دورة 2023 الدورة الثانية: (80 درجة)

يتألف نوّاس فتل من ســاق متجانســة طولها $l = 20cm$ ، وكتلتها $m = 0.3kg$ ، معلقة من منتصفها بسلك فتل شاقولي ثابت فتله $k = 10^{-2}m.N.rad^{-1}$. ندير الساق في مستوٍ أفقي بزاوية $\theta = \frac{\pi}{4}rad$ انطلاقاً من وضع توازنها ونتركها دون سرعة ابتدائية في اللحظة $t = 0s$.

والمطلوب:

1. احسب عزم عطالة الساق حول سلك الفتل.
2. استنتج قيمة الدور الخاص للنوّاس.
3. استنتج التابع الزمني للمطال الزّاويّ انطلاقاً من شكله العام.
4. احسب قيمة السرعة الزّاويّة للساق لحظة مرورها الثاني بوضع التوازن.
5. احســب الطاقة الكامنة في وضــع مطاله الزّاويّ $\theta = \frac{\pi}{8}rad$ ، ثم احســب الطاقة الحركية عندئذٍ.

(عزم عطالة ساق حول محور مارّ من مركزها وعمودي على مستويها $I_{\Delta/c} = \frac{1}{12}ml^2$, $\pi^2 = 10$)

معطيات المسألة:

$$l = 20cm = 20 \times 10^{-2} = 2 \times 10^{-1}, \quad m = 3 \times 10^{-1}kg, \quad k = 10^{-2}m.N.rad^{-1}$$

الحل:

.1

$$I_\Delta = \frac{1}{12}ml^2 = \frac{1}{12} \times 3 \times 10^{-1} \times (2 \times 10^{-1})^2$$

$$I_\Delta = \frac{1}{12} \times 3 \times 10^{-1} \times 4 \times 10^{-2} \Rightarrow \boldsymbol{I_\Delta = 10^{-3}kg.m^2}$$

.2

$$\pi^2 = 10 \Rightarrow \pi = \sqrt{10}$$

$$T_0 = 2\pi \times \sqrt{\frac{I_\Delta}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{10^{-3}}{10^{-2}}}$$

$$\Rightarrow T_0 = 2\pi \times \sqrt{\frac{1}{10}} = 2\pi\frac{1}{\sqrt{10}}$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{T_0 = 2s}$$

.3

$$\bar{\theta} = \overbrace{\theta_{max}}^{?} \cos\left(\overbrace{\omega_0}^{?} t + \overbrace{\bar{\varphi}}^{?}\right)$$

تُرِك دون سرعة ابتدائية $\omega_0 = 0$

$$\boldsymbol{t = 0} \begin{cases} \omega_0 = 0 \\ \theta = \underbrace{\theta_{max}}_{\checkmark} = \frac{\pi}{4} rad \end{cases}$$

ولكن $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = \frac{2\pi}{2} = \pi\ rad.s^{-1}$

$$\checkmark \quad \boldsymbol{\omega_0 = \pi\ rad.s^{-1}}$$

من أجل حساب $\bar{\varphi}$:

نعوّض شروط البدء في التابع الزمني للمطال الزاوي:

$$\boxed{t = 0 \quad , \quad \theta = \theta_{max}}$$

$$\theta_{max} = \theta_{max}\cos(\omega_0(0) + \bar{\varphi})$$

$$1 = \cos(\bar{\varphi})$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{\bar{\varphi} = 0\ rad}$$

نعوّض مكان الثوابت:

$$\bar{\theta} = \frac{\pi}{4}\cos(\pi t + 0) \quad rad$$

4. لحظة المرور الثاني بوضع التوازن $\Leftarrow$ $t = \frac{3}{4}T_0$

والآن نحسب t :

$$T_0 = 2s \Longrightarrow t = \frac{3}{4} \times 2$$

$$\Longrightarrow t = \left(\frac{3}{2}\right)s$$

$$\bar{\omega} = -\omega_0 \theta_{max} \sin(\omega_0 t + \bar{\varphi})$$

$$\bar{\omega} = -\pi \times \frac{\pi}{4} \sin\left(\pi\left(\frac{3}{2}\right)\right)$$

$$\bar{\omega} = -\frac{10}{4}\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -\frac{10}{4} \times (-1) \qquad ; \ \sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -1$$

$$\bar{\omega} = -\frac{10}{4}(-1) = +\frac{10 \ {\scriptstyle \div 2}}{4 \ {\scriptstyle \div 2}} = \frac{5}{2} = 2.5$$

$$\boxed{\bar{\omega} = 25 \times 10^{-1} \ rad.s^{-1}}$$

5.

$$\theta = \frac{\pi}{8} rad$$

$$E_p = \frac{1}{2}k\theta^2 = \frac{1}{2} \times 10^{-2} \times \left(\frac{\pi}{8}\right)^2 = \frac{1}{2} \times 10^{-2} \times \frac{\pi^2}{64}$$

$$E_p = \frac{10^{-2} \times 10^{+1}}{128} = \frac{10^{-1}}{128}$$

$$\boldsymbol{E_p = \frac{1}{128} \times 10^{-1} \quad J}$$

يجب علينا حساب E_{tot} من أجل E_k :

$$\boldsymbol{\theta_{max} = \frac{\pi}{4} rad}$$

$$E_{tot} = \frac{1}{2} k\theta^2{}_{max} \quad = \frac{1}{2} \times 10^{-2} \times \left(\frac{\pi}{4}\right)^2 = \frac{1}{2} \times 10^{-2} \times \frac{10}{16}$$

$$\boldsymbol{E_{tot}} = \frac{10^{-2} \times 10^{+1}}{2 \times 16} = \frac{10^{-1}}{32} = \boldsymbol{\frac{1}{32} \times 10^{-1} \quad J}$$

والآن نحسب E_k :*_*

$$\boldsymbol{E_{tot} = \overbrace{E_k}^{?} + E_p}$$

$$\frac{1}{32} \times 10^{-1} = E_k + \frac{1}{128} \times 10^{-1}$$

$$E_k = \frac{1}{32} \times 10^{-1} - \frac{1}{128} \times 10^{-1}$$

$$E_k = \left(\underbrace{\frac{1}{32}}_{(4)} - \underbrace{\frac{1}{128}}_{(1)}\right) \times 10^{-1}$$

$$E_k = \left(\frac{4-1}{128}\right) \times 10^{-1}$$

$$E_k = \frac{3}{128} \times 10^{-1}$$

****

دورة 2022 الدورة الثانية: (75 درجة)

ساق أفقية متجانسة طولها L ، كتلتها M معلّقة بسلك فتل شاقولي .

A) ندير الساق في مستوٍ أفقي بزاوية $\theta = +\frac{\pi}{2} rad$ انطلاقاً من وضع توازنها ونتركها دون سرعة ابتدائية في اللحظة $t = 0$ فتهتزّ بحركة جيبية دورانية دورها الخاص $T_0 = 1s$

والمطلوب:

1. استنتج التابع الزمني للمطال الزاوي انطلاقاً من شكله العام .
2. احسب قيمة السرعة الزاوية للساق لحظة مرورها الأول بوضع التوازن.
3. احسـب قيمة التسـارع الزّاوي للسـاق عندما تصنـع زاوية $\theta = -\frac{\pi}{4} rad$ مع وضـع توازنها .

B) نثبت بطرفي الســاق كتلتين نُقطيتين $m_1 = m_2 = 100g$ فيصـــبح الدور الخاص الجديد للجملة المهتزّة $T'_0 = 2s$ ، فإذا علمت أن :

(عزم عطالة ساق حول محور مارّ من مركزها وعمودي على مستويها $I_{\Delta/c} = \frac{1}{12} Ml^2$ وَ $\pi^2 = 10$)

- استنتج قيمة كتلة الساق M .

معطيات المسألة:

معطيات (A) :

$$\theta = +\frac{\pi}{2} rad \quad , \quad T_0 = 1s$$

الحل:

1. (A):

$$\bar{\theta} = \overbrace{\theta_{max}}^{?} \cos\left(\overbrace{\omega_0}^{?} t + \overbrace{\bar{\varphi}}^{?}\right)$$

$t = 0$

تُرِك دون سرعة ابتدائية $\omega_0 = 0$

$\theta = \underbrace{\theta_{max}}_{\checkmark} = \frac{\pi}{2} rad$

ولكن $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = \frac{2\pi}{1} = 2\pi\, rad.s^{-1}$

$\checkmark \quad \boldsymbol{\omega_0 = 2\pi\, rad.s^{-1}}$

من أجل حساب $\bar{\varphi}$:

نعوّض شروط البدء في التابع الزمني للمطال الزاوي:

$t = 0 \quad , \quad \theta = \theta_{max}$

$$\theta_{max} = \theta_{max}\cos(\omega_0(0) + \bar{\varphi})$$

$$1 = \cos(\bar{\varphi})$$

$$\Rightarrow \bar{\varphi} = 0\, rad$$

الآن نعوّض مكان الثوابت:

$$\boxed{\bar{\theta} = \frac{\pi}{2}\cos(2\pi t + 0) \quad rad}$$

2. (A) :

لحظة المرور الأول في وضع التوازن $\Leftarrow \quad t = \frac{T_0}{4}$

الآن نحسب $t=?$:

$$T_0 = 1s \Longrightarrow \boldsymbol{t = \frac{1}{4}s}$$

$$\bar{\boldsymbol{\omega}} = -\boldsymbol{\omega_0 \theta_{max}} \sin(\boldsymbol{\omega_0 t} + \bar{\boldsymbol{\varphi}})$$

$$\bar{\omega} = -2\pi \times \frac{\pi}{2} \sin\left(2\pi \times \frac{1}{4_{(2)}} + 0\right)$$

$$\bar{\omega} = -10 \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = -10 \times (+1) \qquad ; \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = +1$$

$$\boxed{\bar{\boldsymbol{\omega}} = \mathbf{10}\, \boldsymbol{rad.s^{-1}}}$$

3. (A):

$$\boldsymbol{\theta = -\frac{\pi}{4} rad}$$

$$\bar{\alpha} = -\omega_0^2 \theta$$

$$\bar{\alpha} = -(2\pi)(-\frac{\pi}{4_{(2)}})$$

$$\bar{\alpha} = +\frac{\pi^2}{2} = \frac{10}{2}$$

$$\boxed{\bar{\boldsymbol{\alpha}} = +\mathbf{5} \boldsymbol{rad.s^{-2}}}$$

معطيات B:

$$m_1 = m_2 = 100g = 100 \times 10^{-3} kg \Rightarrow \boldsymbol{m_1 = m_2 = 10^{-1} kg}$$

$$\boldsymbol{T'_0 = 2s} \quad , \quad \boldsymbol{\pi^2 = 10} \quad , \quad \boldsymbol{I_{\Delta/C} = \frac{1}{12} ML^2}$$

المطلوب : $\boldsymbol{M} =?$

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{I_{\Delta_{(ساق)}}}{k}} \quad , \quad \grave{T}_0 = 2\pi\sqrt{\frac{\grave{I}_{\Delta_{(جملة)}}}{k}}$$

$$\frac{\grave{T}_0}{T_0} = \frac{2\pi\sqrt{\frac{\grave{I}_{\Delta_{(جملة)}}}{k}}}{2\pi\sqrt{\frac{I_{\Delta_{(ساق)}}}{k}}} \Longrightarrow \frac{\grave{T}_0}{T_0} = \sqrt{\frac{\grave{I}_\Delta}{I_\Delta}}$$

نربع الطرفين :

$$\left(\frac{\grave{T}_0}{T_0}\right)^2 = \frac{\grave{I}_{\Delta_{(جملة)}}}{I_{\Delta_{(ساق)}}}$$

والآن نعوض قيمة T_0 و $\grave{T}_0$:

$$\left(\frac{2}{1}\right)^2 = \frac{\grave{I}_{\Delta_{(جملة)}}}{I_{\Delta_{(ساق)}}}$$

$$4I_{\Delta_{(ساق)}} = \grave{I}_{\Delta_{(جملة)}}$$

*

ولكن:

$$\grave{I}_{\Delta_{(جملة)}} = I_{\Delta/c_{(ساق)}} + 2I_{\Delta/m_{(كتلة)}}$$

$$\grave{I}_\Delta = \frac{1}{12}ML^2 + 2(mr^2) \quad ; \; r = \frac{l}{2}$$

$$\grave{I}_\Delta = \frac{1}{12}ML^2 + 2\left(m\frac{L^2}{4}\right)$$

$$\grave{I}_\Delta = \frac{1}{12}ML^2 + \frac{1}{2}mL^2$$

الآن نعوّض في * :

$$4\left(\frac{1}{12}ML^2\right)=\frac{1}{12}ML^2+\frac{1}{2}mL^2$$

$$\frac{4}{12}ML^2-\frac{1}{12}ML^2=\frac{1}{2}mL^2$$

$$\frac{3}{12}ML^2=\frac{1}{2}mL^2$$

$$\frac{1}{2}M=m$$

$$\boxed{M=2m}$$

$$\frac{1}{2}M=m$$

$$M=\frac{m}{\frac{1}{2}}$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{M=2m}$$

$$\boxed{\Rightarrow \boldsymbol{M=2\times 10^{-1}=0.2\ kg}}$$

****

دورة 2019 الدورة الثانية: (75 درجة)

يتألف نوّاس فتل من ساق أفقية متجانسة طولها $l=ab=50\ cm$ ، كتلتها m معلقة من منتصفها بسلك فتل شاقولي ثابت فتله $k=10^{-2}m.N.rad^{-1}$ ندير الساق في مستوٍ أفقي بزاوية $\theta=+\pi\ rad$ عن وضع توازنها، ونتركها دون سرعة ابتدائية في اللحظة $t=0$ ، فتهتزّ بدور خاص $T_0=4s$.

المطلوب:

1. احسب كتلة الساق m .
2. استنتج التابع الزمني للمطال الزاويّ انطلاقاً من شكله العام.

3. احسب قيمة السرعة الزاويّة للساق لحظة مرورها الأول بوضع التوازن .

4. تثبت بالطرفين a و b كتلتين نقطيتين متماثلتين $m_1 = m_2 = 40g$ ، احسـب قيمة الدور الخاص الجديد $\grave{T}_0$ في هذه الحالة.

(عزم عطالة ساق حول محور مارّ من مركزها وعمودي على مستويها $I_{\Delta/c} = \frac{1}{12}ml^2$, $\pi^2 = 10$).

معطيات المسألة:

$$l = ab = 50\ cm = 50 \times 10^{-2} = 5 \times 10^{-1}$$

$$k = 10^{-2} m.N.rad^{-1} \quad , \quad \theta = +\pi\ rad \quad , \quad T_0 = 4s$$

$$I_{\Delta/c} = \frac{1}{12}ml^2 \quad , \quad \pi^2 = 10$$

الحل:

.1

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{I_\Delta}{k}}$$

نربع الطرفين:

$$T_0{}^2 = \frac{4\pi^2 \frac{1}{12} \overset{?}{m} l^2}{k}$$

$$\frac{4\pi^2 \overset{?}{m} l^2}{12} = T_0{}^2 . k$$

$$\overset{?}{m} = \frac{12 T_0{}^2 k}{4\pi^2 l^2} = \frac{12 \times 4 \times 4 \times 10^{-2}}{4 \times 10 (5 \times 10^{-1})^2}$$

$$m=\frac{4\times 12\times 10^{-3}}{25\times 10^{-2}}=\frac{12\times 4}{5}\times 10^{-1}$$

$$m=1.92\times 10^{-1}=192\times 10^{-2}\times 10^{-1}=0.192$$

$$\boxed{m=192\times 10^{-3}\,kg}$$

.2

$$\bar{\theta}=\overbrace{\theta_{max}}^{?}\cos\left(\overbrace{\omega_0}^{?}t+\overbrace{\bar{\varphi}}^{?}\right)$$

$t=0$

$\omega_0=0$ تُرِك دون سرعة ابتدائية

$\theta=\underbrace{\theta_{max}}_{\checkmark}=\pi rad$

ولكن $\omega_0=\frac{2\pi}{T_0}=\frac{2\pi}{4}=\frac{\pi}{2}\,rad.s^{-1}$

$$\boxed{\checkmark\quad \omega_0=\frac{\pi}{2}\,rad.s^{-1}}$$

من أجل حساب $\bar{\varphi}$:

نعوّض شروط البدء في التابع الزمني للمطال الزاوي:

$$\boxed{t=0\qquad ,\qquad \theta=\theta_{max}}$$

$$\theta_{max}=\theta_{max}\cos(\omega_0(0)+\bar{\varphi})$$

$$1=\cos(\bar{\varphi})$$

$$\Rightarrow \bar{\varphi}=0\,rad$$

الآن نعوّض مكان الثوابت:

$$\boxed{\bar{\theta} = \pi \cos\left(\frac{\pi}{2}t + 0\right) \quad rad}$$

3. لحظة المرور الأول في وضع التوازن $\Leftarrow$ $t = \frac{T_0}{4}$

الآن نحسب $t = ?$:

$$T_0 = 4s \Longrightarrow \boldsymbol{t} = \frac{\mathbf{4}}{\mathbf{4}}$$

$$\Longrightarrow \boldsymbol{t = 1s}$$

$$\bar{\omega} = -\omega_0 \theta_{max} \sin(\omega_0 t + \bar{\varphi})$$

$$\bar{\omega} = \frac{\pi}{2}(\pi) \sin\left(\frac{\pi}{2}(1) + 0\right) \qquad ; \ \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = +1$$

$$\bar{\omega} = -\frac{10}{2}$$

$$\boxed{\bar{\boldsymbol{\omega}} = -\mathbf{5}\ \boldsymbol{rad.s^{-1}}}$$

.4

$$\boldsymbol{m_1 = m_2} = 40g = 40 \times 10^{-3} = \mathbf{4 \times 10^{-2}} \boldsymbol{kg}$$

$$\boldsymbol{\grave{T}_0} = ?$$

$$\boxed{\boldsymbol{\grave{T}_0 = 2\pi \sqrt{\frac{\grave{I}_{\Delta_{(\text{جملة})}}}{k}}}}$$

*

$$\boldsymbol{\grave{I}_{\Delta_{(\text{جملة})}} = I_{\Delta/c_{(\text{ساق})}} + 2I_{\Delta/m_{(\text{كتلة})}}}$$

$$I'_{\Delta(\text{جملة})} = \underbrace{\frac{1}{12}ml^2}_{\text{ساق}} + \underbrace{2(m_1 r^2)}_{\text{كتلة}} \qquad ; \; r = \frac{l}{2}$$

$$I'_{\Delta(\text{جملة})} = \frac{1}{12}ml^2 + 2m_1\frac{l^2}{4}$$

$$I'_{\Delta(\text{جملة})} = \frac{1}{12} \times (192 \times 10^{-3})(5 \times 10^{-1})^2 + 2 \times 4 \times 10^{-2} \times \frac{(5 \times 10^{-1})^2}{4}$$

$$I'_{\Delta(\text{جملة})} = 25 \times 10^{-2}[16 \times 10^{-3} + 20 \times 10^{-3}]$$

$$I'_{\Delta(\text{جملة})} = 25 \times 10^{-2}[36 \times 10^{-3}]$$

$$I'_{\Delta(\text{جملة})} = 900 \times 10^{-2} \times 10^{-3}$$

$$\boldsymbol{I'_{\Delta(\text{جملة})} = 9 \times 10^{-3}\,kg.m^2}$$

الآن نعوّض في (*) :

$$T'_0 = 2\pi\sqrt{\frac{9 \times 10^{-3}}{10^{-2}}} = 2\pi\sqrt{\frac{9}{10}}$$

$$\Rightarrow T'_0 = 2\pi\frac{\sqrt{9}}{\sqrt{10}} = 2 \times 3$$

$$\boxed{\boldsymbol{T'_0 = 6s}}$$

****