المساعد في التوابع الاسي واللغرتمية و الدوال الاصلية

اعداد : أمين المحمد

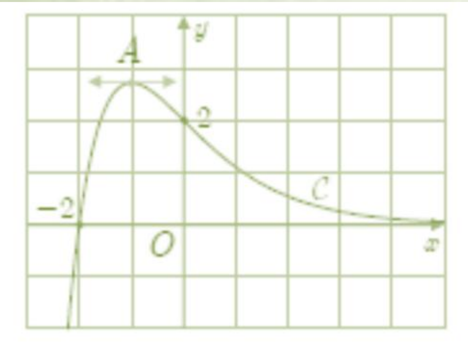
٠٩٤٩٣٩٣٢٧٩

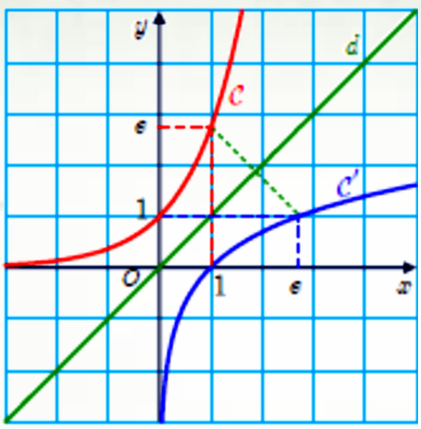
لكل عمل اذا تم نقصان

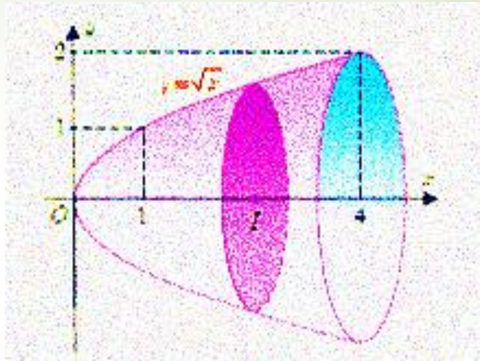
ارجو من الله ان اكون قد وفقت في تقديم ما ينفع وارجو التماس العذر لكل هفوة

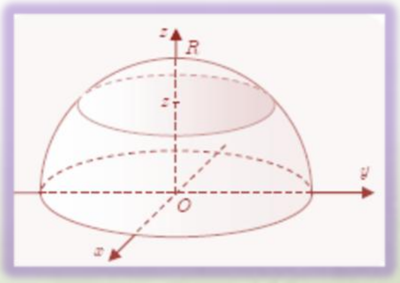
هذا العمل موجه لطلابي لتبسيط الدراسة لهم . ما كان من توفيق فهو من الله

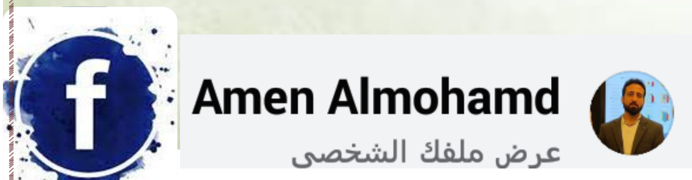
وما كان من خطأ او نسيان فهو مني ومن الشيطان











التابع اللغرتمي

مقدمة خفيفة

منذ زمن والانسان لا يحب الضرب فحاول توظيف الجمع في حساب الجداء للاعداد الكبيرة فشكل جدول ناخذ قسم منه للتبسيط

العدد	اللغرتم العشري
1	0
2	0.30103
3	0.47712
6	0.77815

نلاحظ ان $\ln(2\times 3) = \ln(2)+\ln(3)$ يمكن التعميم $\ln(a\times b) = \ln(a)+\ln(b)$

تعريف : يوجد تابع وحيد يرمز له ln معرف على R_+^* ويحقق

$\ln(a\times b) = \ln(a)+\ln(b)$ وان $\ln'(1) = 1$

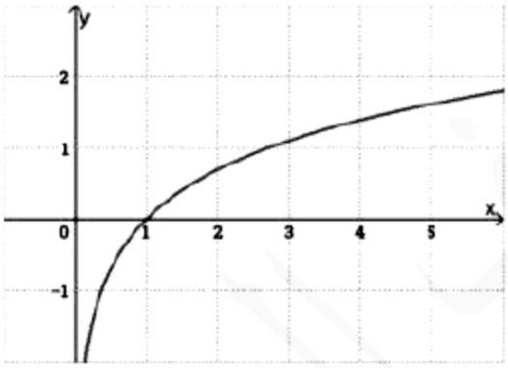
نتائج مباشرة

١) $\ln(1) = 0$ لان $\ln(1) = \ln(1\times 1) = \ln(1)+\ln(1)$ أي ان $\ln(1) = 0$

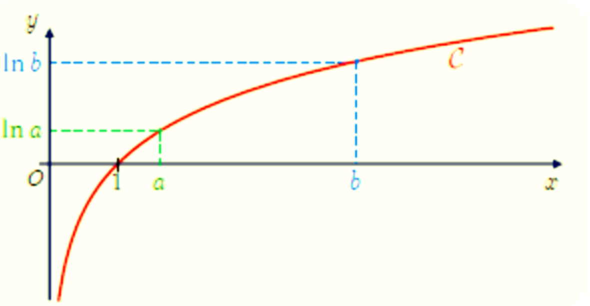
٢) ان $\ln' x = \frac{1}{x}$ لان $\ln(ax) = \ln(a)+\ln(x)$ أي $(\ln(ax))' = (\ln(a))' + (\ln(x))'$ أي ان $a\ln'(ax) = \ln' x$ من اجل $x = 1$ نجد $a\ln'(a) = \ln' 1$ أي $\ln'(a) = \frac{\ln' 1}{a} = \frac{1}{a}$

٣) التابع اللغرتمي متزايد تماما على $]0,+\infty[$ لان $\ln(x)' = \frac{1}{x} > 0$

٤) جدول تغيرات التابع اللغرتمي $\ln(x)$ و الخط البياني



x	0			1		$+\infty$
$\ln' x$	‖		$+$	1	$+$	
$\ln x$	‖	$\nearrow$	$-$ $\nearrow$	0	$\nearrow$ $+$	$\nearrow$



٥) بما ان التابع متزايد تماما من جدول التغيرات ومن الرسم نجد

١) $\ln(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$

٢) $\ln(x) < 0 \Leftrightarrow x < 1$

٣) $\ln(x) > 0 \Leftrightarrow x > 1$

٤) $\ln(a) = \ln(b) \Leftrightarrow a = b$

٥) $\ln(a) < \ln(b) \Leftrightarrow a < b$

٦) $\ln(a) > \ln(b) \Leftrightarrow a > b$

ملاحظة : نستفيد من الخاصة السابقة في حل المعادلات والمتراجحات اللغرتمية من الشكل

$\ln f(x) = \ln g(x)$ او $\ln f(x) < \ln g(x)$ او $\ln f(x) > \ln g(x)$

اولا : نحدد شرط الحل $D_1 : g(x) > 0$ و $D_2 : f(x) > 0$ **ونقاطع الحلول** $D = D_1 \cap D_2$

ثانيا: نحل المعادلة او المتراجحة المكافئة بدون لغرتم أي $f(x) = g(x)$ او

$f(x) < g(x)$ او $f(x) > g(x)$

امثلة : اوجد مجوعة تعريف التوابع التالية

١) $\ln\left\|x^2+2x\right\|$	٢) $\ln\left(\frac{x}{1-x}\right)$	٣) $\ln(x^2-1)$
٤) $\ln(x^2)$	٥) $\ln(1-x)$	٦) $\ln(x-3)$
٧) $\frac{1}{x}\ln(1+x)$	٨) $\frac{1}{lnx}$	٩) $\ln(x^2+4x)$
١٠) $\ln(x^2-3x+2)$	١١) $\ln\|x+1\|-\ln\|x-1\|$	١٢) $\ln\left(\frac{x-3}{2-x}\right)$

امثلة : حل المعادلات والمتراجحات التالية

١) $\ln(3x-4)=\ln(x^2-4)$	٢) $\ln(x^2-4)\le\ln(-3x)$
٣) $\ln(2x)=\ln(x^2-1)$	٤) $\ln(x-2)\le\ln(2x-1)$
٥) $\ln(-3x)=\ln(x^2-4)$	٦) $\ln(2x)\ge\ln(x^2-1)$
٧) $\ln(x-2)=\ln(x^2-2)$	٨) $\ln\left(1+\frac{2}{x}\right)\ge\ln(x)$
٩) $\ln(x-2)=\ln(2)$	١٠) $\ln(x)\le\ln(x^2-2x)$

مثال : ليكن لدينا التابع $f(x) = 2 + \ln(x)$ المعرف على $I = R_+^*$

١) بين ان f اشتقاقي على I

٢) اكتب معادلة المماس T في النقطة التي فاصلتها $x = 1$

خواص اللوغرتم

١) $\ln(a.b) = \ln(a) + \ln(b)$

الاثبات : من اجل $f(x) = \ln(ax) - \ln(a) - \ln(x)$ التابع اشتقاقي R_+^*
حيث $f'(x) = a.\frac{1}{ax} - \frac{1}{x}$ ومنه $f'(x) = 0$ ومنه التابع $f(x)$ ثابت وبما ان $f(1) = 0$ فان
$f(x) = 0$ أي ان $\ln(ax) - \ln(a) - \ln(x) = 0$ ومنه $\ln(ax) = \ln(a) + \ln(x)$

٢) $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$

الاثبات : ان $a = \frac{a}{b}.b$ بالتالي $\ln(a) = \ln\left(\frac{a}{b}\right) + \ln(b)$ أي ان $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$

٣) $\ln\left(\frac{1}{b}\right) = -\ln(b)$

٤) اذا كان $a_1, a_2, \dots, a_n > 0$ فان

$$\ln(a_1 . a_2 \dots a_n) = \ln(a_1) + \ln(a_2) + \dots + \ln(a_n)$$

واضحة بالاستقراء الرياضي

٥) $\ln(a^n) = n\ln(a)$ وهي حالة خاصة من الخاصة 4

٦) $\ln(\sqrt{a}) = \frac{1}{2}\ln(a)$

ملاحظة : ان $\ln(a.b) = \ln(a) + \ln(b)$ اذا وفقط $a > 0$ و $b > 0$

مثال: ليكن $f(x) = \ln(x^2 - 4)$ و $g(x) = \ln(x-2) + \ln(x+2)$ هل $f(x) = g(x)$

مثال : حل المعادلة والمتراجحة

$\ln\sqrt{2x-3} = \ln(6-x) - \frac{1}{2}\ln x$	$\ln(x^2 - 3x) \geq 2\ln(6-x)$

بعض القيم الهامة

$\ln(5) = 1.6$	$\ln(3) = 1.1$	$\ln(2) = 0.7$	$\ln(1) = 0$
$\sqrt{e} = \ln(5)$	$\frac{1}{\sqrt{e}} = 0.6$	$\sqrt{e} = 1.6$	$e = 2.7$
$\frac{\pi}{4} = 0.8$	$\frac{\pi}{3} = 1$	$\frac{\pi}{2} = 1.5$	$\pi = 3.14$

تطبيق: بسط الاعداد الاتية:

٣) $c = \frac{1}{2} ln\sqrt{2}$	٢) $b = \ln\frac{1}{16}$	١) $a = \ln(2+\sqrt{3}) + \ln(2-\sqrt{3})$
٦) $f = \ln 250$	٥) $e = \ln\frac{16}{25}$	٤) $d = ln\sqrt{216} + ln\sqrt{75} - ln15 - ln\sqrt{27}$
٩) $i = ln3 + \ln\frac{1}{3}$	٨) $h = ln50$	٧) $g = ln567 - ln72 - \ln\frac{7}{8} + \ln\frac{1}{27}$

تمرين: قارن بين العددان x و y

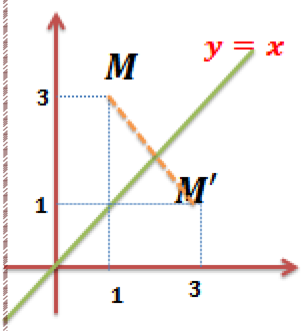
$x = ln5$	$y = ln2 + ln3$
$x = 2ln3$	$y = 3ln2$

تمرين: حل المتراجحات التالية

١) $2^n \leq 100$	٢) $\left(\frac{1}{3}\right)^n \leq 10^{-2}$	٣) $0.2 \geq \left(\frac{2}{5}\right)^n$	٤) $\left(1 + \frac{3}{100}\right)^n \geq 2$

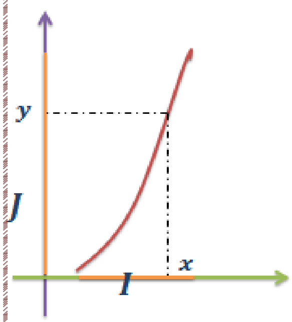
تطبيق: حل المعادلات والمتراجحات التالية

١) $2\ln x = \ln(x+4) + \ln(2x)$	٢) $2lnx = \ln(2x^2 + 8x)$
٣) $\ln(x+11) = \ln(x+3) + \ln(x+2)$	٤) $\ln(x+11) = \ln(x+3)(x+2)$
٥) $ln4 + ln2 = \ln(x-6) + \ln(x+1)$	٦) $\frac{1}{2}ln2x = \ln(3-x) - ln\sqrt{x+1}$
٧) $ln3 \le \ln(5-x) + \ln(x-1)$	٨) $\ln(3x^2 - x) \le lnx + ln2$
٩) $\ln(6x+4) \le \ln(3x^2 - x - 2)$	١٠) $3lnx > \ln(3x-2)$



تذكرة

معادلة منصف الربع الاول هي $y = x$ ومنه ونظيرة النقطة $M(x, y)$ بالنسبة لمنصف الربع الاول هي $M'(y, x)$ كما في الشكل



اذا كان $f: I \to J$ مستمر ومطرد تماما حيث $f(I) = J$ بالتالي كل عنصر x من I يقابل عنصر واحد فقط y من J أي $f(x) = y$ ونلاحظ ان العكس صحيح أي y من J يرتبط فقط بـ x من I أي يمكن ان نعرف تابع $g: J \to I$ حيث $g(y) = x$ يسمى التابع العكسي لـ f ونرمز له f^{-1}

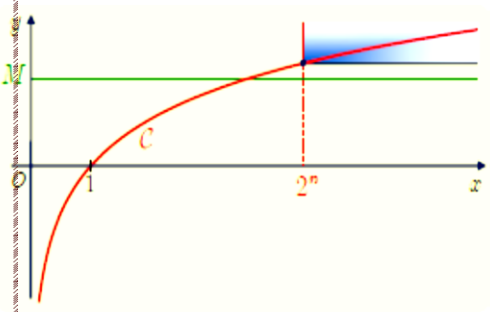
نلاحظ ان $f(x) = y$ أي $f(g(y)) = y$ و $g(y) = x$ أي $g(f(x)) = x$

مثال : ليكن $f(x) = x^2 + 1$

١ – ادرس التغيرات على المجال $[0, +\infty[$ ونظم جدولا بها

٢ – اثبت ان f يملك تقابل عكسي f^{-1} واوجد $f^{-1}(x)$ واستنتج جدول اطراده

٣ – ارسم C_f واستنتج $C_{f^{-1}}$



مبرهنة : تفيد في دراسة التوابع اللغرتمية

$\lim_{x\to 0^+} lnx = -\infty$ (٢	$\lim_{x\to +\infty} lnx = +\infty$ (١

الاثبات :

١) يجب اثبات انه كلما كبر x كبر $f(x)$

من اجل كل M يوجد عدد A حيث $x > A$ فان $f(x) > M$

من اجل كل M ان $M > \frac{M}{ln2}$ ومنه $Mln2 > M$ أي $ln2^M > M$ ومنه نختار $a = 2^M$

٢) نفرض متحول $x = \frac{1}{u}$ أي ان $u = \frac{1}{x}$ ومنه $x \to 0^+$ فان $u \to +\infty$

ومنه $\lim_{x\to 0^+} \ln(x) = \lim_{u\to +\infty} \ln\left(\frac{1}{u}\right) = -\lim_{u\to +\infty} \ln(u) = -\infty$

ومنه جدول تغيرات $\ln(x)$

x	0		1		$+\infty$
$\ln' x$	||	+	1	+	
$\ln x$	|| $-\infty$	$\nearrow - \nearrow$	0	$\nearrow + \nearrow$	$+\infty$

أي $\ln(]0,+\infty[\,) =]-\infty,+\infty[$

ملاحظة: بما ان التابع اللغرتمي مطرد تماما على مجموعة تعريفة فيمكن تعريف تابع عكسي له هو التابع الاسي e^x سوف يدرس في الوحدة القادمة

ويحقق $e^{\ln(x)} = x$ و $\ln(e^x) = x$ ويمكن التعميم أي $\ln\left(e^{f(x)}\right) = f(x)$ و $e^{\ln(f(x))} = f(x)$

ملاحظة : حل المعادلات او المتراجحات ln اما تحويلها الى $\ln f(x) = \ln g(x)$ او $lnf(x) = b$ او تغير متحول وكذلك المتراجحات

مثال : حل المعادلة $\ln(1-2x) = -2$

مثال : حل المتراجحة $(\ln x+2)(\ln x-3)\le 0$

مشتق التابع اللغرتمي المركب $\ln\big(f(x)\big)$

اذا كان $f(x)>0$ فان $(\ln f(x))' = f'(x).\ln'\big(f(x)\big) = f'(x).\frac{1}{f(x)} = \frac{f'(x)}{f(x)}$

أي مشتق ما داخل اللغرتم على ما داخل اللغرتم

مثال : اوجد مشتقات التوابع التالية

١) $f(x)=\ln x-2\sqrt{x}$	٢) $f(x)=\frac{\ln x}{x}$	٣) $f(x)=\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$
٤) $f(x)=\frac{1}{x}-\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$	٥) $\ln(1+x^2)$	٦) $f(x)=x\ln x$
٧) $f(x)=x-\ln(x)$	٨) $f(x)=\frac{1-\ln x}{x}$	٩) $f(x)=x-x\ln x$
١٠) $f(x)=\frac{1}{x\ln x}$	١١) $f(x)=2x+\ln\left(\frac{x+1}{x-4}\right)$	١٢) $f(x)=\frac{1+\ln x}{x}$

تمرين: اثبت ان $lnx < 2\sqrt{x}$ من اجل $x > 0$

نهايات مرجعية هامة في اللغرتمي

$\lim_{x\to0}(xlnx) = 0^-$ (٣	$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$	$\lim\limits_{x\to0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$

تطبيق على المبرهنة الاولى ليكن $f(x)=\ln(x+1)$

١) احسب $f(0)$ و $f'(x)$ و $f'(0)$

٢) استنتج $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}$

نتائج على المبرهنات

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{\ln(x+1)}=1$	$\lim\limits_{x\to 1}\frac{lnx}{x-1}=1$	$\lim\limits_{x\to 1}\frac{x-1}{lnx}=1$	$\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{x}{\ln x}=+\infty$

مثال :احسب نهايات التوابع التالية

$f(x)=\frac{1}{x}+lnx : a=0$	$f(x)=xln\left(1+\frac{1}{x}\right) : a=+\infty$
$f(x)=\frac{\ln x}{x}\ ; a=\infty$	$f(x)=\ln(2x+1)-\ln(x+2) : a=\infty$
$f(x)=\frac{\sqrt{x}}{\ln x} : a=+\infty$	$f(x)=(x^2-x)lnx : a=0$

مثال : اوجد مجموعات التعريف والنهايات

١) $f(x)=\frac{\ln x}{x}$	٢) $f(x)=\frac{x-\ln x}{x}$	٣) $f(x)=\frac{1}{x}(lnx-1)$
٤) $f(x)=\frac{xlnx}{x+1}$	٥) $f(x)=\frac{1}{x}-\ln x$	٦) $f(x)=x+xln\left(1+\frac{1}{x}\right)$
٧) $f(x)=\frac{1}{\ln x}$	٨) $f(x)=\ln\left(\frac{x+1}{x-4}\right)$	٩) $f(x)=x(1-lnx)$
١٠) $f(x)=x-\ln x$	١١) $f(x)=\frac{x+1}{\ln x}$	١٢) $f(x)=x+\ln(x+1)-lnx$

مثال : ليكن التابع $f(x) = x + 1 - \frac{lnx}{x}$ المعرف على $I =]0, +\infty[$

١) لماذا المستقيم $d: y = x + 1$ مقارب للخط C_f

٢) ادرس الوضع النسبي للخطين d و C_f

تمرين : ليكن التابع $g(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{x-lnx} & :]0,+\infty[\\ 0 & : x=0\end{cases}$ خطه البياني C

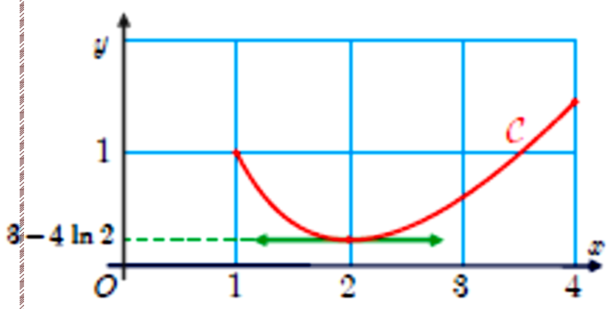
١ ــ اثبت انه مستمر عند الصفر

٢ ــ ادرس قابلية اشتقاق $g(x)$ عند الصفر

٣ ــ اوجد النهاية عند $+\infty$

٤ ــ احسب $g'(x)$ في حالة $x>0$ ثم ادرس تغيرات

٥ ــ اعط معادلة للماس T للخط C في النقطة التي فاصلتها 1



تمرينات ومسائل

تمرين: ليكن لدينا التابع $f(x) = ax + b + c\ln x$

حيث a وb وc اعداد حقيقية المعرف على $I = [1,4]$

١) اثبت ان f اشتقاقي على I واحسب تابعه المشتق

٢) استفد من المعلومات المدونة على الشكل لاثبات ان

$a + b = 1$ و $2a + c = 0$ و $2a + b + c\ln 2 = 3 - 4\ln 2$

٣) اوجد a وb وc ثم اكتب عبارة $f(x)$

تمرين : ليكن $f(x) = ax + b + \frac{1}{x}\ln x$ المعرف على R_+^* عين a و b حيث $A(1,0)$ نقطة من C_f والمماس في النقطة A يوازي $y = 3x + 2$

تمرين : عين العدد الحقيقي m ليكون للمعادلة $x^2 - 2x + \ln(m+1) = 0$ جذران مختلفان

تمرين : لتكن لدينا المتتالية $(u_n)_{n\geq1}$ معرفة وفق $u_n = \ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$

١) جد نهاية المتتالية

٢) نضع $S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$

a) اثبت ان $S_n = \ln(n+1)$

b) ما نهاية $(S_n)_{n\geq1}$

تمرين :اثبت ان المستقيم الذي معادلته $y = x - 1$ مستقيم مقارب للخط البياني للتابع $f(x) = x - x\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$ في جوار $+\infty$

تمرين: نتامل التابع المعرف $I = [0, +\infty[$ وفق التابع $f(x) = \begin{cases} x^2(1 - \ln x) : x > 0 \\ 0 \quad , \ x = 0 \end{cases}$

١) ادرس الاستمرار عند الصفر

٢) ادرس قابلية الاشتقاق عند الصفر

تمرين : ادرس التغيرات على R_+^* وارسم C_f

١) $f(x) = \frac{\ln x}{x}$	٢) $f(x) = x - \ln x$
٣) $f(x) = x\ln x$	٤) $f(x) = \frac{1-\ln x}{x}$
٥) $f(x) = x^2 - \ln x$	٦) $f(x) = x^2 - 8x + 8 + 6\ln x$

تمرين: في كل مما ياتي اثبت ان f اشتقاقي على I ثم احسب f'

١) $f(x) = \ln(ln(ln\, x))$ و $I =]e, +\infty[$

٢) $f(x) = \ln\left(\frac{x+1}{lnx}\right)$ و $I =]1, +\infty[$

تمرين : حل جملة المعادلتين
$$\begin{cases} xy = a^2 \\ (lnx)^2 + (lny)^2 = \frac{5}{2}(lna)^2 \end{cases}$$

تمرين: حل المعادلات التالية

$ln\lvert x+2\rvert + ln\lvert x-2\rvert = 0$	$ln\lvert x-2\rvert + \ln(x+4) = 3ln2$	$ln\lvert x-1\rvert + lnx = 2lnx$

تمرين : اوجد الحل المشترك لجملة المعادلتين

$\begin{cases} x^2 + y^2 = 10 \\ \ln x + \ln y = ln3 \end{cases}$	$\begin{cases} 2\ln x + \ln y = 7 \\ 3\ln x - 5\ln y = 4 \end{cases}$	$\begin{cases} (\ln x)(\ln y) = -12 \\ \ln(xy) = 1 \end{cases}$

تمرين : حل المعادلة $(lnx)^2 - 2lnx - 3 = 0$ و المتراجحة $(lnx)^2 - 2lnx - 3 \geq 0$

تمرين : ليكن $p(x) = 2x^3 + 5x^2 + x - 2$

١ – a) تحقق ان $p(-1) = 0$

b) استنتج ان $p(x)$ يكتب الصيغة $p(x) = (x+1)Q(x)$ حيث $Q(x)$ كثير حدود درجة ثانية

c) حل المتراجحة $p(x) \le 0$

٢) استعمل المعلومات السابقة لحل المتراجحة $2lnx + \ln(2x+5) \le \ln(2-x)$

تمرين : ليكن لدينا التابع $f(x) = \ln\left(\frac{x+1}{1-x}\right)$ المعرف على المجال $I =]-1, 1[$

١) اثبت ان f فردي

٢) a - اثبت ان f اشتقاقي على I

b – ادرس تغيرات f على $[0, 1[$

٣) ارسم الخط البياني للتابع f

تمرين : ادرس تغيرات التوابع التالية على I وارسم C_f

١- $f(x) = \frac{1}{x\ln x}$, $I =]1, +\infty[$	٢- $f(x) = \ln(1 - x^2)$, $I =]-1, 1[$

تمرين: في معلم متجانس، C_f و C_g هما على التوالي الخطان البيانيان للتابعين f و g المعرفين على المجال $I =]-1, +\infty[$ وفق $f(x) = \ln(x+1)$ و $g(x) = \frac{x}{x+1}$

١) اثبت ان $g(x) \leq f(x)$ ايا كان x من I

٢) اثبت ان c_f و c_g يقبلان مماسا مشتركا في النقطة التي فاصلتها $x = 0$

٣) ادرس تغيرات كل من f و g واسم الخطين C_f و C_g مستفيدا من رسم المماس المشترك

تمرين: ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على المجال $I =]1, +\infty[$ وفق

$$f(x) = x + 1 + 2\ln\left(\frac{x}{x-1}\right)$$

١) ادرس تغيرات f ونظم جدولا بها

٢) اثبت ان المستقيم الذي معادلته $y = x + 1$ مقارب للخط c في جوار $+\infty$

٣) ادرس الوضع النسبي للخط البياني c ومقاربه d

٤) ارسم في معلم واحد المستقيم d ثم الخط C

تمرين: ليكن $f(x) = x - 4 + \ln\left(\frac{x}{x+1}\right)$ المعرف على $I =]0, +\infty[$

١) اثبت ان f متزايد تماما على I

٢) اثبت ان المستقيم $d: y = x - 4$ مقارب للخط C في جوار $+\infty$

٣) ادرس الوضع النسبي للخط C_f ومقاربه d

٤) ارسم في معلم متجانس C_f و d

تمرين: ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على المجال $I =]0, +\infty[$

$$f(x) = x - \ln\left(2 + \frac{1}{x}\right)$$

١) ادرس تغيرات f ونظم جدولا بها

٢) اثبت ان المستقيم $d: y = x - ln2$ مقارب للخط C في جوار $+\infty$

٣) ادرس الوضع النسبي للخط C_f ومقاربه d

٤) اثبت ان للمعادلة $f(x) = 0$ حل وحيد α ينتمي الى المجال $]1, 2[$

٥) ارسم في معلم متجانس المستقيم d و C

تمرين: ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على المجال $I =]4, +\infty[$

$$f(x) = 5 - 2x + 3\ln\left(\frac{x+1}{x-4}\right)$$

١) اثبت ان المستقيم $d: y = 5 - 2x$ مقارب للخط C في جوار $+\infty$

٢) ادرس الوضع النسبي للخط C_f ومقاربه d

٣) ادرس تغيرات f ونظم جدولا بها. ثم ارسم في معلم واحد المستقيم d و C_f

٤) اثبت ان للمعادلة $f(x) = 0$ حل وحيد α واحصره في مجال طوله يساوي 1

تمرين: ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على المجال $I =]1, +\infty[$ وفق

$$f(x) = x + \ln\left(x^2 - 1\right)$$

١) اثبت ان f متزايد تماما

٢) اثبت ان للمعادلة $f(x) = 0$ حل وحيد α

٣) اثبت ان $1 < \alpha < \sqrt{1 + \frac{1}{e}}$

تمرين: ليكن C الخط البياني للتابع f المعطى وفق $f(x) = \ln\left(\frac{2x}{x-1}\right)$

١) تحقق ان D_f ، مجموعة تعريف f هي $]-\infty, 0[\cup]1, +\infty[$

٢) احسب نهاية f عند كل طرف من اطراف مجموعة التعريف

٣) اثبت ان f متناقص تماما على D_f

٤) ارسم في معلم متجانس الخط البياني C_f

تمرين :ليكن C الخط البياني للتابع $f(x)=\ln\left(\frac{x-1}{3-x}\right)$

١) تحقق ان D_f هي $]1,3[$

٢) اثبت ان $(4-x)\in D_f$ ايا كان $x\in D_f$

٣) a) احسب عند كل $x\in D_f$ المقدار $f(4-x)+f(x)$

b) استنتج ان النقطة $A(2,0)$ مركز تنظر للخط C_fا

٤) احسب نهاية f عند كل طرف من الاطراف ل D_f

٥) ادرس التغيرات ونظم جدولا بها

٦) ارسم الخط البياني C_f في معلم متجانس

تمرين :ليكن C الخط البياني للتابع $f(x) = \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x+1}$ المعرف على R_+^*

١) احسب $\lim_{x\to 0} f(x)$ و $\lim_{x\to +\infty} f(x)$ وما مقاربات C_f

٢) ادرس تغيرات f ونظم جدولا بها ثم ارسم C_f

تمرين: في كل حالة ادرس تغيرات وارسم C_f على R_+^*

١) $f(x) = (x+1)lnx$	٢) $f(x) = \frac{1}{x} + xlnx$

تمرين: ليكن C_f الخط البياني للتابع المعرف على R_+^* وفق $f(x) = \frac{1+lnx}{x}$

١) احسب النهايات على اطراف مجموعة التعريف وعين المقاربات

٢) ادرس تغيرات f ونظم جدولا بها

٣) لتكن النقاط M_1 و M_2 و M_3 و M_4 المعرفة بالشكل

M_1 نقطة تقاطع C مع محور الفواصل

M_2 نقطة من C مماسه منها يمر من مبدا الاحداثيات

M_3 نقطة من C مماسه منها يوازي محور الفواصل

M_4 نقطة من C ينعدم فيها المشتق الثاني للتابع

a) احسب فواصل هذه النقاط

b) اثبت ان تلك الفواصل هي اربع حدود متعاقبة من متتالية هندسية . ماساسها

تمرين: ليكن التابع المعرف على $R\backslash\{0,1\}$ وفق $f(x)=-\frac{x}{2}=ln\left|\frac{x-1}{x}\right|$ وليكن C خطه البياني في معلم متجانس

١) اثبت ان $\frac{f(x)+f(1-x)}{2}=-\frac{1}{4}$ ايا كان x من D_f

٢) استنتج ان $A\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{4}\right)$ هي مركز تناظر للخط C

٣) ادرس التغيرات على مجموعة التعريف

٤) اثبت ان المستقيم $d:=y=-\frac{1}{2}x$ مقارب للخط C وادرس الوضع النسبي للخط ومقاربه

٥) ارسم في معلم واحد d و C

التابع اللغرتمي ذو الاساس a

نسمي التابع $\log_a(x) = \frac{lnx}{lna}$ التابع اللغرتمي ذو الاساس a حيث $a \in R_+^* \backslash \{1\}$

حاله خاصة $a = e$ نحصل على اللغرتم الطبيعي $\log_e(x) = \frac{lnx}{lne} = \ln x$

حاله خاصة $a = 10$ نحصل على اللغرتم العشري $\log_{10}(x) = \frac{lnx}{ln10} = \log x$

مثال: احسب $\log(1)$ و $\log(10)$ و $\log(100)$ و $\log(1000)$

مثال: احسب $\log_5(25)$

مثال : ليكن لدينا التابع g المعرف على R وفق $g(x) = \ln(2 + sinx)$ المطلوب

١ – احسب $g(0)$ و $g'(x)$ و $g'(0)$

٢ – استنتج $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(2+\sin x)-\ln 2}{x}$

التابع الاسي exp

هو التقابل العكسي للتابع اللغرتمي أي ان $e^x : R \to [0, +\infty[$ ومنه نجد $e^{\ln x} = x$ و

$\ln e^x = x$

مثال : بسط الاعداد التالية

١) $A = e^{ln2} + e^{ln3}$	٢) $B = e^{\frac{1}{2}ln16} + e^{ln3}$
٣) $C = lne^{-3} + e^{\ln 5}$	٤) $D = e^{-\ln\frac{3}{2}} + e^{\ln\frac{1}{3}}$
٥) $E = e^{\ln x} - ln2e^x$	٦) $F = e^{\ln(x-1)-\ln x} + \frac{1}{x}$
٧) $G = \ln e^{\frac{1}{x}} + e^{-lnx}$	

بما ان e^x هو التقابل العكسي للتابع $\ln x$ فان C_{e^x} نظير $C_{\ln x}$ بالنسبة لمنصف الربع الاول كما ان e^x متزايد تماما ومنه

$$a = b \Leftrightarrow e^a = e^b$$
$$a < b \Leftrightarrow e^a < e^b$$
$$a > b \Leftrightarrow e^a > e^b$$

تفيد هذه الملاحظة في حل المعادلات والمتراجحات الاسية

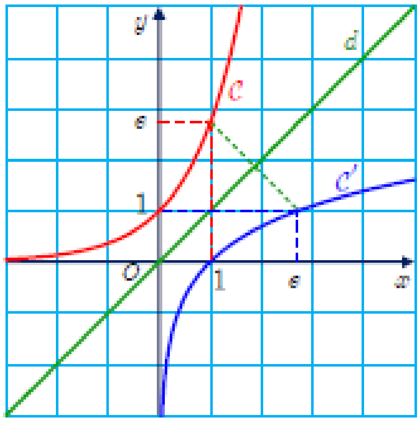
امثلة : حل المعادلات والمتراجحات التالية

١) $e^{\frac{1}{x}} = e^{x+1}$	٢) $e^{2x+1} < e^{-x^2+4}$	٣) $e^{3x+1} \geq 2$
٤) $e^{3-x} = 1$	٥) $e^{2x^2+3} = e^{7x}$	٦) $\frac{e^x}{1-2e^x} = 5$
٧) $2e^{-x} = \frac{1}{e^x+2}$	٨) $\ln(e^x - 2) = 3$	٩) $\ln(2 - e^x) \geq 3$
١٠) $e^{x^2-2} \leq e^{4-x}$	١١) $(e^x - 1)(e^x - 4) < 0$	١٢) $e^{2x^2-1} \geq 3$

نقاط مميزة

نقاط من $C_{\ln x}$	نقاط من C_{e^x}
$\boldsymbol{A(0^+,-\infty)}$	$A'(-\infty,0^+)$
$\boldsymbol{B(1,0)}$	$B'(0,1)$
$\boldsymbol{C(e,1)}$	$C'(1,e)$
$\boldsymbol{D(+\infty,+\infty)}$	$D'(+\infty,+\infty)$

الخط البياني للتابع اللغرتمي والاسي



تمرين: بين لماذا تتفق اشارة $e^x-\frac{4}{e^x}$ مع اشارة e^x-2 ؟ ثم حل المتراجحة $e^x-\frac{4}{e^x}<0$

خواص اساسية

١) $e^0 = 1$ ومنه المعادلة $e^x = 1$ تكافئ $x = 0$

٢) $e^{a+b} = e^a \times e^b$ من اجل أي عدد a و b

٣) $e^{-a} = \frac{1}{e^a}$

٤) $e^{a-b} = \frac{e^a}{e^b}$ حيث $a, b \in R$

٥) $e^{a_1+a_2+\cdots+a_n} = e^{a_1} \times e^{a_2} \times \ldots \times e^{a_n}$

٦) $e^{a\times b} = (e^a)^b$

مثال: بسط العبارات التالية علما ان x حقيقي

$A = e^{2+ln8}$	$B = \frac{e^2}{e^{1+\ln 2}}$	$C = (e^{2x})(e^{-x})^3$

خاصة مهمة : $a^x = e^{x\ln a}$ و $\ln a^x = x\ln a$

تطبيق : **حل المعادلات والمتراجحات**

١) $e^{x^2} = (e^x)^3 e$	٢) $e^{2x} - 5e^x + 4 = 0$	٣) $e^x + 4e^{-x} \leq 5$

حل المعادلات من الشكل $ae^{2x} + be^{x} + c = 0$

نفرض ان $e^{x} = t$ حيث $e^{x} > 0$ تصبح المعادلة $at^{2} + bt + c = 0$

تطبيق :حل المعادلات التالية

١) $e^{2x} - 5e^{x} + 4 = 0$	٢) $e^{2x} - e^{x} - 6 = 0$
٣) $4e^{2x} - e^{x} + 2 = 0$	٤) $e^{-2x} - 7e^{-x} + 6 = 0$

تطبيق : حل المتراجحات التالية

١) $e^{x} - 4e^{-x} \leq 0$	٢) $(e^{x} - 2)e^{x} > 2(e^{x} - 2)$
٣) $e^{x+2} \geq \frac{3}{e^{x}}$	٤) $e^{2x} - 2e^{-x} - 3 < 0$
٥) $e^{x+\ln 4} > \frac{2}{3}$	٦) $e^{x} + 4e^{-x} \leq 5$

تطبيق : اثبت صحة المساواتين

١) $\ln(e^x+1)-\ln(e^{-x}+1)=x$	٢) $\frac{1}{1+e^{-x}}=\frac{e^x}{1+e^x}$

مثال : اثبت ان التابع $f(x) = (e^{x} + e^{-x})^{2} - (e^{x} - e^{-x})^{2}$ المعرف على R ثابت

مثال : بسط العبارات التالية

$C = \dfrac{e^{2+\ln 8}}{e^{3+\ln 4}}$	$B = \dfrac{e}{e^{2+\ln 3}}$	$A = \ln\sqrt{e^{5}}$
$F = \dfrac{e^{3\pi} - e^{2\pi}}{e^{2\pi} - e^{\pi}}$	$E = (e^{2x})^{3} \times (e^{-x})^{6}$	$D = \dfrac{e^{4x}}{e \times (e^{x})^{2}}$
$I = \sqrt[6]{27} \times 3^{\frac{1}{2}}$	$H = 3^{\frac{-1}{\ln 3}}$	$G = (32)^{\frac{3}{2}}$

مشتق التابع الاسي

اذا كان $u(x)$ اشتقاقي على I فان $f(x) = e^{u(x)}$ قابل للاشتقاق على I وتابعه المشتق هو $f'(x) = u'(x)e^{u(x)}$

احسب مشتقات التوابع التالية

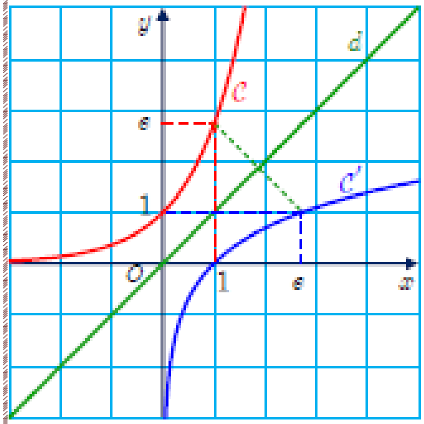
١) $f(x) = e^{x^2-x}$	٢) $g(x) = \pi^{x^2-x}$

تطبيق : اثبت ان $e^x > x$ من اجل $x > 0$

تطبيق : اثبت ان $e^x > x + 1$ من اجل $x > 0$

نهايات مهمة في التابع الاسي

١) $\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty$	٢) $\lim_{x\to-\infty} e^x = 0$
٣) $\lim_{x\to0} \frac{e^x-1}{x} = 1$ او $\lim_{x\to0} \frac{x}{e^x-1} = 1$	٤) $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$
٥) $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^n}{e^x} = 0$ او $\lim_{x\to+\infty} x^n e^{-x} = 0$	٦) $\lim_{x\to-\infty} x^n e^x = 0$
٧) $\lim_{x\to0^+} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e$	٨) $\lim_{x\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$
٩) $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{\ln x} = +\infty$	١٠) $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{e^x} = 0$
١١) $\lim_{x\to0} \frac{\ln x}{x^n} = 0$	١٢) $\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{\ln x} = +\infty$



ملاحظة :للمساعدة على فهم النهايات السابقة تذكر الرسم الجانبي

ان $\ln x$ يهمل امام x او x^n و x^n يهمل امام e^x ومنه $\ln x$ يهمل امام e^x عند $+\infty$ (يهمل أي يعتبر رقم صغير)

الاثبات للنهايات السابقة

١) من بحث اللغرتمي وجدنا ان $\ln x < x$ حيث $x > 0$

بتغير المتحول ووضع $x = e^X$ نجد $\ln e^X < e^X$ أي $X < e^X$

لكن $\lim_{X\to+\infty} X = +\infty$ حسب مبرهنة المقارنة الثانية نجد $\lim_{X\to+\infty} e^X = +\infty$

٢) من 1 وجدنا ان $\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty$ بتغير متحول ووضع $x = -y$ أي $y = -x$ الان

$$\lim_{x\to-\infty} e^x = \lim_{y\to+\infty} e^{-y} = \lim_{y\to+\infty} \frac{1}{e^y} = 0$$

٣) بفرض $u(x) = e^x - 1$ من اجل $\lim_{x\to0} e^x - 1 = 0$ لكن $\lim_{x\to0} u(x) = \lim_{x\to0} e^x - 1 = 0$

$e^x = u(x) + 1$ باخذ اللغرتم نجد $x = \ln(u+1)$ الان

$$\lim_{x\to0} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{u\to0} \frac{u}{\ln(u+1)} = 1$$

٤) سوف نستفيد من العلاقة $e^x > x$

نعلم ان $e^x = \left(e^{\frac{x}{n+1}}\right)^{n+1} \geq \left(\frac{x}{n+1}\right)^{n+1} = \frac{x^{n+1}}{(n+1)^{n+1}}$ الان بالتقسم على x^n نجد

وبما ان $\frac{e^x}{x^n} \ge \frac{x}{(n+1)^{n+1}}$ $\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{(n+1)^{n+1}} = +\infty$ حسب مبرهنة المقارنة الثالثة نجد

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$$

٥) من 4 نجد ان $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^n}{e^x} = 0$

٦) من النتيجة السابقة وبتغير المتحول نجد المطلوب

٧) ملاحظة: $\lim_{x\to a} e^{f(x)} = e^{\lim_{x\to a} f(x)}$

اذا كان $f(x) = (1+x)^{\frac{1}{x}}$ ومنه $f(x) = e^{\frac{1}{x}(1+x)} = e^{\frac{(1+x)}{x}}$ الان

$$\lim_{x\to 0} f(x) = e^{\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)}{x}} = e$$

تطبيق : اثبت ان $e^x > \ln x$ أيا كان $x > 0$

ملاحظة: أي حالة عدم تعين في التابع الاسي يجب ارجاعها الى احد المبرهنات السابقة

تطبيقات: احسب النهايات التالية

١) $f(x) = x - e^x$	٢) $g(x) = e^{2x} - e^x$	٣) $h(x) = e^x - \ln x$
٤) $l(x) = e^x - x^2$	٥) $m(x) = \frac{2e^x+1}{1+e^x}$	٦) $n(x) = 2xe^{-x}$

تطبيق : ليكن لدينا التابع $f(x) = e^{-x} + x - 2$ المعرف على R

١) ادرس تغيرات f ونظم جدولا بها

٢) اثبت ان المستقيم $d: y = x - 2$ مقارب مائل في جوار $+\infty$

٣) ارسم المقارب المائل والمماس الافقي و c_f في معلم متجانس

٣) اثبت ان للمعادلة $f(x) = 0$ حلان في R

ملاحظة: ان 1^{∞} هي حالة عدم تعين

تطبيق: اوجد نهاية التوابع التالية

١) $f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x}$ عند $a = +\infty$	٢) $g(x) = \left(\frac{x+3}{x-1}\right)^{\frac{x}{2}}$ عند $a = +\infty$
٣) $f(x) = (2 - x)^{\frac{3}{x-1}}$ عند $a = 1$	٤) $g(x) = \left(\frac{x-2}{x+1}\right)^{\frac{x+1}{3}}$ عند $a = +\infty$

تطبيق: ليكن لدينا التابع $f(x)=\frac{e^x-1}{e^x+1}$

١) عين مجموعة التعريف

٢) ادرس النهايات على اطراف مجموعة التعريف واكتب معادلة المقاربات

٣) ادرس التغيرات ونظم جدولا بها واثبت ان للمعادلة $f(x)=\frac{1}{2}$ حل وحيد

٤) اثبت ان التابع فردي ثم ارسم C_f

٥) استنتج الخط البياني للتابع $g(x)=\frac{2e^x}{e^x+1}$

مثال : ليكن لدينا التابع $f(x) = \ln x - e^x$ ادرس النهايات على اطراف مجموعة التعريف

تطبيق : ليكن $f(x) = (3 - x)e^x$ المعرف على R

١) ادرس تغيرات f

٢) اكتب معادلة d المماس للخط C في النقطة التي فاصلتها تعدم $f''(x)$

٣) اثبت ان للمعادلة $f(x) = 0$ حل وحيد ثم حدده ثم عين نقطة تقاطع C_f مع yy'

٤) ارسم في معلم واحد d و C_f

٥) استنتج الخط البياني للتابع $g(x) = (x - 3)e^x$

٦) احسب المساحة المحصورة بين C_f ومحور الفواصل ومحور التراتيب

امثلة : اوجد نهايات التوابع التالية عند a

١) $f(x)=\frac{e^x-1}{2x}$ حيث $a=0$	٢) $g(x)=2xe^{-x}$ حيث $a=+\infty$
٣) $f(x)=\frac{e^x-1}{x-1}$ حيث $a=\pm\infty$	٤) $g(x)=e^{2x}-e^x+3$ حيث $a=\pm\infty$
٥) $f(x)=\ln(e^x+2)$ حيث $a=\pm\infty$	٦) $g(x)=2x-1+e^{-x}$ حيث $a=-\infty$
٧) $f(x)=\frac{1}{x}(e^x-1)$ حيث $a=0,+\infty$	٨) $g(x)=e^{\frac{1}{x}}$ حيث $a=0,\pm\infty$

تمرين: احسب مشتق التابع في كل حالة مع ذكر المجموعة القابل للاشتقاق عليها

١) $f(x) = (x^2 - 2x)e^x$	٢) $f(x) = e^{-x}\ln x$
٣) $f(x) = (x^2 - x + 1)e^{-x}$	٤) $f(x) = \frac{1}{x}e^x$
٥) $f(x) = \frac{e^x - 1}{1 + e^{-x}}$	٦) $f(x) = xe^{\frac{1}{x}}$
٧) $f(x) = \ln(1 + e^x)$	٨) $f(x) = e^{x\ln x}$
٩) $f(x) = (\sin x + \cos x)e^x$	١٠) $f(x) = \ln(e^{2x} - e^x + 1)$

تطبيق: ليكن $f(x) = e^x$ المعرف على R

١) ادرس التغيرات ونظم جدول التغيرات

٢) استنتج الخط البياني للتابع $g(x) = e^x - 2$

٣) استنتج الخط البياني للتابع $h(x) = 1 - e^x$

٤) استنتج الخط البياني للتابع $l(x) = |1 - e^x|$

دراسة التابع من النمط $f(x) = a^x$ (التابع ذو الاساس a نرمز له $\exp_a x$)

شرط ان a عدد حقيقي موجب تماما ولايساوي الواحد

اذا كان $a < 0$ ليس للكتابة معنى

اذا كان $a = 1$ فان $f(x) = 1^x = 1$

لذلك نفرض دوما $a \in]0,1[\cup]0,+\infty[$

اذا كان $f(x) = a^x = e^{x\ln a}$ فان $f'(x) = \ln a\, e^{x\ln a}$

نناقش حالتين :

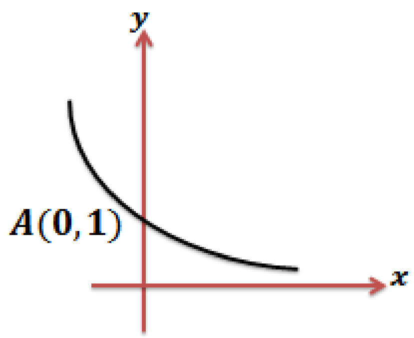
١) $0 < a < 1$ فان $\ln a < 0$

$$\lim_{x\to-\infty} a^x = \lim_{x\to-\infty} e^{x\ln a} = e^{+\infty} = +\infty$$

$$\lim_{x\to\infty} a^x = \lim_{x\to\infty} e^{x\ln a} = e^{-\infty} = 0$$

$f'(x) = \ln a\, e^{x\ln a} < 0$ ومنه $f(x)$ متناقص تماما جدول التغيرات

x	$-\infty$		$+\infty$
$\exp_a$	$+\infty$	$\searrow$	0



لايجاد نقطة التقاطع مع yy' نعوض $x = 0$ نجد $f(0) = e^{0\ln a} = 1$ النقطة $A(0,1)$

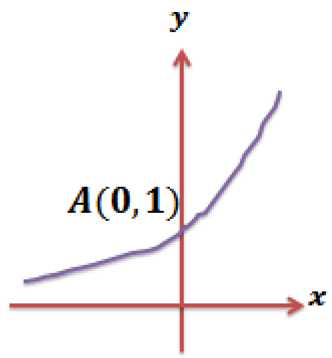
٢) $a > 1$ فان $\ln a > 0$

$$\lim_{x\to-\infty} a^x = \lim_{x\to-\infty} e^{x\ln a} = e^{-\infty} = 0$$

$$\lim_{x\to+\infty} a^x = \lim_{x\to+\infty} e^{x\ln a} = e^{\infty} = +\infty$$

$f'(x) = \ln a\, e^{x\ln a} > 0$ ومنه $f(x)$ متزايد تماما جدول التغيرات

x	$-\infty$		$+\infty$
$\exp_a$	0	$\nearrow$	$+\infty$



لايجاد نقطة التقاطع مع yy' نعوض $x = 0$ نجد $f(0) = e^{0\ln a} = 1$ النقطة $A(0,1)$

مثال : اوجد مشتقات التوابع التالية

١) $f(x) = x^x$	٢) $f(x) = 3^{x^2}$	٣) $f(x) = \pi^{\ln x}$

تطبيق : ليكن لدينا التابع $f(x) = x.2^x$

١) اوجد نهاية التابع على اطراف مجموعة التعريف وعين المقاربات

٢) اوجد مشتق التابع وادرس التغيرات ونظمها في جدول وعين النقاط الحدية

٣) ارسم المقاربات و C_f

مثال : بسط كتابة كل من العددين $A = 3^{-\frac{1}{\ln 3}}$ و $B = 2^{\frac{1}{\ln 4}}$

تمرين: حل المعادلات والمتراجحات التالية

١) $7^{x-1} = 3^x$	٢) $3^x = 4^{2x+1}$	٣) $3^x > 4$
٤) $\left(\frac{1}{3}\right)^x > 4$	٥) $5^{-x} < 5^{2x}$	٦) $\frac{2^x}{2^x+1} < \frac{1}{3}$

تمرين: حل المعادلات والمتراجحات المعطاة

١) $4^x + 2^{x+1} - 3 = 0$	٢) $4^x + 2^{x+1} - 3 \leq 0$
٣) $2^{x+1} - 10 \times 2^x + 12 = 0$	٤) $2^{x+1} - 10 \times 2^x + 12 \geq 0$
٥) $3^{x+1} + 2 \times 3^{-x} = 7$	٦) $3^{x+1} + 2 \times 3^{-x} \geq 7$

تمرين : ليكن $f(x) = 2^{x^2-2x}$

١) ادرس تغيرات f

٢) اكتب معادلة d مماس C في النقطة التي فاصلتها تعدم $f'(x)$

٣) ارسم d و C_f

تطبيق: ليكن لدينا التابع $f(x) = x.2^{-x}$ المعرف على R

١) اوجد نهاية التابع عند اطراف مجموعة التعريف واذكر المقاربات

٢) ادرس تغيرات التابع ونظم جدولا بها (حيث $\frac{1}{\ln 4} = 1.4$ و $\frac{1}{2^{1.4}} \approx 0,3$ و $1.4 \times 0,3 \approx 0.4$)

٣) ارسم المقارب وارسم C_f في معلم متجانس

٤) استنتج الخط البياني للتابع $g(x) = \frac{-x}{2^{-x}}$

٥) استنتج الخط البياني للتابع $h(x) = |x.2^{-x}|$

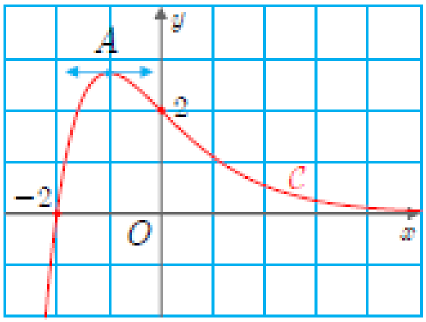
تطبيق : **ليكن لدينا التابع** $f(x) = 4^{x} - 2^{x+2}$

١) اوجد نهاية التابع عند اطراف مجموعة التعريف واذكر المقاربات

٢) ادرس تغيرات التابع ونظم جدولا بها

٣) ارسم المقارب وارسم C_f **في معلم متجانس**

تطبيق : ليكن لدينا التابع $f(x) = (1 - x) \times 2^x$ معرف على R
١) اوجد نهاية التابع عند اطراف مجموعة التعريف واذكر المقاربات
٢) ادرس تغيرات التابع ونظم جدولا بها (حيث $\ln 2 \approx 0.7$)
٣) ارسم المقارب وارسم C_f في معلم متجانس



تمرين: ليكن $f(x) = (ax + b)e^{-x}$ التابع المعرف على R

خطه البياني C_f كما في الشكل

١) احسب قيمة كل من a و b

٢) احسب $f'(x)$ ، واستنتج احداثيتي النقطة A الموافقة للقيمة الكبرى للتابع f

٣) اثبت ان محور الفواصل مقارب للخط C في جوار $+\infty$

تمرين: حل في R جملة المعادلتين:
$$\begin{cases} 3^x \times 3^y = 9 & (1) \\ 3^x + 3^y = 4\sqrt{3} & (2) \end{cases}$$

المعادلات التفاضلية

تعريف : هي كل معادلة تحوي التابع $y = f(x)$ ومشتقاته $y' = f'(x)$ والمتغير x

مثال : المعادلة $x.f'(x) + f''(x) = 2$ او $xy' + y'' = 2$

تعريف : حل المعادلة هو ايجاد التوابع $f(x)$ الذي تجعل المساواة صحيحة (سوف ندرس نوعان)

انواع المعادلات التفاضلية

الاولى : $f'(x) = af(x)$ او $y' = ay$ حيث $a \in R^*$

مبرهنة : ان الحل العام للمعادلة التفاضلية $y' = ay$ هو $f(x) = ke^{ax}$ او $y = ke^{ax}$ حيث $k \in R$

الاثبات : من اجل $y = ke^{ax}$ ومنه $y' = ake^{ax} = ay$ بالتعويض في المعادلة نجد تحقق المساواة

مثال: لتكن لدينا المعادلة التفاضلية $y' - 3y = 0$ اوجد الحل العام لهذه المعادلة ثم اوجد الحل الخاص الذي من اجله $A(1, e) \in C_f$

تطبيق :اوجد حل المعادلة التفاضلية المحقق للشرط

١) $y' = 2y$ والحل f يحقق الشرط $f(0) = 1$

٢) $y' + 5y = 0$ والخط البياني C يمر من النقطة $A(-2, 1)$

٣) $y' + 2y = 0$ وميل المماس في النقطة التي فاصلتها -2 من الخط البياني للحل هو $\frac{1}{2}$

الثانية : المعادلة من الشكل $y' = ay + b$ او $f'(x) = af(x) + b$

مبرهنة : الحل العام للمعادلة السابقة هو مجموعة التوابع $f(x) = ke^{ax} - \frac{b}{a}$

مثال : لتكن المعادلة التفاضلية $y' = 2y + 1$

١) اوجد الحل العام لهذه المعادلة

٢) اوجد الحل الخاص $f(x)$ الذي يمر من النقطة $A\left(0, \frac{1}{2}\right)$

تطبيق: اوجد الحل العام للمعادلات التفاضلية التالية

١) $y' = 3y$	٢) $y' + 2y = 0$	٣) $3y' = 5y$	٤) $2y' + 3y = 0$
٥) $y' = 2y + 1$	٦) $y + 3y' = 2$	٧) $2y' = y - 1$	٨) $2y + 3y' - 1 = 0$

المسائل والتطبيقات

تمرين: ليكن C الخط البياني للتابع $f(x)=\frac{1}{1+e^{x}}$ المعرف على R

١) ما نهاية f عند كل من طرفي مجموعة التعريف

٢) ادرس تغيرات f وارسم C

٣) g هو التابع المعرف على R وفق $g(x)=\frac{1}{1+e^{-x}}$. اثبت ان $g(x)=f(-x)$ ثم استنتج رسم الخط البياني للتابع g انطلاقا من C

تمرين :اوجد المقاربات المائلة للتوابع التالية وعين الوضع النسبي

١) $f(x) = x - 1 + e^{-2x}$	٢) $f(x) = x + 1 + 4e^{-x}$
٣) $f(x) = x + 2 + xe^{x}$	

تمرين: ليكن $f(x) = \ln(3 + e^x)$ المعرف على R ادرس سلوك التابع واكتب مقارباته

تمرين :ليكن C الخط البياني للتابع المعرف على R بالشكل $f(x) = \frac{2e^x-3}{e^x+1}$

١) لماذا المستقيم $d_1: y = 2$ و $d_2: y = -3$ مقاربان للخط

٢) ادرس تغيرات f ونظم جدولا بها

٣) اكتب المماس T للخط البياني C في نقطة تقاطعه مع محور التراتيب

٤) ادرس وضع C بالنسبة الى T ثم ارسم في معلم متجانس d_1 و d_2 و T و C

تمرين : **ليكن C الخط البياني للتابع $f(x) = (x-1)e^x$ المعرف على R**

١) ادرس النهاية عند اطراف مجموعة تعريفه وسجل المقاربات

٢) ادرس التغيرات ونظم جدولا بها وحدد القيم الحدية

٣) ارسم المقاربات ثم C_f

تمرين : ليكن C الخط البياني للتابع $f(x) = e^x - x$ المعرف على R

١) ادرس النهاية عند اطراف مجموعة تعريفه وسجل المقاربات

٢) بين ان المستقيم الذي معادلته $d: y = -x$ مقارب للخط C_f

٣) ادرس تغيرات f ونظم جدولا بها ثم ارسم d و c_f

تمرين : ليكن لدينا التابع المعرف على R بالشكل $f(x) = x - 1 + \frac{4}{e^x+1}$

١) اوجد نهاية f على اطراف مجموعة التعريف

٢) اثبت ان المستقيم d الذي معادلته $d: y = x - 1$ مقارب مائل للخط في جوار $+\infty$

٣) اثبت ان المستقيم d الذي معادلته $d': y = x + 3$ مقارب مائل للخط في جوار $-\infty$

٤) ادرس تغيرات f ونظم جدولا بها

٥) اكتب معادلة المماس T للخط البياني C في نقطة التقاطع مع محور التراتيب

٦) ادرس وضع C بالنسبة الى T ثم ارسم في معلم متجانس d و d' و T و C

تمرين : ليكن لدينا التابع $f(x) = 2e^x - x - 2$ المعرف على R

١)اوجد النهايات و ادرس تغيرات f ونظم جدولا بها

٢) استنتج من (1) ان المعادلة $f(x) = 0$ تملك حلان احدهما $x = 0$

٣) نرمز للجذر الاخر بα اثبت ان $-2 < \alpha < -1$

٤) ادرس اشارة f تبعا لقيم x

تمرين : حل المعادلات التالية

١) $\frac{e^{-x}-1}{e^{x}-1} = -2$	٢) $e^{x} + \frac{e}{e^{x}} = 1 + e$
٣) $4e^{2x} + e^{-2x} \leq 5$	٤) $e^{3x} - \left(e^{2} - 1\right)e^{2x} = e^{x+2}$
٥) $e^{3x+1} + 4e^{2x+1} - 5e^{x+1} = 0$	٦) $\frac{e^{x}-1}{e^{2x}+1} < \frac{e^{x}-2}{e^{x}+2}$
٧) $e^{2x} - 3e^{x+1} + 2e^{2} = 0$	

تمرين : اوجد الحل المشترك لجملة المعادلتين

$\begin{cases} x+y=1 \\ 3e^{x}-e^{y+3}-2e^{2}=0 \end{cases}$ (٣	$\begin{cases} e^{4x}e^{y}=\frac{1}{e^{2}} \\ xy=-2 \end{cases}$ (٢	$\begin{cases} e^{x}-\frac{1}{e}e^{y}=1 \\ 2e^{x}+e^{y}=4+e \end{cases}$ (١

تمرين :ليكن C_f الخط البياني للتابع $f(x)=\frac{1}{2}(e^{x}-e^{-x})$

١) a) بين ان التابع فردي ،ادرس تغيرات f وارسم C

b) اكتب معادلة المماس d للخط C في المبدأ وادرس الوضع النسبي للخط C والمستقيم d

٢) a) ليكن m عددا حقيقيا ، اثبت ان للمعادلة $f(x)=m$ حلا وحيدا في R ليكن α

b) اثبت ان المعادلة $f(x)=m$ تكافئ $e^{2x}-2me^{x}-1=0$ ثم استنتج ان

$\alpha=\ln(m+\sqrt{m^{2}+1})$

تمرين: ليكن $f(x) = e^x + ln|x|$ المعرف على R^* وليكن $g(x) = xe^x + 1$ المعرف على R

١) ادرس تغيرات g واستنتج اشارة $\frac{g(x)}{x}$ على R^*

٢) ادرس تغيرات f وارسم الخط C

٣) اثبت ان للمعادلة $f(x) = m$ تقبل حلين مختلفين ايا كانت m

تمرين: ليكن $f(x) = \ln(e^{2x} - e^{x} + 1)$

١) تحقق من المقولات التالية

a) f معرف على R

b) يكتب $f(x)$ بالصيغة $f(x) = 2x + \ln\left(1 - e^{-x} + e^{-2x}\right)$

c) المستقيم d الذي معادلته $y = 2x$ مقارب مائل للخط C

d) الخط C يقبل مماسا وحيدا Δ موازيا محور الفواصل

٢) ادرس تغيرات f ونظم جدولا بها

٣) اكتب معادلة المماس T للخط C في النقطة التي فاصلتها 0 منه

٤) ارسم كلا من d و Δ و T ثم ارسم C في المعلم ذاته

تمرين : ليكن $f(x) = e^{-x}(3 + \ln x)$ المعرف على R_+^*

١) ادرس تغيرات $g(x) = e^x f'(x)$

٢) استنتج دراسة تغيرات f

تمرين : ليكن $f(x) = e^{\frac{1+x}{1-x}}$ المعرف $R\backslash\{1\}$

١) ادرس تغيرات f

٢) ارسم خطه البياني

تمرين: ليكن C هو الخط البياني للتابع f المعرف على R وفق $f(x) = \ln(e^{-x} + 1)$

١) a) جد نهاية $f(x)$ عند $\pm\infty$ وهل يقبل الخط C مقاربات غير مائلة

b) اثبت ان $f(x) = -x + \ln(e^{x} + 1)$

c) استنتج ان الخط C يقبل مقاربا مائلا وليكن d في جوار $-\infty$

٢) ادرس تغيرات f ونظم جدولا بها ، ثم ارسم في معلم واحد d و C

٣) نرمز الى نقاط C التي فواصلها 0 و 1 و -1 على التوالي بالرموز A و B و D اثبت ان مماس C في A يوازي (DB)

تمرين : اوجد نهاية المتتاليات $(u_n)_{n\geq 0}$ التالية

١) $u_n = \frac{e^{-n}+1}{e^{-}+3}$	٢) $u_n = \frac{e^{2n}}{(1+n)^2}$
٣) $u_n = \ln(2+e^{-n})$	٤) $u_n = e^{1-\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}}$
٥) $u_n = n(e^{1/n}-1)$	٦) $u_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{2n}$

تمرين: المشتق من المرتبة n

ليكن f التابع المعرف وفق $f(x)=(x^2+x-1)e^x$ و $f'=f^{(1)}$ و... $f^{(n)}$ المشتقات المتوالية

١) احسب $f^{(1)}(x)$ و $f^{(2)}(x)$

٢)a) اثبت ان $f^{(n)}(x)=(x^2+a_nx+b_n)e^x$ حيث $a_{n+1}=a_n+2$ و $b_{n+1}=b_n+a_n$

b) استنتج ان a_n و b_n اعداد عادية

٣) في هذا السؤال نريد كتابة a_n و b_n بدلالة n

a) اثبت ان المتتالية (a_n) حسابية. استنتج كتابة a_n بدلالة n

b) تحقق من ان $b_n=a_{n-1}+a_{n-2}+\cdots+a_2+a_1$ ثم استنتج كتابة b_n بدلالة n

معادلة تفاضلية

تمرين: ١) لتكن E المعادلة التفاضلية $2y' + 3y = 0$ عين جميع حلول E

٢) لتكن E' المعادلة التفاضلية $2y' + 3y = x^2 + 1$

a) عين كثير حدود من الدرجة الثانية f يحقق المعادلة E'

b) بين انه اذا كان g حلا للمعادلة E' كان $g - f$ حلا للمعادلة E وبرهن بالعكس انه اذا كان $g - f$ حلال للمعادلة E كان g حلا للمعادلة E'

c) استنتج جميع حلول المعادلة التفاضلية E'

اذا ضاقت بك الدنيا تذكر ان هناك من ضحى بنفسه لكي تعيش

التكامل والتوابع الاصلية

تعريف: نقول ان F دالة(تابع) اصلية للدالة(للتابع) f على المجال I اذا كان اشتقاقي على I و $F'(x) = f(x)$

مثال : اثبت ان $F(x) = 2x - 2$ دالة اصلية للدالة $f(x) = 2$ على R

مثال : اثبت ان $F(x) = x^3 + 1$ دالة اصلية للدالة $f(x) = 3x^2$ على R

مثال : اثبت ان $F(x) = \ln x$ دالة اصلية للدالة $f(x) = \frac{1}{x}$ على $]0, +\infty[$

تمرين : اثبت ان $F(x)$ دالة اصلية ل $f(x)$ على I في الحالات التالية

١) $f(x) = \tan^2 x$ $F(x) = \tan x - x$ على $I =]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$	٢) $f(x) = Cosx - xsinx$ $F(x) = xcosx$ على $I = R$
٣) $f(x) = \frac{2(x^4-1)}{x^3}$ $F(x) = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2$ على $I =]0, +\infty[$	٤) $f(x) = \frac{2x-1}{x^2(x-1)^2}$ $F(x) = -\frac{1}{x(x-1)}$ على $I =]0, 1[$
٥) $f(x) = \ln x$ $F(x) = xlnx - x$ على $I =]0, +\infty[$	٦) $f(x) = \frac{1}{xlnx}$ $F(x) = \ln(lnx)$ على $I =]1, +\infty[$
٧) $f(x) = \frac{1}{1+e^x}$ $F(x) = x - \ln(1 + e^x)$ على $I = R$	٨) $f(x) = \sqrt{e^x}$ $F(x) = 2\sqrt{e^x}$ على $I = R$

نتيجة1:اذا كان $F(x)$ دالة اصلية لـ $f(x)$ على I فان $G(x)=F(x)+k$ هو دالة اصلية

نتيجة2: اذا كان $F(x)$ و $G(x)$ تابعان اصليان لنفس التابع فان $f(x)-G(x)=k$

مثال: ان $F(x)=\ln x$ و $G(x)=\ln x+3$ دالتين اصليتين لـ $f(x)=\frac{1}{x}$

تطبيق: اثبت ان F و G دالتين اصليتين لنفس التابع على المجال I

	الدالة $F(x)$	الدالة $G(x)$	المجال I
1	$\frac{x^2+3x-1}{x-1}$	$\frac{x^2+7x-5}{x-1}$	$]1,+\infty[$
2	$\tan^2 x$	$\frac{1}{Coc^2 x}$	$I]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$
3	$\frac{2x^2-3x+7}{4x-5}$	$\frac{-4x^2+2x-9}{10-8x}$	$I]\frac{5}{4},+\infty[$
5	$\frac{1}{x^2+1}$	$\frac{5+3x^2}{2(1+x^2)}$	$I=R$
6	$F(x)=\sin^2 x$	$2-\cos^2 x$	$\mathrm{I}=\mathrm{R}$

مبرهنة: كل دالة f مستمرة على مجال I تملك دالة اصلية F على I

لكن السؤال هو كيف نوجد هذه الدالة الاصلية تجيبنا المبرهنة الملخصة في الجدول التالي

f	F	I	ملاحظات
$x \to a$	$F(x) = ax$	R	a عدد ثابت
$x \to x^n$	$F(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1}$	R^*	N عدد طبيعي
$x \to x^\alpha$	$F(x) = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$	$]0,+\infty[$	a عدد حقيقي لايساوي -1
$x \to x^{-1} = \frac{1}{x}$	$F(x) = \ln(x)$ $F(x) = \ln(-x)$	$]0,+\infty[$ $]-\infty,0[$	$F(x) = \ln(\lvert x \rvert)$
$x \to e^x$	$F(x) = e^x$	R	
$x \to sinx$	$F(x) = -cosx$	R	
$x \to cosx$	$F(x) = sinx$	R	
$x \to \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$	$F(x) = tanx$	$]-\frac{\pi}{2}+\pi k, \frac{\pi}{2}+\pi k[$	
$x \to \frac{1}{\sin^2 x}$	$F(x) = -Cotx$	$]\pi k, \pi(k+1)[$	
$x \to f(ax+b)$	$F(x) = \frac{1}{a}F(ax+b)$	I	f هو تابع مالوف من التوابع السابقة

يسأل السائل عن اذا كان التابع المراد ايجاد دالته الاصلية هو مجموع تابعين تجيب المبرهنة التالية

(الخاصة الخطية)

مبرهنة: الدالة الاصلية لـ $h(x) = af(x) + bg(x)$ هي $H(x) = aF(x) + bG(x)$

مثال : احسب الدالة الاصلية للتوابع f التالية على I

1	$f(x) = \frac{1}{x^3}$ حيث $I =]-\infty, 0[$	4	$f(x) = tan^2 x$ حيث $I =]-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}[$
2	$f(x) = x^3 - \frac{1}{x^2}$ حيث $I =]0, +\infty[$	5	$f(x) = 3x^2 + 1$ حيث $I = R$
3	$f(x) = \frac{3}{x} - 5$ حيث $I =]0, +\infty[$	6	$f(x) = \sqrt[3]{x} + \frac{1}{\sqrt[3]{x}} - \frac{3}{x^2}$ $I =]-\infty, 0[$

ملاحظة: المبرهنة لا تصلح اذا كان $h(x) = f(x).g(x)$ او $h(x) = f^2(x)$ يجب تحويله الى خطي أي اذا كان $h(x) = f(x) \times g(x)$ فان $H(x) \neq F(x) \times G(x)$

تذكرة : دساتير التحويل من جداء الى جمع

١- $\sin a \,.\sin b = -\frac{1}{2}(\cos(a+b) - \cos(a-b))$

٢- $\cos a \,.\cos b = \frac{1}{2}(\cos(a+b) + \cos(a-b))$

٣- $\sin a \,.\cos b = \frac{1}{2}(\sin(a+b) + \sin(a-b))$

٤- $\cos a \,.\sin b = \frac{1}{2}(\sin(a+b) - \sin(a-b))$

مثال : اوجد الدالة الاصلية للتوابع التالية

1	$I = R$ و $f(x) = cos5x.sinx$	4	$I = R$ و $f(x) = cos3x.cosx$
2	$I = R$ و $f(x) = \sin^2 x$	5	$I = R$ و $f(x) = \cos^4 x$
3	$I = R$ و $f(x) = \cos^2 3x$	6	$I = R$ و $f(x) = cosx.sin2x$

في حال لم يكون التابع المراد ايجاد دالته الاصلية من الحالات السابقة نفكر في الجدول التالي

f	F	ملاحظات
$u'u^n$	$\frac{u^{n+1}}{n+1}$	حيث $n \neq -1$
$u'u^{-1} = \frac{u'}{u}$	$\ln\|u\|$	
$u'e^u$	e^u	
$u'sinu$	$-cosu$	
$u'cosu$	$sinu$	
$u'f(u)$	$F(u)$	

تطبيق : اوجد التابع الاصلي على المجال I

1	$f(x)=(x-2)\left(x^2-4x+5\right)^3$ و $\mathrm{I}=\mathrm{R}$	11	$\mathrm{f}(\mathrm{x})=\frac{2}{x+3}$ $I=]-\infty,-3[$
2	$\mathrm{f}(\mathrm{x})=\frac{2x-1}{x^2-x+3}$ و $\mathrm{I}=\mathrm{R}$	12	$f(x)=\frac{2x+1}{x-1}$ $I=]1,+\infty[$
3	$f(x)=xe^x$ $I=R$	13	$f(x)=\frac{1}{x\ln x}$ $I=]1,+\infty[$
4	$f(x)=\tan x$ $I=]\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}[$	14	$f(x)=x\sqrt[3]{(x^2+1)^2}$ $I=R$
5	$f(x)=\cot^2 x$ $I=]0,\pi[$	15	$f(x)=\cot x$ $I=]0,\pi[$
6	$f(x)=\frac{1}{\sqrt{3-2x}}$ $I=]-\infty,\frac{3}{2}[$	16	$f(x)=\frac{x}{\sqrt{3-x^2}}$ $I=]-\sqrt{3},\sqrt{3}[$
7	$f(x)=\frac{1}{x^4}$ $I=R$	17	$f(x)=\frac{2x+1}{(x^2+x)^2}$ $I=]-\infty,-1[$
8	$f(x)=\frac{1}{1-2x+x^2}$ $I=]1,+\infty[$	18	$f(x)=\frac{4x-2}{\sqrt{x^2-x}}$ $I=]1,+\infty[$
9	$f(x)=\frac{3x+1}{2x}$ $I=]0,+\infty[$	19	$f(x)=\frac{x+1}{x-2}$ $I=]-\infty,2[$
10	$f(x)=\frac{5}{4x-3}$ $I=]-\infty,\frac{3}{4}[$	20	$f(x)=\frac{3x+2}{2x-1}$ $I=]\frac{1}{2},+\infty[$

التكامل المحدد وخواصه

تعريف: اذا كان f تابع مستمر على مجال I تابعه الاصلي $F(x)$ حيث $a < b \in I$ نسمي المقدار $F(b) - F(a)$ التكامل المحدد لـ f على المجال $[a, b]$ نرمز له $\int_a^b f(x)dx$ أي ان $\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$

اختصارا نكتب $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f$

مثال : اوجد القيم التالية

$I = \int_{-1}^{2} (2x - 1)dx$	$J = \int_{\frac{\pi}{12}}^{\frac{\pi}{6}} \cos 2x \ dx$
$L = \int_2^4 \frac{3}{x-1} dx$	$K = \int_0^1 2xe^{x^2} dx$

خواص التكامل المحدد

ليكن f و g تابعين مستمرين على I وليكن $a,b \in I$ و $\alpha,\beta \in R$

١) التكامل يحقق الخاصة الخطية أي $\int_a^b \alpha f + \beta g = \alpha \int_a^b f + \beta \int_a^b g$

٢) تبديل حدود التكامل يعكس التكامل اي $\int_a^b f = -\int_b^a f$

تطبيق: احسب قيمة $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 3sinx\, dx$

تطبيق: احسب التكامل التالي $J = \int_1^2 3x\, dx + \int_1^2 2x\, dx$

علاقة شال في التكامل : اذا كان $a < b < c \in I$ فان $\int_a^c f = \int_a^b f + \int_b^c f$

تطبيق: اوجد $I = \int_0^2 |x^2 - 1|\, dx$

ملاحظة: اذا كان السؤال احسب مساحة يجب دراسة اشارة التابع على المجال المعطى

مثال: احسب قيمة $I = \int_0^2 \frac{2}{x-3}\, dx$

التكامل بالتجزئة: ليكن لدينا u و v تابعين مستمرين وقابلين للاشتقاق على I فان

$$\int_a^b (u.v') = [u.v]_a^b - \int_a^b (u'.v)$$

حالات استخدام التكامل بالتجزئة

الحالة	الفرض
١) $\int_a^b (Ax+B)cosmx\,dx$	$u = Ax + B \ , v' = cosmx$
٢) $\int_a^b (Ax+B)sinmx\,dx$	$u = Ax + B \ , v' = cosmx$
٣) $\int_a^b (Ax+B)e^x\,dx$	$u = Ax + B \ , v' = e^x$
٤) $\int_a^b xlnx\,dx$	$u = \ln x \ , v' = x$
٥) $\int_a^b e^x \sin x\,dx$	لا يوجد فرق في الفرض لكن يجب المكاملة مرتان
٦) $\int_a^b e^x \cos x\,dx$	لا يوجد فرق في الفرض لكن يجب المكاملة مرتان

تطبيقات

احسب التكامل التالي $I = \int_0^1 xe^x\,dx$

تطبيقات :باستخدام التكامل بالتجزئة احسب التكاملات التالية

$J = \int_0^{\pi} (x-1)cosx\,dx$	$I = \int_1^{e} xlnx\,dx$
$L = \int_0^{\pi/3} xsin3x\,dx$	$K = \int_0^{1} (x+2)e^x\,dx$
$N = \int_0^{\pi} e^x \sin x\,dx$	$M = \int_0^{\pi} e^x \cos x\,dx$

ملاحظة : اذا كان f تابع مستمر على I حيث $a \in I$ فان التابع $F(x) = \int_a^x f(x)dx$

هو التابع الاصلي الذي ينعدم عند a

تطبيقات: اوجد التابع الاصلي للتوابع التالية على المجال I

$f(x) = x.cosx$ حيث $I = R$	$f(x) = x.sin2x$ حيث $I = R$
$f(x) = x^2.e^x$ حيث $I = R$	$f(x) = x^2lnx$ حيث $I =]0,+\infty[$
$f(x) = x^2.sin2x$ حيث $I = R$	$f(x) = x^2.cosx$ حيث $I = R$

تذكرة (تفريق الكسور البسط كثير حدود من الدرجة اقل من الثانية والمقام كثير حدود من الدرجة الثانية)

الحالة الاولى: ان يكون البسط من الدرجة الاولى او صفر

$f(x) = \frac{ax+b}{(x-c)(x-d)}$ نفرق على الشكل $f(x) = \frac{\alpha}{(x-c)} + \frac{\beta}{(x-d)}$ نوحد المقامات ونطابق أي ان

$ax + b = \alpha(x-d) + \beta(x-c)$

مثال : ليكن لدينا التابع $f(x) = \frac{1}{x^2-x-2}$ اوجد a و b حيث $f(x) = \frac{a}{(x+1)} + \frac{b}{(x-2)}$

ثم احسب $I = \int_0^1 f(x)\,dx$

مثال : ليكن لدينا التابع $f(x) = \frac{2x+1}{x^2+3x+2}$ اوجد a و b حيث $f(x) = \frac{a}{(x+1)} + \frac{b}{(x+2)}$

ثم احسب $I = \int_0^1 f(x)\,dx$

الحالة الثانية: ان تكون درجة البسط اكبر او تساوي درجة المقام اولا نقسم اقليديا ثم نعيد الحالة الاولى

مثال : ليكن لدينا التابع $f(x)=\frac{4x^3-3x}{2x^2-3x-2}$ اوجد a و b و c و d حيث

$f(x)=ax+b+\frac{cx+d}{(x+\frac{1}{2})(x+2)}$ ثم احسب $I=\int_0^1 f(x)\,dx$

حالة خاصة: اذا كان المقام جذر مضاعف فان الكسر يفرق بالشكل $\frac{\beta}{(ax+b)^2} + \frac{\alpha}{(ax+b)}$

مثال :ليكن $f(x) = \frac{x+1}{(x+2)^2}$ اوجد تابعا اصليا على المجال $I =]-\infty, -2[$

مبرهنة: اذا كان f و g تابعين مستمرين على I و $a < b \in I$ فان

١) اذا كان $f \geq 0$ على المجال $[a,b]$ فان $\int_a^b f \geq 0$

٢) اذا كان $f \geq g$ على المجال $[a,b]$ فان $\int_a^b f \geq \int_a^b g$

باختصار: يمكن مكاملة المتراجحة على المجال $I[a,b]$

تطبيق: من اجل $x \geq 0$ نعلم ان $cosx \leq 1$ اثبت ان

١) اثبت ان $\sin x \leq x$

٢) اثبت ان $1 - \frac{x^2}{2} \leq cox\ x$

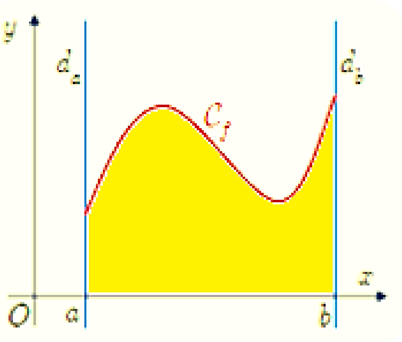
٣) اثبت ان $x - \frac{x^3}{6} \leq sinx$

تطبيق: اوجد التابع الاصلي للتابع f على المجال I

1	$f(x)=\frac{x+3}{x^2-1}$ و $I=]1,+\infty[$	2	$f(x)=\frac{x+1}{x^2-4}$ و $I=]-\infty,+2[$
3	$f(x)=\frac{x}{x^2-x-6}$ و $I=]-2,3[$	4	$f(x)=\frac{2x-1}{x^2-x}$ و $I=]-1,0[$
5	$f(x)=\frac{x^3}{x^2-x-2}$ و $I=]2,+\infty[$	6	$f(x)=\frac{2x-1}{(x+2)^2}$ و $I=]-\infty,-2[$

تطبيقات التكامل المحدد في حساب المساحة والحجم

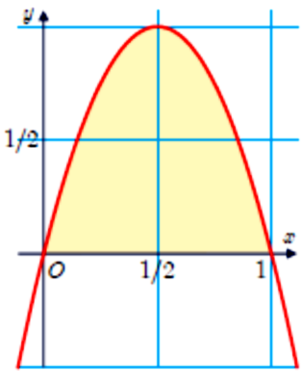
حساب المساحة:



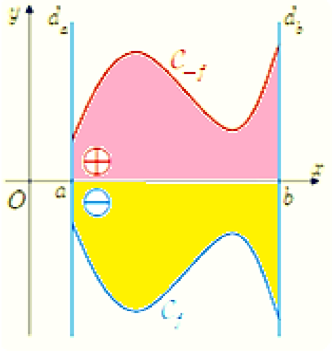
مبرهنة: اذا كان f تابع مستمر وموجب على المجال $[a, b]$

فان $\int_a^b f(x)\,dx$ هي مساحة السطح المحصور بين c_f و

ومحور الفواصل و $x = a$ و $x = b$



تطبيق: ليكن لدينا القطع المكافئ $f(x) = 4x(1 - x)$ عين نقطة تقاطع C_f مع محور الفواصل ثم احسب المساحة المحصورة بين C_f ومحور الفواصل



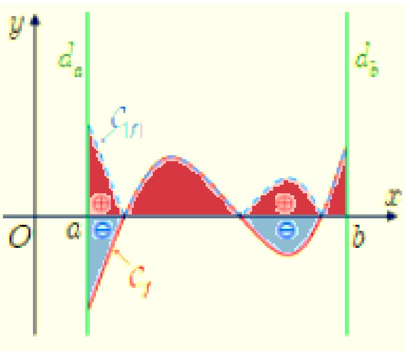
نتيجة: اذا كان $f(x)$ مستمر على المجال $[a,b]$ و $f(x) < 0$

فان $\int_a^b -f(x)\,dx$ هي مساحة السطح المحصورة بين c_f و

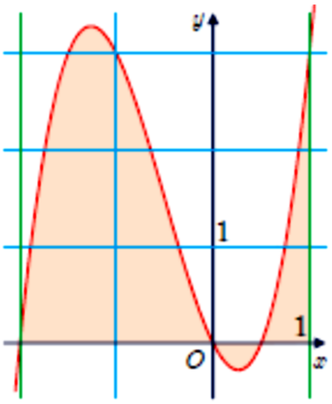
ومحور الفواصل و $x = a$ و $x = b$

تطبيق: ليكن $f(x) = e^{-x} - 2$ ادرس التغيرات وارسم C_f ثم احسب المساحة المحصورة

و C_f محور الفواصل و $x = 0$ و $x = 1$

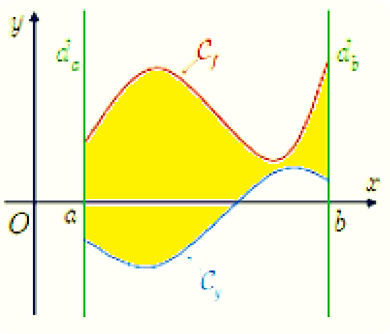


نتيجة: ليكن $f(x)$ تابع مستمر على مجال $I = [a, b]$ مغيرا اشارته بين السالب والموجب فان $\int_a^b |f(x)|\,dx$ هي المساحة السطح المحصورة بين c_f و ومحور الفواصل و $x = a$ و $x = b$



تطبيق: ليكن $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 2x$ احسب المساحة المحصورة بين c_f ومحور الفواصل والمستقيمان $d_1 : x = -2$ و $d_2 : x = 1$

ملاحظة : اذا كان $f \leq g$ لا تقتضي $\int_a^b f \geq \int_a^b g$ الا اذا كان $a \leq b$



مساحة السطح المحصور بين خطين بيانيين

اذا كان C_f و C_g خطين بيانيين للتابعين f و g المستمرين

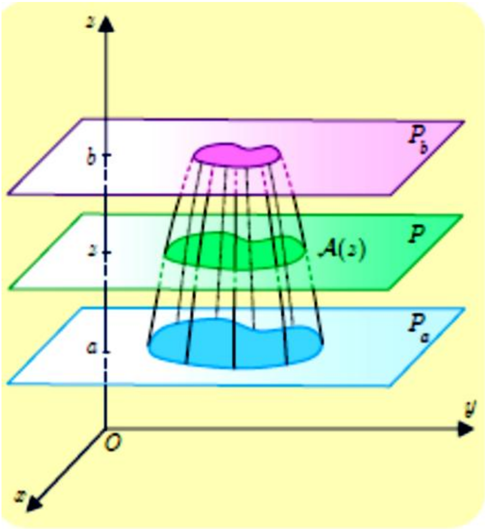
على $I = [a, b]$ فان $\int_a^b |f(x) - g(x)|\, dx$ تمثل المساحة

المحصورة بين C_f و C_g والمستقيمان $x = a$ و $x = b$

تطبيق: ليكن $f(x) = e^x$ و $g(x) = e^{-x}$ احسب المساحة المحصورة بين C_f و C_g

والمستقيم $x = \lambda$ ناقش حسب قيم λ

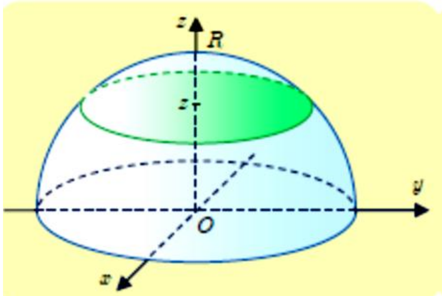
حساب الحجم باستخدام التكامل المحدد



في معلم متجانس $(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ ليكن S مجسم محدد بالمستويان $P_a: z=a$ و $P_b: z=b$ العموديان على محور zz' وليكن $A(z)$ مساحة مقطع المجسم بالمستوي P الموازي لـ P_a و P_b وراقمه $a \le z \le b$

فان حجم هذا المجسم $V=\int_a^b A(z)dz$

تطبيق: حجم كرة نصف قطرها R



في الشكل الجانبي

١) اثبت ان مساحة المقطع الملون بالأخضر هي

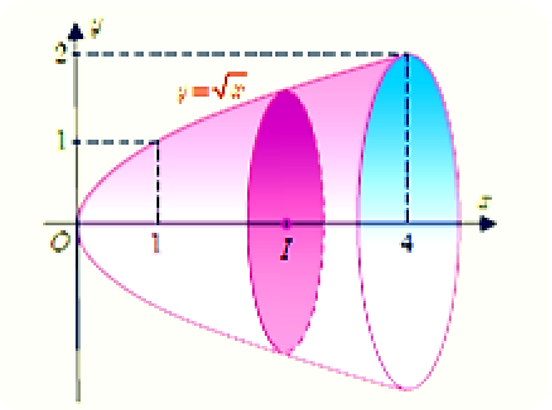
$$A(z)=\pi(R^2-z^2)$$

٢) احسب حجم نصف الكرة الجانبي

٣) استنتج حجم الكرة

حجم مجسم دوراني

ليكن لدينا التابع $f(x) = \sqrt{x}$ المعرف على المجال $I = [0,4]$ عندما يدور C_f دورة كاملة حول محور الفواصل يولد مجسم دوراني S



١) ما طبيعة المقطع بمستوي عمودي على محور الفواصل ومار من $I(0,x)$ حيث $(0 \le x \le 4)$

٢) عبر عن $A(x)$ مساحة هذا السطح بدلالة x

٣) استنتج V حجم المجسم

تطبيقات:

تمرين: اوجد التوابع الاصلية

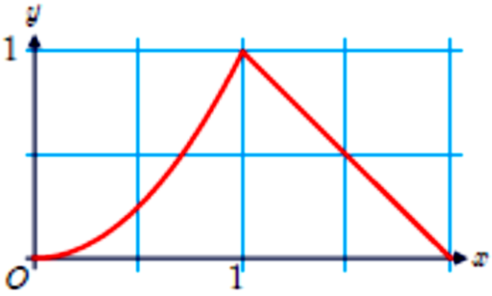
١) $f(x) = 1 - \frac{1}{x^2} + \frac{3}{x}$ $\quad I =]0, +\infty[$	٤) $f(x) = \frac{2}{\sqrt{1-2x}}$: $I =]-\infty, \frac{1}{2}[$
٢) $f(x) = \frac{2x}{\sqrt{x^2-1}}$: $I =]1, +\infty[$	٥) $f(x) = (2x-1)^3$: $I = R$
٣) $f(x) = \frac{1}{(1-3x)^2}$: $I =]-\infty, \frac{1}{3}[$	٦) $f(x) = \frac{x-1}{(x^2-2x-3)^2}$: $I =]-1, 3[$

تمرين: اوجد تابع اصلي على المجال I

١) $I = R$: $f(x) = cosx(\sin^2 x - 3\sin x)$	٤) $f(x) = \frac{1}{x-4}$ ، $I =]4, +\infty[$
٢) $f(x) = \frac{2}{\cos^2 x} - 1$ ، $I]0, \frac{\pi}{2}[$	٥) $f(x) = \frac{1}{x-4}$ ، $I =] - \infty, 4[$
٣) $f(x) = 2e^{3x-1}$ حيث $I = R$	٦) $f(x) = \frac{2x-1}{x+1}$ ، $I =] - 1, +\infty[$

تمرين: في كل من الحالات الاتية ، هات تابعا اصليا F التابع f على مجال I يطلب تحديده ويحقق الشرط المعطى

١) $f(x) = \frac{2}{x^2} + x$ ، $F(1) = 0$	٤) $f(x) = \frac{1}{(2x+1)^2}$ ، $F(0) = 0$
٢) $f(x) = \sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$: $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$	٥) $f(x) = \sin x \,.\, \cos^2 x$ ، $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$
٣) $f(x) = -\frac{1}{3-x}$ ، $F(1) = 1$	٦) $f(x) = \frac{x}{(x^2-1)^2}$ ، $F(0) = 0$



تمرين: نرمز عادة بـ $\min(a,b)$ الى اصغر العددين a و b

تحقق ان الخط البياني C_f للتابع f المعرف على المجال $[0,2]$ بالصيغة $f(x)=\min(x^2,2-x)$ هو الخط المرسوم في الشكل المجاور . احسب التكامل $I=\int_0^2 f(x)\,dx$ ، وقل ماذا يمثل هذا العدد

بالمثل احسب $\int_0^2 g(x)\,dx$ و $\int_0^2 h(x)dx$ في حالة $g(x)=1-|1-x|$ و $h(x)\min(x^2,(x-1)^2)$ بعد رسم الخطين البيانيين على مجال التكامل

تمرين: احسب التكاملات التالية

١) $I=\int_{2}^{-1}(x^2-4x+3x)\,dx$	٢) $I=\int_{2}^{-1}(x-2)(x^2-4x+3)\,dx$
٣) $I=\int_{1}^{2}(t^2+t-\frac{1}{t})\,dt$	٤) $I=\int_{0}^{3}\frac{dt}{\sqrt{1+t}}$
٥) $I=\int_{1}^{2}\frac{x^3}{x^4+2}dx$	٦) $I=\int_{0}^{\pi}\sin(x+\frac{\pi}{4})\,dx$
٧) $I=\int_{-2}^{-1}\frac{x-3}{x}dx$	٨) $I=\int_{0}^{1}te^{t^2-1}\,dt$
٩) $I=\int_{0}^{2}\sqrt{2x+1}\,dx$	١٠) $I\int_{0}^{1}\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}dx$

تمرين: ليكن f التابع المعرف على $D = R\setminus\{-3\}$ وفق $f(x) = \frac{4x^2-5x+1}{x+3}$

١) جد الاعداد a و b و c التي تحقق $f(x) = ax + b + \frac{c}{x+3}$ ايا يكن x من D

٢) احسب $J = \int_2^0 f(x)\,dx$

تمرين: ليكن f التابع المعرف على $D = R\backslash\{1\}$ وفق $f(x) = \frac{x^2}{(x-1)^2}$

١) جد الاعداد a و b و c التي تحقق $f(x) = a + \frac{b}{x-1} + \frac{c}{(x+1)^2}$ ايا يكن x من D

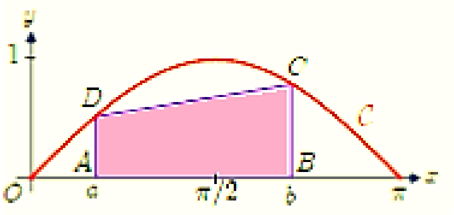
٢) احسب $J = \int_{-3}^{0} f(x)\,dx$

تمرين : اثبت ان $\frac{e^x}{1+e^x} - 1 = \frac{1}{1+e^x}$ ، واستنتج قيمة $I = \int_0^1 \frac{1}{1+e^x}\,dx$

تمرين: باستعمال صيغتي $\sin^2 a$ و $\cos^2 a$ بدلالة $cos2a$ ، او باية طريقة تراها مناسبة اكتب $\sin^4 x$ بدلالة $\cos 2x$ او $\cos 4x$ ثم احسب $I = \int_0^{\frac{\pi}{8}} \sin^4 x\,dx$

تمرين: احسب التكاملات الاتية باستعمال تكامل بالتجزئة

١) $I=\int_{1}^{e}(x-1)\ln x\,dx$	٢) $I=\int_{\ln 2}^{\ln 3}(x^2-1)\,e^{x}dx$
٣) $J=\int_{0}^{1}(2x+1)\,e^{-x}dx$	٤) $J=\int_{1}^{2}(t-2)\,dt$



تمرين: نفترض ان a و b عددان حقيقيان وان

$0 \le a < b \le \pi$. اثبت صحة المتراجحة

$$\cos a - \cos b \ge \frac{1}{2}(b-a)\sin b$$

تمرين: ليكن التابع f المعرف R وفق $f(x) = e^{2x} \sin x$. المطلوب تعين تابعا اصليا F للتابع f

١) احسب $f'(x)$ و $f''(x)$

٢) جد العددين الحقيقين a و b اللذين يحققان $f(x) = af'(x) + bf''(x)$

٣) استنتج عبارة $F(x)$ حيث F تابع اصلي للتابع f

تمرين: ليكن التابع f المعرف على R وفق $f(x) = (1 + x + x^2 + x^3)e^{-x}$ ايوجد تابع كثير حدود P حيث $F : x \to P(x)e^{-x}$ تابعا اصليا للتابع f على R

تمرين: في كل حالة اوجد تابعا اصليا للتابع f على المجال I

١) $f(x)=\frac{1-2x}{(2x^2-2x+1)^3}$ $I=R$	٢) $f(x)=\cot x$ و $I=]-\pi,0[$
٣) $f(x)=\frac{1-x}{\sqrt{x^2-2x-2}}$: $I=R$	٤) $f(x)=\frac{1}{\sin 2x}$ ، $I=]0,\frac{\pi}{2}[$
٥) $f(x)=(1-2x)^4$ $I=R$	٦) $f(x)=\frac{1}{x^2}\times e^{\frac{2}{x}}$ ، $I=R_+^*$
٧) $f(x)=2e^{2-3x}$ ، $I=R$	٨) $f(x)=\frac{\ln x-1}{x^2}$ ، $I=R_+^*$
٩) $f(x)=\frac{\sin x-x\cos x}{x^2}$ ، $I=R_+^*$	١٠) $f(x)=\frac{3x+2}{2\sqrt{x+1}}$ ، $I=]-1,+\infty[$

تمرين: في كل حالة احسب التكامل التالي

١) $I=\int_{-2}^{0}\frac{x}{x-1}\,dx$	٢) $I=\int_{0}^{2}\frac{4x-5}{2x+1}\,dx$
٣) $I=\int_{-1}^{2}\frac{2x}{x^2-9}\,dx$	٤) $I=\int_{0}^{3}\frac{x+2}{(x+1)^4}\,dx$
٥) $I=\int_{0}^{1}\frac{2x^3-3x-4}{x-2}\,dx$	٦) $I=\int_{1}^{2}\frac{8x^2-4}{4x^2-1}\,dx$

تمرين: في كل حالة اوجد تابعا اصليا للتابع مستفيدا من العلاقة $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

$f(x) = \cos^3 x$	$f(x) = \sin x + \sin^3 x$	$f(x) = \sin^3 x . \cos^2 x$

تمرين: ليكن $f(x) = \sin^4 x$ المعرف R

١) احسب $f'(x)$ و $f''(x)$ واكتب $f(x)$ بدلالة $f''(x)$ و $\cos 2x$

٢) استنتج تابعا اصليا F للتابع f على R

تمرين: ليكن f التابع المعرف على R وفق $f(x) = x^3 e^{2x}$ جد تابعا اصليا F للتابع f على R بالصيغة $F(x) = P(x)e^{2x}$ حيث P تابع كثير حدود

تمرين: نريد حساب $I = \int_0^1 \frac{x^3}{1+x^2}\,dx$. احسب $J = \int_0^1 \frac{x}{1+x^2}\,dx$ ثم $I + J$ واستنتج I

تمرين: نريد حساب $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x}{1+\sin 2x}\,dx$. احسب $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{1+2\sin x}\,dx$ ثم $I + J$ واستنتج I

تمرين : ليكن f تابع معرف على R وفق $f(x)=e^{2x}\cos x$

١) احسب $f'(x)$ و $f"(x)$

٢) عين a و b يحققان المساواة $f(x)=af'(x)+bf"(x)$

٣) استنتج تابع اصليا F للتابع f على R

تمرين : F و G تابعان اصليا للتابعين $f(x)=\cos(lnx)$ و $g(x)=\sin(lnx)$ على $]0,+\infty[$
ينعدمان عند $x=1$ انطلاقا من الصيغتين

$F(x)=\int_1^x \cos(\ln t)\,dt$ و $G(x)=\int_1^x \sin(\ln t)\,dt$

١) اثبت باستعمال التكامل بالتجزئة ان

$F(x)=x\cos(\ln x)-1+G(x)$ و $G(x)=x\sin(\ln x)-F(x)$

٢) استنتج عبارتي $F(x)$ و $G(x)$

تمرين: اثبات متراجحة

١) تيقن انه في حالة a $0 < x < a$ يكون $1 \leq \frac{1}{1+x} \leq \frac{1}{1+a}$

٢)استنتج ان $a \leq \ln(1+a) \leq \frac{a}{1+a}$ في حالة $a > 0$

تمرين: فيما ياتي ارسم الخط البياني C الذي يمثل التابع f ، ثم احسب المساحة المحصورة بين C ومحور الفواصل والمستقيمين اللذين معادلتهما $x = a$ و $x = b$

١) $f(x) = 2 + x + x^2$ و $x = 1$ ، $x = 0$	٢) $f(x) = \frac{6}{(2x+1)^2}$ و $x = 4$ ، $x = 1$
٣) $f(x) = \cos(2x - \frac{\pi}{4})$ و $x = \frac{\pi}{4}$ ، $x = 0$	٤) $f(x) = (x+1)e^{-x}$ $x = \ln 2$ $x = -1$

تمرين: ارسم في جملة متجانسة الخطين البيانيين $f(x) = \sin x$ و $g(x) = x\sin x$ على المجال $[0, \pi]$ وما مساحة السطح المحصور بين الخطين على المجال $[0, \pi]$

تمرين: ليكن C_f الخط البياني للتابع f المعرف على R وفق $f(x) = (2 - x)e^x$

١) ادرس تغيرات f وارسم C

٢) ليكن C_1 الجزء من الخط البياني C المحصور بين المستقيمين اللذين معادلتهما $x = 0$ و $x = 2$ وليكن S السطح المحصور بين C_1 و محور الفواصل . احسب مساحة S

٣) عندما يدور السطح S حول محور الفواصل فانه يولد مجسما دورانيا حجمه v

a) عين الاعداد a و b و c حتى يكون التابع $G(x) = (ax^2 + bx + c)e^{2x}$ تابعا اصليا للتابع $x \to (f(x))^2$

b) استنتج قيمة v

تمرين :ليكن $f(x)=(x^2+2x+2)e^{-x}$ التابع المعرف R

١) ادرس تغيرات f ونظم جدولا بها

٢) ليكن C' الخط البياني للتابع f في معلم متجانس ، اكتب معادلة المماس T للخط C' في النقطة Ω التي فاصلتها -1 وارسم C' و T

٣) عين الاعداد a و b و c حتى يكون التابع $F(x)=(ax^2+bx+c)e^{-x}$ تابعا اصليا للتابع f على R .ثم احسب مساحة السطح المحصور بين محور الفواصل و C' والمستقيمين اللذين معادلتهما $x=0$ و $x=\alpha$