(Y)$$

$$DC\perp\overleftrightarrow{AB}\ ,\ \overrightarrow{DE}\perp\overleftrightarrow{AB}$$

$\therefore$ $\measuredangle\ C\ D\ E$ هي الزاوية المستوية العائدة للزاوية الزوجية

$(x)-\overleftrightarrow{AB}-(Y)$ أو $\overleftrightarrow{AB}$

الزاوية المستوية العائدة لزاوية زوجية:

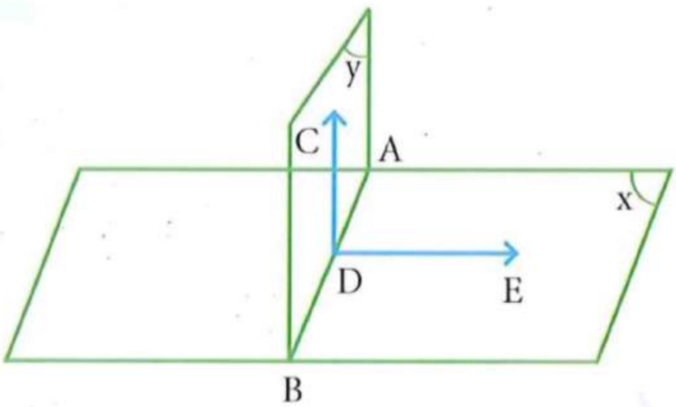
هي الزاوية التي ضلعها عموديان على حرف الزاوية الزوجية من نقطة تنتمي اليه وكل منهما في أحد وجهي الزاوية الزوجية .

1. قياس زاوية عائدة لزاوية زوجية ثابت .
2. قياس الزاوية الزوجية يساوي قياس الزاوية العائدة لها وبالعكس.

إذا كانت الزاوية الزوجية قائمة فأن المستويين متعامدان وبالعكس.

قياس $(x)-\overleftrightarrow{AB}-(Y)=90^\circ \leftrightarrow (x)\perp(Y)$

مبرهنة (7) إذا تعامد مستويات فالمستقيم المرسوم في أحدهما والعمودي على مستقيم التقاطع يكون عمودياً على المستوي الآخر .



معطيات $(Y) \perp (x)$

$\overleftrightarrow{CD} \subseteq (Y)$

$(Y) \cap (x) = \overleftrightarrow{AB}$

$\overleftrightarrow{CD} \perp \overleftrightarrow{AB}$

مطلوب اثباته $\overleftrightarrow{CD} \perp (x)$

البرهان:

في (x) نرسم $\overleftrightarrow{DE} \perp \overleftrightarrow{AB}$ (في المستوي الواحد يمكن رسم مستقيم وحيد عمودي على مستقيم فيه معلوم من نقطة معلومة) .

$\overleftrightarrow{CD} \subset (Y)$, $\overleftrightarrow{CD} \perp \overleftrightarrow{AB}$ (معطى)

$\therefore \sphericalangle CDE$ عائدة للزاوية الزوجية $(x) - \overleftrightarrow{AB} - (Y)$ (تعريف الزاوية العائدة)

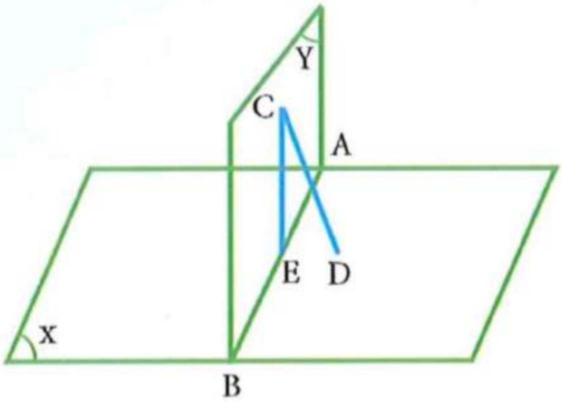
$\therefore m \sphericalangle CDE = 90°$ (قياس الزاوية الزوجية يساوي قياس الزاوية العائدة لها وبالعكس) .

$\therefore \overleftrightarrow{CD} \perp \overleftrightarrow{DE}$ (إذا كان قياس الزاوية بين مستقيمين 90 فأن المستقيمين متعامدان وبالعكس) .

$\therefore \overleftrightarrow{CD} \perp (x)$ (المستقيم العمودي على مستقيمين متقاطعين من نقطة تقاطعهما يكون عمودياً على مستويهما) .

و . هـ . م

نتيجة مبرهنة (7) إذا تعامد مستويان فالمستقيم المرسوم من نقطة في أحدهما عمودياً على المستوي الآخر يكون محتوى فيه .



المعطيات/ $(Y) \perp (X)$

$C \in (Y)$

$CD \perp (X)$

م/ اثباته $\overleftrightarrow{CD} \subset (Y)$

البرهان : $(x) \cap (Y) = \overline{AB}$

(يتقاطع مستويان بخط مستقيم)

نرسم $\overline{CE} \subset (Y)$

بحيث $\overline{CE} \perp \overline{AB}$ (في المستوي واحد يمكن رسم مستقيم وحيد عمودي على المستقيم معلوم من نقطة معلومة) .

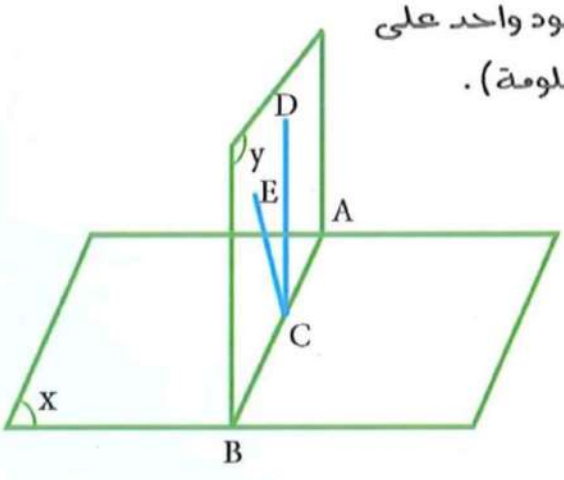
$(Y) \perp (x)$ (معطى)

$\overleftrightarrow{CE} \perp (x)$ مبرهنة (7)

(إذا تعامد مستويان فالمستقيم المرسوم في أحدهما وعمودي على مستقيم التقاطع يكون عمودي على المستوي الآخر) .

$\overleftrightarrow{CD} \perp (x)$ (معطى)

$\therefore \overleftrightarrow{CD} = \overleftrightarrow{CE}$ (لايمكن رسم أكثر من عمود واحد على مستو معلوم من نقطة معلومة) .

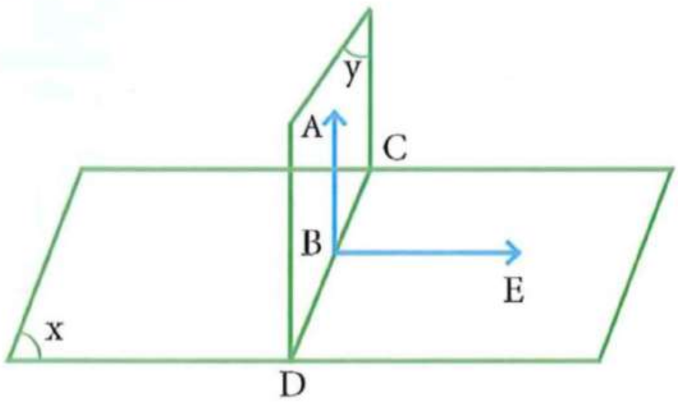


أو

يمكن رسم مستقيم وحيد عمودي على مستقيم معلوم من نقطة معلومة .

و . هـ . م

مبرهنة 8: كل مستوٍ مار بمستقيم وعمودي على مستوٍ آخر يكون عمودياً على ذلك المستوي أو يتعامد المستويان إذا أحتوى احدهما على مستقيم عمودي على الاخر .



المعطيات/ $\overleftrightarrow{AB} \perp (x)$

$\overleftrightarrow{AB} \subset (Y)$

المطلوب إثباته: $(Y) \perp (x)$

البرهان :

ليكن $(x) \cap (Y) = \overleftrightarrow{CD}$ (يتقاطع المستويان بخط مستقيم) .

$B \in \overleftrightarrow{CD}$ (مستقيم التقاطع يحتوي النقاط المشتركة) .

في (X) نرسم $\overleftrightarrow{BE} \perp \overleftrightarrow{CD}$ (في المستوي الواحد يوجد مستقيم وحيد عمودي على مستقيم معلوم من نقطة معلومة) .

$\because$ $\overleftrightarrow{AB} \perp (x)$ (معطى)

$\because$ $\overleftrightarrow{AB} \perp \overleftrightarrow{CD}$, $\overleftrightarrow{BE}$ (المستقيم العمودي على مستوي يكون عمودياً على جميع المستقيمات المرسومة من آثره ضمن ذلك المستو) .

$\because$ $\overleftrightarrow{AB} \subset (Y)$ (معطى)

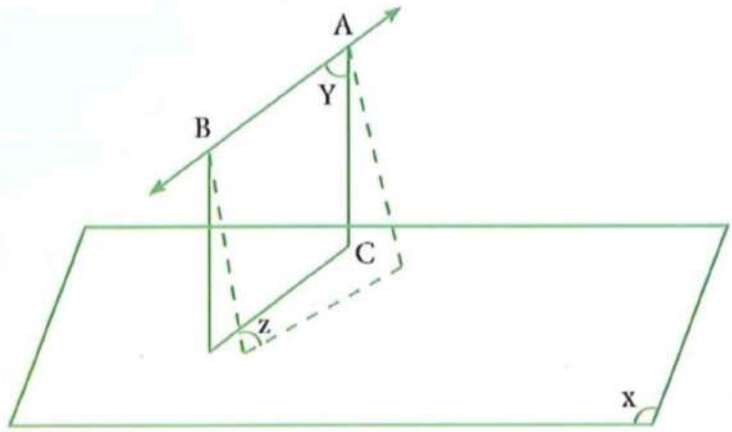
$\therefore$ $\sphericalangle ABE$ عائدة للزاوية الزوجية $\overleftrightarrow{CD}$ (تعريف الزاوية العائدة) .

$m\sphericalangle ABE = 90^\circ$ (لأن $\overleftrightarrow{AB} \perp \overleftrightarrow{BE}$)

$\therefore$ قياس الزاوية الزوجية $(Y) - \overleftrightarrow{CD} - (x) = 90^\circ$ (قياس الزاوية الزوجية يساوي قياس الزاوية العائدة لها وبالعكس) .

$\therefore$ $(Y) \perp (x)$ (إذا كان قياس الزاوية الزوجية 90 فأن المستويين متعامدان وبالعكس) .

مبرهنة 9: من مستقيم غير عمودي على مستوٍ معلوم يوجد مستوٍ وحيد عمودي على المستوي المعلوم .



المعطيات :

$\overleftrightarrow{AB}$ غير عمودي على (x)

المطلوب اثباته .

إيجاد مستوٍ وحيد يحوي $\overleftrightarrow{AB}$ وعمودي على (x) .

البرهان : من نقطة (A) نرسم $\overleftrightarrow{AC} \perp (x)$ (يوجد مستقيم وحيد عمودي على مستوٍ معلوم من نقطة لا تنتمي إليه) .

$\because$ $\overleftrightarrow{AC}$, $\overleftrightarrow{AB}$ متقاطعان .

$\therefore$ يوجد مستوٍ وحيد مثل (Y) يحويهما (لكل مستقيمين متقاطعين يوجد مستوٍ وحيد تحويهما) .

$\therefore$ $(x) \perp (Y)$ (مبرهنة 8)

ولبرهنة الوحدانية ليكن (Z) مستوي آخر يحوي $\overleftrightarrow{AB}$ وعمودي على (X) .

$\because$ $\overleftrightarrow{AC} \perp (x)$ (بالبرهان)

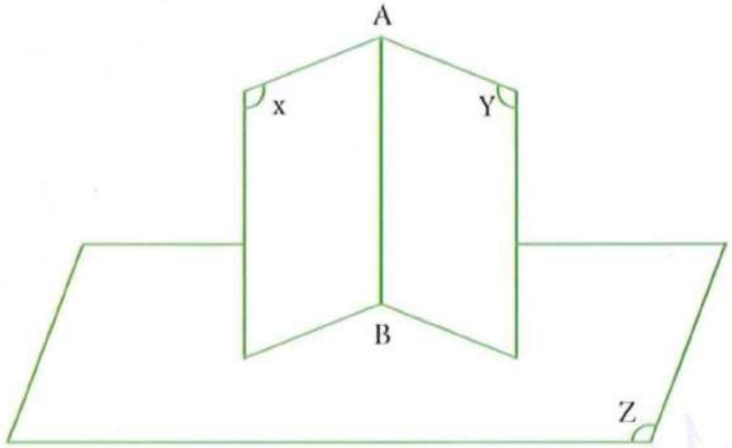
$\therefore$ $\overleftrightarrow{AC} \subset (Z)$ (نتيجة مبرهنة 7)

$\therefore$ $(Z) = (Y)$ (لكل مستقيمين متقاطعين يوجد مستوٍ وحيد يحويهما)

(Y) وحيد

و . هـ . م

نتيجة مبرهنة (9): إذا كان كل من مستويين متقاطعين عمودياً على مستوٍ ثالث فأن مستقيم تقاطعهما يكون عمودياً على المستوي الثالث .



المعطيات :

$(x) \cap (Y) = \overleftrightarrow{AB}$

$(x) , (Y) \perp (Z)$

المطلوب اثباته :

$\overleftrightarrow{AB} \perp (Z)$

البرهان :

إن لم يكن $\overleftrightarrow{AB}$ عمودياً على (Z)

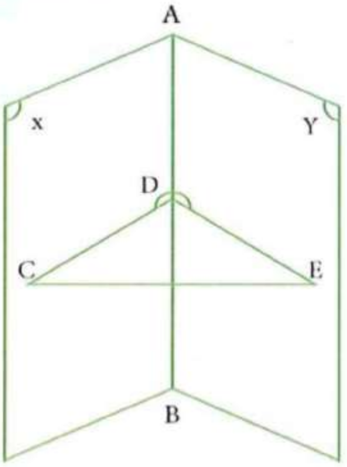
لما وجد أكثر من مستوي يحوي $\overleftrightarrow{AB}$ وعمودي على (Z) (مبرهنة 9)

$\overleftrightarrow{AB} \perp (Z)$

و . هـ . م

تمارين (1-6)

سؤال 1 برهن إن مستوى الزاوية المستوية العائدة لزاوية زوجية يكون عمودياً على حرفها.



المعطيات:

$(C\,D\,E)$ زاوية عائدة للزاوية الزوجية

$(x)-\overline{AB}-(Y)$

المطلوب: $(C\,D\,E) \perp \overline{AB}$

البرهان: $\overline{CD} \perp \overline{AB}$

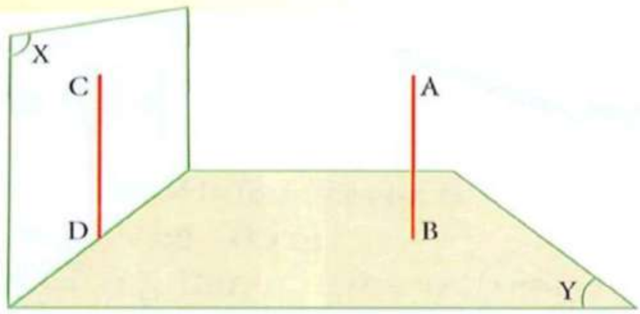
$\overline{ED} \perp \overline{AB}$ [تعريف الزاوية العائدة]

$(C\,D\,E) \perp \overline{AB}$

(المستقيم العمودي على مستقيمين متقاطعين من نقطة تقاطعهما يكون عمودياً على مستويهما).

و.هـ.م

سؤال 2 برهن إنه إذا وازى مستقيم مستوياً وكان عمودياً على مستوى آخر فان المستويين متعامدان.



الحل: $\overline{AB} \,//\, (x)$

المعطيات: $\overline{AB} \perp (Y)$

المطلوب: $(x) \perp (Y)$

البرهان: لتكن $C \in (x)$

نرسم $\overline{CD} \perp (Y)$

(يمكن رسم مستقيم وحيد عمودي على مستوٍ معلوم من نقطة معلومة)

$\because$ $\overline{AB} \perp (Y)$ (معطى) $\rightarrow$ $\overline{AB} \,//\, \overline{CD}$

$\overline{AB} \,//\, \overline{CD}$

المستقيمان العموديان على مستوٍ واحد متوازيان).

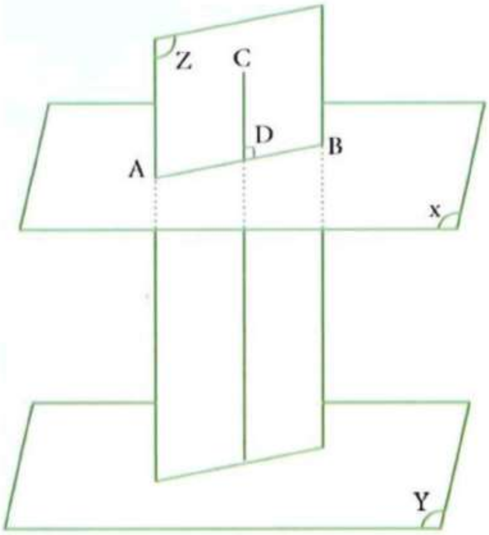
$C \in (x) \rightarrow \overline{CD} \subset (x)$

(إذا وازى مستقيم مستوياً فالمستقيم المفهوم من نقطة في المستوي وموزياً للمستقيم المعلوم يكون محتوى في المستوي).

$(x) \perp (Y)$ (مبرهنة 8)

و.هـ.م

سؤال 3 برهن إن المستوي العمودي على أحد مستويين يكون عمودياً على الآخر أيضاً



المعطيات: $(x) \,//\, (Y)$, $(Z) \perp (x)$

المطلوب: $(Z) \perp (Y)$

البرهان: ليكن $\overline{AB} = (Z) \cap (x)$

(إذا تقاطع مستويان فأن مجموعة التقاطع مستقيم)

لتكن $C \in Z$ ، نرسم $(Z) \subset \overline{CD}$ بحيث $\overline{CD} \perp \overline{AB}$

(في المستوي الواحد: يمكن رسم مستقيم واحد فقط عمودي على مستقيم معلوم من نقطة معلومة).

$(Z) \perp (x)$ (معطى) $\rightarrow$ $\overline{CD} \perp (x)$ (مبرهنة 7)

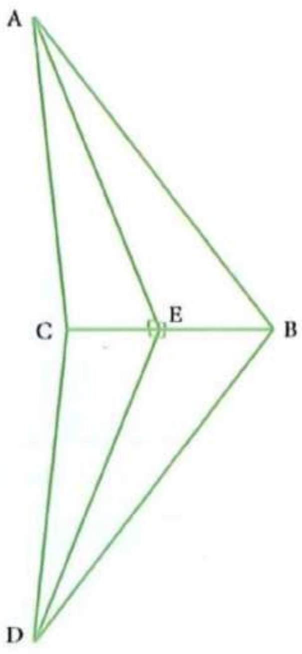
$(x) \,//\, (Y)$ (معطى) $\rightarrow$ $\overline{CD} \perp (y)$

(المستقيم العمودي على أحد مستويين متوازيين يكون عمودياً على الآخر)

$\therefore (Z) \perp (Y)$ (مبرهنة 8)

و . هـ . م

سؤال 4 A , B , C , D أربع نقاط ليست في مستوٍ واحد بحيث $AB = AC$, $E \in \overline{BC}$ فأذا كانت $\sphericalangle$ A E D عائدة للزاوية الزوجية $A - \overline{BC} - D$ برهن ان $CD = BD$



المعطيات: A , B , C , D أربع نقاط ليست في مستوٍ واحد.

$E \in \overline{BC}$, $AB = AC$

$\sphericalangle$ A E D عائدة للزاوية الزوجية $A - \overline{BC} - D$

المطلوب: $CD = BD$

البرهان: في $\triangle ABC$ $AB = AC$ (معطى)

$\because \overline{AE} \perp \overline{BC}$ (تعريف العائدة)

$\therefore$ E منتصف $\overline{BC}$

(العمود لمرسوم من رأس مثلث متساوي الساقين على القاعدة ينصفها).

في المثلثين CED , BED

$\overline{DE}$ (مشترك)

$CE = BE$ (بالبرهان)

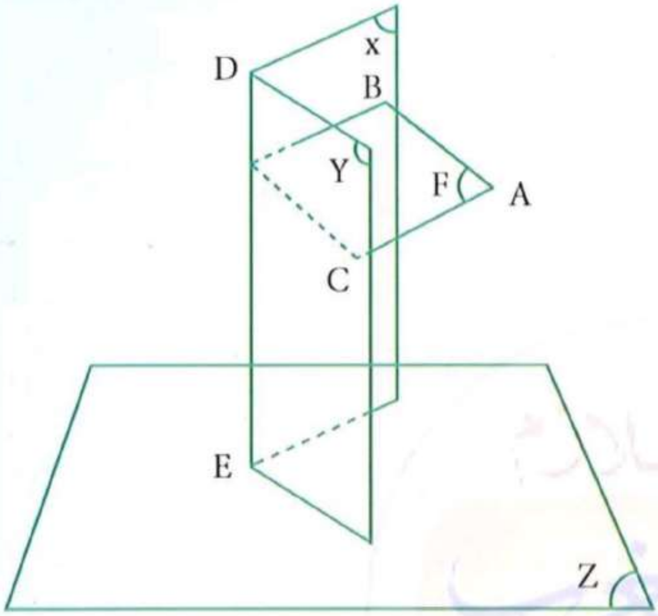
$\sphericalangle CED = \sphericalangle BED$ قوائم (تعريف العائدة)

يتطابق المثلثان (لتساوي ضلعين والزاوية المحصورة بينهما)

وينتج $CD = BD$

و . هـ . م

سؤال 5 برهن إذا وازى كل من مستقيمين متقاطعين مستوياً معلوماً وكانا عمودين على مستويين متقاطعين فان مستقيم تقاطع المستويين المتقاطعين يكون عمودياً على المستوي المعلوم .



المعطيات: $\overline{AB}\ ,\ \overline{AC}\ //\ (Z)$

$\overline{AB}\perp(x)\ ,\ \overline{AC}\perp(Y)\ ,\ (x)\cap(Y)=\overline{DE}$

المطلوب: $\overline{DE}\ \perp\ (Z)$

البرهان: $\overline{AB}\ ,\ \overline{AC}$ متقاطعان

يوجد مستوٍ وحيد يحويهما مثل (F) (لكل مستقيمين متقاطعين يوجد مستوٍ وحيد يحويهما) .

$\therefore\ (F)\ //\ (Z)$

(إذا وازى كل من مستقيمين متقاطعين مستوياً فأن مستويهما يوازي ذلك المستوي)

$\because\ \overline{AB}\ ,\ \perp\ (x)$ (معطى) $\rightarrow\ (F)\ \perp(x)$ مبرهنة 8

$\because\ \overline{AC}\perp(Y)$ (معطى) $\rightarrow\ (F)\perp(Y)$ مبرهنة 8

$\because\ \overline{DE}\perp(F)$ نتيجة مبرهنة 9

$DE\ \perp\ (Z)$ (المستقيم العمودي على أحد مستويين متوازيين يكون عمودياً على الآخر) .

و . هـ . م

سؤال 6 دائرة قطرها عمودي على مستويها، D نقطة تنتمي للدائرة
برهن إن (CDA) (CDB).

المعطيات: دائرة قطرها $\overline{AB}$

$\overline{AC}$ عمودي على مستويها، D نقطة تنتمي للدائرة.

المطلوب: $(CDA) \perp (CDB)$

البرهان: $\because$ $\overline{AB}$ قطر الدائرة (معطى)

$$m \sphericalangle ADB = 90^\circ$$

(الزاوية المحيطية المرسومة في نصف دائرة قائمة)

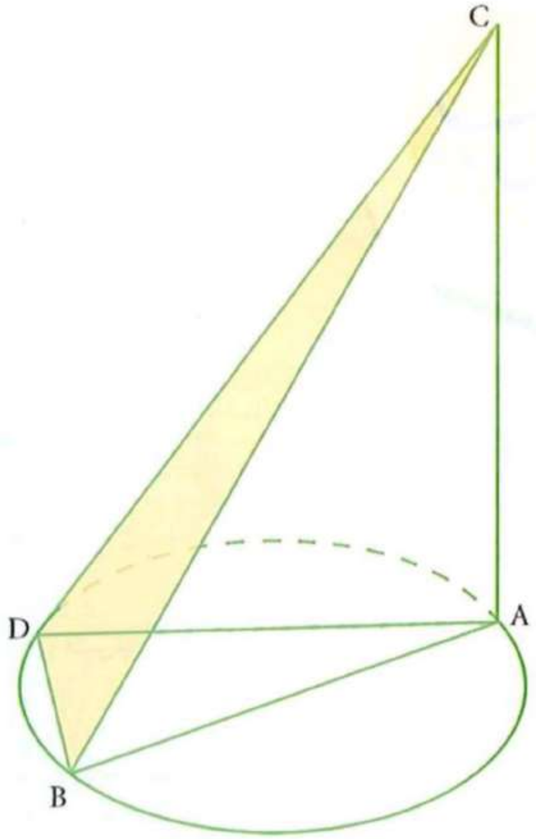
$\because$ $\overline{AC} \perp (ADB)$ (معطى)

$\overline{AD} \perp \overline{DB}$ بالبرهان

$\overline{CD} \perp \overline{DB}$ مبرهنة الاعمدة الثلاثة

$\therefore$ $\overline{DB} \perp (CDA)$

(المستقيم العمودي على مستقيمين متقاطعين من نقطة تقاطعهما يكون عمودياً على مستويهما).



$\therefore$ $(CDA) \perp (CDB)$ (مبرهنة 8)

و . هـ . م

مثال (1)

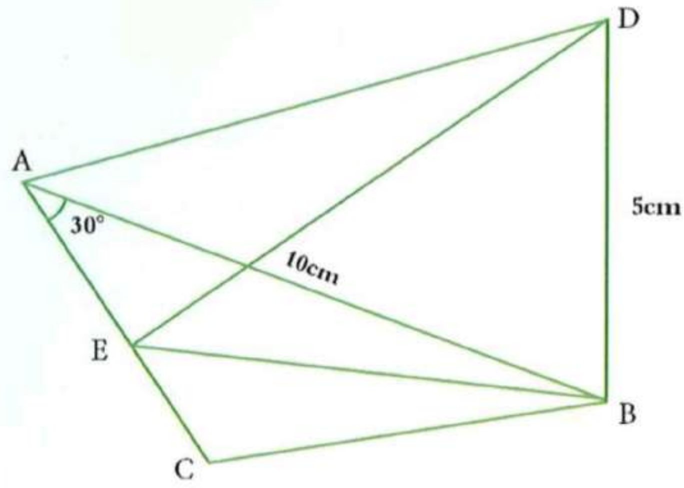
في $\triangle ABC$

$\overline{BD} \perp (ABC)$, $m \measuredangle A = 30^\circ$

$AB = 10cm$, $BD = 5cm$

جد قياس الزاوية الزوجية

$D - \overline{AC} - B$



المعطيات

$AB = 10cm$, $BD = 5cm$

$\overline{BD} \perp (ABC)$, $m \measuredangle BAC = 30^\circ$

المطلوب اثباته :

إيجاد قياس الزاوية الزوجية $D - \overline{AC} - B$

في المستوي (ABC) نرسم $\overline{BD} \perp \overline{AC}$ في نقطة E (في المستوي الواحد يوجد مستقيم وحيد عمودي على مستقيم معلوم من نقطة معلومة) .

$\because$ $\overline{BD} \perp (ABC)$ (معطى)

$\therefore$ $\overline{DE} \perp \overline{AC}$ (مبرهنة الاعمدة الثلاثة)

$\measuredangle DEB$ عائدة للزواية الزوجية $\overline{AC}$ (تعريف الزاوية العائدة)

$\overline{DB} \perp \overline{BE}$ (المستقيم العمودي على مستوي يكون عمودياً على جميع المستقيمات المرسومة من اثره ضمن ذلك المستو) .

$\triangle DBE$ قائم الزاوية في B

في $\triangle BED$ القائم الزاوية في E

$$\sin 30^\circ = \frac{BE}{BA} \rightarrow \frac{1}{2} = \frac{BE}{10} \rightarrow BE = 5cm$$

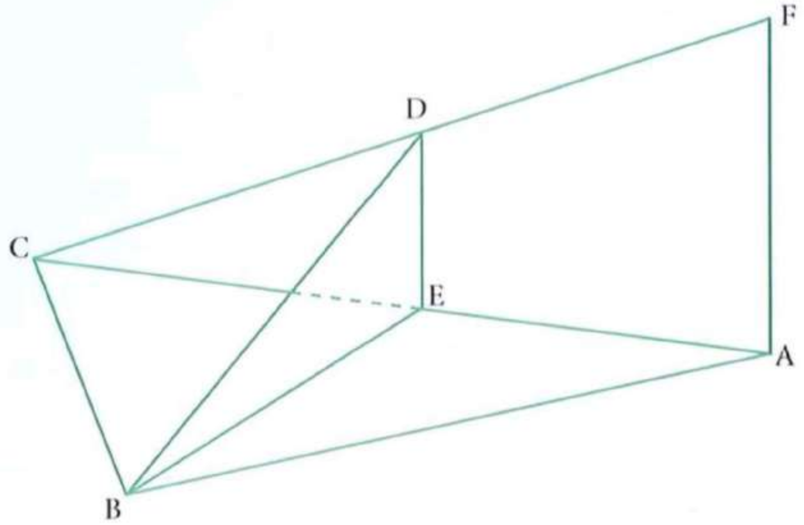
في $\triangle DBE$ القائم الزاوية في B:

$\therefore$ قياس $\tan \measuredangle BED = \frac{5}{5} = 1 \rightarrow m \measuredangle BED = 45^\circ$

$\therefore$ قياس الزاوية الزوجية $D - \overline{AC} - B = 45^\circ$ (قياس الزاوية الزوجية هو قياس الزاوية العائدة لها وبالعكس) .

و . هـ . م

مثال (2)



ليكن ABC مثلثاً وليكن

$\overline{AF} \perp (ABC)$

$\overline{BD} \perp \overline{CF}$

$\overline{BE} \perp \overline{CA}$

برهن أن $\overline{BE} \perp (CAF)$

$\overline{ED} \perp \overline{CF}$

المعطيات $\overline{AF} \perp (ABC)$, $\overline{BE} \perp \overline{AC}$, $\overline{BD} \perp \overline{CF}$

المطلوب إثباته: $\overline{DE} \perp \overline{CF}$, $\overline{BE} \perp (CAF)$

البرهان: $\because$ $\overline{AF} \perp (ABC)$ (معطى)

$\therefore$ $(CAF) \perp (ABC)$ (مبرهنة 8: يتعامد المستويات إذا احتوى احدهما على مستقيم عمودي على الآخر).

$\because$ $\overline{BE} \perp \overline{AC}$ (معطى)

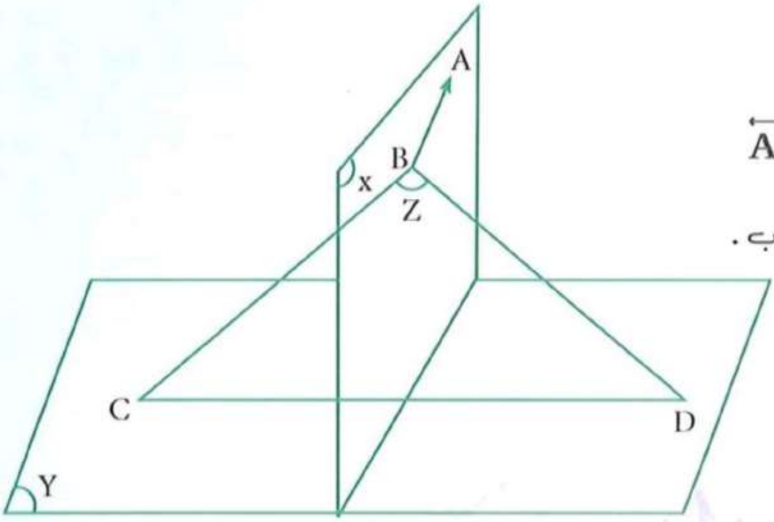
$\therefore$ $\overline{BE} \perp (CAF)$ (مبرهنة 7): إذا تعامد مستويان فالمستقيم المرسوم في أحدهما والعمودي على مستقيم التقاطع يكون عمودياً على الآخر).

$\overline{BD} \perp \overline{CF}$ (معطى)

$\overline{ED} \perp \overline{CF}$ نتيجة مبرهنة الأعمدة الثلاثة

و.هـ.م

مثال (3) (x) , (y) مستويات متعامدان



$\overleftrightarrow{AB} \subset (x)$

$\overleftrightarrow{BD}$, $\overleftrightarrow{BC}$ عموديان على $\overleftrightarrow{AB}$

ويقطعان (Y) في C,D على الترتيب .

برهن إن : $\overleftrightarrow{CD} \perp (x)$

المعطيات : $(x) \perp (Y)$, $\overleftrightarrow{AB} \subset (x)$, $\overleftrightarrow{BD}$, $\overleftrightarrow{BC}$ عمودي على $\overleftrightarrow{AB}$ ويقطعان (Y) في D , C على الترتيب .

المطلوب اثباته : $\overleftrightarrow{CD} \perp (x)$

البرهان : ليكن (Z) مستوي المستقيمين المتقاطعين $\overleftrightarrow{BD}$, $\overleftrightarrow{BC}$ (لكل مستقيمين متقاطعين يوجد يوجد مستوياً وحيداً يحويهما) .

بما إن $\overleftrightarrow{BD}$, $\overleftrightarrow{BC} \perp \overleftrightarrow{AB}$ (معطى)

$\therefore \overleftrightarrow{AB} \perp (Z)$

(المستقيم العمودي على مستقيمين متقاطعين من نقطة تقاطعهما يكون عمودياً على مستويهما)

$\because \overleftrightarrow{AB} \subset (x)$ (معطى)

$\therefore (Z) \perp (x)$ (يتعامد المستويان إذا إحتوى أحدهما على مستقيم عمودي على الاخر) .

$\because (Y) \perp (x)$ (معطى)

ولما كان $\overleftrightarrow{CD} = (Y) \cap (Z)$ (لانه محتوى في كل منهما) .

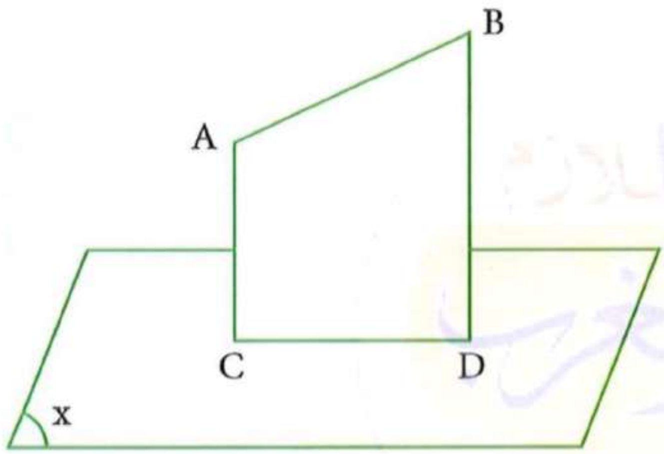
$\therefore \overleftrightarrow{CD} \perp (x)$

(إذا كان كل من مستويين متقاطعين عمودياً على مستوٍ ثالث فأن مستقيم تقاطعهما يكون عمودياً على المستوي الثالث) .

و . هـ . م

الاسقاط العمودي على مستوٍ

1. مسقط نقطة على مستوٍ: هو أثر العمود المرسوم من تلك النقطة على المستوي.
2. مسقط مجموعة نقط على مستوي: لتكن L مجموعة من نقاط في الفراغ فأن مسقطها هو مجموعة كل أثار الأعمدة المرسومة من نقاطه على المستوي.
3. مسقط قطعة مستقيم غير عمودية على مستوٍ معلوم: هو قطعة المستقيم المحدودة بأثري العمودين المرسومين من نهايتي القطعة على المستوي المعلوم.



ليكن AB غير عمودي على (x) وليكن

(x) $\overline{AC} \perp$ ← مسقط A على (x) هو C

(x) $\overline{BD} \perp$ ← مسقط B على (x) هو D

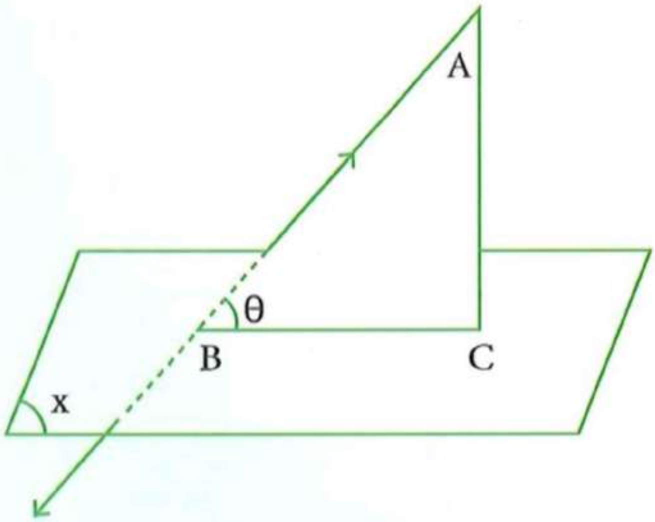
∴ مسقط $\overline{AB}$ على (x) هو $\overline{CD}$

ملاحظة

إذا كان $(x)\ //\ \overline{AB}$

فأن $AB = CD$

4. المستقيم المائل على مستوٍ: هو المستقيم غير العمودي على المستوي وقاطع له.
5. زاوية الميل: هي الزاوية المحدودة بالمائل ومسقطه على المستوي.



ليكن $\overline{AB}$ مائلاً على (x) في B

وليكن (x) $\overline{AC} \perp$ في C

∴ C مسقط A على (x) حيث $A \notin (x)$

كذلك B مسقط نفسها حيث $B \in (x)$

← $\overline{BC}$ مسقط $\overline{AB}$ على (x)

أي إن $0 < \theta < 90°$

$\theta \in (0,\ 90°)$

6 طول المسقط: طول نسقط قطعة مستقيم على مستوٍ = طول المائل × جيب تمام زاوية الميل.

فعندما تكون $\overline{AB}$ مائلاً على (X) وزاوية ميله θ ومسقطه $\overline{BC}$ فأن $BC = AB \cos\theta$

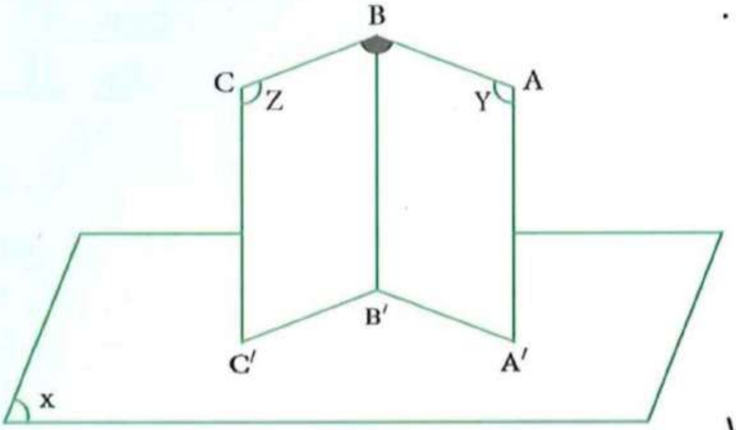
مسقط مستوي مائل على (X):

7 زاوية ميل مستوٍ معلوم هو قياس الزاوية المستوية العائدة للزاوية الزوجية بينهما

مساحة مسقط منطقة مائلة على مستوٍ معلوم = مساحة المنطقة المائلة × جيب تمام زاوية الميل لتكن:

A مساحة المنطقة المائلة، مساحة المسقط، قياس زاوية الميل $A' = A\cos\theta$

مثال (4) إذا وازى احد ضلعي زاوية قائمة مستوياً فأن مسقطي ضلعيها على المستوي متعامدان .



المعطيات: $\measuredangle ABC$ قائمة في B

$\overline{AB} \,//\, (x)$,

$A'B'$ هو مسقط $\overline{AB}$ على (x)

$B'C'$ هو مسقط $\overline{BC}$ على (x)

المطلوب اثباته: $\overline{A'B'} \perp \overline{B'C'}$

البرهان: $\left.\begin{array}{l} \overline{A'B'} \text{ مسقط } \overline{AB} \\ \overline{B'C'} \text{ مسقط } \overline{BC} \end{array}\right\}$ معطى

$\overline{AA'} , \overline{BB'} , \overline{CC'} \perp (x)$ (مسقط قطعة مستقيم على مستوٍ معلوم هو القطعة المحددة بأثري العمودين المرسومين على المستوي من طرفي القطعة المستقيمة) .

$\overline{BB'} \,//\, \overline{AA'} , \overline{CC'} \,//\, \overline{BB'}$ (المستقيمان العموديان على مستوٍ واحد متوازيان) .

بالمستقيمين المتوازيين BB' , AA' نعين (Y)
بالمستقيمين المتوازيين CC' , BB' نعين (Z)
(لكل مستقيمين متوازيين يوجد مستوٍ وحيد يحويهما) .

لكن $\overline{AB} \,//\, (x)$ (معطى)

$(Y) \cap (x) = A'B'$ (يتقاطع مستويان بخط مستقيم) .

$\overline{AB} \,//\, \overline{A'B'}$ (إذا وازى مستقيم مستوياً معلوماً فأنه يوازي جميع المستقيمات الناتجة من تقاطع هذا المستوي والمستويات التي تحوي المستقيم) .

كذلك $\overline{BB'} \perp \overline{A'B'}$ (المستقيم العمودي على مستوي يكون عمودياً على جميع المستقيمات المرسومة من أثره ضمن ذلك المستوي) .

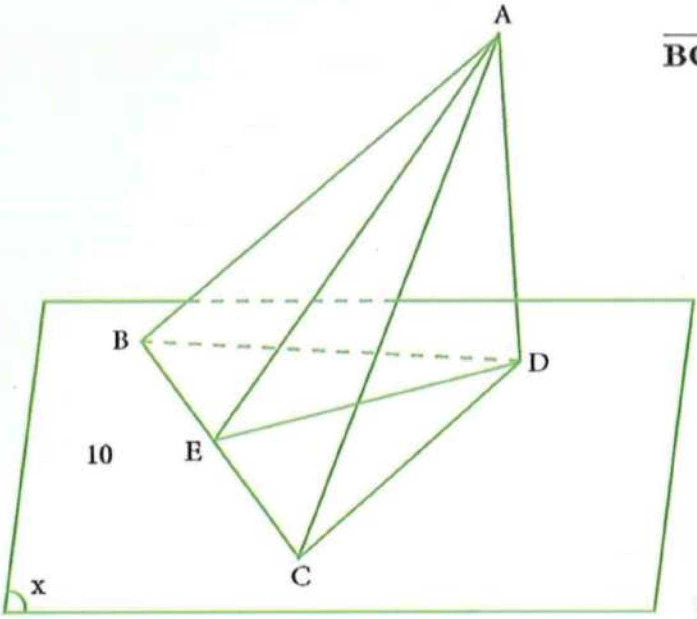
$\overline{AB} \perp \overline{BB'}$ (في المستوي الواحد: المستقيم العمودي على أحد مستقيمين متوازيين يكون عمودياً على الآخر) .

لكن $\overline{AB} \perp \overline{BC}$ (لأن $M\measuredangle ABC = 90°$ معطى)

$\overline{AB} \perp (Z)$ (المستقيم العمودي على مستقيمين متقاطعين من نقطة تقاطعهما يكون عمودياً على مستويهما) .

$\overline{A'B'} \perp (Z)$ (المستوي العمودي على أحد مستقيمين متوازيين يكون عمودياً على الآخر) .

$\therefore \overline{A'B'} \perp \overline{B'C'}$ (المستقيم العمودي على مستوي يكون عمودياً على جميع المستقيمات المرسومة من أثره ضمن ذلك المستوي) .



مثال (5) ABC مثلث , $\overline{BC} \subset (x)$

والزاوية الزوجية بين مستوي المثلث

ABC والمستوي (x)

قياسها $60°$ فاذا كان :

$AB = AC = 13cm \ , \ BC = 10cm$

جد مسقط المثلث (ABC) على (x)

ثم جد مساحة مسقط $\triangle$ ABC على (x)

المعطيات : $\triangle ABC \ , \ \overline{BC} \subset (x)$

$M \sphericalangle \triangle ABC - BC - (x) = 60°$

$AB = AC = 13 \ , \ BC = 10$

المطلوب إثباته : ايجاد مسقط $\triangle$ ABC على (x) وايجاد مسافة مسقط $\triangle$ ABC على (x) .

البرهان : نرسم $\overline{AD} \perp (x)$ في D (يمكن رسم عمود على مستوي من نقطة معلومة) .

$\therefore$ $\overline{CD}$ مسقط $\overline{AC}$
$\overline{BD}$ مسقط $\overline{AB}$
BC مسقط نفسه على (x) .

(مسقط قطعة مستقيم على مستوٍ معلوم هو القطعة المحدودة بأثري العمودين المرسومين على المستوي من طرفي القطعة المستقيمة) .

$\therefore$ $\triangle$ BCD مسقط $\triangle$ ABC على (x)

من (ABC) نرسم $\overline{AE} \perp \overline{BC}$ في E (في المستوي الواحد يمكن رسم مستقيم وحيد عمودي على مستقيم معلوم من نقطة معلومة) .

وبما إن AB = AC (معطى)

$\therefore$ EC = BE = 5cm (العمود النازل من رأس مثلث متساوي الساقين على القاعدة ينصفها) .

$\therefore$ $\overline{ED} \perp \overline{BC}$ (نتيجة مبرهنة الأعمدة الثلاثة) .

$\therefore$ $\sphericalangle$ DEA عائدة للزوجية $\overline{BC}$ (تعريف الزاوية العائدة) .

لكن قياس الزاوية الزوجية $\overline{BC} = 60°$ (معطى)

في $\triangle$ AEB القائم في E

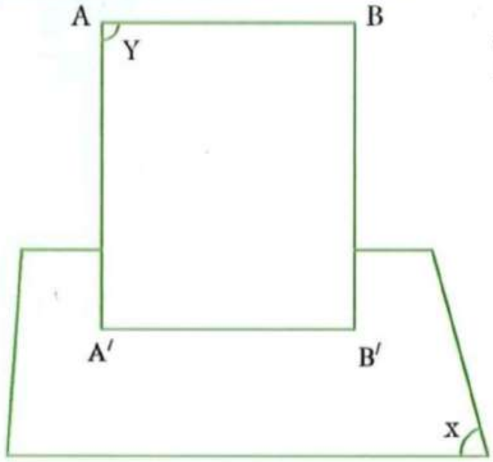
$AE = \sqrt{169 - 25} = \sqrt{144} = 12 \text{ cm}$

في $\triangle$ AED القائم في D

$\cos 60° = \dfrac{BD}{AE} \rightarrow \dfrac{1}{2} = \dfrac{ED}{12} \rightarrow ED = 6cm$

BCD مساحة المثلث $= \dfrac{1}{2} \times 10 \times 6 = 30 \text{ cm}^2$

سؤال 1 برهن أن طول قطعة المستقيم الموازي لمستوٍ معلوم يساوي طول مسقطه على المستوي المعلوم ويوازيه .



المعطيات: $\overline{A'B'}$ هو مسقط $\overline{AB}$ على (x) , $\overline{AB}$ // (x)

المطلوب: $\overline{AB}$ // $\overline{A'B'}$, $AB = A'B'$

البرهان: $\overline{A'B'}$ هو مسقط AB على (x) معطى

$\therefore$ $\overline{AA'}$, $\overline{B'B'}$ عمودان على (x) (تعريف المسقط)

$\therefore$ $\overline{AA'}$ // BB'

(المستقيمان العموديان على مستوٍ واحد متوازيان)

$\therefore$ $\overline{AA'}$, $\overline{BB'}$ نعين المستوي (Y) بالمستقيمين المتوازيين

(لكل مستقيمين متوازيين يوجد مستوٍ وحيد يحويهما)

$\because$ $\overline{AB}$ // (x) (معطى)

$\therefore$ $\overline{AB}$ // $\overline{A'B'}$

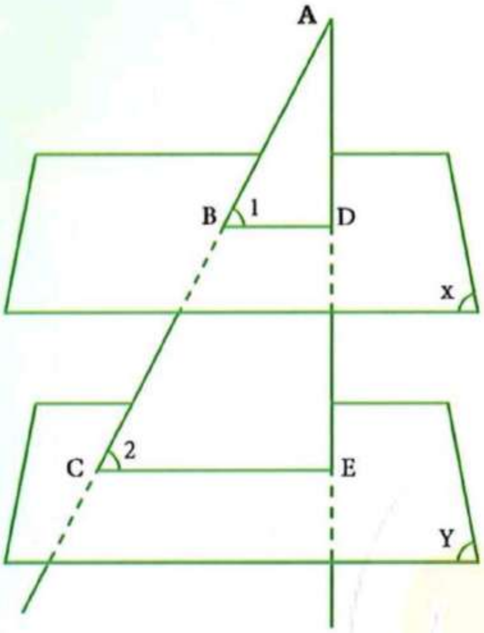
(إذا وازى مستقيم مستوياً فإنه يوازي جميع المستقيمات الناتجة من تقاطع هذا المستوي مع المستويات التي تحوي هذا المستقيم) .

$\therefore$ $A\,B\,B'A'$ متوازي أضلاع (لتوازي كل ضلعين متقاطعين فيه)

$\therefore$ $AB = A'B'$ (يتساوى طولا الضلعين المتقابلين في متوازي الأضلاع)

و . هـ . م

سؤال 2 برهن إن قطع مستويات متوازيات بمستقيم فأن ميله على أحدهما يساوي ميله على الآخر.



المعطيات: $(Y) // (x)$, $\overline{AC}$ يقطع (x) في نقطة B ويقطع (Y) في نقطة C

المطلوب: ميل $\overline{AC}$ على (x) = ميل $\overline{AC}$ على (Y)

البرهان: نرسم $\overline{AD} \perp (x)$ (يمكن رسم مستقيم وحيد عمودي على مستوي من نقطة معلومة).

$\therefore \ (Y) \perp \overline{AD}$ في E

(المستقيم العمودي على احد مستويين متوازيين يكون عمودياً على الآخر)

$\therefore$ $\overline{BD}$ هو مسقط $\overline{AB}$ على (x)

$\overline{CE}$ هو مسقط $\overline{AC}$ على (Y)

(تعريف مسقط قطعة مستقيم)

$\sphericalangle 1$ هي زاوية ميل $\overline{AB}$ على (x)

$\sphericalangle 2$ هي زاوية ميل $\overline{AC}$ على (Y)

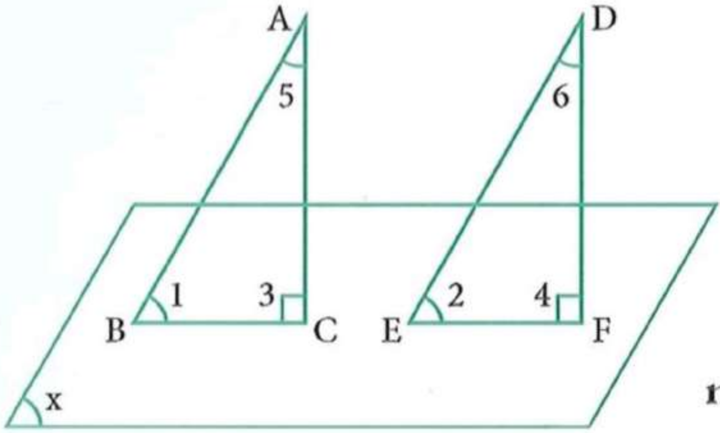
(زاوية الميل: هي الزاوية المحددة بالمائل ومسقطة على المستوي)

$m \sphericalangle 1 = m \sphericalangle 2$ (متناظرة)

ميل $\overline{AC}$ على (x) = ميل $\overline{AC}$ على (Y)

و.هـ.م

سؤال 3 برهن على ان للمستقيمات المتوازية المائلة على مستوي الميل نفسه .



$\overline{AB} \parallel \overline{DE}$

$\sphericalangle 1$ زاوية ميل $\overline{AB}$ على (x)

$\sphericalangle 2$ زاوية ميل $\overline{DE}$ على (x)

المطلوب اثباته: $m\sphericalangle 1 = m\sphericalangle 2$

البرهان:

$\sphericalangle 1$ زاوية ميل $\overline{AB}$ على (x)

$\sphericalangle 2$ زاوية ميل $\overline{DE}$ على (x) (معطى)

$\overline{BC}$ مسقط $\overline{AB}$ على (x) (زاوية ميل مستقيم على مستوٍ هي الزاوية المحددة

$\overline{EF}$ مسقط $\overline{DE}$ على (x) بالمائل ومسقطة على المستو)

$\therefore \overline{AC} \perp (x)$ (تعريف مسقط قطعة المستقيم غير عمودية على مستو)

$\therefore \overline{DF} \perp (x)$

$\therefore \overline{AC} \perp \overline{BC}$ (المستقيم العمودي على مستوي يكون عمودياً على جميع المستقيمات

$\therefore \overline{DF} \perp \overline{EF}$ المرسومة من أثره ضمن ذلك المستو)

$m\sphericalangle 3 = m\sphericalangle 4$ (قوائم)

$\overline{AB} \parallel \overline{DE}$ (معطى)

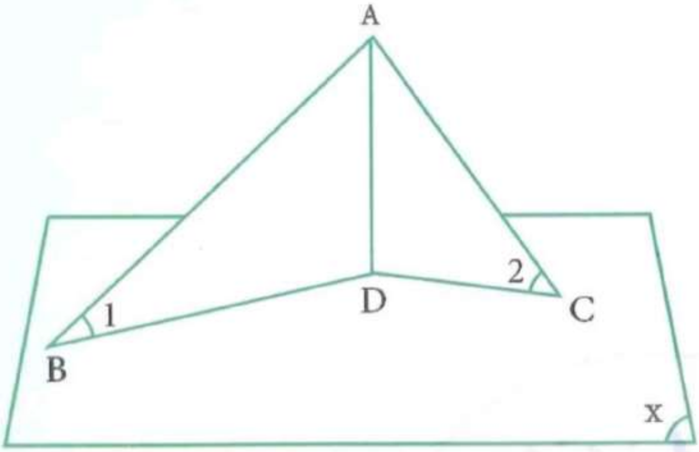
$\overline{AC} \parallel \overline{DF}$ (المستقيمان العموديان على مستوٍ واحد متوازيان)

$m\sphericalangle 5 = m\sphericalangle 6$ إذا وازى ضلعا زاوية ضلعي زاوية أخرى تساوى قياسهما

$m\sphericalangle 1 = m\sphericalangle 2$ (مجموع زوايا المثلث 180)

و . هـ . م

سؤال 4 برهن على انه إذا رسم مائلان مختلفان في الطول من نقطة لا تنتمي الى مستوٍ معلوم فأن اطولهما تكون زاوية ميله على المستوي أصغر من زاوية ميل الآخر عليه .



المعطيات: $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ مائلان على (x) .

$AB > AC$

المطلوب: زاوية ميل $\overline{AB}$ على (x) أصغر من زاوية ميل $\overline{AC}$ على (x) .

البرهان: نرسم $\overline{AD} \perp (x)$

(يمكن رسم عمود واحد فقط على مستوٍ من نقطة معلومة)

فيكون $\overline{BD}$ هو مسقط $\overline{AB}$ على (x)

$\overline{CD}$ هو مسقط $\overline{AC}$ على (x)

(مسقط قطعة مستقيم غير عمودي على مستوي هو قطعة المستقيم الواصلة بين أثري العمودين المرسومين من طرفي القطعة على المستوي)

$\measuredangle 1$ هي زاوية ميل $\overline{AB}$ على (x)

$\measuredangle 2$ هي زاوية ميل $\overline{AC}$ على (x)

(زاوية الميل: هي الزاوية المحددة بالمائل ومسقطه على المستوي)

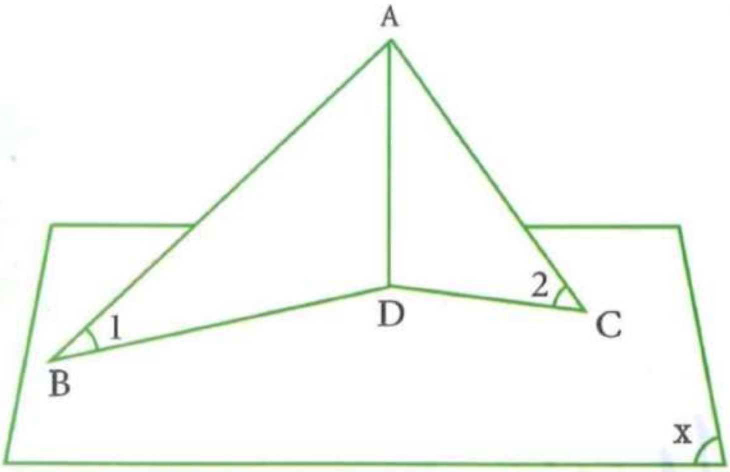
$\because AB > AC$ (معطى)

$\frac{1}{AB} < \frac{1}{AC}$ (خواص التباين)

$\frac{AD}{AB} < \frac{AD}{AC}$ $\measuredangle 1 , \measuredangle 2$ زوايا حادة

$\sin\measuredangle 1 < \sin\measuredangle 2$ $\therefore m\measuredangle 1 < m\measuredangle 2$

سؤال 5 برهن على انه إذا رسم مائلان من نقطة ما إلى مستو فأصغرهما ميلاً هو الأطول .



المعطيات : $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ مائلان على (x)

$1 \sphericalangle$ هي زاوية ميل $\overline{AB}$ على (x)

$2 \sphericalangle$ هي زاوية ميل $\overline{AC}$ على (x)

$m \sphericalangle 1 < m \sphericalangle 2$

المطلوب: $AB > AC$

البرهان : $\because$ $1 \sphericalangle$, $2 \sphericalangle$ هما زاويتي ميل $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ على (x) على الترتيب .

$\therefore$ $\overline{BD}$ هو مسقط $\overline{AB}$ على (x)

$\overline{CD}$ هو مسقط $\overline{AC}$ على (x)

(زاوية ميل مستقيم على مستوي هي الزاوية المحددة بالمائل ومسقطه على المستوي)

نرسم $\therefore \overline{AD} \perp (x)$

(مسقط قطعة مستقيم غير عمودية على مستوي هي قطعة المستقيم المحددة بين أثري العمودين المرسومين من طرفي تلك القطعة على المستوي)

$\therefore \overline{AD} \perp \overline{BD}, \overline{CD}$

(المستقيم العمودي على مستوي يكون عمودياً على جميع المستقيمات المرسومة من اثره في ذلك المستوي)

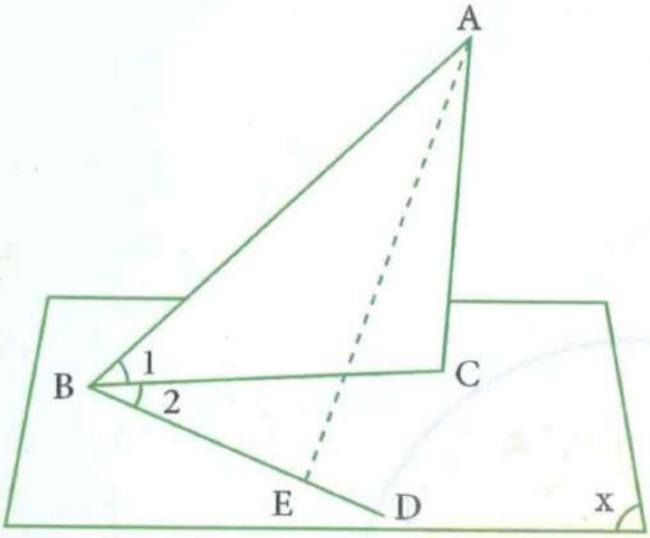
$\because m \sphericalangle 1 < m \sphericalangle 2$ (معطى)

$\therefore \sin \sphericalangle 1 < \sin \sphericalangle 2$

$\frac{AD}{AB} < \frac{AD}{AC} \rightarrow \frac{1}{AB} < \frac{1}{AC} \rightarrow AB > AC$ (خواص التباين)

و . هـ . م

سؤال 6 برهن على إن الميل بين المستقيم ومسقطه على مستوٍ أصغر من الزاوية المحصورة بين المستقيم نفسه وأي مستقيم آخر مرسوم من موقعه ضمن ذلك المستوي .



المعطيات: ليكن $\overline{BC}$ مسقط $\overline{AB}$ على (x)

$\measuredangle ABC$ زاوية ميل، $\overline{BD} \subset (x)$

المطلوب: $m\measuredangle ABC < m\measuredangle ABD$

البرهان: لتكن $E \in \overline{BD}$

بحيث $BC = BE$

نصل $\overline{AE}$

$\because \overline{AC} \perp (x)$ (تعريف المسقط)

$\overline{AC} < \overline{AE}$ (العمود: هو أقصر مسافة بين نقطة ومستوي)

فيهما $\triangle\triangle\ ABC\ ,\ ABE$

$BC = BE$ (بالعمل) و $AB = AB$ (ضلع مشترك)

$\therefore\ m\measuredangle 1 < m\measuredangle 2$

(إذا تساوى ضلعا مثلث ضلعي مثلث آخر واختلف الضلعان الآخران فأصغرهما يقابل أصغر الزاويتين)

و . هـ . م