المساعد في النهايات والاستمرار والاشتقاق في التوابع

اعداد : أمين المحمد

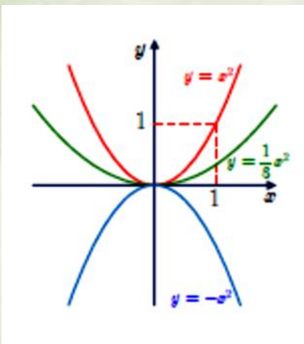
٠٩٤٩٣٩٣٢٧٩

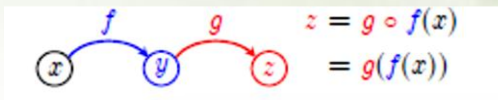
لكل عمل اذا تم نقصان

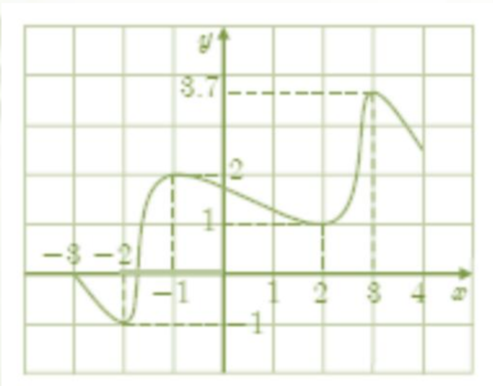
ارجو من الله ان اكون قد وفقت في تقديم ما ينفع وارجو التماس العذر لكل هفوة

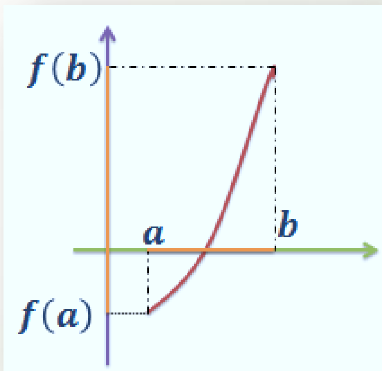
هذا العمل موجه لطلابي لتبسيط الدراسة لهم . ما كان من توفيق فهو من الله

وما كان من خطأ او نسيان فهو مني ومن الشيطان









x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\nearrow$	3	$\searrow$	-1	$\nearrow$	

١ – المطابقات

١ – $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ او $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

٢ – $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ او $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

٣ – $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$ او $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$

امثلة : انشر العبارات

١- $A(x): (-x+3)^2 + (4x-1)(x+3)$

٢- $B(x): (x+1)^3 + (x+3)(x^2+3)$

اشارة المقدار : أي معرفة القيم التي تعدمه والقيم التي تجعله سالب والقيم التي تجعله موجب

١ – $p(x) = ax + b$

$$ax + b = 0 \Rightarrow x = -\frac{b}{a}$$

جدول الاشارة

x	$-\infty$	$-\frac{b}{a}$	$+\infty$
$p(x)$	يخالف اشارة a	0	يوافق اشارة a

مثال : ادرس اشارة المقدار $A(x) = -2x + 6$

ملاحظة: يكون الكسر غير معرف اذا كان المقام معدوم

مثال : ادرس اشارة المقدار $F = \frac{4-3x}{5x+2}$ و $E = \frac{-3x+9}{4x-8}$ و $G = |2x-3|$

٢ - $p(x) = ax^2 + bx + c$

نحسب $\Delta = b^2 - 4ac$ ونميز ثلاثة حالات

١ - $\Delta < 0$ بالتالي الجدول

x	$-\infty$	$+\infty$
$p(x)$	يوافق اشارة a	يوافق اشارة a

مثال : ادرس اشارة $f(x) = -x^2 + 2x - 3$

٢ - $\Delta = 0$ جدول الاشارة

x	$-\infty$	$-\dfrac{b}{2a}$	$+\infty$
$p(x)$	يوافق اشارة a	0	يوافق اشارة a

مثال : ادرس اشارة $f(x) = x^2 - 4x + 4$

----

٣ - $\Delta > 0$ جدول الاشارة

x	$-\infty$	$x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$		$x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$	$+\infty$
$p(x)$	يوافق اشارة a	0	يخالف اشارة a	0	يوافق اشارة a

مثال : ادرس اشارة $f(x) = x^2 + x - 2$

حل المعادلات

من الدرجة الاولى : (نشر اقواس ثم عزل المعاليم والمجاهيل ثم اختزال ثم التقسيم على امثال المجهول)

مثال: حل المعادلتان التاليتان

$$-3x + 5(x-1) = x + 3 \quad \text{و} \quad 2(3x-3) + x - 5(4x-3) = 6$$

من الدرجة الثانية :

١- اما التحليل (عامل مشترك و التحليل المباشر على مرحلتين)

مثال: حل المعادلات التالية

$$(x+1)^2 - 3(x+1) = 0$$

$$4x^2 - 5x = 0$$

$$x^2 - 5x + 6 = 0$$

$(x-1)^2 = 16$

$(2-x)(x-1)(4x-5) = 0$

$x^3 - 5x^2 + 6x = 0$

$(x+1)(2x+3) - (x+1)(-x+2) + 5(x+1)^2 = 0$

٢- المميز لحل المعادلة $ax^2 + bx + c = 0$

نحسب $\Delta = b^2 - 4ac$ ونميز ثلاث حالات

١- $\Delta < 0$ المعادلة مستحيلة الحل في R

٢- $\Delta = 0$ للمعادلة حل مضاعف هو $x = -\frac{b}{2a}$

٣- $\Delta > 0$ للمعادلة جذران $x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ و $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$

مثال :حل المعادلات

$-x^2 + 2x - 3 = 0$ و $2x^2 - 5x + 2 = 0$ و $x^2 - 4x + 4 = 0$

ملاحظة: اذا كانت المعادلة $ax^2 + bx + c = 0$ تملك جذران فيوجد علاقة مع الامثال هي

$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ و $x_1 . x_2 = \frac{c}{a}$

مثال : لتكن لدينا المعادلة $-3x^2 + 2x + 5 = 0$ اوجد مجموع وجداء الجذران

المتراجحات :

١–درجة اولى :

مثال: حل المتراجحة التالية : $3(x-2)-x>4(x+3)$

مثال : حل المتراجحة التالية : $3+\frac{2}{3}x>\frac{1}{6}x-1$

٢–المتراجحات من درجة غير اولى ندرس الاشارة ثم نختار المجال الموافق

مثال : حل المتراجحة $\frac{4}{x+1}\geq-3$ و $(2x+3)^2\leq(x-1)^2$

مثال: ليكن m عدد حقيقي حيث $f(x) = x^2 - (m+1)x + 4$ ما قيمة m ليكون للمعادلة جذر مضاعف

ملاحظة: تتغير جهة المتراجحة (الضرب والتقسيم على عدد سالب ويقلب حدود المتراجحة)

مثال : احصر المقدار A في الحالات التالية

١- $A = \sqrt{a} + 2$ حيث $5 < a < 9$

٢- $A = (a-1)^2 - 3$ حيث $1 \leq a \leq 2$

٣- $A = a + \frac{1}{a}$ حيث $2 < a < 5$

اذا كان $a < b$ و $c < d$ بالجمع طرفا لطرف نجد $a + c < b + d$

المجالات في مجموعة الاعداد الحقيقية:

المجالات غير المحدودة:

- $[a,+\infty[$ او $a \le x < +\infty$
- $]-\infty,b]$ او $-\infty < x \le b$
- $]-\infty,+\infty[$ او $-\infty < x < +\infty$

المجالات المحدودة:

- $[a,b]$ او $a \le x \le b$
- $]a,b]$ او $a < x \le b$
- $[a,b[$ او $a \le x < b$
- $]a,b[$ او $a < x < b$

القيمة المطلقة : القيمة المطلقة للعدد الحقيقي x أي $|x|$ هو العدد الموجب دوما وهو المسافة بين x والصفر لذلك

$$|x| = \begin{cases} x : x \in [0,+\infty[\\ -x : x \in]-\infty,0[\end{cases}$$

ان العبارة $|x|$ تقرأ بعد x عن الصفر و ان العبارة $|x-y|$ تقرأ بعد x عن y

خواص القيمة المطلقة

١- $|-a| = |+a| = a$	٢- $|x| = \sqrt{x^2}$	٣- $|x+y| \le |x| + |y|$
٤- $|x.y| = |x|.|y|$	٥- $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$	$|x| < a \Rightarrow -a \le x \le a$

المجال ومركزه ونصف قطره وعلاقته بالقيمة المطلقة

لتكن لدينا المجالات $[a,b]$ و $]a,b]$ و $[a,b[$ و $]a,b[$

نسمي: ١- $c=\frac{a+b}{2}$ مركز المجال ٢- $r=\frac{b-a}{2}$ نصف قطر المجال

واذا كان $x\in[a,b]$ كما في الشكل

أي بعد x عن المركز c اصغر او يساوي نصف القطر

يترجم بالقيمة المطلقة $|x-c|\le r$

مثال : عبر بالقيمة المطلقة عن المجال $x\in[2,12]$ و $x\in]3,11[$ و $x\in]-\infty,-1]\cup[7,+\infty[$

حل المعادلات والمتراجحات التالية

١- $|x-2|\le 3$ و $\left|x-\frac{3}{2}\right|<1$

٢- $|x-3|=2$ و $|x-3|=|2-x|$

كثير الحدود

نسمي المقدار $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots a_0$ كثير حدود

حيث : $a_n, a_{n-1}, \dots, a_0 \in N$ و n درجة كثير الحدود و $a_n x^n$ الحد المسيطر

مثل : $f(x) = 3x + 1$ كثير حدود من الدرجة الاولى او خطي

$f(x) = 3x^3 + 11x + 2$ كثير حدود من الدرجة الثالثة

$f(x) = 3$ كثير حدود ثابت ومن الدرجة صفر و $f(x) = 0$ كثير حدود صفري درجة لانهاية

التابع وسلوكه ومشتقه

هو علاقة f تربط كل عنصر x من مجموعة اولى D_f (المنطلق) بعنصر واحد فقط y من مجموعة ثانية R (المستقر) أي $f: x \to y$ او $f(x) = y$ حيث ان y هو عمليات جبرية على x مثل :

$f(x) = y = x^2 + 1$

مجموعة تعريف التابع هي كل الاعداد التي يمكن عندها حساب $y = f(x)$

التوابع الاساسية

١- الثابت: $f(x) = c$:

معرف على R ومشتقه $f'(x) = 0$ وسلوكه $\lim_{x \to \mp\infty, a} f(x) = c$

مثال: $f(x) = 5$:

٢- الخطي: $f(x) = ax + b$

معرف على R ومشتقه $f'(x) = a$ وسلوكه عند ∞ ناخذ المسيطر

$\lim_{x\to\mp\infty} f(x) = \lim_{x\to\mp\infty} ax$ و $\lim_{x\to c} f(x) = a(c) + b$

مثال: $f(x) = -3x + 5$:

٣-القوة : $f(x) = ax^n$ حيث $n \in N$

معرف على R ومشتقه $f'(x) = anx^{n-1}$ وسلوكه

$\lim_{x\to\mp\infty} f(x) = \lim_{x\to\mp\infty} ax^n$

مثال : $f(x) = -3x^2$

٤-كثير الحدود: $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots a_0$

معرف على R ومشتقه $f'(x) = anx^{n-1} + \cdots + 0$ وسلوكه عند ∞ من سلوك المسيطر

مثال : $f(x) = -x^3 + 2x - 1$

٥-المقلوب: $f(x) = \frac{1}{x}$ معرف على $R\backslash\{0\}$ ومشتقه $f'(x) = \frac{-1}{x^2}$

سلوكه يخضع للقاعدة: : صفر = $\frac{\text{عدد}}{\infty}$ و $\infty = \frac{\infty}{\text{عدد}}$ و $\infty = \frac{\text{عدد}}{0^+}$ و $\infty = \frac{\text{عدد}}{0^-}$

مثال : $f(x) = \frac{1}{x-5}$

٦-الجذري : $f(x) = \sqrt{x}$

معرف على $[0,\infty[$ ما داخل الجذر اكبر او يساوي الصفر ومشتقه: مشتق ما داخل الجذر على ضعفي الجذر $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ وسلوكه $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

مثال : $f(x) = \sqrt{3x+12}$

٧-القيمة المطلقة : $f(x) = |x| = \begin{cases} x : x \in [0,\infty[\\ -x : x \in]-\infty,0] \end{cases}$

معرف على R ومشتقه $f'(x) = \begin{cases} 1 : x \in [0,\infty[\\ -1 : x \in]-\infty,0] \end{cases}$

مثال : اكتب $f(x) = |x^2 - 9| + 5x$ بدون قيمة مطلقة ثم اوجد المشتق والنهايات

٨-المثلثي : $f(x) = \sin x$ او $f(x) = \cos x$

معرف على R ومشتقه $f'(x) = \cos x$ او $f'(x) = \sin x$ وسلوكه عن القيم نعوض اما عند ∞ تكون غير معروفة (احاطة)

ايجاد مجموعات التعريف

الكسري :مجموعة تعريف البسط تقاطع مجموعة تعريف المقام فرق القيم التي تعدم المقام

الجذري : ما داخل الجذر اكبر او يساوي الصفر

كثير الحدود والخطي والثابت معرف على R

امثلة : اوجد مجموعة تعريف والنهايات التوابع التالية

$f(x) = \dfrac{3}{x^2}$	$g(x) = \dfrac{x+1}{x(x-1)}$	$h(x) = \dfrac{2x-1}{x^2+1}$
$d(x) = \dfrac{x+5}{x^2+x}$	$k(x) = \dfrac{x+1}{x^2-4}$	$l(x) = \dfrac{x-1}{x^2+3}$
$t(x) = \sqrt{x+2}$	$v(x) = \sqrt{3-x}$	$u(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$

العمليات على التوابع

ليكن لدينا التابع f مجموعة تعريفه D_f وقاعدة ربطه $f(x)$ و التابع g مجموعة تعريفه D_g وقاعدة ربطه $g(x)$

١ – المجموع: مجموع تابعين f و g هو تابع رمزه $f+g$ قاعدة ربطه $f(x)+g(x)$ مجموعة تعريفه $D_f \cap D_g$ ومشتقته $(f+g)' = f' + g'$ مشتق الاول زائد مشتق الثاني سلوكه

$$\lim_{x\to\infty}\big(f(x)+g(x)\big) = \lim_{x\to\infty} f(x) + \lim_{x\to\infty} g(x)$$

مثال : ليكن لدينا $f(x) = \sqrt{4-x^2}$ و $g(x) = cos\ x$

اوجد D_f وD_g وقاعدة ربط $f+g$ ومشتق $f+g$ وسلوك $f+g$ عند الصفر

٢ – الضرب: ضرب تابعين f و g هو تابع رمزه $f \times g$ قاعدة ربطه $f(x)\times g(x)$ مجموعة تعريفه $D_f \cap D_g$ ومشتقته $(f.g)' = f'.g + g'.f$ مشتق الاول في الثاني زائد مشتق الثاني في الاول سلوكه

$$\lim_{x\to\infty}\big(f(x)\times g(x)\big) = \lim_{x\to\infty} f(x) \times \lim_{x\to\infty} g(x)$$

مثال : ليكن لدينا $f(x) = cosx$ و $g(x) = \sqrt{x}$ واوجد D_f وD_g وقاعدة ربط $f \times g$ ومشتق $f \times g$ وسلوك $f \times g$ عند الصفر

٣ – القسمة: قسمة تابعين f و g هو تابع رمزه $\frac{f}{g}$ قاعدة ربطه $\frac{f(x)}{g(x)}$ مجموعة تعريفه $D_f \cap D_g \setminus \{g(x) = 0\}$ ومشتقه $(f/g)' = \frac{f'.g-g'.f}{g^2}$

سلوكه $\lim_{x\to\infty}\big(f(x) \div g(x)\big) = \lim_{x\to\infty} f(x) \div \lim_{x\to\infty} g(x)$

مثال : ليكن لدينا $f(x) = \sqrt{x^2 - x}$ و $g(x) = x - 1$ اوجد D_f وD_g وقاعدة ربط $f \div g$ ومشتق $f \div g$ وسلوك $f \div g$ عند 2

تركيب تابعين: ليكن لدينا التابع f مجموعة تعريفه D_f وقاعدة ربطه $f(x)$ و التابع g مجموعة تعريفه D_g وقاعدة ربطه $g(x)$

$$\underbrace{x \xrightarrow{g} y \xrightarrow{f} z}$$

يمكن ان نعرف تابع $(fog)(x) = f\big(g(x)\big) = f(y) = z$

يسمى تركيب تابعين و مجموعة تعريفه D_g ماعدا قيم $g(x)$ التي تجعل $f(x)$ غير معرف

مثال : ليكن لدينا التابعين $f(x) = x^2 + 1$ و $g(x) = \sqrt{x}$

ملاحظة: بشكل عام ان $fog \neq gof$

مثال: ليكن $f(x) = \frac{1}{x-4}$ و $g(x) = \frac{x-1}{x}$

قواعد النهايات

العملية	الرمز	قاعدة الربط	التعريف	المشتق	السلوك
الجمع	$f+g$	$f(x)+g(x)$	$D_f\cap D_g$	$(f+g)'=f'+g'$	$\lim\limits_{x\to\infty}(f(x)+g(x))=\lim\limits_{x\to\infty}f(x)+\lim\limits_{x\to\infty}g(x)$
الضرب	$f\times g$	$f(x)\times g(x)$	$D_f\cap D_g$	$(f.g)'=f'.g+g'.f$	$\lim\limits_{x\to\infty}(f(x)\times g(x))=\lim\limits_{x\to\infty}f(x)\times\lim\limits_{x\to\infty}g(x)$
قسمة	$\frac{f}{g}$	$\frac{f(x)}{g(x)}$	$D_f\cap D_g$ فرق القيم التي تعدم المقام	$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)'=\frac{f'.g+g'.f}{g^2(x)}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}f(x)}{\lim\limits_{x\to\infty}g(x)}$ اذا كان كثير حدود مقسم على كثير حدود أي $h(x)=\frac{p(x)}{q(x)}$ فان $\lim_{x\to\infty}h(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{\text{المسيطر}}{\text{المسيطر}}$
التركيب	fog	$f(g(x))$	مجموعة تعريف g ما عدا قيم g التي تجعل f غير معرف	$\left(f(g(x))\right)'=g'(x).f'(g(x))$	اذا كانت $\lim_{x\to a}g(x)=b$ و $\lim_{x\to b}f(x)=c$ فان $\lim_{x\to a}f(g(x))=c$

الجمع $+\infty+\infty=+\infty$ و $a+\infty=+\infty$ و $+\infty-\infty=?$

الضرب : $+\infty\times-\infty=-\infty$ و $a\times\infty=\infty$ و $0\times\infty=?$

القسمة: $\frac{\text{عدد}}{\infty}=0$ و $\frac{\infty}{\text{عدد}}=\infty$ و $\frac{\text{عدد}}{0^+}=\infty$ و $\frac{0}{0}=?$ و $\frac{\infty}{\infty}=?$

مثال : احسب النهايات التالية

١ – $\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x}+x\sqrt{x})$ ٢– $\lim_{x\to-\infty}(\sqrt{-x}+x^2)$

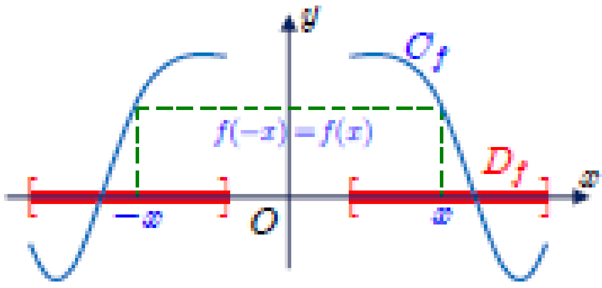
٣ – $\lim_{x\to1^+}\left(\frac{\sqrt{x}-2x}{\sqrt{x-1}}\right)$ ٤ – $\lim_{x\to0}\left(\frac{2}{x^2}+x\right)$

امثلة : اوجد النهايات للتوابع التالية عندأطراف مجموعة التعريف:

١- $f(x) = \frac{2x-3}{\sqrt{x}}$ ٢- $f(x) = \frac{2x-1}{x+1}$

التابع الزوجي والتابع الفردي

١–نقول ان التابع $f(x)$ تابع زوجي اذا كان خطه البياني C_f متناظر بالنسبة لمحور التراتيب



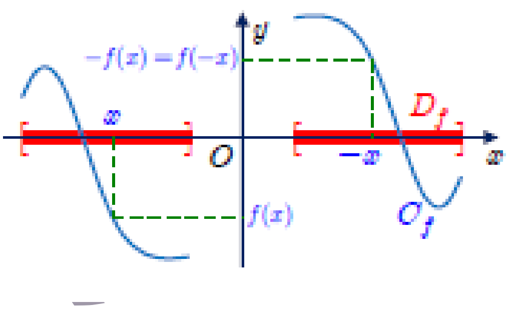
الشرط التحليلي

١– $\forall\ x \in D_f\ \Rightarrow -x \in\ D_f$

٢ – $f(-x) = f(x)$

مثال : اثبت ان التابع التالي زوجي $f(x) = x^2 + cos\ x$

٢ – نقول ان التابع $f(x)$ تابع فردي اذا كان خطه البياني C_f متناظر بالنسبة للمبدأ



الشرط التحليلي ١– $\forall\ x \in D_f\ \Rightarrow -x \in\ D_f$

٢ – $f(-x) = -f(x)$

مثال : اثبت ان التابع $g(x) = x\sqrt{1 + x^2}$ فردي

٣ – نقول ان التابع متناظر بالنسبة للمستقيم $x = a$ اذا حقق

$$\forall\, x \in D_f \;\Rightarrow 2a - x \in\; D_f$$

$$f(2a - x) = f(x)$$

مثال : $f(x) = x^2 - 2x + 1$ متناظر بالنسبة ل $x = 1$

٤ – نقول ان التابع متناظر بالنسبة للنقطة $M(a, b)$ اذا حقق

$$\forall\, x \in D_f \;\Rightarrow 2a - x \in\; D_f$$

$$f(2a - x) = 2b - f(x)$$

مثال : $f(x) = \frac{x-1}{x+1}$ متناظر بالنسبة ل $M(-1,1)$

ادرس زوجية التوابع التالية

$f(X) = \sqrt[3]{x}$ - ٣	$f(X) = \sqrt{x^2}$ - ٢	$f(X) = \sqrt{x}$- ١
$f(x) = cosx + sinx$ - ٦	$f(x) = xsinx$ - ٥	$f(X) = tanx$ - ٤
$f(x) = \left(\cos(2x) - \frac{1}{2}\right)^2$ - ٩	$f(x) = x^2 - x$ - ٨	$f(x) = \|2x\|$ - ٧

القسمة الاقليدية لكثيري حدود

اذا كان لدينا $A(x)$ و $B(x)$ كثيري حدود حيث $degA(x) > degB(x)$ يوجد $Q(x)$ و $R(x)$ حيث $A(x) = Q(x).B(x) + R(x)$ نسمي $A(x)$ المقسوم و $B(x)$ مقسوم عليه و $Q(x)$ صحيح القسمة و $R(x)$ باقي القسمة

مثال : ليكن $A(x) = 2x^4 - 4x^3 + 3x^2 - 2x + 1$ و $B(x) = 2x^2 + 1$ اوجد ناتج وباقي القسمة

قوانين المثلثات

١ – $sin^2 x + cos^2 x = 1$ و $tanx = \frac{sinx}{cosx}$ و $cotx = \frac{\cos x}{\sin x}$

٢ – $sin2x = 2sinx.cosx$ ومنه $sinx = 2sin\frac{x}{2}cox\frac{x}{2}$

٣ – $coc2x = cos^2 x - sin^2 x$

٤ – $cos3x = 4\,cos^3 x - 3cosx$

٥ – $sin\,3x = 3sinx - 4\,sin^3 x$

٦ – $cos^2 x = \frac{1+cos2x}{2}$ و $sin^2 x = \frac{1-cos2x}{2}$

٧ - $\cos x = 1 - 2\sin^2\frac{x}{2}$

٨ - $-1 \le \sin x \le 1$ و $-1 \le \cos x \le 1$

٩ - $0 \le \sin^2 x \le 1$ و $0 \le \cos^2 x \le 1$

١٠ - $1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$ و $1 + \cot^2 x = \frac{1}{\sin^2 x}$

النسب المثلثية لمجموع او طرح زاويتان	دساتير التحويل من جداء الى جمع
١- $\sin(a+b) = \sin a \cdot \cos b + \cos a \cdot \sin b$	١- $\sin a \cdot \sin b = -\frac{1}{2}(\cos(a+b) - \cos(a-b))$
٢- $\sin(a-b) = \sin a \cdot \cos b - \cos a \cdot \sin b$	٢- $\cos a \cdot \cos b = \frac{1}{2}(\cos(a+b) + \cos(a-b))$
٣- $\cos(a+b) = \cos a \cdot \cos b - \sin a \cdot \sin b$	٣- $\sin a \cdot \cos b = \frac{1}{2}(\sin(a+b) + \sin(a-b))$
٤- $\cos(a-b) = \cos a \cdot \cos b + \sin a \cdot \sin b$	٤- $\cos a \cdot \sin b = \frac{1}{2}(\sin(a+b) - \sin(a-b))$

المعادلات المثلثية :

١- المعادلة من الشكل $\cos x = a$ حيث $-1 \le a \le 1$ نبحث عن زاوية شهيرة حيث

$\cos x = \cos\alpha$ بالتالي اما $x = \alpha + 2k\pi$ او $x = -\alpha + 2k\pi$

مثال: حل المعادلة $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$

______________________________ ______________________________

______________________________ ______________________________

______________________________ ______________________________

______________________________ ______________________________

٢- المعادلة من الشكل $\sin x = a$ حيث $-1 \le a \le 1$ نبحث عن زاوية شهيرة حيث

$\sin x = \sin\alpha$ بالتالي اما $x = \alpha + 2k\pi$ او $x = (\pi - \alpha) + 2k\pi$

مثال : حل المعادلة $sinx = \frac{\sqrt{3}}{2}$

٣-المعادلة من الشكل $cosx = siny$ تحول الى $cosx = \cos\left(\frac{\pi}{2} - y\right)$

اما $x = \left(\frac{\pi}{2} - y\right) + 2k\pi$ او $x = -\left(\frac{\pi}{2} - y\right) + 2k\pi$

امثلة : حل المعادلات التالية

١- $\sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}$ على المجال $I = [0, \pi]$

٢- $\sin\left(2x - \frac{\pi}{2}\right) = sin3x$ على المجال $I = [-\pi, \pi]$

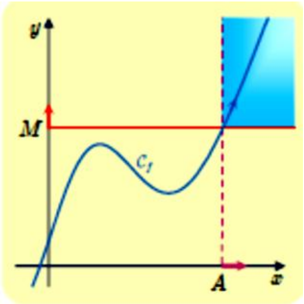
٣- $\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = cosx$ على المجال $I = [0, \frac{\pi}{2}]$

٤- $2sinx - \sqrt{3} = 0$ على المجال $I = [-\pi, \pi]$

تقريب الجذر : $\sqrt{a} = \dfrac{a + \text{اقرب رقم له جذر}}{2\sqrt{\text{اقرب رقم له جذر}}}$ **مثال : قرب الجذور التالية $\sqrt{3}$ و $\sqrt{13}$ و $\sqrt{7}$**

النهايات والاستمرار

١ – سلوك التابع عند اللانهاية : $\lim_{x\to\infty}\begin{cases}\infty\\ l\end{cases}$



١ – نقول ان سلوك التابع عند $+\infty$ هو $+\infty$ ونرمز

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

مهما يكن العدد الحقيقي الموجب M ، يوجد عدد مناسب A حيث :

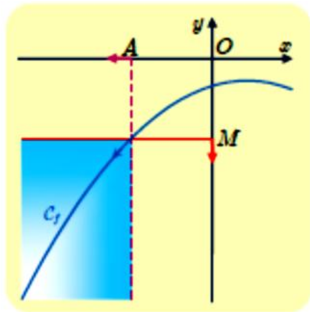
اذا كان $x > A$ فان $f(x) > M$ أي كلما كبر x كبر $f(x)$

مثل : $\lim_{x\to+\infty}(x \,, x^2 \,, \sqrt{x}) = +\infty$

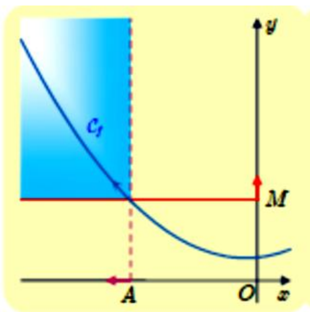
تطبيق : ليكن لدينا التابع $f(x) = \sqrt{x^2+1}$ عين مجموعة التعريف ثم احسب النهاية عند $+\infty$ ثم عين عدد حقيقي A مناسب بحيث اذا كان $x > A$ فان $f(x) > 10^4$

مثال: ليكن لدينا التابع $f(x) = x^2 + 4x + 4$ عين مجموعة التعريف ثم احسب النهاية عند $+\infty$ ثم عين عدد حقيقي A مناسب بحيث اذا كان $x > A$ فان $f(x) > 10^8$

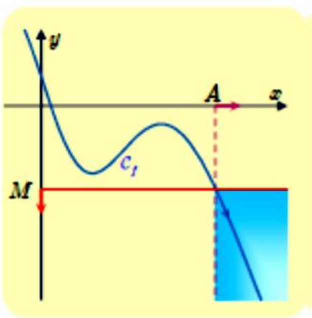
بالمثل نجد الحالات الباقية والرسم المعبر عن كل حالة



$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

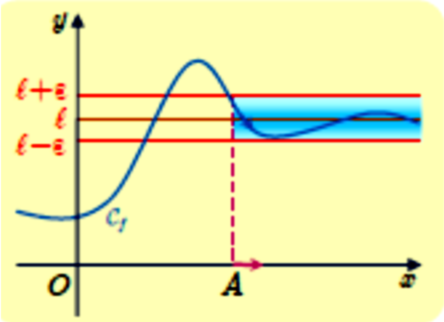


$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$



$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$

٢ – نقول ان سلوك التابع عند $+\infty$ هو l ونرمز $\lim_{x\to+\infty} f(x) = l$ اذا كانت قيم $f(x)$ تصبح قريبة من l اذا كانت x كبيرة بما يكفي كما في الشكل



تحليليا من اجل كل عدد ε يوجد عدد A حيث اذا كان $x > A$ فان $f(x) \in]l-\varepsilon, l+\varepsilon[$

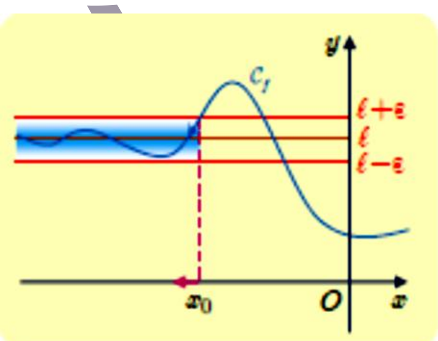
نسمي $y = l$ مقارب افقي ل C_f في جوار $+\infty$

مثل : $\lim_{x\to+\infty}(\frac{1}{x}, \frac{1}{\sqrt{x}}, \frac{1}{x^2}, \frac{1}{x^n}, \ldots) = 0$

تطبيق : ليكن لدينا التابع $f(x) = \frac{5x\pm1}{x-1}$

عين مجموعة التعريف ثم احسب النهاية عند $+\infty$ ثم عين عدد حقيقي A مناسب حيث اذا كان $x > A$ فان $f(x) \in]4.9, 5.1[$

٣ بالمثل نجد $\lim_{x\to-\infty} f(x) = l$ اذا كانت قيم $f(x)$ تصبح قريبة من l اذا كانت x صغيرة بما يكفي كما في الشكل



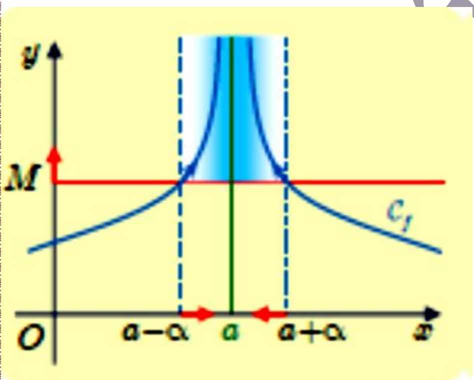
تطبيق: ليكن لدينا التابع $f(x) = \frac{4x-5}{2x+3}$

١ عين مجموعة التعريف ثم احسب النهاية عند $-\infty$ ثم عين عدد حقيقي A مناسب حيث اذا كان $x > A$ فان $f(x)$ ينتمي لمجال مركزه 2 ونصف قطره 0.05

٢ ادرس الوضع النسبي مع هذا المقارب

٢- سلوك التابع عند قيمة : $\lim_{x\to a} \begin{cases} \infty \\ l \end{cases}$

١) نقول ان سلوك التابع عند a هو $+\infty$ ونرمز $\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$ من اجل أي عدد M فان $f(x) > M$ اذا اقتربت x من a بما يكفي كما في الشكل



تحليليا : نقول ان $\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$

$$\forall\ M \in R^+\ \exists\ \alpha > 0 : x \in]a-\alpha, a+\alpha[\Rightarrow f(x) > M$$

نسمي المستقيم $x = a$ مقارب شاقولي للخط البياني

مثال: $\lim_{x\to 0^+} \left(\frac{1}{x}, \frac{1}{\sqrt{x}}, \frac{1}{x^2}, \frac{1}{x^n}, \dots\right) = +\infty$

تطبيق: ليكن لدينا التابع $f(x)=\frac{5x-1}{(x-1)^2}$

عين مجموعة التعريف ثم احسب النهاية عند 1 ثم عين عدد α يحقق اذا $x\in]1-\alpha,1+\alpha[$ مختلفا عن 1 حيث اذا كان $f(x)>10^4$

تطبيق: ليكن لدينا التابع $f(x)=\frac{x}{(x-1)^2}$

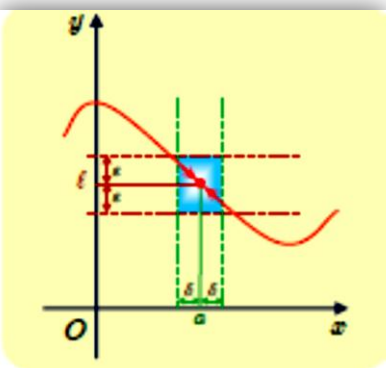
١- عين مجموعة التعريف ثم احسب النهاية عند 1

٢- اوجد مجالا مركزه 1 ويحقق $f(x)>10^6$ ايا كان $x\in I\setminus\{1\}$

٢ نقول ان سلوك التابع عند a هو l ونرمز

$\lim_{x\to a} f(x) = l$ اذا كانت مجموعة القيم $f(x)$ تنتمي

الى مجال مركزه l عندما تقترب x من a بما يكفي كما في الشكل



تطبيق : ليكن لدينا التابع $f(x) = \sqrt{4x+1}$ اوجد مجوعة تعريفه

ثم اوجد $\lim_{x\to 2} f(x)$ ثم عين مجال I مركزه 2 ، اذا كان $x \in I$ فان $f(x) \in]2.99, 3.01[$

تطبيق : ليكن لدينا التابع $f(x)=\frac{x+3}{x-3}$ اوجد مجموعة تعريفه ثم اوجد $\lim_{x\to5} f(x)$ ثم عين مجال I مركزه 5 ، اذا كان $x\in I$ فان $f(x)\in]3.95,4.05[$

امثلة : اوجد نهايات التوابع التالية في جوار $\pm\infty$

١- $f(x)=-3x^4+1$

٢- $f(x)=-x^3+x^2-x+1$

٣- $f(x)=3x^3+2x^2-5x-1$

امثلة : اوجد نهايات التوابع التالية عند اطراف مجموعة التعريف

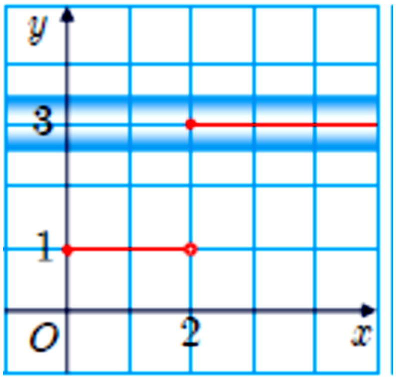
١) $f(x) = \frac{x-3}{x-1}$ ٢- $f(x) = \frac{x^2+2}{x-2}$ ٣- $f(x) = \frac{2x-1}{x+1}$

٤- $f(x) = \frac{x+2}{(x-2)^2}$ ٥ - $f(x) = 3x - 5 + \frac{2}{x+2}$

ملاحظة : ليس بالضرورة ان يملك التبع نهاية عند كل نقطة من مجموعة تعريفه

مثال : ليكن لدينا التابع f المعرف على المجال $I = [0,5]$ بالشكل

$$f(x) = \begin{cases} 1\ , & x \in [0,2[\\ 3\ , & x \in [2,5] \end{cases}$$



١- احسب $f(2)$ و $\lim_{x\to 2^{\pm}} f(x) = +\infty$

٢- هل التابع يملك نهايه في جوار 2

مبرهنة : ان $\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\ ,\ \frac{x}{\sin x}, \frac{x}{\tan x}\right) = 1$

حالات عدم التعين : في الجمع $\infty - \infty+$ في الضرب $0 \times \pm\infty$ في القسمة $\frac{0}{0}$ و $\frac{\infty}{\infty}$

لازالة حالة عدم التعين : اما اخراج عامل مشترك من الحدود او تحليل لبسط والمقام ولاختزال او الضرب والقسمة على المرافق

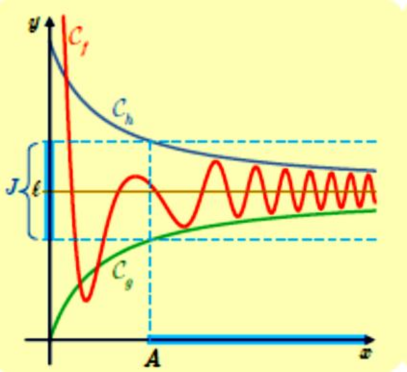
مثال : اوجد نهاية التابع $h: x \to \frac{x^2 - x}{\sin x}$ عند الصفر

مثال : اوجد نهاية التابع $f: x \to \frac{\sqrt{x+1}-1}{x}$ عند الصفر

مثال : اوجد نهاية التابع $f: x \to \frac{\sqrt{x}+x}{x+1}$ عند الصفر

امثلة : احسب نهايات التوابع التالية عند اطراف مجموعة التعريف

$f(x) = \frac{2x^2}{(x-1)(2-x)}$	$f(x) = \frac{2x+1}{x^2-4}$	$f(x) = x^2 - 2 + \frac{1}{(1-x)^2}$	$f(x) = x + \frac{1}{1-x} - \frac{1}{x-2}$
$f(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x}-1}$	$f(x) = x^2 + \sqrt{x} - 1$	$f(x) = \sqrt{x} + \frac{1}{x}$	$f(x) = \frac{x+\sqrt{x}}{x+1}$
$f(x) = \frac{x^2+x-\sqrt{x}}{x^2+1}$	$f(x) = \sqrt{x-1} - \sqrt{x}$		



مبرهنات المقارنة

تفيد في معرفة سلوك تابع انطلاقا من مقارنته بتوابع اخرى

مبرهنة المقارنة الاولى: اذا كان $g(x) \le f(x) \le h(x)$ و كان

$\lim_{x\to\infty}(g(x), h(x)) = l$ فان $\lim_{x\to\infty}(f(x)) = l$

مثال : احسب ? $= \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\sin x}{x}\right)$

تطبيق : ليكن لدينا التابع معرف على $I =]2, +\infty[$ وفق $f(x) = \frac{x+\cos x}{x-2}$

١ – اوجد نهاية f عند $+\infty$

٢ – اعط عدد A اذا كان $x > A$ فان $f(x) \in]0.9, 1.1[$

مبرهنة المقارنة الثانية : اذا كان $|f(x)-l| \leq g(x)$ و كان $\lim_{x\to\infty} g(x)=0$ فان $\lim_{x\to\infty}(f(x))=l$

تطبيق : اذا كان $|f(x)-3| \leq \frac{1}{x+1}$ احسب نهاية $\frac{1}{x+1}$ عند $+\infty$ واستنتج $\lim_{x\to\infty} f(x)$

مبرهنة المقارنة الثالثة : اذا كان $f(x) \leq g(x)$

١ – اذا كان $\lim_{x\to\infty} f(x)=+\infty$ فان $\lim_{x\to\infty} g(x)=+\infty$

٢ – اذا كان $\lim_{x\to\infty} g(x)=-\infty$ فان $\lim_{x\to\infty} f(x)=-\infty$

تطبيق : لثبت ان $x^2-5\sin x \geq x^2-5$ ايا كان العدد الحقيقي x واستنتج من المتراجحة السابقة نهاية $x^2-5sinx$ عند $\pm\infty$

مثال : احسب نهاية التابع $f: x \to x + \cos x$ عند $+\infty$

تابع الجزء الصحيح

هو تابع منطلقه R ومستقره الاعداد الصحيحة أي $E: R \to Z$ حيث يربط كل عدد حقيقي بالعدد الصحيح الاصغر منه مباشرة

أي $E(2.3) = 2$ و $E(0.1) = 0$ و $E(-0.1) = \cdots$ و $E(\pi) = \cdots$ و $E(-3.5) = \cdots$

ملاحظة: لرسم او دراسة الاستمرار او الاشتقاق لكل تابع يحوي في قاعدة الربط تابع جزء صحيح نكتب قاعدة الربط على شكل افرع للتخلص منه

مثال : ليكن لدينا التابع $f(x) = x^2 - E(x)$ المعرف على المجال $I = [0, 2]$

١ – اكتب $f(x)$ بصيغة لا تحوي $E(x)$

٢ – ارسم C_f واوجد نهاية التابع عند x تسعى الى الواحد من الطرفان

ملاحظة : ان $x - 1 < E(x) \leq x$ تفيد هذه الملاحظة في حصر قاعدة الربط التي تحوي تابع جزء صحيح

مثال : ليكن لدينا التابع $f(x) = \frac{E(x)}{x}$ **اوجد النهاية في جوار** $+\infty$

مثال : ليكن لدينا التابع $f(x) = \frac{xE(x)}{1-x^2}$ **اوجد النهاية في جوار** $+\infty$

مثال : ليكن لدينا التابع $f(x) = \frac{\sqrt{x+1}E(x)}{x}$ **اوجد النهاية في جوار** 0^-

مثال : ليكن لدينا التابع $f(x) = \frac{x}{2} + \sin x$ **اوجد نهاية التابع في جوار** $+\infty$ **ثم اوجد قيمة لصورة** 10000

مثال: تابع يحقق $\frac{3x+\cos x}{x} \le f(x) \le \frac{3x+7}{x}$ حيث $x > 1$ اوجد نهاية $f(x)$ عند $+\infty$

مثال : اثبت ان $\frac{-1}{x+1} \le \frac{\cos x}{x+1} \le \frac{1}{x+1}$ ايا كان $x > -1$ واستنتج نهاية $f(x) = \frac{\cos x}{x+1}$ في جوار $\pm\infty$

مثال : ليكن لدينا التابع $f(x) = \sqrt{1+x} - \sqrt{x}$ معرف على مجال $I = [0, +\infty[$

١ – تحقق ان $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x}+\sqrt{x}}$ ايا كان $x \ge 0$

٢ – استنتج ان $\frac{1}{2\sqrt{1+x}} \le f(x) \le \frac{1}{2\sqrt{x}}$ في حالة $x > 0$

٣ – ما نهاية f عند $+\infty$

نهاية تابع مركب

ليكن لدينا التابع $f(x) = (goh)(x) = g\big(h(x)\big)$ اذا كان $\lim_{x\to a} h(x) = b$ و $\lim_{x\to b} g(x) = c$ فان $\lim_{x\to a} f(x) = c$ سواء اذا كانت المقادير a, b, c اعداد منتهية او غير منتهية

مثال : ليكن لدينا التابع $f(x) = \sqrt{x^2 - x + 1}$ اكتبه على شكل تركيب تابعين ثم استنتج النهاية $+\infty$

مثال : ليكن لدينا التابع المعرف $f(x)=\frac{x-3}{x+5}$ حيث $I\in]-5,+\infty[$

١ ــ احسب $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ واستنتج $\lim_{x\to+\infty} f\big(f(x)\big)$

٢ ــ اعد حساب $\lim_{x\to+\infty} f\big(f(x)\big)$ بعد كتابة $f\big(f(x)\big)$ بدلالة x

مثال :نموذج وزاري 2020

ليكن التابع f المعرف بالشكل $f(x)=\frac{2x+1}{x+5}$ على $]-5,+\infty[$

١ ــ احسب $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ واستنتج $\lim_{x\to+\infty} f\big(f(x)\big)$

٢ ــ اوجد عدد حقيقي A حيث، $x>A$ كان $f(x)\in]1.99,2.01[$

مثال : احسب نهاية التوابع التالية

١ - $f(x)=\sqrt{\frac{x+3}{x-5}}$ عند 5

٢ - $f(x)=\sqrt{-x^3+x^2+x}$ عند $-\infty$

٣ - $f(x)=\sqrt{\frac{-x+1}{x^2+1}}$ عند $-\infty$

٤ - $f(x)=\cos\pi x+\frac{1}{(x-1)^2}$ عند 1

٥ - $f(x)=\cos\left(\frac{\pi x+1}{x+2}\right)$ عند $+\infty$

٦ - $f(x)=\sqrt{\frac{2x^2}{1-x}}$ عند $-\infty, 1$

٧ - $f(x)=\left(x-\sqrt{x}+\frac{1}{x}\right)^2$ عند $+\infty$

٨ - $f(x)=\cos^2\left(\pi\times\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\right)$ عند $+\infty$

امين المحمد ٠٩٤٩٣٩٣٢٧٩

المقارب المائل : نقول ان المستقيم $\Delta: y = ax + b$ مقارب مائل للخط C_f في جوار ∞ اذا كان

$\lim_{x\to\infty}\left(f(x) - \underbrace{(ax+b)}_{y_\Delta}\right) = 0$ ولدراسة الوضع النسبي ندرس اشارة $f(x) - \underbrace{(ax+b)}_{y_\Delta}$

مثال : ليكن لدينا التابع $f(x) = \frac{x^2+3x+1}{x+2}$ وليكن $\Delta: y = x + 1$

١ – اثبت ان $\Delta: y = x + 1$ مقارب في جوار $+\infty$

٢ – ادرس الوضع النسبي

ملاحظة: الشرط اللازم ليكون للخط البياني لتابع $f(x)$ مقارب مائل $y = ax + b$ في جوار ∞ هو

١ - $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$ ٢ - $a = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}$ و $b = \lim_{x\to\infty}(f(x) - ax)$

مثال: ليكن لدينا التابع $f(x) = \frac{2x^2+1}{x+3}$ اثبت انه يملك مقارب مائل في جوار $+\infty$ اوجد هذا المقارب

مثال : اثبت ان المستقيم Δ مقارب للخط البياني C_f وادرس الوضع النسبي مع المقارب

١ - $\Delta : y = 2x + 3$ و $f(x) = 2x + 3 + \frac{10}{x+1}$

٢ - $\Delta : y = -x + 1$ و $f(x) = -x + 1 - \frac{1}{x^2}$

٣ - $\Delta : y = x$ و $f(x) = x + \frac{sin}{x}$

٤ - $\Delta : y = 3x + 7$ و $f(x) = 3x + 7 - \frac{5}{\sqrt{|x|}}$

٥ - $\Delta : y = 2x + 1$ و $f(x) = \frac{2x^2-7x-3}{x-4}$

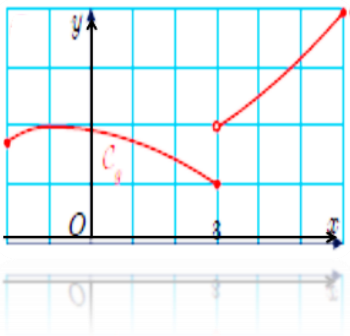
٦ - $\Delta : y = x - 2$ و $f(x) = \frac{x^3-3x-5}{(x+1)^2}$

٧ - $\Delta : y = -x - 4$ و $f(x) = \frac{-x^2-4x+\sin x}{x}$

٨ - $\Delta : y = \frac{1}{2}x + 1$ و $f(x) = \frac{x^2-\frac{5}{2}x+\sqrt{x}+1}{2x+1}$

الاستمرار

١ – نقول ان التابع f مستمر عند $a \in D_f$ اذا كان خطه البياني غير منقطع عند تلك النقطة



نلاحظ في الرسم الاول التابع مستمر عند $x = 2$ لكن غير مستمر عند $x = 3$

٢ – نقول ان التابع f مستمر عند $a \in D_f$ اذا كان

$$\lim_{x \to a^<} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x) = f(a)$$

٣ – نقول ان $f(x)$ مستمر على مجال I اذا كان مستمر عند كل نقطة من نقاطه

ملاحظات :

١ – مجموع او ضرب او قسمة او تركيب تابعين مستمرين هو تابع مستمر عند نقطة من مجموعة التعريف او مجال من مجموعة التعريف

٢ – كل تابع اشتقاقي عند نقطة يكون مستمر عند النقطة او المجال لكن العكس غير صحيح بالضرورة

٣ – التوابع المرجعية مستمرة عند مجموعة تعريفها مثل

١ – التابع $f(x) = \sqrt{x}$ مستمر على $[0, +\infty[$

٢ – التابع كثير الحدود بكل حالاته مستمر على R

٣ – التابع الكسري مستمر على مجموعة تعريفها

٤ – التابعان $f(x) = \begin{cases} \sin x \\ \cos x \end{cases}$ مستمر على R

مثال : اثبت استمرارية التوابع التالية

١ – $f(x) = \sin x + \cos x$ على R

٢ – $f(x) = \sqrt{x^2 + 4x + 5}$ على R بعد كتابته على شكل تركيب تابعين

٣ – $f(x) = cosx + \frac{1}{x}$ على $[0, +\infty[$

تعريف : نقول ان التابع $f(x)$ دوري ودوره d اذا كان $f(x+d)=f(x)$ حيث d اصغر عدد يحقق ذلك ان $\sin x$ و $\cos x$ دوريان ودورهما 2π و $\tan x$ دوره π

مثال : ليكن $f(x)=sinx+\cos x$ اثبت ان دوره 2π

خطوات دراسة تغيرات تابع

١ – ندرس سوك التابع على اطراف مجموعة التعريف

٢ – نشتق التابع وندرس اشارته ونأخذ صور القيم التي تعدم المشتق

٣ – نرتب الخطوات في جدول ونراعي اذا كان المشتق موجب يكون التابع متزايد واذا كان سالب يكون التابع متناقص

٤ – نترجم الخطوات السابقة في رسم بياني يعتمد على الخبرة والممارسة

مثال : ليكن لدينا التابع $f(x) = \frac{2x^2+x+7}{x+1}$ المعرف على $R\backslash\{-1\}$

١ – اوجد نهاية f عند $\pm\infty$

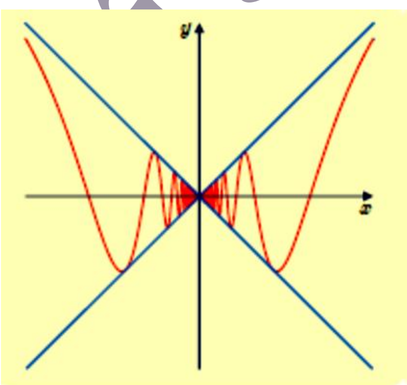
٢ – اثبت ان المستقيم $d: y = 2x - 1$ مقارب مائل وادرس الوضع النسبي مع C_f

٣ – ادرس النهاية عند -1 وماذا تستنتج فيما يتعلق بـ C_f

٤ – ادرس تغيرات f ونظم جدولا بها

٥ – اثبت ان النقطة $I(-1, -3)$ هي مركز تناظر للخط C_f

مثال : ليكن $f(x) = x\sin\frac{1}{x}$ ادرس نهايته عند الصفر



تمرين: ليكن $f(x) = \frac{\cos x - 1}{x^2}$ ادرس النهاية عند الصفر

تمرين: ليكن $f(x) = \frac{\cos 3x - \cos x}{x \sin x}$ ادرس النهاية عند الصفر

تمرين: ليكن $f(x) = \frac{\sin 2x}{\sin 5x}$ ادرس النهاية عند الصفر

تمرين: ليكن $f(x) = \frac{2x + \sin x}{3x + 5}$ ادرس النهاية عند $+\infty$

تمرين: عينه قيمة n ليكون التابع $f(x)=\begin{cases}\frac{\sqrt{x+3}-2}{x-1} & : x\neq 1\\ n & : x=1\end{cases}$ مستمر عند 1

مثال : ليكن f تابع معرف على R

$$f(x)=\begin{cases}x^2\cos\left(\frac{1}{x}\right) & : x\neq 0\\ 0 & : x=0\end{cases}$$

١ – احسب النهاية عند الصفر

٢ – هل التابع مستمر عند الصفر وهل هو مستمر على R علل الاجابة

مثال : ليكن f تابع معرف على R

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-\sqrt{x^2+1}}{x} & : x\neq 0\\ m & : x=0\end{cases}$$

احسب قيمة m ليكون التابع مستمر عند الصفر

تمرين : اوجد مجموعة تعريف التوابع وادرس النهايات

١) $f(x)=x^2+3x-\frac{1}{x+3}$	٢) $f(x)=(2x-3)(5-\sqrt{x})$	٣) $f(x)=cosx+\frac{1}{x}$
٤) $f(x)=x-2\sqrt{x}+3$	٥) $f(x)=\sqrt{x^2+1}+x$	٦) $f(x)=2x+\sin x$

تمرين : ليكن $f(x)=\frac{2x+1}{x-1}$ اوجد مجموعة التعريف وادرس النهاية واكتب معادلة المقاربات وعين الوضع النسبي مع المقارب الافقي

تمرين : ليكن لدينا التابع $f(x)=\frac{2x+\sin x}{x-1}$

١ ـ اثبت ان $\frac{2x+1}{x-1}\geq f(x)\geq\frac{2x-1}{x-1}$ حيث $x>1$

٢ ـ استنتج نهاية $f(x)$ عند $+\infty$

تمرين: ليكن $f(x) = \frac{sin3x}{x}$ ادرس النهاية عند الصفر

تمرين : ليكن $f(x) = \frac{x^2-4x-12}{x^2-4}$ ادرس النهاية على اطراف مجموعة التعريف

تمرين : ليكن $f(x)=\frac{2x^3-x^2-1}{x^2-x-2}$ ادرس النهاية على اطراف مجموعة التعريف

تمرين : ليكن $f(x)=\frac{x^4-1}{x^3-1}$ ادرس النهاية على اطراف مجموعة التعريف

تمرين : ليكن $f(x)=2x+\sin^2 x$ ادرس النهاية على اطراف مجموعة التعريف

تمرين : ليكن $f(x)=\frac{\sqrt{x-1}}{x-1}$ ادرس النهاية على اطراف مجموعة التعريف

تمرين : ليكن $g(x)=\frac{1}{3+2sinx}$ المعرف على R

١ ــ لثبت ان $g(x)$ محدود

٢ ــ استنتج $\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{3+2\sin x}$ واستنتج $\lim_{x\to\infty}\frac{x+sinx}{3+2sinx}$

تمرين : ليكن $f(x)=\frac{3x^2+6x}{x^2-x-2}$ عين مجموعة التعريف

١ – اوجد الاعداد a, b, c حيث $f(x)=a+\frac{b}{x+1}+\frac{c}{x-2}$

٢ – ادرس سلوك التابع على اطراف مجموعة التعريف

تمرين : ادرس نهاية التوابع

١) $f(x) = \sqrt{x+1} - 2x$ $\quad x = +\infty$	٢) $f(x) = \frac{-x+\sqrt{x}}{x-1}$	٣) $f(x) = \frac{\sqrt{x+1}-2}{x-3}$
٤) $f(x) = \frac{x\sqrt{x}-8}{x^2-16}$ $\quad x = 4$	٥) $f(x) = \frac{\sin x}{\sqrt{x}}$	٦) $f(x) = \frac{x \sin x}{1-cosx}$ عند 0
٧) $f(x) = \frac{\sqrt{2x+3}-3}{x-3}$ $\quad x = 3$	٨) $f(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x^2-1}}$	٩) $f(x) = \sqrt{4x^2+x} + 2x$
١٠) $f(x) = \frac{5\sqrt{x}-x\sqrt{5}}{x\sqrt{x}-5\sqrt{5}}$ $\quad x = 5$	١١) $f(x) = \frac{sin2x}{\sqrt{x}}$	٢١) $f(x) = \frac{2-\sqrt{3x-2}}{\sqrt{2x+5}-3}$ $\quad x = 3$

تمرين : ليكن $g(x)=\frac{3x-1}{x-3}$ معرف على $]3,+\infty[$

١ ــ احسب $\lim_{x\to+\infty} g(x)$ واستنتج $\lim_{x\to+\infty} g(g(x))$

٢ ــ اعد حساب $\lim_{x\to+\infty} g(g(x))$ بعد كتابة $g\left(g(x)\right)$ بدلالة x

تمرين : ليكن C الخط البياني للتابع f حيث $f(x)=ax+b+\frac{c}{x-d}$ اوجد الاعداد a,b,c,d علما ان الخواص التالية محققة

١ ــ المستقيم الشاقولي $x=3$ مقارب لـ C

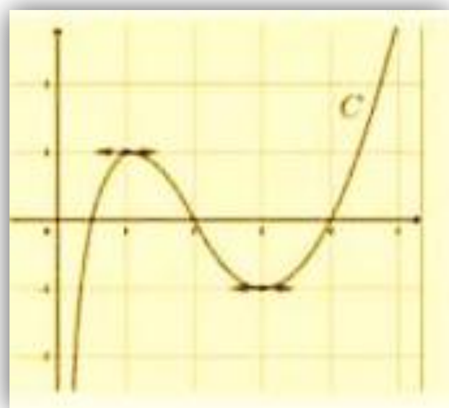
٢ ــ المستقيم المائل $y=2x-5$ مقارب للخط C في جوار ∞

٣ ــ النقطة $A(1,2)\in C_f$

الخط البياني وتطبيقاته (قراءة الخط البياني)

١- مجموعة التعريف: ناخذ مسقط الخط على محور الفواصل
٢ – المستقر الفعلي : ناخذ مسقط الخط على محور التراتيب
٣ – لحل المعادلة : $f(x) = b$ نرسم المستقيم $y = b$ وناخذ فواصل نقاط تقاطع المستقيم مع الخط البياني
٤ - لحل المتراجحة : $f(x) < b$ نرسم المستقيم $y = b$ وناخذ على محور الفواصل مسقط الخط الذي هو تحت المستقيم $y = b$
٥ - لحل المتراجحة : $f(x) > b$ نرسم المستقيم $y = b$ وناخذ على محور الفواصل مسقط الخط الذي هو فوق المستقيم $y = b$

مثال :ليكن C الخط البياني الجانبي



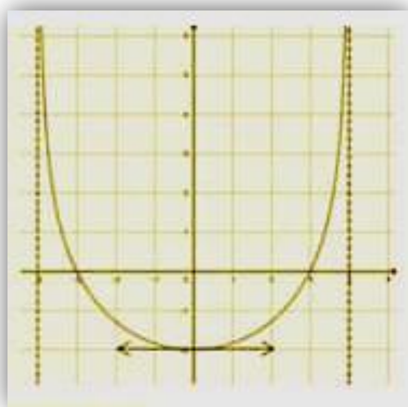
١ – عين مجموعة تعريف التابع

٢ – عدد حلول المعادلة $f(x) = -1$

٣ – حلول المتراجحة $f(x) \leq 0$

٤ – صورة المجال $]1,3[$

٦ – صورة نقطة a نرسم المستقيم شاقولي $x = a$ وناخذ ترتيب نقطة التقاطع
٧ – سلوك التابع $x \to +\infty$ اذا كان هناك مقارب افقي في هذه الجهة عندئذ $\lim_{x\to\infty} f(x) = l$ واذا لم يكن هناك مقارب افقي فان $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$
٨ - سلوك التابع $x \to a$ اذا كان هناك مقارب شاقولي $x = a$عندئذ $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$ واذا لم يكن هناك شاقولي فان $\lim_{x\to a} f(x) = b$
٩ – اذا كان التابع متناظر بالنسبة لمحور التراتيب يكون تابع زوجي واذا كان متناظر بالنسبة للمبدأ يكون فردي



مثال : ليكن التابع الذي خطه البياني بالشكل

١ – عين مجموعة التعريف

٢ - اوجد $\lim_{x\to 4^{<}} f(x)$ و $\lim_{x\to -4^{+}} f(x)$

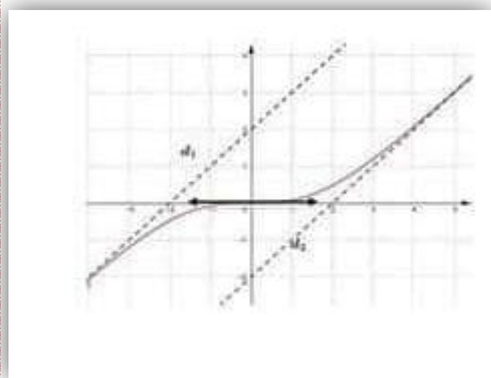
٣ – اوجد حلول المعادلة $f(x) = 0$

٤ – اوجد $f(3)$

٥- هل التابع زوجي

١٠ – اذا طلب $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}$ فيكون هناك مقارب مائل وتكون النهاية هي ميل المقارب المائل

ملاحظة : معادلة مستقيم علم ميله ونقطة منه هي $(y - y_0) = m(x - x_0)$ ومعادلة مستقيم علم منه نقطتان نحسب الميل $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ ثم نطبق المعادلة السابقة



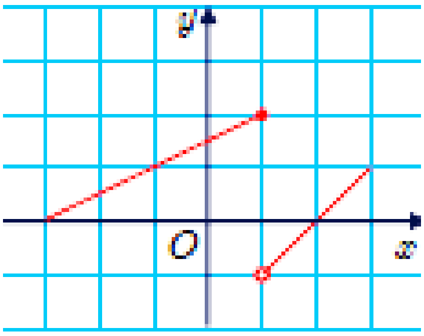
مثال : الشكل الجانبي يمثل خط بياني لتابع والمستقيمان d_1 و d_2 مقاربان مائلان والمطلوب

١ – احسب $\lim_{x\to +\infty} f(x)$ و $\lim_{x\to -\infty} f(x)$

٢ – اكتب معادلة المقارب المائل في جوار $+\infty$ ثم $-\infty$

٣ – استنتج $\lim_{x\to +\infty} \frac{f(x)}{x}$ ثم $\lim_{x\to -\infty} \frac{f(x)}{x}$

٤ – هل التابع زوجي ام فردي



مثال: الشكل الجانبي يمثل خط بياني لتابع

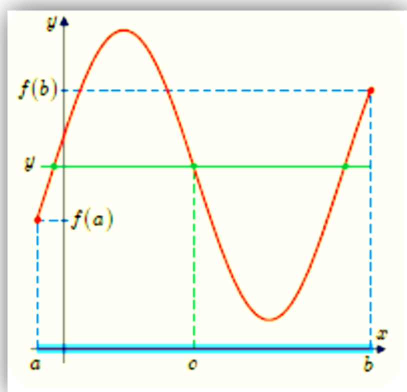
١ – عين مجموعة تعريف التابع وهل التابع مستمر عليها

٢ – اوجد $\lim_{x\to 1^{<}} f(x)$ و $\lim_{x\to 1^{>}} f(x)$

٣ – حل المتراجحة $f(x) > 1$

٤ – ناقش حلول المعادلة $f(x) = k$

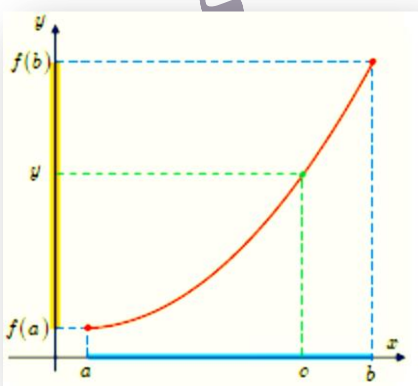
الاستمرار وحل المعادلات (مبرهنة القيمة الوسطى)



١ – اذا كان $f(x)$ تابع معرف ومستمر على $I = [a,b]$

بالتالي مهما يكن $y \in f(I)$ فان للمعادلة $f(x) = y$ حل

على الاقل في I كما في الشكل



٢ – اذا كان $f(x)$ تابع معرف ومستمر و مطرد تماما

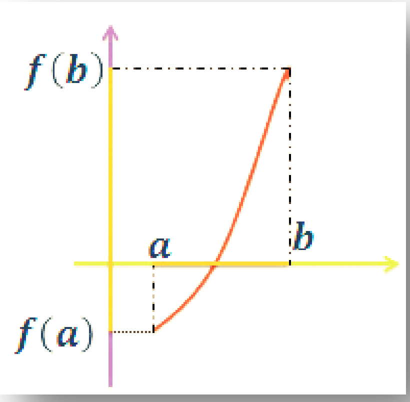
على $I = [a,b]$ بالتالي مهما يكن $y \in f(I) = [f(a), f(b)]$ فان للمعادلة $f(x) = y$ حل فقط في I

كما في الشكل

٣ – اذا كان $f(x)$ تابع معرف ومستمر و مطرد تماما

على $I = [a,b]$ وكان $f(a).f(b) < 0$ فان للمعادلة

$f(x) = 0$ حل فقط في I كما في الشكل



مثال : ليكن لدينا التابع $f(x) = x^3 - 2x^2 - 1$

١ – ادرس تغيرات التابع على R

٢ – اثبت ان للمعادلة $f(x) = 0$ تقبل حل وحيد c على المجال $[2,3]$

مثال : ليكن لدينا جدول التغيرات لتابع $f(x)$

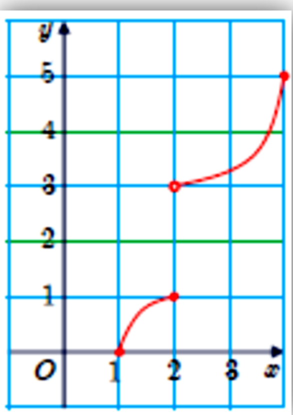
١ – عين مجموعة التعريف وما هي

$\lim_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim_{x\to-\infty} f(x)$

٢ – ما عدد حلول المعادلة $f(x) = 0$

٣ – ما عدد حلول المعادلة $f(x) = -1$

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-2	$\nearrow$	4	$\searrow$	3



مثال : ليكن لدينا التابع الذي خطه البياني بالشكل

١ – عين مجموعة التعريف

٢ – اوجد $\lim_{x\to 2^-} f(x)$ و $\lim_{x\to 2^+} f(x)$

٣ – اوجد حل المعادلة $f(x) = 2$ و $f(x) = 1$

٤ – احسب $f([2,4])$ وحل المتراجحة $f(x) < 2$

مثال : ليكن لدينا التابع $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$

١ – ادرس تغيرات ونظم جدول بها

٢ – اثبت ان للمعادلة $f(x) + 1 = 0$ ثلاث حلول في R

مثال : ليكن لدينا التابع $f(x) = \frac{1}{x-1}$ معرف على $I = [2, 3]$

١ – ادرس تغيرات ونظم جدول بها واحسب $f(I)$ وارسم C_f

٢ – ما عدد حلول المعادلة $f(x) = \frac{3}{4}$ في I

مثال : ليكن لدينا التابع $f(x) = 1 + 3x - x^3$

١ – ادرس تغيرات ونظم جدول بها

٢ ـ اثبت ان للمعادلة $f(x) = 0$ ثلاث حلول فقط كل حل ضمن المجال $[1, 2]$ و $[-1, 1]$ و $[-2, -1]$

مثال : نتأمل التابع المعرف على R $f(x) = x - cosx$

١) احسب $f(0)$ و $f\left(\frac{\pi}{2}\right)$ واستنتج وجود عدد حقيقي α يحقق $f(\alpha) = 0$

٢) اشرح لماذا كل حل للمعادلة $f(x) = 0$ يجب ان ينتمي للمجال $[-1, 1]$

٣) استنتج ان كل حل للمعادلة $f(x) = 0$ ينتمي للمجال $]0, 1[$

٤) برهن ان التابع $f(x) = x - cosx$ متزايد تماما على المجال $]0, 1[$ واستنتج ان للمعادلة $f(x) = 0$ حل حقيقي وحيد α ينتمي للمجال $]0, 1[$

تمرين : ليكن $f(x)=\sqrt{x^2+4x+5}$ المعرف على R

١ – احسب $\lim_{x\to+\infty} f(x)$

٢ – a) اكتب ثلاثي الحدود x^2+4x+5 بالصيغة القانونية

b) استنتج وجود مقارب مائل للخط C_f في جوار $+\infty$ اكتب معادلته

مثال : ليكن $f(x)=x+\sqrt{x^2+1}$

١ – ادرس نهاية f عند $-\infty$ اشرح التأويل الهندسي

٢ – اثبت ان $\Delta: y=2x$ مقارب مائل في جوار $+\infty$

٣ – ادرس الوضع النسبي بين C_f و Δ

مثال : ليكن $f(x) = x + \sqrt{|4x^2 - 1|}$

١ ــ اكتب $f(x)$ بدون قيمة مطلقة وادرس النهاية عند $\pm\infty$

٢ ــ احسب $\lim_{x\to+\infty}(f(x) - 3x)$ و $\lim_{x\to-\infty}(f(x) + x)$

٣ ــ استنتج وجود مقاربين مائلين

تمرين : ليكن $f(x)=\sqrt{4x^2-4x+3}$ المعرف على R

١ – احسب $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)$

٢ – a) اكتب ثلاثي الحدود $4x^2-4x+3$ بالصيغة القانونية

b) ادرس نهاية التابع $h(x)=f(x)-\sqrt{(2x-1)^2}$ عند $\pm\infty$

c) استنتج ان للخط مقاربين مائلين واوجد معادلتهما

٣ – استنتج ان C فوق المقاربين

مثال : ليكن $f(x) = x + \frac{x}{\sqrt{x^2+9}}$

١ - a) اثبت ان المستقيم الذي معادلته $\Delta: y = x + 1$ مقارب في جوار $+\infty$

b) ادرس الوضع النسبي للمقارب و C

٢ – اصحيح ان المستقيم $\Delta': y = x - 1$ مقارب في جوار $-\infty$

مثال : ليكن $f(x) = x^2 - 2x - 3$ **حيث** $I = [0, 3]$

١ – ادرس التغيرات ونظم جدول بها

٢ – استنتج قيم x التي تحقق $f(x) = 0$

٣ – عين $f([0, 3])$

مثال : $f(x)=1-\frac{1}{x^2+1}$ معرف على R اثبت انه مستمر على R وعين $f(R)$

مثال : ليكن لدينا التابع $f(x)=x-E(x)$ معرف على المجال $[0,2]$

١ ـ اكتب $f(x)$ بعبارة مستقلة عن $E(x)$ وارسم الخط البياني

٢ ـ هل f مستمر على $[0,2]$

مثال : ليكن لدينا التابع $f(x)=E(x)+\left(x-E(x)\right)^2$ معرف على المجال $[0,2]$

١ ـ اكتب $f(x)$ بعبارة مستقلة عن $E(x)$

٢ ـ اثبت ان f مستمر على $[0,2]$

مثال دورة 2023 : ليكن لدينا التابع $f(x) = x + 2 - E(x)$ معرف على المجال $[0,2[$

١ – اكتب $f(x)$ بعبارة مستقلة عن $E(x)$

٢ – ادرس استمرارية f عند $x = 1$ وهل f مستمر على $[0,2[$

مثال: (تطبيق مبرهنة قيمة وسطى) ليكن f تابع مستمر ومعرف على المجال $I = [0,1]$ ويحقق $f(x) \in I$ ايا كان $x \in I$ نرمز ب k الى التابع المعرف على I بالشكل $k(x) = f(x) - x$ بتطبيق مبرهنة القيمة الوسطى على التابع K اثبت وجود عدد حقيقي a من I يحقق $f(a) = a$

مثال : ليكن f تابع مستمر واشتقاقي على $I[0,1]$ ويحقق

ايا كان $x \in I$ كان $f(x) \in I$ وايا كان $x \in]0,1[$ كان $f'(x) < 1$

اثبت ان للمعادلة $f(x) = x$ حلا وحيدا في I

مثال : ليكن $f(x) = sinx$ معرف ومستمر على $[0,\pi]$ و d مستقيم معادلته $y = \frac{1}{2}x$

١- a) ارسم كلا من d و C حيث $\pi = 3.1$ و $\frac{\pi}{2} = 1.6$

b) يبدو ان للمعادلة $\sin x = \frac{1}{2}x$ حل وحيد a في المجال $]0,\pi]$ استفد من الرسم لمعرفة مجال صغير يحوي a

٢- لنأخذ $g(x) = sinx - \frac{1}{2}x$ حيث $D_g[0,\pi]$

a) احسب $g'(x)$ واثبت ان $g'(x)$ ينعدم عند $x = \frac{\pi}{3}$

b) نظم جدولا بتغيرات $g(x)$

٣- استنتج مما سبق ان $sinx = \frac{1}{2}x$ تقبل حل وحيد a على المجال $]0,\pi]$

استنتاج خط بياني من خط اخر مدروس ومرسوم

ليكن $f(x)$ تابع خطه البياني C_f وليكن $g(x)$ تابع يحقق

١) $g(x) = f(-x)$ فان C_g نظير C_f بالنسبة لمحور التراتيب او $g(x) - f(-x) = 0$

٢) $g(x) = -f(x)$ فان C_g نظير C_f بالنسبة لمحور الفواصل او $g(x) + f(x) = 0$

٣) $g(x) = -f(-x)$ فان C_g نظير C_f بالنسبة للمبدأ او $g(x) + f(-x) = 0$

٤) $g(x) = f(x) + b$ فان C_g ينتج عن انسحاب C_f وفق الشعاع $\vec{u}(0, b)$

٥) $g(x) = f(x + a)$ فان C_g ينتج عن انسحاب C_f وفق الشعاع $\vec{u}(a, 0)$

٦) $g(x) = f(x + a) + \mathrm{b}$ فان C_g ينتج عن انسحاب C_f وفق الشعاع $\vec{u}(a, \mathrm{b})$

٧) اذا كان $g(x) = |f(x)|$ فان C_g ينتج عن C_f بتبديل كل ترتيب سالب بمعكوسه

٧) اذا كان $g(x) = f(|x|)$ فان C_g ينتج عن C_f بتبديل كل فاصلة سالبة بمعكوسها

مثال: ليكن التابع $f(x) = x + sinx$ المعرف على $I[0, \pi]$

١ – ادرس التغيرات ونظم جدول وارسم C_f

٢ – استنتج C_g حيث $g(x) = -x - \sin(x)$

مثال: ليكن التابع $f(x) = x^3 - 3x + 1$ المعرف على R

١ – ادرس التغيرات ونظم جدول وارسم C_f

٢ – استنتج C_g حيث $g(x) = -x^3 + 3x + 1$

٣ - استنتج C_h حيث $h(x) = -x^3 + 3x - 1$

٤ - استنتج C_l حيث $l(x) = x^3 - 3x - 1$

٥ - استنتج C_k حيث $K(x) = (x+1)^3 + 3(x+1) + 1$

الاشتقاق

تعريف :ليكن $f(x)$ تابع معرف على D نسمي المقدار $h(x)=\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ معدل التغير للتابع عند النقطة a

تعريف: نقول ان التابع $f(x)$ قابل للاشتقاق عند النقطة $a\in D_f$ اذا كانت $\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=l$ ونسمي l العدد المشتق عند $x=a$ ونرمز له $f'(a)=l$ اما اذا كانت $\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\infty$ فان التابع غير قابل للاشتقاق عند هذه النقطة

مثال : ليكن $f(x)=\sqrt{x}$ ادرس قابلية الاشتقاق عند الصفر والواحد

مثال : ادرس قابلية الاشتقاق عند الصفر للتابع $f(x)=x\sqrt{x}$

تعريف : التابع الذي ينقل كل نقطة من D_f الى عددها المشتق هو التابع المشتق وهناك مبرهنات لإيجاد التابع المشتق نلخص اهمها في الجدول

التابع	المشتق	ملاحظة
$f(x) = c$	$f'(x) = 0$	
$f(x) = ax + b$	$f'(x) = a$	
$f(x) = x^n$	$f'(x) = nx^{n-1}$	$n \in Z^*$
$f(x) = \sqrt{x}$	$f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$x \in]0, \infty[$
$f(x) = sinx$	$f'(x) = cosx$	$x \in R$
$f(x) = cosx$	$f'(x) = sinx$	$x \in R$
$f(x) = tanx$	$f'(x) = 1 + \tan^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$	

مبرهنة :

$(u+v)' = u' + v'$ و $(u.v)' = u'v + v'u$ و $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$ و $(ku)' = ku'$

امثلة :اوجد مشتقات التوابع التالية

١ – $f(x) = \frac{1}{x^2+x+1}$	٢ – $f(x) = x^2 cosx$
٣ – $f(x) = \frac{x^2+x+2}{x^2+x}$	٤ – $f(x) = \frac{2}{3}x^2 - \frac{1}{2}x^2 + x - \frac{\sqrt{2}}{3}$
٥ – $f(x) = x^4 - 2x\sqrt{x}$	٦ – $f(x) = \frac{2}{x+1} - x$
٧ – $f(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x}}$	٨ – $f(x) = sinxcosx$
٩ – $f(x) = \frac{sinx}{cosx}$	١٠ – $f(x) = \frac{cosx}{sinx-1}$

مبرهنة: مشتق التركيب اذا كان $f(x)$ تابع معرف وقابل للاشتقاق على I و $g(x)$ معرف واشتقاقي على J حيث $\forall x \in I \Longrightarrow f(x) \in J$ بالتالي يمكن تركيب التابعين $h(x) = g\big(f(x)\big)$ ويكون قابل للاشتقاق على I حيث $h'(x) = f'(x)g'\big(f(x)\big)$

التابع	المشتق	ملاحظة
$f(x) = \sqrt{g(x)}$	$f'(x) = \dfrac{g'(x)}{2\sqrt{g(x)}}$	حيث $g(x) > 0$
$f(x) = \big(u(x)\big)^n$	$f'(x) = nu'(x)\big(u(x)\big)^{n-1}$	$n \in N$
$f(x) = \sin\big(g(x)\big)$	$f'(x) = g'(x)\cos\big(g(x)\big)$	
$f(x) = \cos\big(g(x)\big)$	$f'(x) = -g'(x)\sin\big(g(x)\big)$	

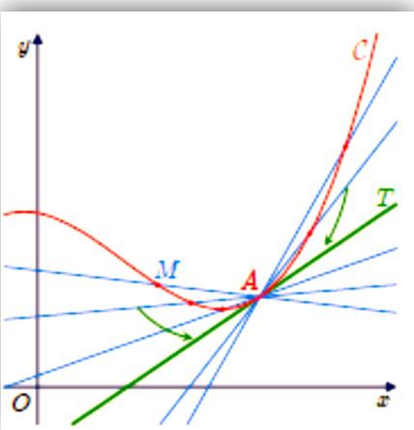
مثال : اوجد مشتقات التوابع التالية

١ - $f(x) = cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$	٢ - $f(x) = sin\left(\frac{1}{x}\right)$	٣ - $f(x) = (x^2+1)^3$
٤ - $f(x) = \sqrt{x^2+2x+3}$	٥ - $f(x) = (2x^3-1)^5$	٦ - $f(x) = \sqrt{cosx}$
٧ - $f(x) = tan3x$	٨ - $f(x) = \left(\frac{x+1}{x+2}\right)^3$	٩ - $f(x) = x\sqrt{x^2+1}$
١٠ - $f(x) = \sqrt{\frac{x+1}{x-2}}$	١١ - $f(x) = \frac{sin^2 x}{cos^3 x}$	$f(x) = tan^2 x$

مثال : ليكن لدينا التابع $f(x) = cos\sqrt{x}$ اوجد مجموعة التعريف واثبت انه قابل للاشتقاق على $]0, +\infty[$ واوجد تابعه المشتق ثم ادرس قابلية الاشتقاق على المجال $[0, +\infty[$

تطبيقات الاشتقاق

١ – ان قيمة المشتق الاول عند $x = a$ هو ميل المماس للخط C_f عند النقطة $M(a, f(a))$
أي معادلة المماس هي $T: y = f'(a)(x - a) + f(a)$

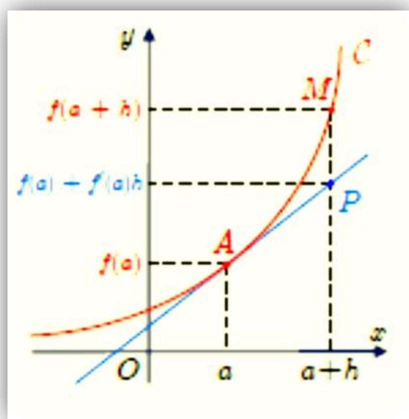


اذا كان C_f هو الخط البياني لـ f ولنأخذ المستقيمات المارة
$A(a, f(a))$ و $M(x, f(x))$ ان ميل AM هو $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$
ولكن عندما $x \longrightarrow a$ يصبح ميل المستقيم AM (مماس)هو
العدد المشتق

مثال: اكتب معادلة المماس للتابع $f(x) = \frac{1}{x+1}$ و التابع $g(x) = \sqrt{2x+1}$في النقطة
التي فاصلتها $x = 4$

----

٢ - التقريب التآلفي (الخطي) :في هذه الفقرة حساب الصورة للنقطة يكون صعب فنستبدل الصورة بالمماس عند اقرب نقطة



نلاحظ في جوار النقطة $A(a, f(a))$ يكون المماس قريبا جدا من C_f بالتالي يمكن ان نستبدل $f'(a)h + f(a)$ بـ $f(a+h)$ أي $f(a+h) = f'(a)h + f(a)$

مثال : $f(x) = sinx$

١ – احسب $f(0)$ واوجد $f'(x)$ و $f'(0)$

٢ – اكتب معادلة المماس عند $x = 0$

٣ – استنتج التقريب التآلفي لـ 0.1

مثال : $f(x) = tanx + cosx$

١ – احسب $f(0)$ واوجد $f'(x)$ و $f'(0)$

٢ – اكتب معادلة المماس عند $x = 0$

٣ – استنتج التقريب التآلفي لـ 0.1

٣- دراسة الاطراد :اذا كان $f(x)$ اشتقاقي على I ومشتقه $f'(x)$

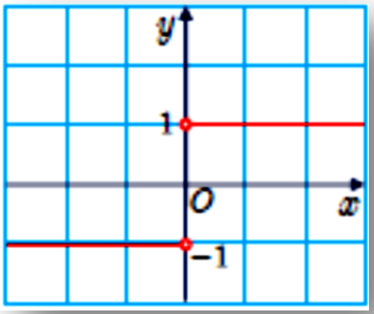
١ – اذا كان $f'(x) > 0 \Leftrightarrow f(x)$ متزايد تماما

٢ – اذا كان $f'(x) < 0 \Leftrightarrow f(x)$ متناقص تماما

٣ - اذا كان $f'(x) = 0 \Leftrightarrow f(x)$ ثابت

مثال : ليكن لدينا التابع $f(x)=x^3-3x+5$ ادرس تغيرات التابع ونظمها في جدول ولثبت ان للمعادلة $f(x)=0$ حل وحيد ضمن المجال $]-3,-2[$

ملاحظة : في الفقرة السابقة ذكرنا ان I هو مجال وليس اجتماع مجالات



مثال : ليكن $f(x) = \begin{cases} -1\ ; x < 0 \\ 1\ ; x \geq 0 \end{cases}$ نلاحظ ان

$f'(x) = 0$ ولكن $f(1) \neq f(-1)$ أي $f(x)$ غير ثابت

٤ – الاستفادة من معدل التغير لإيجاد النهاية

مثال : ليكن $f(x) = \tan x$

١ – احسب $f\left(\frac{\pi}{4}\right)$ و $f'(x)$ و $f'\left(\frac{\pi}{4}\right)$

٣ – استنتج نهاية التابع $h(x) = \frac{\tan x - 1}{x - \frac{\pi}{4}}$ عند $x = \frac{\pi}{4}$

القيم الحدية محليا

القيمة الكبرى محليا : نقول ان $f(a) = M$ قيمة حدية كبرى محليا على المجال I اذا وجد مجال مفتوح J حيث $\forall x \in I \cap J \Rightarrow f(x) < f(a)$

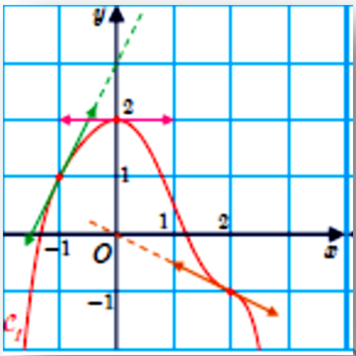
القيمة الصغرى محليا : نقول ان $f(b) = m$ قيمة حدية صغرى محليا على المجال I اذا وجد مجال مفتوح J حيث $\forall x \in I \cap J \Rightarrow f(x) > f(b)$

مثال: رسم دورة

ملاحظة: اذا كانت $f(a)$ قيمة حدية فان قيمة المشتق معدومة أي $f'(a) = 0$

اذا كانت $f'(a) = 0$ وغير اشارته فان $f(a)$ قيمة حدية

مثال : في الشكل المرافق C_f خط بياني للتابع تامل الشكل واجب يا محترم



١- $\lim_{x \to \pm\infty} f(x)$

٢- عين $f(0)$ و $f(2)$ و $f(-1)$ و $f'(0)$ و $f'(2)$ و $f'(-1)$

٣- ما عدد حلول المعادلة $f(x) = 0$

٤- حل المتراجحة $f'(x) > 0$

٥ – اكتب جدول تغيرات التابع

ملاحظة : عندما نقول ان التابع اشتقاقي على مجموعة D هذا لا يعني انه اشتقاقي عند هذه المجموعة فقط مثلا $f(x) = x\sqrt{x}$ هو اشتقاقي على المجموعة $[0, +\infty[$ ولاكن هو اشتقاقي عند الصفر

مثال : ادرس قابلية الاشتقاق عند الصفر

١ - $f(x) = x^2\sqrt{x}$ ٢ - $f(x) = x|x|$ ٣ - $f(x) = \frac{x^2+|x|}{x^2+1}$

مثال : ليكن $f(x) = \begin{cases} x^2 \cos\frac{1}{x} : x \neq 0 \\ 0 \;;\; x = 0 \end{cases}$

١ - هل التابع قابل للاشتقاق عند الصفر

٢ – اوجد التابع المشتق على R^*

المشتقات من المراتب العليا

اذا كان $f(x)$ اشتقاقي على I فان المشتق الاول $f^{(1)}(x) = f'(x)$

اذا كان $f'(x)$ اشتقاقي على I فان المشتق الثاني $\left(f^{(1)}(x)\right)' = \left(f'(x)\right)' = f^{(2)}(x)$ ومنه

المشتق من المرتبة n هو $f^{(n)}(x) = \left(f^{(n-1)}(x)\right)'$

تطبيق : في كل حالة احسب المشتقات من المرتبة 1 و 2 و 3

١ - $f(x) = cos2x + sin2x$	٢ - $f(x) = \frac{1}{cosx}$
٣ - $f(x) = x\sqrt{x}$	٤ - $f(x) = x^3 - \frac{1}{2}x^2 + x - 1$

دراسة تابع مثلثي

اذا كان التابع دوري ودوره d وكان فردي او زوجي عندئذ يمكن دراسته على المجال $[0,\frac{d}{2}]$

مثال: ليكن التابع $f(x) = 2sinx + sin2x$ المعرف على R

١ ــ اثبت ان التابع دوري ودوره 2π

٢ ــ اثبت ان التابع فردي واستنتج انه يمكن دراسته على المجال $[0,\pi]$

٣ ــ ادرس تغيرات التابع على المجال $[0,\pi]$ وارسم خطه البياني

٤ ــ استنتج الرسم على المجال $[-\pi,\pi]$

مثال : ليكن $f(x) = tanx$

١- اكتب مجموعة التعريف واثبت انه فردي ودوري دوره π

٢- استنتج انه تكفي دراسته على المجال $[0,\frac{\pi}{2}[$ وادرس التغيرات

٣- ارسم C_f واستنتج C_g حيث $g(x) = \tan(-x)$

معادلة نصف المماس

تعريف : اذا كانت النقطة $x = a$ تنتمي الى طرفين من مجموعة التعريف وكانت

١- $\lim_{x\to a^-} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = l$ بالتالي التابع قابل للاشتقاق من اليسار ومعادلة نصف المماس من اليسار هي $y = l(x-a) + f(a)$

٢- $\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = l'$ بالتالي التابع قابل للاشتقاق من اليمين ومعادلة نصف المماس من اليمين هي $y = l'(x-a) + f(a)$

٣- اذا كان $l = l'$ فان التابع قابل للاشتقاق و $f'(a) = l$ ومعادلة المماس $y = f'(a)(x-a) + f(a)$

٤- اذا كان $\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \infty$ التابع يملك مماس شاقولي عند $x = a$

٥- اذا كان $\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = 0$ التابع يملك مماس عند $x = a$

تطبيق : ليكن لدينا التابع $f(x) = \frac{x+2}{|x|+1}$

١ - اكتب $f(x)$ بدون قيمة مطلقة وادرس قابلية الاشتقاق من اليمين عند $x = 0$ واكتب معادلة نصف المماس من اليمين

٢ - ادرس قابلية الاشتقاق من اليسار عند $x = 0$ واكتب معادلة نصف المماس من اليسار

٣ – ادرس اطراد التابع على المجال $[-2, 2]$ وارسم C_f ونصفي المماس

تطبيق : ليكن $f(x) = \sqrt{1 - cosx}$

١-اوجد مجموعة التعريف

٢-ايكون التابع مستمر على مجموعة تعريفه

٣-اثبت ان التابع زوجي ويقبل 2π دور له

٤-ليكن g مقصور f على $[0, \pi]$ اثبت ان g اشتقاقي وارسم c_g

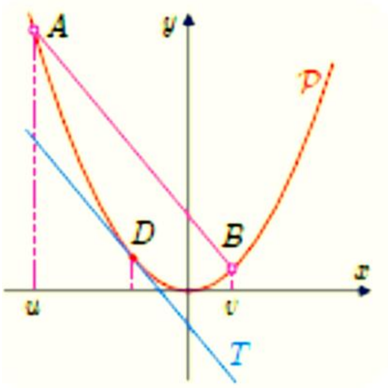
٥-استنتج C_f

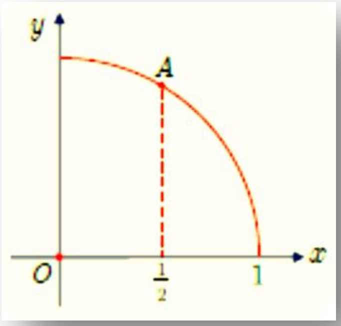
ملاحظة: ليكن لدينا المستقيمان $d: y = mx + b$ و $d': y = m'x + b'$

١-نقول ان $d \perp d'$ اذا كان $m.m' = -1$

٢-نقول ان $d // d'$ اذا كان $m = m'$

مثال : ليكن $f(x) = x^2$ و خطه البياني P حيث AوB نقطتين منه فاصلتهما u و v ولتكن D فاصلتها $\frac{u+v}{2}$ اثبت ان المماس في D يوازي AB



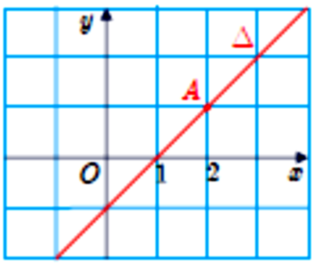


مثال : في معلم متجانس (O, i, j) $x^2 + y^2 = 1$ هي معادلة دائرة C مركزها O ونصف قطرها 1 ومنه ربع الدائرة المرسوم هو خط بياني للتابع $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$

١ – احسب $f'(x)$ على المجال $[0, 1[$

٢ - استنتج معادلة للماس T للدائرة C في النقطة A التي فاصلتها $\frac{1}{2}$

٤ – تحقق ان المستقيم (OA) عمودي على T

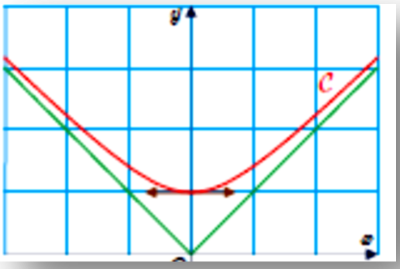


مثال : ليكن $f(x) = \frac{ax+b}{x^2+1}$ عين a و b ليكون المستقيم Δ مماس ل C_f عند النقطة A

مثال : ليكن لدينا التابع $f(x) = x^3 - x^2 + ax$ عين a ليكون للتابع f قيمة حدية محليا عند $x = 1$

مثال : ليكن $f(x) = \frac{ax^2+bx+1}{x-1}$ حيث a, b عددان حقيقيان عين a و b حيث $f(-1)$ قيمة حدية محليا وهذه القيمة الحدية معدومة

مثال: في الشكل الجانبي C خط بياني للتابع f المعرف $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$ المعرف على R



١- هل التابع زوجي

٢-احسب النهاية عند $\pm\infty$

٣-اثبت ان $\Delta: y = x$ مقارب مائل في جوار $+\infty$

٤-ادرس التغيرات وهل هي مطابقة للشكل

تطبيق : ليكن $f(x) = x\sqrt{x(2-x)}$

١-اثبت ان f معرف $[0,2]$ واشتقاقي على $]0,2[$ واحسب $f'(x)$

٢-ادرس قابلية الاشتقاق عند 0 و 2 وماذا تستنتج

٣-ادرس التغيرات على المجال $[0,2]$ وارسم المماسات و C_f

تمارين ومسائل :

تمرين : اكتب معادلة المماس في النقطة التي فاصلتها a

١ - $a = 1$: $f(x) = x\sqrt{x}$	٢ - $x = 0$: $f(x) = Cosx$
٣ - $a = \frac{\pi}{4}$: $f(x) = xcosx$	٤ - $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$

تمرين : ليكن لدينا C_f الخط البياني للتابع المعرف على $R\{-1\}$ وفق $f(x)=\frac{x^2-3x+1}{x+1}$

١ـ اكتب معادلة للماس C في النقطة التي تساوي فاصلتها 1

٢ـ هل يقبل C مماسا موازيا للمستقيم الذي معادلته $y=-4x$

٣ـ هل يقبل C مماسا موازي للمستقيم $3x-2y=0$

تمرين : ليكن $f(x) = x^3 - 3x + 1$

١- ادرس تغيرات f ونظم جدولا بها

٢- تحقق ان للمعادلة $f(x) = 0$ ثلاث جذور

تمرين : ليكن لدينا التابع $f(x) = ax^3 + 3x^2 + 3x$ عين a ليكون للتابع f قيمة حدية عند $x = 1$

تمرين : ليكن $f(x) = 3x^4 + 4x^3 - 12x^2 + 4$ المعرف على R

١ـ ادرس التغيرات ونظم جدولا بها

٢ـ ما عدد حلول المعادلة $f(x) = 0$

تمرين : ليكن $f(x) = x + \sqrt{1 + x^2}$ المعرف على R

١-تحقق ان $\sqrt{1 + x^2}.f'(x) = f(x)$ ايا كانت x من R

٢-استنتج ان $(1 + x^2)f''(x) + xf'(x) - f(x) = 0$ ايا كانت x من R

تمرين : اوجد نهايات التوابع

١ - $f(x) = \frac{cox x - 1}{x}$ عند $x = 0$	٢ - $f(x) = \frac{\tan x}{x}$ عند $x = 0$
٣ - $f(x) = \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{2}}{x - 1}$ عند $x = 1$	٤ -

تمرين : اثبت ان $sinx \le x$ من اجل $x \ge 0$

تمرين : متراجحة هويجنز : اثبت ان $2sinx + tanx \geq 3x$ حيث $x \in [0, \frac{\pi}{2}[$

تمرين : ليكن لدينا التابع $f(x)=\sqrt{\frac{x^3}{1-x}}$ معرف على $[0,1[$

١- هل f اشتقاقي عند الصفر ؟

٢-احسب $f'(x)$ على $]0,1[$

تمرين : اوجد مشتقات التوابع التالية

١ - $f(x)=\cos^2 3x$	٢ - $f(x)=\cos^3 2x$
٣ - $f(x)=\frac{1}{\sin^2 3x}$	٤ - $f(x)=\frac{1}{\cos^3 3x}$

تمرين : ليكن $f(x) = \frac{x^2+1}{x-1}$

١ـ اوجد مشتق التابع

٢ـ استنتج مشتق التوابع التالية $g(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x}-1}$ و $h(x) = \sqrt{\frac{x^2+1}{x-1}}$ و $k(x) = \frac{\sin^2 x+1}{sinx-1}$

تمرين : ليكن لدينا التابع $f(x) = ax^3 + bx^2 + 1$ عين a و b ليقبل C_f مماسا افقيا في النقطة $A(1,2)$

تمرين : ليكن $f(x)=\frac{3x^3+ax+b}{x^2+1}$ تابع معرف على R خطة البياني C_f عين a و b ليكون $y=4x+3$ معادلة للماس في النقطة التي فاصلتها 0

تمرين : ليكن $f(x)=ax^3+3x^2+3x$ عين a ليكون للتابع قيمة حدية عند $x=1$

تمرين : ليكن لدينا التابع $f(x) = x + \sqrt{x-1} - 4$ حيث $D_f: [1, \infty[$

١-ادرس تغيرات التابع

٢-اثبت ان المعادلة $f(x) = 0$ تملك حل وحيد

٣-اثبت ان الحل محصور بين 2 و 3

٤-اوجد الحل جبريا

تمرين : ليكن $f(x)=\frac{1}{x-1}-\sqrt{x}$ المعرف على $I=]1,\infty[$

١-ادرس تغيرات f على I

٢-استنتج ان المعادلة $f(x)=0$ تملك حل وحيد في المجال $]1,2[$

تمرين :ليكن لدينا التابع $f(x)=\frac{x^2+x}{x^2+x+3}$ معرف على R

١ـ ادرس التغيرات وارسم C_f

٢ـ اكتب معادلة للماس T_a الذي يمس C_f في النقطة $A(a, f(a))$

٣ـ اكتب معادلة كل مماس يمر من المبدأ (ليس المماس في المبدأ)

مسالة : ليكن لدينا التابع $f(x)=\frac{x^3-3x^2+10x-11}{(x-1)^2}$ معرف على $R\backslash\{1\}$

١- اوجد النهايات عند اطراف مجموعة التعريف وادرس التغيرات ونظم جدول بها

٢- اثبت ان المستقيم $d: y = x - 1$ مقارب مائل في جوار ∞

٣- ادرس الوضع النسبي للخط C_f مع المقارب المائل ثم ارسم d و C_f

٤- حدد هندسيا عدد حلول المعادلة $x^3-(m+3)x^2+(2m+10)x-11-m=0$

مسالة:

١) ليكن لدينا التابع $g(x) = x^3 + 6x + 7$ المعرف على R

a) احسب $g(-1)$ ماذا تستنتج

b) اثبت ان $g(x) = (x+1)(x^2 - x + 7)$

c) حل في R المعادلة $g(x) = 0$ ثم شكل جدول الاشارة للتابع $g(x)$ في R

٢) ليكن لدينا التابع $f(x) = \frac{2x^3 - 7}{2x^2 + 4}$

a) احسب $\lim_{x \to -\infty} f(x)$ و $\lim_{x \to +\infty} f(x)$

b) اثبت ان $f'(x) = \frac{4xg(x)}{(2x^2+4)^2}$

c) ادرس تغيرات $f(x)$ وشكل جدول التغيرات

d) اثبت ان $\Delta: y = x$ مقارب مائل للخط C_f في جوار $\pm\infty$

تمرين : في معلم متجانس (o, i, j) ليكن C الخط البياني للتابع $f(x) = x - \sqrt{x^2 + 8}$

١ـ احسب النهاية عند $\pm\infty$ وما المعنى الهندسي

٢ـ اثبت ان $d: y = 2x$ مقارب افقي

٣ـ نظم جدول التغيرات

٤ـ ارسم المقاربات ثن C

مسألة

اولا : ليكن التابع المعرف على R وفق $g(x) = 2x - \sqrt{1 + x^2}$

a – اثبت ان التابع g متزايد تماما على R

b – حل جبريا المعادلة $g(x) = 0$

c – نظم جدولا باطراد التابع g ثم استنتج اشارة $g(x)$ على R

ثانيا : ليكن التابع f المعرف على R وفق $f(x) = 2\sqrt{1 + x^2} - x$ وليكن خطه C_f

1) اوجد $lim_{x\to\pm\infty} f(x)$

2) بين انه من اجل كل x من R فان $f'(x) = \frac{g(x)}{\sqrt{1+x^2}}$ ثم استنتج جدول تغيرات f

3) اثبت ان $\Delta: y = -3x$ مقارب مائل لـC_f في جوار $-\infty$

4) ارسم كل مقارب وجدته وارسم C_f

تمرين : ليكن التابع $f(x) = 3\sin^2 x + 4\cos^3 x$

١-اثبت ان التابع زوجي وانه دوري ودوره 2π واستنتج انه تكفي دراسته على $[0,\pi]$

٢-اثبت ان $f'(x) = 6cosx \times sinx(1-2cosx)$

٣- ادرس تغيرات f على $[0,\pi]$ وارسم C_f

٤-استنتج C_f على $[-2\pi, 2\pi]$

نتأمل جانباً C_f الخط البياني للتابع f المعرّف على $\mathbb{R}$.

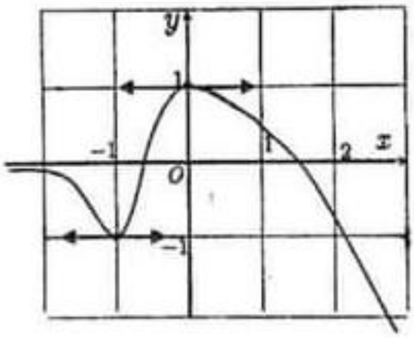
المطلوب:

1- جد $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

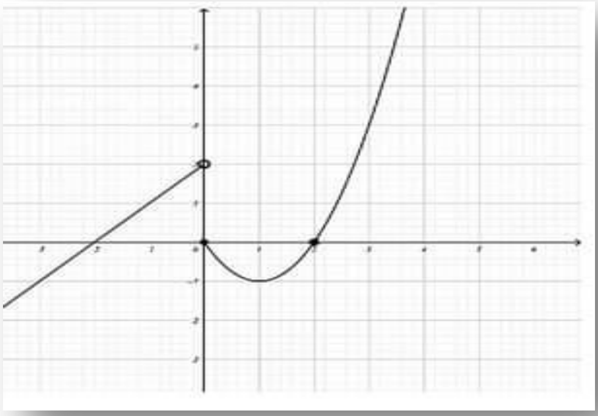
2- اكتب معادلة كل مقارب أفقي للخط C_f.

3- اكتب مجموعة حلول المتراجحة $f'(x) > 0$.

4- عيّن القيم الحديّة للتابع f مبيّناً نوع كلّ منها.



تمرين : ليكن الرسم البياني المجاور



١-اوجد القيم الحدية للتابع

٢-ما عدد حلول المتراجحة $f(x) \le 0$

٣-اوجد $f'(1)$ و $f(0)$

٤-اوجد $\lim_{x \to \pm\infty} f(x)$

٥-احسب $\int_{-2}^{-1} f(x)dx$

تمرين : ليكن التابع $f(x) = \left(\cos(2x) - \frac{1}{2}\right)^2$ المعرف على R المطلوب

١ـ اثبت ان التابع زوجي وانه دوري ودوره π

٢ـ ادرس التغيرات على المجال $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ ونظم جدولا بها وارسم الخط البياني على المجال $\left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$

تمرين : ليكن التابع $f(x)=\begin{cases}\frac{\cos(x)-1}{x^2} & : x\neq 0\\ m-\frac{1}{2} & : x=0\end{cases}$

عين قيمة m ليكون التابع مستمر عند الصفر

تمرين : ليكن التابع $f(x)=\frac{x^2+|X|}{x^2+1}$ المطلوب

١ـ اوجد النهاية عند $-\infty$

٢ـ ادرس قابلية اشتقاق التابع عند الصفر من اليمين

٣ـ اكتب معادلة نصف المماس من اليمين للخط C_f في النقطة $A(0,0)$

تمرين : ليكن C_f الخط البياني للتابع $f(x) = \sqrt{9x^2 - 6x + 3}$

١- ادرس النهاية عند $+\infty$

٢- a) اكتب $9x^2 - 6x + 3$ بالشكل القانوني

b) ادرس نهاية $h(x) = f(x) - \sqrt{(3x-1)^2}$ عند $+\infty$

c) استنتج ان الخط C يملك مقارب مائل عن $+\infty$ يطلب ايجاد معادلته

٣- اثبت ان C_f فوق المقارب

تمرين: ليكن لدينا التابع المعرف على R بالشكل $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\frac{1}{x} & : x \neq 0 \\ 0 & : x = 0 \end{cases}$

١- اثبت ان $f(x)$ اشتقاقي عند الصفر

٢- احسب $f'(x)$ على R^*

٣- اوجد $\lim_{x\to+\infty} f(x)$

تمرين : ليكن $f(x)=\frac{2x+1}{x+5}$ المعرف على $]-5,+\infty[$

١- احسب $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ واستنتج $\lim_{x\to+\infty} f(f(x))$

٢- عين عدد حقيقي A حيث اذا كان $x>A$ كان $f(x)\in]1.99\,,2.01[$

تمرين : ليكن التابع $f(x)=\frac{2x+\sin x}{x-2}$ المعرف على $R\backslash\{2\}$ احسب النهاية عند الصفر

تمرين : عين مجموعة تعريف التابع $f(x)=\frac{sinx}{\sqrt{1+x}-1}$ واوجد النهاية عند الصفر

تمرين : ليكن التابع $\frac{1}{2} + \frac{cosx-1}{x^2} = f(x)$ المعرف على R^* اوجد النهاية عند الصفر

ليكن الخط البياني للتابع

x	$-\infty$		0		4		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	$\|\|$	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	2	$\nearrow$	6	$\searrow$	$-\infty$

١-اوجد $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)$

٢-عين القيم الحدية مع ذكر النوع

٣-ما عدد حلول المعادلة $f(x) = 0$

٤-حل المتراجحة $f'(x) > 0$

تمرين : ليكن الجدول المعبر عن تغيرات f

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	‖	$-$	‖	$+$	
$f(x)$	3 $\nearrow$		$+\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	$-\infty$ ‖ $-\infty$	$\nearrow$	3

١ ـ اكتب معادلة كل مقارب شاقولي او افقي

٢ ـ هل يوجد مقاربات مائلة

٣ـ هل يوجد للخط مماسات افقية

٤ـ اثبت ان للمعادلة $f(x)=0$ حل وحيد ضمن المجال $]-1,1[$

ليكن جدول التغيرات للتابع f

x	$-\infty$		2		5		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	
$f(x)$	2	$\searrow$	0	$\nearrow$	4	$\nearrow$	6

١ـ اوجد $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)$

٢ـ اذكر قيمة الحدية مع ذكر النوع

٣ـ هل $f(5)=4$ قيمة حدية للتابع

تمرين : ليكن الجدول المعبر عن التابع f

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	‖	$+$	0	$-$	
$f(x)$	3	$\nearrow$	$+\infty$ ‖ $-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	-2

١ـ اوجد المنطلق والمستقر الفعلي

٢ـ اكتب معادلة المقاربات

٣ـ ما هي القيم الحدية مع ذكر النوع

٤ـ ما عدد حلول المعادلات $f(x) = 0$

تمرين : ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف $]0,+\infty[$ وفق $f(x) = \frac{x^3+4-4\cos x}{x^2}$

١ـ اوجد $\lim_{x\to 0^+} f(x)$

٢ـ اثبت ان $\Delta : y = x$ مقارب مائل للخط C

تمرين : ليكن لدينا التابع $f(x)=\sqrt{1-x^2}$ المعرف على $]-1,1[$

١ـ اكتب معادلة المماس T للخط C في النقطة A التي فاصلتها $\frac{1}{2}$ منه

٢ـ تحقق ان المستقيم (OA) والمماس T متعامدان

٣ـ اثبت ان محور التراتيب هو محور تناظر

تمرين : ليكن لدينا التابع f المعرف على R $f(x) = ax^2 + bx + 1$ حيث a, b عددان حقيقيان

١- عين a, b لكي يقبل الخط C مماس افقي في النقطة $A(1, 2)$

٢- ليكن لدينا التابع g المعرف بالشكل $g(x) = \frac{f(x)}{x-1} = ax + b + \frac{c}{x-1}$ واستنتج معادلة المقارب المائل Δ للخط C_g

مسألة : ليكن لدينا التابع f المعرف على $R\backslash\{-1\}$ بالشكل $f(x)=\frac{x+2}{(x+1)^2}$

١- اوجد نهاية التابع عند مجموعة التعريف واذكر المقاربات

٢- ادرس الوضع النسبي بين C والمقارب الافقي

٣- ادرس التغيرات للتابع f ونظم جدولا بها وعين القيم حديا محليا

٤- اكتب معادلة المماس T للخط C في النقطة التي فاصلتها -2

٥- ارسم ما وجدت من مقاربات ثم ارسم C

٦- ناقش بيانيا عدد حلول المعادلة $ax^2+(2a-1)x+(a-2)=0$

٧- اثبت ان المستقيمين T ومنصف الربعين الاول والثالث متوازيان وغير منطبقان

تمرين : ليكن لدينا التابع الذي جدول تغيراته معرف بالشكل

x	-2		0		2		4
$f'(x)$	0	$-$	$\|\|$	$-$	0	$+$	$\|\|$
$f(x)$	1	$\searrow$	$-\infty \ \|\| \ +\infty$	$\searrow$	3	$\nearrow$	$+\infty$

١ – اكتب مجموعة التعريف

٢ –اكتب معادلة المقاربات

٣ –اكتب معادلة المماس في نقطة فاصلتها 2

٤ –هل يقبل c_f مقاربات مائل ولماذا

٥ –عين القيم الحدية مع ذكر النوع

٦ –هل التابع f اشتقاقي عند الصفر ولماذا

٧ – اثبت ان المعادلة $f(x) = 0$ حلا وحيدا

٨ – ما مجموعة حلول المتراجحة $f(x) > 0$

٩ –ارسم خطا بيانيا C يعبر عن التابع واستنتج C_g حيث $g(x) = |f(X)|$

تمرين : ليكن لدينا التابع $f(x) = \cos(2\pi\sqrt{x})$ المطلوب

١ – احسب $f\left(\frac{1}{4}\right)$ و $f'(x)$ و $f'\left(\frac{1}{4}\right)$

٢ –استنتج نهاية التابع $h(x) = \frac{\cos(2\pi\sqrt{x})+1}{x-\frac{1}{4}}$ عند $x = \frac{1}{4}$

تمرين : ليكن لدينا التابع $f(x) = \frac{x+2}{x-1}$

١ - اوجد نهاية التابع عند $+\infty$

٢-عين عدد A حيث اذا كان $x > A$ كان $f(X) \in]0.98 , 1.02[$

٣-اثبت ان النقطة $A(1,1)$ هي مركز تناظر للخط C للتابع f

تمرين: ليكن لدينا التابع f المعرف على R بالشكل $f(x)=\frac{1}{2+sinx}$

١–اثبت ان التابع محدود

٢ – اوجد نهاية التابع $g(x)=\frac{E(x)+cosx}{2+sinx}$

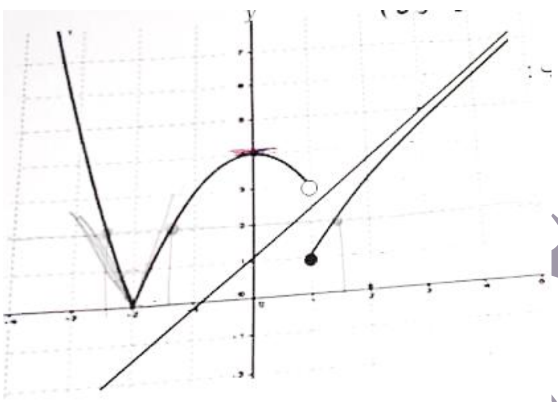
تمرين : ليكن $f(x)=\frac{1}{x}+\sqrt{x}$ خطه C

١–ادرس قابلية الاشتقاق عند الواحد

٢ – اكتب معادلة المماس في النقطة التي فاصلتها $x=1$

تمرين : اوجد نهاية التابع $f(x) = \frac{3sinx - sin3x}{x^3}$ عند الصفر

تمرين : في الشكل الجانبي



١) احسب $f(0)$ و $f'(0)$

٢) ما عدد حلول المعادلة $f(x) = 2$

٣) هل f اشتقاقي عند $x = 2$ ؟ علل؟

٤) اوجد $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$

٥) كم قيمة صغرى او كبرى محليا للتابع

٦) عين حلول المتراجحة $f(x) > y_\Delta$