المساعد في المتتاليات ونهاياتها

اعداد : أمين المحمد

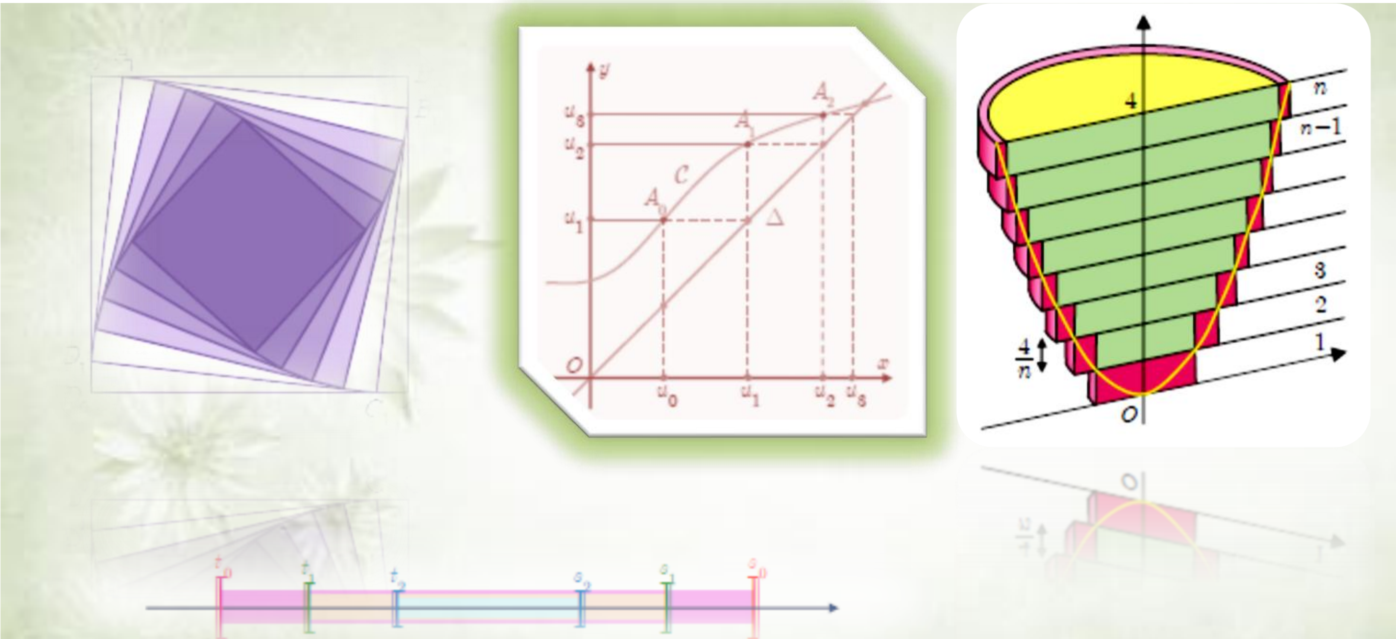
٠٩٤٩٣٩٣٢٧٩

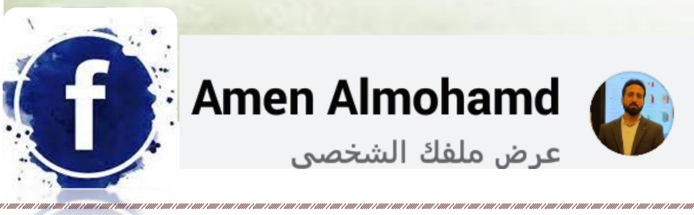
لكل عمل اذا تم نقصان

ارجو من الله ان اكون قد وفقت في تقديم ما ينفع وارجو التماس العذر لكل هفوة

هذا العمل موجه لطلابي لتبسيط الدراسة لهم . ما كان من توفيق فهو من الله

وما كان من خطأ او نسيان فهو مني ومن الشيطان





تذكرة : التابع f هو علاقة تربط كل عنصر x من مجموعة A بعنصر وحيد y من مجموعة B أي

$f: A \to B$ حيث $f: x \to y$ ونقول y صورة x وفق f ونكتب $f(x) = y$ مثل $f(x) = x^2 + 1$

حالة خاصة من التابع عندما يكون $A = N$ نسمي التابع متتالية أي $u_n = n^2 + 1$

تعريف المتتالية : هي تابع منطلقه مجموعة الاعداد الطبيعية N او أي مجموعة جزئية منها من النمط $\{n_0 , n_0 + 1 , , n_0 + 2, \dots\}$ حيث $n_0 \in N$ نرمز للمتتالية $(u_n)_{n \geq n_0}$ نسمي u_n الحد ذو الدليل n أي $u: N \to R$

مثال : التابع الذي يربط كل عدد طبيعي $n \to \frac{n+1}{n^2}$ هو متتالية

مقارنة بين المتتالية والتابع

	التابع	المتتالية
الرمز	f, g, h	$(v_n)_{n \geq n_0}$, $(u_n)_{n \geq n_0}$
المتحول	x	n
الصورة	$f(x)$	$u_{(n)}$
الشكل	$f: D \to R$	$u: N \to R$
المنطلق	R او مجموعة جزئية	N او مجموعة جزئية

طرق تعريف المتتالية

١ – **الشكل الصريح :** وفيه يعطى الحد العام تابع(علاقة) بدلالة المتحول n أي $u_n = f(n)$ حيث f تابع معرف على المجال $[n_0, +\infty[$

مثال : لتكن المتتالية $(u_n)_{n \geq 0}$ حيث $u_n = \frac{1}{n^2+1}$ احسب الحدود الثلاثة الاولى

مثال : لتكن المتتالية $(v_n)_{n\geq3}$ حيث $v_n = \frac{1}{n-2}$ احسب الحدود الثلاثة الاولى

مثال : لتكن المتتالية $(w_n)_{n\geq0}$ حيث $w_n = (-1)^n$ احسب الحدود الثلاثة الاولى

ملاحظة : نلاحظ ان الحد الاول في المتتالية الاولى هو u_0 أي ذو الدليل 0 والحد الاول في الثانية هو v_3 أي ذو الدليل 3 ومنه يجب ان نميز بين دليل الحد ومرتبته

في المتتالية الثالثة ان عدد قيم هذه المتتالية $\{-1, +1\}$

٢ – بالتدريج : وفيه يكتب كل حد بدلالة الحد السابق له (او الحدود السابقة له) أي يعطى الحد الاول او اول حدين ثم نستخدم علاقة تراجعية $u_{n+1} = f(u_n)$

مثال : لتكن المتتالية $(u_n)_{n\geq0}$ حيث $\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = u_n^2 - 2 \end{cases}$ احسب الحدود الثلاثة الاولى

مثال : لتكن المتتالية $(u_n)_{n\geq0}$ حيث $\begin{cases} u_0 = 1\,, u_1 = 4 \\ u_{n+1} = 5u_n - 6u_{n-1} \end{cases}$ احسب الحد الرابع

ملاحظة :في المتتالية المعرفة بالتدريج لا يمكن حساب أي حد دون معرفة السابق له

مثال : لتكن المتتالية $(v_n)_{n\geq 0}$ حيث $\begin{cases} v_0 = 1 , v_1 = 3 \\ v_{n+1} = 2v_n + 3v_{n-1} \end{cases}$ احسب v_2 و v_3 و v_5

جهة اطراد المتتالية

لتكن لدينا المتتالية $(u_n)_{n\geq n_0}$ نقول انها

١ – متزايدة (متزايدة تماما) اذا $u_{n+1} \geq u_n$ ($u_{n+1} > u_n$)(كل حد اكبر من سابقه)

٢ – متناقصة (متناقصة تماما) اذا $u_{n+1} \leq u_n$ ($u_{n+1} < u_n$)(كل حد اصغر من سابقه)

٣ – ثابتة اذا $u_{n+1} = u_n$

طرق دراسة الاطراد

اولا: ندرس اشارة الفرق $u_{n+1} - u_n \begin{cases} > 0 \text{ متزايدة} \\ < 0 \text{ متناقصة} \\ = 0 \text{ ثابتة} \end{cases}$

مثال : ادرس اطراد المتتالية $(u_n)_{n\geq 1}$ المعرفة بالشكل $u_n = \frac{n^2+1}{2n}$

امين المحمد ٠٧٧٢٣٩٣٩٤٩٠

مثال : ادرس اطراد المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرفة بالشكل $u_n = \frac{3n+1}{n+2}$

ثانيا: اذا كانت ذات حدود موجبة نقارن مع الواحد أي

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \begin{cases} > 1 & \text{متزايدة} \\ < 1 & \text{متناقصة} \\ = 1 & \text{ثابتة} \end{cases}$$

تذكرة : $a^0 = 1$ و $a^n \times a^m = a^{n+m}$ و $\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$ و $(a^n)^m = a^{n\times m}$

$(a \times b)^n = a^n \times b^n$

اوجد ناتج

$$A = \frac{\sqrt{3^6}\times(3^2)^{-5}\times\sqrt{15\times 2}^2}{6^{-1}\times\sqrt{3}^4\times 4^2}$$

$$B = \frac{6^4\times 2^{-2}\times 5^7}{2^{-1}\times 15^4}$$

مثال : ادرس اطراد المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرفة بالشكل $u_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n$

أمين المحمد ٠٩٤٩٣٩٣٢٧٩

ملاحظة : اذا كان الحد العام للمتتالية $\frac{\text{كثير حدود}}{\text{كثير حدود}}$ او سلسلة مجاميع نستخدم طريقة الفرق واذا كان الحد العام مرفوع لقوة او يحوي عاملة نستخدم القسمة

ثالثا : اذا كانت $u_n = f(n)$ وكان

$$f'(n)\begin{cases} > 0\ ;n \in [n_0, +\infty[& u_n \text{ متزايدة} \\ < 0\ ;n \in [n_0, +\infty[& u_n \text{ متناقصة} \\ = 0\ ;n \in [n_0, +\infty[& \text{ثابتة} \end{cases}$$

مثال : ادرس اطراد المتتالية $(v_n)_{n\geq 0}$ المعرفة بالشكل $v_n = (n-1)^2$

مثال : ادرس اطراد المتتاليات التالية

$u_n = \frac{3}{n^2}$	$u_n = \sqrt{3n+1}$	$u_n = \frac{2n-1}{n+4}$	$u_n = \frac{1}{n^2+1}$
$u_n = \frac{n}{10^n}$	$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n \end{cases}$	$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = u_n - 3 \end{cases}$	$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \frac{3}{4}u_n + 2 \end{cases}$
$u_n = 2^n$	$u_n = 1 + \frac{1}{n^2}$	$u_n = \left(-\frac{1}{n}\right)^n$	$u_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2^n}$

امين المحمد ٩٤٩٣٩٣٢٧٩٠

امين المحمد ٠٩٤٩٣٩٣٢٧٩

امين المحمد ٠٩٤٩٣٩٣٢٧٩

انواع المتتاليات(حسابية والهندسية)

١ – نقول ان المتتالية $(u_n)_{n\geq n_0}$ حسابية اذا نتج كل حد عن سابقة بجمعه مع عدد ثابت (الفرق بين أي حدين هو عدد ثابت r) أي $u_{n+1} = u_n + r$ ومنه $u_{n+1} - u_n = r$ نسمي r اساس المتتالية

مثال : اثبت ان المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ حيث $u_n = 3n - 5$ حسابية وعين الاساس

مثال : اثبت ان المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ حيث $u_n = 5n + 2$ حسابية وعين الاساس

خواص المتتالية الحسابية

١ – مجموع n حد من متتالية حسابية $s = \frac{n(a+l)}{2}$ حيث n عدد الحدود a الحد الاول و l الحد الاخير

ملاحظة : عدد حدود هو دليل الحد الاخير ناقص دليل الاول + ١(اذا لم يكن هناك قفزة في الحدود) او دليل الحد الاخير ناقص دليل الاول تقسيم l + ١(حث l طول القفزة بين الحدين)

مثال : اوجد عدد الحدود في المجاميع التالية $u_7 + u_8 \dots u_{20}$ و $u_4 + u_6 + \cdots + u_{42}$

مثال : احسب المجموع $S = \frac{1}{2} + 1 + \frac{3}{2} + 2 + \frac{5}{2} + 3 + \cdots + 10$

مثال : لتكن $(u_n)_{n\geq 0}$ متتالية حسابية احسب $u_5 = 6 + \cdots + u_{30} = 100$

----

٢ – من اجل أي عددين طبيعيين m و n ان $u_m = u_n + (m-n)r$

(علاقة الربط بين أي حدين)

مثال : لتكن $(u_n)_{n\geq 0}$ متتالية حسابية فيها $u_3 = 5$ و $r = 2$ احسب u_5

مثال : لتكن $(u_n)_{n\geq 0}$ متتالية حسابية فيها $u_{10} = 70$ و $u_{30} = 190$ احسب الاساس r

----

امين المحمد ٩٩٤٩٩٣٣٢٧٩

مثال : لتكن $(u_n)_{n\geq0}$ متتالية حسابية فيها $u_5 = 21$ و $u_3 = 5$ احسب $u_{10} = ?$

٣ – اذا كانت a و b و c ثلاث حدود متوالية من متتالية هندسية فان $b = \frac{a+c}{2}$

مثال :في متتالية حسابية ليكن $u_6 = 20$ و $u_4 = 6$ احسب $u_5 =$

مثال : $(u_n)_{n\geq0}$ متتالية حسابية فيها $u_2 = 41$ و $u_5 = -13$ احسب u_{20}

امين الحمد ٠٩٤٩٩٣٢٧٩

مثال : $(u_n)_{n\geq 0}$ متتالية حسابية اساسها 3 وفيها $u_1 = -2$ احسب u_n بدلالة n
واستنتج قيمة المجموعين $u_{30} + u_{31} + u_{32}$ و $u_1 + \cdots + u_{20}$

٢ – نقول ان المتتالية $(u_n)_{n\geq n_0}$ هندسية اذا نتج كل حد عن سابقة بالضرب بعدد ثابت (النسبة بين أي حدين هو عدد ثابت q)أي $u_{n+1} = qu_n$ أي $\frac{u_{n+1}}{u_n} = q$ نسمي q اساس المتتالية

مثال : اثبت ان المتتالية $(u_n)_{n\geq n_0}$ حيث $u_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n$ و $u_n = \frac{2^n}{3^{n+1}}$ هندسية وعين الاساس

مثال : لتكن المتتالية $(u_n)_{n\geq0}$ المعرفة بالشكل $\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = 3u_n - 2 \end{cases}$ و $(v_n)_{n\geq0}$ متتالية معرفة بالشكل $v_n = \frac{1}{u_n - 1}$ اثبت ان $(v_n)_{n\geq0}$ هندسية

خواص المتتالية الهندسية

١ – مجموع n حد من متتالية هندسية $s = a\frac{1-q^n}{1-q}$ حيث n عدد الحدود a الحد الاول و q الاساس

مثال : لتكن المتتالية الهندسية $(u_n)_{n\geq0}$ تحقق $u_0 = 1$ و $q = 2$

احسب $s_n = u_3 + \cdots u_{10}$

مثال : لتكن $(v_n)_{n\geq 1}$ متتالية هندسية مجموع حدودها الثلاثة الاولى 13 وحدها الاول 1

١) عين الاساس

٢) عين الحد السادس

امين المحمد ٠٩٤٩٣٣٧٩

٢ – من اجل أي عددين طبيعيين m و n ان $u_m = u_n . q^{(m-n)}$

(علاقة الربط بين أي حدين)

مثال : لتكن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ هندسية حيث $q = 3$ و $u_5 = 3$ احسب الحد العام بدلالة n

---

مثال : لتكن المتتالية $(w_n)_{n\geq 1}$ هندسية حيث $q = 3$ و $w_1 = 5$ احسب w_7

٣ – اذا كانت a و b و c ثلاث حدود متوالية من متتالية هندسية فان $b^2 = a.c$

مثال :ليكن a و b و c ثلاث حدود متوالية من متتالية هندسية . احسبها علما ان

$a + b + c = 7$ و $a.b.c = 8$

امين المحمد ٠٩٤٩٣٩٣٢٧٩

الاثبات بالتدريج

نستخدم الاثبات بالتدريج لإثبات صحة أي قضية متعلقة بالأعداد الطبيعية

مثال : اثبات ان الطرف الاول مساوي لطرف ثاني

اثبات ان الطرف الاول قاسم للثاني

اثبات ان الطرف الاول اصغر او اكبر من الطرف الثاني

اثبات ان المتتالية المعرفة بالتدريج محدودة او مطردة

طريقة الاثبات بالتريج

١ – نسمي قضية رياضية $E(n)$ ونثبت صحتها من اجل اصغر عدد طبيعي

٢ – نفرض صحة $E(n)$ ومن اجلها نثبت صحة $E(n+1)$

اثبات صحة مساواة

مثال : اثبت صحة المساواة $1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=\frac{n^2(n+1)^2}{4}$

مثال : لتكن لدينا المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرفة $\begin{cases} u_0 = \frac{5}{2} \\ u_{n+1} = (u_n - 2)^2 + 2 \end{cases}$ اثبت ان $2 \leq u_n \leq 3$

الاستفادة من اطراد تابع لدراسة المتتالية المعرفة بالشكل $u_{n+1} = f(u_n)$

مثال : لتكن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرفة بالشكل $\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = \frac{u_n}{2} + \frac{2}{u_n} \end{cases}$ المطلوب

١ – اثبت ان التابع $f(x) = \frac{x}{2} + \frac{2}{x}$ متزايد تماما على المجال $[2, +\infty[$

٢ – اثبت بالتدريج ان $2 \leq u_{n+1} \leq u_n$

أمين المحمد ٠٩٤٤٩٣٢٧٩

امين المحمد ٠٩٤٩٣٩٣٢٧٩

اثبات ان علاقة بدلالة n مضاعف لعدد محدد

مثال : اثبت بالتدريج انه من اجل أي عدد طبيعي n فان $4^n + 2$ مضاعف للعدد 3

مثال : لتكن $(v_n)_{n\geq 0}$ متتالية معرفة بالشكل $\begin{cases} v_0 = 1 \\ v_{n+1} = \dfrac{v_n}{1+v_n} \end{cases}$

١ – تحقق ان $v_n > 0$ ايا كان العدد الطبيعي n

٢ – اثبت ان المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرفة بالشكل $u_n = \dfrac{1}{v_n}$ متتالية حسابية

٣ – استنتج عبارة v_n بدلالة n

امين المحمد ٠٩٤٩٣٩٣٢٧٩

تعريف : تقرا الرمز $n!$ العدد n عاملة وهو رمز للمقدار $n! = n(n-1)(n-2)\ldots(1)$

أي $3! = 3\times2\times1 = 6$ و $4! = 4\times3\times2\times1 = 24$ ونصطلح $0! = 1$

نلاحظ ان $5! = 5\times4\times3\times2\times1 = 5\times4!$ ومنه $n! = n(n-1)!$

مثال : ادرس اطراد المتتالية $u_n = \frac{n^2}{n!}$

اثبات علاقة الاشتقاق من المرتبة n

مثال : ليكن التابع $f(x) = \frac{1}{1-x}$ المعرف على $R\backslash\{1\}$ اثبت ان المشتق من المرتبة n يعطى بالشكل $f^{(n)}(x) = \frac{n!}{(1-x)^{n+1}}$

أمين المحمد ٠٩٤٩٣٩٣٢٧٩

مثال : ليكن لدينا التابع $f(x) = \cos x$ اثبت ان $f^{(n)}(x) = (-1)^n cos\left(\frac{n\pi}{2} - x\right)$

امين المحمد ٠٩٤٩٩٣٢٧٩

ملاحظة : يمكن حذف مقدار موجب من الطرف الصغير أي $x > y + 5$ فان $x > y$ ويمكن حذف مقدار سالب من الطرف الكبير أي $x - 3 > y$ فان $x > y$

مثال : ليكن $x > -1$ في حالة عدد طبيعي n اثبت ان المتراجحة $(1 + x)^n \geq 1 + nx$ من اجل أي عدد طبيعي n

امين المحمد ٠٩٤٩٣٩٣٢٧٩

طرق الاثبات

١ – اثبات معادلة او متراجحة(المتتاليات المعرفة بالتدريج) : ننطلق من علاقة $E(n)$ ثم نقوم بعمليات جبرية عليها للحصول $E(n+1)$ او يمكن اخذ تابع والاستفادة منه

٢ – اثبات ان عدد مضاعف لعدد : هنا ننطلق من $E(n+1)$ ونفكك فيها ونستفيد من $E(n)$ للوصول للمطلوب

تمارين ومسائل

تمرين : في حالة عدد طبيعي $n \geq 1$ المقدار $S_n = 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2$

١ – احسب S_1 و S_2 و S_3 ثم عبر عن S_{n+1} بدلالة S_n

٢ – اثبت بالتدريج انه في حالة أي عدد طبيعي $n \geq 1$ لدينا

$$s_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

تمرين : اثبت بالتدريج صحة الخاصتين

١) $1 + 2 \times 2! + 3 \times 3! + \cdots + n \times n! = (n+1)! - 1$

٢) $n! \geq 2^{n-1}$

امين المحمد ٠٩٤٩٣٩٣٢٧٩

تمرين : في حالة العدد $n \geq 1$ ليكن $u_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$ و $v_n = u_{2n} - u_n$. اثبت ان المتتالية (v_n) متزايدة تماما

تمرين : ليكن a و b و c ثلاث اعداد حقيقية و $a \neq 0$ نعلم ان a و b و c هي ثلاث حدود متعاقبة من متتالية هندسية ، نرمز الى اساسها بالرمز q . كما نعلم ان $3a$ و $2b$ و c هي ثلاث حدود متوالية من متتالية حسابية . احسب q

امين المحمد ٠٩٤٤٩٩٣٢٧٩

تمرين : لتكن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرفة بالشكل $\begin{cases} u_0 = 7 \\ u_{n+1} = 10u_n - 18 \end{cases}$

١ – احسب u_1 و u_2 و u_3 ثم خمن u_n بدلالة n

٢ – اثبت صحة التخمين

امين المحمد ٠٩٤٩٣٩٣٢٧٩

تمرين : لتكن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرفة بالشكل $\begin{cases} u_0 = a \\ u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + n^2 + n \end{cases}$

١ – عين كثير حدود $p(x)$ من الدرجة الثانية بحيث ان المتتالية $(t_n)_{n\geq 0}$ المعرفة بالشكل $t_n = p(n)$ تحقق $t_{n+1} = \frac{1}{2}t_n + n^2 + n$

٢ – اثبت ان المتتالية $(v_n)_{n\geq 0}$ التي حدها العام $v_n = u_n - t_n$ هي متتالية هندسية

٣ – اكتب عبارة v_n بدلالة n و a

أمين المحمد ٠٩٤٩٣٩٣٢٧٩

تمرين : ليكن a و b عددين حقيقين ونفرض $a \neq 0$ نتأمل المتتالية $(v_n)_{n\geq 0}$ التي تحقق $v_{n+1} = av_n + b$ أيا كان العدد الطبيعي

١ - عين تابعا f يحقق $v_{n+1} = f(v_n)$ أيا كانت قيمة $n \geq 0$

٢ – احسب l حل المعادلة $f(x) = x$

٣ – نعرف المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ حيث $u_n = v_n - l$ اثبت ان $(u_n)_{n\geq 0}$ متتالية هندسية واستنتج u_n بدلالة n و a و b و v_0 وثم استنتج v_n بدلالة هذه المعاملات

امين المحمد ٠٩٤٩٣٩٣٢٧٩

امين المحمد ٠٩٤٩٣٩٣٢٧٩

تمرين : **نتأمل المتتالية $(v_n)_{n\geq 0}$ المعرفة بالتدريج $\begin{cases} u_0 = a\,, u_1 = 4 \\ u_{n+1} = 5u_n - 6u_{n-1} \end{cases}$ حيث $n \geq 1$**

١ – عين عددين a و b حيث $a + b = 5$ و $a.b = 6$

٢ – لتكن المتتالية $(v_n)_{n\geq 0}$ حيث $v_n = u_{n+1} - au_n$ اثبت ان $(v_n)_{n\geq 0}$ هندسية اساسها b

٣ – لتكن المتتالية $(w_n)_{n\geq 0}$ حيث $w_n = u_{n+1} - au_n$ اثبت ان $(w_n)_{n\geq 0}$ هندسية اساسها a

٤ – عبر عن v_n و w_n بدلالة n ثم استنتج عبارة u_n بدلالة n .

أمين المحمد ٠٩٤٩٣٩٣٢٧٩

تمرين :متراجحة تدريجية

١ – اثبت ، ايا كان العدد الطبيعي n ، $n \geq 2$ وان $3 \times n^2 \geq (n+1)^2$

٢ – نرمز بالرمز $E(n)$ الى القضية $\langle 3^n \geq 2^n + 5 \times n^2 \rangle$

١ – ما اصغر عدد طبيعي غير معدوم n ، تكون $E(n)$ صحيحة عنده

٢ – اثبت ان $E(n)$ صحيحة . ايا كان العدد الطبيعي n الذي يحقق $n \geq 5$

امين المحمد ٠٩٤٩٣٩٣٢٧٩

تمرين : نرمز بالرمز $E(n)$ الى القضية « $3^n \geq (n+2)^2$ »

١ – اتكون القضية $E(0)$ و $E(1)$ و $E(2)$ و $E(3)$ صحيحة ؟

٢ – اثبت بالتدريج ان $E(n)$ صحيحة . ايا كان العدد الطبيعي n الذي يحقق $n \geq 3$

امين الاحمد ٠٩٤٩٩٣٢٧٩

تمرين : اثبت بالتدريج صحة الخواص التالية أيا كان العدد الطبيعي n

« $4^n + 5$ » مضاعف للعدد 3	« $2^{3n} - 1$ » مضاعف للعدد 7
« $n^3 + 2n$ » مضاعف للعدد 3	« $3^{2n+1} + 2^{n+2}$ » مضاعف للعدد 7

امين المحمد ٠٩٤٩٣٩٣٢٧٩

امين المحمد ٠٩٤٩٣٩٣٢٧٩

تمرين : نرمز للقضية << يقسم العدد 9 العدد $10^n + 1$ >> بالرمز $E(n)$ في حالة $n \in N$

١ – اثبت انه اذا كانت القضية $E(n)$ صحيحية من اجل العدد n كانت صحيحة من اجل $E(n + 1)$

٢ – اتكون $E(n)$ صحيحية على N ؟ برر الاجابة.

امين المحمد ٠٩٤٩٩٣٣٢٧٩

معلومة : لإثبات محدودية او اطراد متتالية معرفة بالتدريج نستخدم الاستقراء

تمرين : لتكن $(u_n)_{n\geq 0}$ متتالية معرفة بالشكل $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \sqrt{2+u_n} \end{cases}$

(ملاحظة : يمكن الاستفادة من تابع)

١ – اثبت ان $0 \leq u_n \leq 2$ ايا كان العدد الطبيعي n

٢ – اثبت ان المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ متزايدة تماما

امين المحمد ٠٩٤٩٣٩٣٢٧٩

تمرين : لتكن $(u_n)_{n\geq 0}$ متتالية معرفة بالشكل $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{3u_n+2}{2u_n+6} \end{cases}$ عند $n \geq 0$

١ – اثبت ان التابع $f: x \to \frac{3x+2}{2x+6}$ متزايد تماما واستنتج ان $\frac{1}{2} < u_n \leq 1$ ايا كان العدد n

٢ – اثبت ان المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ متناقصة تماما

امين المحمد ٠٩٤٩٣٩٣٢٧٩

تذكرة ($\sin^2 x = \frac{1-cos2x}{2}$ و $\cos^2 x = \frac{1+cos2x}{2}$)

تمرين :ليكن θ عدد من المجال $]0,\frac{\pi}{2}[$ ولنعرف المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ بالشكل $\begin{cases} u_0 = 2cos\theta \\ u_{n+1} = \sqrt{2+u_n} \end{cases}$

١ - احسب u_1 و u_2

٢ - اثبت بالتدريج ان $u_n = 2\cos(\frac{\theta}{2^n})$

امين المحمد ٠٩٤٩٣٩٣٢٧٩

تمرين : يرمز x الى عدد حقيقي و n عدد طبيعي غير معدوم لنضع

$$S_n = cosx + \cos(3x) + \cos(5x) + \cdots + \cos\big((2n-1)x\big)$$

١ ــ باستعمال دساتير تعرفها اثبت ان

$$\sin(2a) = 2sina\ cosa \text{ و } sina.cosb = \frac{1}{2}\big(\sin(a+b) + \sin(a-b)\big)$$

٢ ــ حول كل من العبارتين الاتيتين من جداء نسبتين مثلثيتين الى مجموع نسبتين مثلثيتين

$$\sin nx.\cos nx \text{ و } sinxcos\big((2n+1)x\big)$$

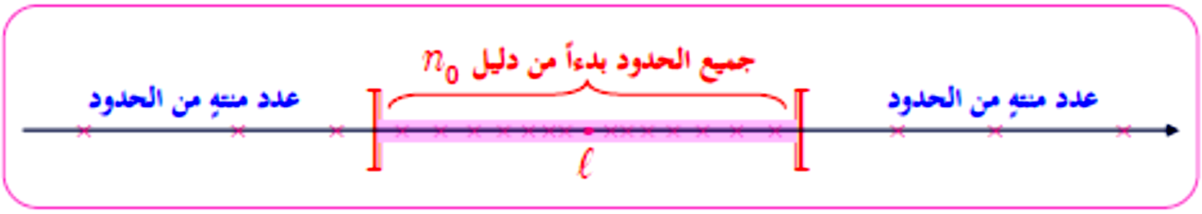
٣ ــ اثبت ان $S_n = \cos(nx) \times \frac{\sin(nx)}{\sin x}$ ، ايا يكن $n \geq 1$ و $x \neq k\pi(k \in Z)$

امين المحمد ٠٩٤٩٣٩٣٢٧٩

بحث : نهاية المتتاليات وتقاربها

الرمز الصحيح لنهاية متتالية هو $\lim_{n\to+\infty} u_n = \begin{cases} l \\ \pm\infty \end{cases}$

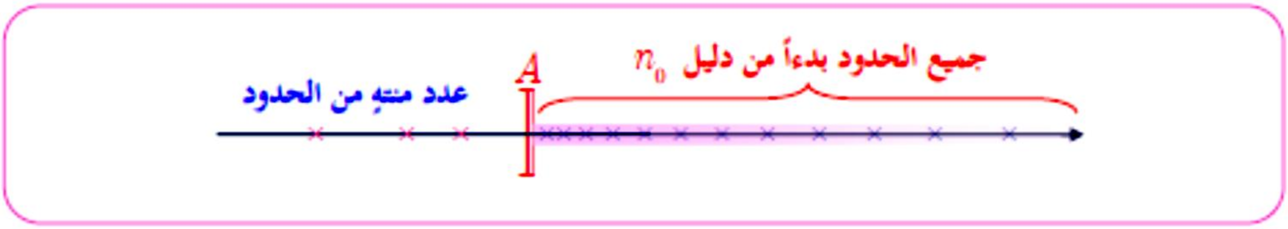
نقول ان المتتالة متقاربة $\lim_{n\to+\infty} u_n = l$ اذا وجد مجال مفتوح ومركزه l يحوي كل حدود المتتالية باستثناء عدد منتهي منها



متتاليات مرجعية : $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}, \frac{1}{n}, \dots\right) = 0$ هذه المتتاليات متقاربة من الصفر

مثال : لتكن $(u_n)_{n\geq 0}$ متتالية متقاربة وجميع القيم ضمن المجال $[2, 16]$ اوجد النهاية

نقول ان المتتالية متباعدة ويكون $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ اذا وجدا مجال من الشكل $[A, +\infty[$ يحوي جميع حدود المتتالية باستثناءعدد منتهي منها



مبرهنة : اذا كان q عدد حقيقي نميز الحالات

١) $q \leq -1$ فان $\lim_{n\to\infty} q^n = ?$ ليس لها نهاية

٢) $-1 < q < 1$ فان $\lim_{n\to\infty} q^n = 0$

٣) $q = 1$ فان $\lim_{n\to\infty} q^n = 1$

٤) $q > 1$ فان $\lim_{n\to\infty} q^n = \infty$

مثال : لتكن لدينا المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرفة بالشكل $u_n = \left(\frac{4}{5}\right)^n$

١) اثبت ان المتتالية هندسية وعين الاساس

٢) ادرس اطراد المتتالية وادرس تقاربها

امين المحمد ٠٩٤٩٣٩٣٢٧٩

مثال : لتكن لدينا المتتالية $(v_n)_{n\geq 0}$ المعرفة بالشكل $v_n = \left(\frac{5}{4}\right)^n$

١) اثبت ان المتتالية هندسية وعين الاساس

٢) ادرس اطراد المتتالية وادرس تقاربها

مثال : احسب نهاية المتتاليتان $(x_n)_{n\geq 0}$ و $(y_n)_{n\geq 0}$ حيث $x_n = \frac{3^n}{2^n}$ و $y_n = \frac{10^n}{(10.1)^n}$

ملاحظة: اذا كان الحد العام للمتتالية سلسلة مجاميع نكتب الحد العام بالشكل الصريح بطريقة ما ثم ندرس التقارب بالاستفادة من المبرهنة

مثال : لتكن لدينا المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرفة بالشكل $u_n = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{8} - \cdots - \frac{1}{2^n}$

١) اكتب الحد العام بالشكل الصريح

٢) ادرس اطراد المتتالية وادرس تقاربها

مثال : لتكن لدينا المتتالية $(u_n)_{n\geq0}$ المعرفة بالشكل $u_n = 1 + q + q^2 + \cdots + q^n$

حيث $-1 < q < 1$ اكتب الحد العام بدلالة n ثم استنتج النهاية

دراسة تقارب متتالية أي ($\lim_{n\to+\infty} u_n = \begin{cases} +\infty \\ l \end{cases}$) :

اولا : اذا كانت بالشكل الصريح $u_n = f(n)$ تعامل كما التوابع

مثال : لتكن لدينا المتتالية $(u_n)_{n\geq0}$ المعرفة بالشكل $u_n = \frac{2n^2+5n+1}{n^2+n}$ ادرس تقارب المتتالية

مثال : لتكن لدينا المتتالية $(u_n)_{n\geq0}$ المعرفة بالشكل $u_n = \sqrt{\frac{3n+2}{n+1}}$ ادرس تقارب المتتالية

مثال : لتكن لدينا المتتالية $(u_n)_{n\geq0}$ المعرفة بالشكل $u_n = \frac{3n+2}{n+1}$

١) اوجد نهاية المتتالية

٢) عين العدد الطبيعي n_0 بحيث اذا كان $n \geq n_0$ كان $u_n \in]2.99, 3.01[$

أمين المحمد ٠٩٤٩٣٩٣٢٧٩

مثال : لتكن لدينا المتتالية $(u_n)_{n\geq1}$ المعرفة بالشكل $u_n = \frac{1}{n\sqrt{n}}$

١) ادرس تقارب المتتالية

٢) حدد عدد طبيعي n_0 بحيث اذا كان $n \geq n_0$ كان $u_n \in]-10^{-3}, 10^{-3}[$

مثال : لتكن لدينا المتتالية $(u_n)_{n\geq0}$ المعرفة بالشكل $u_n = \frac{3n+1}{n-1}$

١) اوجد نهاية المتتالية

٢) عين العدد الطبيعي n_0 بحيث اذا كان $n \geq n_0$ كان $u_n \in]2.98, 3.02[$

امين المحمد

مثال : لتكن لدينا المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرفة بالشكل $u_n = n\sqrt{n}$

١) ادرس تقارب المتتالية

٢) عين العدد الطبيعي n_0 بحيث اذا كان $n \geq n_0 \Rightarrow u_n > 10^6$

امين المحمد ٠٩٤٤٩٣٩٣٢٧٩

مبرهنات المقارنة

الاولى : لتكن لدينا المتتاليات $(u_n)_{n\geq0}$ و $(v_n)_{n\geq0}$ و $(w_n)_{n\geq0}$ وكان $w_n \leq u_n \leq v_n$

$$\left.\begin{matrix} \lim\limits_{n\to+\infty} w_n = l \\ \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = l \end{matrix}\right) \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$$

مثال : لتكن لدينا المتتالية $(u_n)_{n\geq0}$ المعرفة بالشكل $u_n = \frac{\sin n}{n+1}$ ادرس تقارب المتتالية

الثانية : لتكن لدينا المتتاليتان $(u_n)_{n\geq1}$ و $(v_n)_{n\geq1}$ وتحقق $|u_n - l| < v_n$

وكان $\lim_{n\to+\infty} v_n = 0 \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} u_n = l$

مثال : لتكن لدينا المتتالية $(u_n)_{n\geq0}$ تحقق $|u_n - 5| < \frac{2n+1}{n^2}$ ادرس تقارب المتتالية $(u_n)_{n\geq0}$

امين المحمد ٠٩٤٤٣٩٣٢٧٩

الثالثة : لتكن لدينا المتتاليتان $(u_n)_{n\geq1}$ و $(v_n)_{n\geq1}$ تحققان $u_n \leq v_n$

١ - اذا كان $\lim_{x\to\infty} u_n = +\infty$ فان $\lim_{x\to\infty} v_n = +\infty$

٢ - اذا كان $\lim_{x\to\infty} v_n = -\infty$ فان $\lim_{x\to\infty} u_n = -\infty$

تمرين : لتكن لدينا المتتالية $(x_n)_{n\geq0}$ حيث $x_0 = 3$ و $x_{n+1} = \frac{1}{3}x_n - 2$ والمتتالية $(y_n)_{n\geq0}$ حيث $y_n = x_n + 3$

١) a) اثبت ان المتتالية $(y_n)_{n\geq0}$ هندسية

b) احسب y_n بدلالة n ثم استنتج x_n

2) نضع $S_n = y_0 + y_1 + \cdots + y_n$ و $S'_n = x_0 + x_1 + \cdots + x_n$

a) احسب كلا من S_n و S'_n بدلالة n

b) استنتج نهاية كل من $(S_n)_{n\geq0}$ و $(S'_n)_{n\geq0}$

أمين المحمد ٠٩٤٩٣٩٣٢٧٩

امين المحمد ٠٩٤٩٣٩٣٢٧٩

تمرين : نتامل متتالية $(u_n)_{n\geq0}$ ، معرفة وفق العلاقة التدريجية $u_0 = s$ و $u_{n+1} = au_n + b$

١) نفرض $a = 1$ ، اثبت ان المتتالية حسابية واحسب u_n بدلالة n و b و s

٢) نفرض $a \neq 1$ ، ونضع l الحل الوحيد للمعادلة $x = ax + b$

a) نعرف $(t_n)_{n\geq0}$ بالعلاقة $v_n = t_n - l$. برهن ان $(t_n)_{n\geq0}$ متتالية هندسية .

b) استنتج صيغة t_n بدلالة n و b و a و s في هذه الحالة

c) برهن انه في حالة $-1 < a < 1$ تتقارب $(u_n)_{n\geq0}$، واحسب نهايتها بدلالة b و a و s

امين المحمد ٠٩٤٩٣٩٣٢٧٩

تمرين : بين ان المتتالية $(u_n)_{n\geq1}$ معرفة وفق $u_n = \frac{\cos 2n}{\sqrt{n}}$ تحقق $-\frac{1}{\sqrt{n}} < u_n < \frac{1}{\sqrt{n}}$ وذلك ايا يكن $n \geq 1$ ثم استنتج نهاية المتتالية $(u_n)_{n\geq1}$

امين المحمد ٠٩٤٩٣٩٣٢٧٩

تمرين : بين ان المتتالية $(u_n)_{n\geq1}$ معرفة وفق $u_n = n + 1 - \cos n$ تحقق $n < u_n < n + 2$ وذلك ايا يكن $n \geq 1$ ثم استنتج نهاية المتتالية $(u_n)_{n\geq1}$

احسب نهاية المتتاليات التالية

$u_n = \dfrac{5n^2 - 3n + 7}{n^2 + n + 1}$	$u_n = n - \dfrac{1}{n+1}$	$u_n = \dfrac{2n+3}{3n-1}$
$u_n = \dfrac{2n^2 - 1}{3n + 5}$	$u_n = \dfrac{n}{4} + \dfrac{2n}{n^2 + 1}$	$u_n = \dfrac{-3n^2 + 2n + 4}{2(n+1)^2}$
$u_n = cos\left(\dfrac{2\pi n}{3n+1}\right)$	$u_n = \dfrac{10n - 3}{n^2 + 1}$	$u_n = \sqrt{\dfrac{4n-3}{n+1}}$
$u_n = \sqrt{n^2 + n} - n - \dfrac{1}{2}$	$u_n = \dfrac{2n + (-1)^n}{3n}$	$u_n = sin\left(\dfrac{n\pi + 1}{2n+1}\right)$
$u_n = \dfrac{n\sqrt{n} + n}{n + 2}$	$u_n = \sqrt{2n^2 - 5} - n\sqrt{2}$	$u_n = \dfrac{n! - 2}{n!}$
$u_n = \dfrac{\sqrt{n} + 1}{n + 1}$	$u_n \dfrac{n}{\sqrt{n+1}} - \dfrac{n}{\sqrt{n+2}}$	$u_n = \dfrac{\sqrt{n} + 1}{n + 1}$
$u_n\sqrt{2n^2 - 5} - \sqrt{3}n$	$u_n = \dfrac{3n - \sqrt{9n^2 + 1}}{\sqrt{n^2 + 5}}$	$u_n = n^2\left(\sqrt{2 + \dfrac{1}{n}} - \sqrt{2}\right)$

امين المحمد ٠٩٤٩٣٩٣٢٧٩

امين المحمد ٠٩٤٩٣٩٣٢٧٩

امين المحمد ٠٩٤٩٣٩٣٢٧٩

مثال : في كل من الحالات التالية مثل الحدود الاولى للمتتالية ثم خمن جهة اطرادها

١) $u_0 = 2$ و $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n - 3$

٢) $u_0 = 1$ و $u_{n+1} = -\frac{1}{2}u_n$

٣) $u_0 = 1$ و $u_{n+1} = u_n + 2$

امين المحمد ٠٩٤٩٣٩٣٢٧٩

المتتاليات المحدودة

١) نقول ان المتتالية $(u_n)_{n\geq n_0}$ محدودة من الاعلى اذا وجد $A \in R$ حيث $u_n \leq A$ ونسمي A حد راجح على المتتالية

٢) نقول ان المتتالية $(u_n)_{n\geq n_0}$ محدودة من الادنى اذا وجد $B \in R$ حيث $u_n \geq B$ ونسمي B حد قاصر عن المتتالية

٣) نقول ان المتتالية $(u_n)_{n\geq n_0}$ محدودة اذا كانت محدودة من الادنى والاعلى أي $A \leq u_n \leq B$

مثال : لتكن لدينا المتتالية $(u_n)_{n\geq n_0}$ حيث $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ اثبت ان $u_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$ واستنتج انها محدودة

احمد المحمد ٠٧٨٠٩٤٩٣٩٣٢٧٩

ملاحظة : لاثبات ان المتتالية التدريجية محدودة او مطردة نستخدم الاثبات بالتدريج (هناك طريقة اخذ تابع)

مثال : لتكن لدينا المتتالية $(u_n)_{n\geq n_0}$ حيث $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \sqrt{u_n + 1} \end{cases}$

١) اثبت ان $0 < u_n < 2$

٢) اثبت ان المتتالية متزايدة

امين المحمد ٠٩٤٩٣٩٣٢٧٩

ملاحظة : اذا كانت المتتالية منتهية ومتزايدة فان نهايتها هي اصغر حد راجح واذا كانت منتهية ومتناقصة فان نهايتها هي اكبر حد قاصر

تمرين : لتكن المتتالية $(u_n)_{n\geq 1}$ المعرفة بالشكل $u_n = 5 - \frac{10}{n^2}$ بين أي الاعداد راجح عليها 0 و 6 و 4.999 و 5

تمرين:لتكن لدينا المتتالية $(u_n)_{n\geq n_0}$ المعرفة وفق $u_n = \frac{n^2+n+1}{n^2-n+1}$ اثبت ان $1 \leq u_n \leq 3$ ايا كان العدد الطبيعي n

تمرين :فيما يلي اعط متتاليتان $(t_n)_{n\geq2}$ و $(s_n)_{n\geq2}$ تختلفان عن $(u_n)_{n\geq n_0}$ حيث $t_n \leq u_n \leq s_n$ ايا كان العدد الطبيعي n

١) $u_n = \frac{n+2}{n+1}$ ٢) $u_n = \frac{5n+1}{n+1}$ ٣) $u_n = \frac{2n-3}{(n-1)(n+2)}$ ٤) $u_n = \frac{n^2-4n+7}{n-1}$

٥) $u_n = \sqrt{2+n}$ ٦) $u_n \frac{1}{\sqrt{n+2}}$

امين المحمد ٠٩٤٩٣٩٣٢٧٩

تمرين : فيما يلي بين اذا كانت المتتالية محدودة من الاعلى او من الادنى

١) $u_n = \sin n$ ٢) $u_n = 1 + \frac{1}{n^2}$ ٣) $u_n = \frac{1}{n+2}$

٤) $u_n = \frac{1}{1+n^2}$ ٥) $u_n = \frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$ ٦) $u_n = \sqrt{\frac{n^2-1}{n^2+1}}$

٧) $u_n = \frac{-2}{\sqrt{2n+3}}$ ٨) $u_n = n\sqrt{3} - 2$ ٩) $u_n = n^2 + n - 1$

١٠) $u_n = \frac{1}{n+1} + n^2$ ١١) $u_n = n + \cos n$ ١٢) $u_n = (-1)^n \times n^2$

ايمن المحمد ٠٩٤٤٩٣٩٣٢٧٩

ثانيا: اذا كانت المتتالية من الشكل $u_{n+1} = f(u_n)$

مبرهنة : اذا كانت المتتالية متزايدة و محدودة من الاعلى فهي متقاربة واذا كانت متناقصة ومحدودة من الادنى فهي متقاربة

نلاحظ ان هذه المبرهنه لا تعطي جواب للنهاية تتم في المبرهنة التالية

مبرهنة : اذا كانت المتتالية من الشكل $u_{n+1} = f(u_n)$ ومتقاربة فان نهاية المتتالية هو حل المعادلة $f(x) = x$ (هندسيا هي فاصلة نقطة تقاطع C_f مع منصف الربع الاول)

امين المحمد ٠٩٤٩٣٩٣٢٧٩

تمرين : لتكن لدينا المتتالية $(u_n)_{n\geq1}$ المعرفة بالشكل : $u_n = \frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{3}{3^3} + \frac{4}{3^4} + \cdots + \frac{n}{3^n}$

١) اثبت بالتدريج على العدد n . ان $n \leq 2^n$ مهما كان العدد الطبيعي n

٢) استنتج مما سبق عنصرا راجحا على المتتالية $(u_n)_{n\geq1}$

امين المحمد ٠٩٤٩٩٣٣٢٧٩

المتتاليتان المتجاورتان

تعريف : نقول ان المتتاليتان $(u_n)_{n\geq 0}$ و $(v_n)_{n\geq 0}$ متجاورتان اذا تحقق

١) المتتاليتان مختلفتان في الاطراد أي (احداهما متزايدة والاخرى متناقصة)

٢) المتتاليتان متقاربتان من نفس العدد او($\lim_{n\to\infty}(u_n - v_n) = 0$)

مثال : اثبت ان المتتاليتان $(u_n)_{n\geq 0}$ و $(v_n)_{n\geq 0}$ متجاورتان حيث $u_n = \frac{n}{n+1}$ و $v_n = \frac{n+1}{n}$

امثلة : بين اذا كانت المتتاليتان $(t_n)_{n\geq 0}$ و $(s_n)_{n\geq 0}$ متجاورتان

$(s_n)_{n\geq 0}$	$(t_n)_{n\geq 0}$
$s_n = \frac{1}{n+1}$	$t_n = \frac{1}{2n+4}$
$s_n = 1 + \frac{1}{n^2}$	$t_n = \frac{n-1}{n}$
$s_n = 2 + \frac{1}{n^2}$	$t_n = 2 - \frac{1}{n}$
$s_n = t_n + \frac{1}{n}$	$t_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2}$
$s_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n}$	$t_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n-1}$
$s_n = t_n + \frac{1}{n}$	$t_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n}$

امين المحمد ٠٩٤٩٣٩٣٢٧٩

أمين المحمد ٠٩٤٩٣٩٣٢٧٩

تمرين : لتكن المتتالية $(u_n)_{n\geq1}$ المعرفة بالشكل $u_n = \frac{1}{n!}$

١) احسب الحدود الستة الاولى

٢) تيقن ان $0 < u_n \leq \frac{1}{n}$ ثم استنتج نهاية $(u_n)_{n\geq1}$

امين المحمد ٠٧٩٠٩٣٩٢٣٧٩

تمرين : المتتالية $(u_n)_{n\geq1}$ معرفة وفق $u_n = \left(\frac{n}{10} - 1\right)^n$

١) اعط قيما تقريبية لحدودها الاولى من u_1 حتى u_{11}

٢) اثبت ان جميع حدودها ، بدءا من الحد u_{31} . تحقق $u_n \geq 2^n$ واستنتج نهاية $(u_n)_{n\geq1}$

أمين المحمد ٠٩٤٩٣٩٣٢٧٩

تمرين : المتتالية $(u_n)_{n\geq 1}$ معرفة وفق $u_n = \frac{n^3}{n!}$

١) احسب حدودها الستة الاولى

٢) a) اثبت ان $n! \geq n(n-1)(n-2)(n-3)$ ايا يكن العدد $n \geq 4$

b) استنتج نهاية $(u_n)_{n\geq 1}$

امين المحمد ٠٩٤٩٣٩٣٢٧٩

تمرين : المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ معرفة بالصيغة $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$

١) اثبت ان $0 < u_n \leq 1$ ايا يكن n

٢) a) اثبت انه اذا كان $n > 10^4$ كان $0 < u_n < 10^{-2}$

b) اثبت انه اذا كان $n > 10^8$ كان $0 < u_n < 10^{-4}$

c) كيف نختار n كي نحصل $u_n < 10^{-8}$

٣) ما نهاية المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$

امين المحمد ٠٩٤٩٩٣٣٢٧٩

امين المحمد ٠٩٤٩٣٩٣٢٧٩

تمرين : المتتاليتان $(x_n)_{n\geq0}$ و $(y_n)_{n\geq0}$ معرفتان وفق $x_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}}$ و $y_n = \frac{1}{n}$

١) اثبت ان العدد 1 راجح على $(x_n)_{n\geq1}$

٢) اثبت ان $x_n \leq y_n$ ايا يكن $n \geq 1$

٣) أي النتيجتين اكثر اهتماما

أمين المحمد ٠٩٤٩٣٩٣٢٧٩

تمرين :المتتاليتان $(x_n)_{n\geq 0}$ و $(y_n)_{n\geq 0}$ معرفتان وفق $x_n = \frac{2n^2+5n+3}{2n+1}$ و $y_n = 5n$

١) اثبت ان $x_n \leq y_n$ ايا كان $n \geq 1$

٢) اثبت ان $x_n \geq \frac{1}{5} y_n$ ايا كان $n \geq 1$

امين المحمد ٠٩٤٩٩٣٣٢٧٩

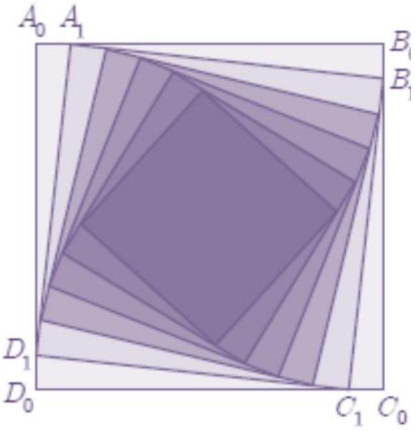
تمرين : المتتاليتان $(u_n)_{n\geq4}$ معرفة وفق $u_n = \frac{1}{n^2-5n+6}$ اثبت انها محدودة من الاعلى ب $\frac{1}{2}$

تمرين : ليكن a و b عددان يحققان $a > b > 0$ ولتكن $(u_n)_{n\geq0}$متتالية معرفة وفق

$$u_n = \frac{a^n-b^n}{a^n-b^n}$$

امين المحمد ٠٩٤٩٣٩٣٢٧٩

دراسة متتالية من النمط $u_{n+1} = f(u_n)$



نرمز الى مربع $A_0B_0C_0D_0$ الذي طول ضلعه 10 بالرمز s_0 والى المربع $A_1B_1C_1D_1$ الذي تقع رؤوسه على اضلاع s_0 كما في الشكل المرافق بالرمز s_1 حيث $A_0A_1 = 1$. بالطريقة التي رسمنا فيها s_1 انطلاقا من s_0 ، نرسم s_2 من s_1 ونقبل امكانية استمرار الرسم عدد غير منتهي من المرات ونرمز لطول ضلع المربع s_n بالرمز l_n نهدف الى دراسة المتتالية $(l_n)_{n\geq 0}$ وتعين نهايتها

امين المحمد ٠٩٤٩٣٩٣٢٧٩

مجموع عدد غي منتهي من الحدود

تمرين : ليكن $u_n = \frac{1}{n(n+1)}$ في حالة عدد طبيعي غير معدوم n وليكن

$$s_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$$

ادرس المتتالية $(s_n)_{n\geq 0}$

دراسة متتاليتين معا

ليكن a و b عددين يحققان $0 < a < b$ ولنتامل المتتاليتان $(x_n)_{n\geq 0}$ و $(y_n)_{n\geq 0}$ المعرفتين وفق $x_0 = a$ و $y_0 = b$ وعند كل عدد طبيعي $x_{n+1} = \frac{2x_n y_n}{x_n + y_n}$ و $y_{n+1} = \frac{x_n + y_n}{2}$ الهدف دراسة المتتليتان معا

امين المحمد ٠٩٤٩٣٩٣٢٧٩

تمرين: ادرس تقارب المتتاليتان : $x_n = \frac{3^n - 2^n}{3^n - 1}$ و $y_n = \frac{10^n - 1}{10^n + 1}$

امين المحمد ٠٩٤٩٣٣٢٧٩

تمرين: المتتالية $(u_n)_{n\ge 0}$ معرفة وفق : $u_0=\frac{3}{2}$ وعند كل $n\in N$ ، $u_{n+1}=u_n^2-2u_n+2$

١) اثبت مستعملا بالتدريج ان $1\le u_n\le 2$ ايا كان العدد $n\in N$

٢) a) اثبت ان $u_{n+1}-u_n=(u_n-2)(u_n-1)$ ايا كان العدد $n\in N$

b) استنتج ان المتتالية $(u_n)_{n\ge 0}$ متناقصة

٣) اهي متقاربة ؟

امين المحمد ٠٩٤٩٣٩٣٢٧٩

تمرين :المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ معرفة عند كل $n \geq 1$ حيث $u_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!}$

١) اثبت مستعملا بالتدريج ان $\frac{1}{n1} \leq \frac{1}{2^{n-1}}$

٢) استنتج ان 3 راجح على المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$

٣) اثبت ان $(u_n)_{n\geq 0}$ متقاربة

امين المحمد ٠٩٤٩٣٩٣٢٧٩

تمرين :نتامل متتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ تحقق الشرط التي : يوجد عدد حقيق $l > 0$ يحقق عند كل n العلاقة

$$0 \leq u_{n+1} - l \leq \frac{2}{3}(u_n - l)$$

اثبت ان المتتالية محدودة من الادنى واثبت انها متناقصة واثبت انها متقاربة من l

من اجل $u_0 = 1$ عين العدد الطبيعي a حيث اذا كان $n > a$ كان $u_n \in]l - 10^{-3}, l + 10^{-3}[$

امين المحمد

امين المحمد ٠٩٤٩٣٩٣٢٧٩

تمرين : المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ معرفة بالشكل $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$

١) اثبت ان $u_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$ ثم استنتج ان $(u_n)_{n\geq 0}$ متقاربة من الصفر

٢) المتتالية $(v_n)_{n\geq 0}$ من اجل $n \geq 1$ وفق $v_n = 1 + \frac{1}{1+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$

a) استفد من عبارتي u_n لكتابة v_n بعبارة بسيطة بدلالة n

b) استنتج نهاية المتتالية $(v_n)_{n\geq 1}$

امين المحمد ٠٩٤٤٩٣٩٣٢٧٩

تمرين : المتتالية $(u_n)_{n\geq 1}$ المعرفة عند كل $n \geq 1$ وفق $u_n = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{n^2}$

١) اثبت ان المتتالية $(u_n)_{n\geq 1}$ متزايدة

٢) اثبت بالتدريج ان $u_n \leq 2 - \frac{1}{n}$ ايا كان $n \geq 1$

٣) ماذا يمكنك ان تستنتج بالنسبة الى المتتالية $(u_n)_{n\geq 1}$

امين المحمد ٠٩٤٩٣٩٣٢٧٩

تمرين : ليكن عند كل عدد طبيعي $u_n = \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$

١) اوجد عددين حقيقين a و b يحققان عند كل عدد طبيعي n و $u_n = \frac{a}{2n-1} + \frac{b}{2n+1}$

٢) ليكن ، في حالة عدد طبيعي n ، $s_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$ عبر عن s_n بدلالة n واستنتج نهاية المتتالية $(s_n)_{n\geq 0}$

امين المحمد ٠٩٤٤٩٣٩٣٢٧٩

تمرين : لنضع في حالة عدد طبيعي موجب تماما n $u_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$

١) اثبت ان المتتالية $(u_n)_{n\geq 1}$ متزايدة

٢) اكتب $u_{2n} - u_n$ واستنتج ان $u_{2n} - u_n \geq \frac{1}{2}$

٣) اثبت مستعملا البرهان بالتدريج ان $u_{2^n} \geq \frac{n}{2}$ ايا كان العدد الطبيعي غير المعدوم

٤) هل للمتتالية $(u_n)_{n\geq 1}$ نهاية حقيقية

أمين المحمد ٠٩٤٩٣٩٣٢٧٩

تمرين : المتتالية $(u_n)_{n\geq 1}$ معرفة عند كل عدد طبيعي $n \geq 1$ وفق

$$u_n = \frac{n}{n^2+1} + \frac{n}{n^2+2} + \frac{n}{n^2+3} + \cdots + \frac{n}{n^2+n}$$

١) اثبت ان $\frac{n^2}{n^2+n} \leq u_n \leq \frac{n^2}{n^2+1}$ ايا كان العدد $n \geq 1$

٢) استنتج تقارب المتتلية $(u_n)_{n\geq 1}$ وما نهايتها

امين المحمد ٠٩٤٩٣٩٣٢٧٩

تمرين : المتتالية $(u_n)_{n\geq1}$ معرفة عند كل عدد طبيعي $n \geq 1$ وفق

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}$$

١) اثبت ان $\frac{n}{\sqrt{n^2+n}} \leq u_n \leq \frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$ ايا كان $n \geq 1$

٢) استنتج تقارب المتتالية $(u_n)_{n\geq1}$ وما نهايتها

امين المحمد ٠٩٤٩٣٩٣٢٧٩

تمرين : بين ان المتتاليتين $(x_n)_{n\geq 1}$ و $(y_n)_{n\geq 1}$ متجاورتين

$$x_n = \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} - 2\sqrt{n+1}$$

$$y_n = \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} - 2\sqrt{n}$$

امين المحمد ٠٩٤٩٣٩٣٢٧٩

تمرين :المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ معرفة وفق $u_0 = 3$ وعند كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \frac{2}{u_n+1}$

١) اثبت ان $u_n > 0$ ايا كان العدد الطبيعي n

٢) المتتالية $(t_n)_{n\geq 0}$ معرفة عند كل عدد طبيعي n وفق $t_n = \frac{u_n-1}{u_n+2}$ اثبت ان المتتالية $(t_n)_{n\geq 0}$ متتالية هندسية واحسب نهايتها

٣) استنتج ان المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ متقاربة واحسب نهايتها

امين المحمد ٠٩٤٤٩٣٩٣٢٧٩

تمرين المتتالية $(u_n)_{n\geq0}$ معرفة وفق $u_0 = 2$ وعند كل عدد طبيعي $u_{n+1} = \frac{u_n}{2} + \frac{1}{u_n}$

١) اثبت ان $u_n > 0$ ايا كان العدد n

٢) المتتالية المعرفة بالصيغة $u_{n+1} = f(u_n)$ عين التابع f المعرف عل $]0, +\infty[$

a) ادرس تغيرات التابع f وارسم خطه البياني C_f ومقارباته وارسم على الشكل نفسه المستقيم d الذي معادلته $y = x$ (منصف الربع الاول) ، بعد ان تحسب احداثيات نقطة تقاطع d و c_f

b)بين ان ماسبق يفيد في اثبات ان f متزايد على المجال $]\sqrt{2}, +\infty[$ وان $f(x) \leq x$ على هذا المجال

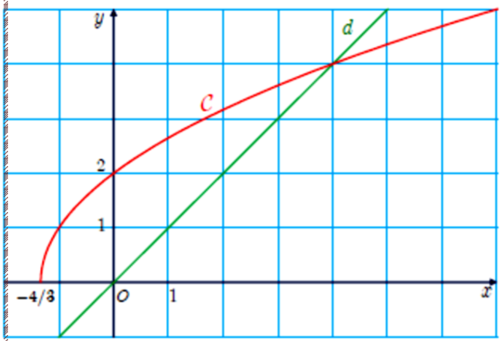
٣) استفد من الرسم لتنشئ الحدود الاولى من المتتالية المدروسة ، اتجدها مطردة ، ماجهة الاطراد ؟ اهي محدودة ؟ ثم برهن صحة توقعاتك عن طريق الاستفادة من 2 b لتبرهن بالتدريج ان $\sqrt{2} \leq u_{n+1} \leq u_n$ مهما كان العدد n

٤) استنتج ان المتتالية $(u_n)_{n\geq0}$ متقاربة والحسب نهايتها

ايمن المحمد ٠٩٤٩٣٩٣٢٧٩

امين المحمد ٠٩٤٩٣٩٣٢٧٩

تمرين : المتتالية $(u_n)_{n\geq0}$ معرفة وفق $u_0 > -\frac{4}{3}$ و $u_{n+1} = \sqrt{4+3u_n}$ عند كل عدد طبيعي n . نجد في الشكل ادناه . الخط البياني C للتابع المعرف على المجال $[-\frac{4}{3}, +\infty[$ وفق $f(x) = \sqrt{4+3x}$ والمستقيم d الذي معادلته $y = x$



١) ما احداثيات نقطة تقاطع الخط C والمستقيم d

٢) نفرض في هذا السؤال ان $u_0 = 6$

a) اثبت ان المتتالية $(u_n)_{n\geq0}$ محدودة من الادنى

b) ادرس اطراد المتتالية $(u_n)_{n\geq0}$

c)استنتج ان $(u_n)_{n\geq0}$ متقاربة واوجد نهايتها

٣) a) اثبت ان هذه النتيجة صحيحة من اجل $u_0 > 4$

b) هل النتيجة صحيحة من اجل $-\frac{4}{3} < u_0 < 4$ ؟

امين المحمد ٠٩٤٩٣٩٣٢٧٩

النموذج الوزاري الاول

تمرين : لتكن $(x_n)_{n\geq 0}$ المتتالية المعطاة وفق: $x_0 = 4$ و $x_{n+1} = \frac{3}{4}x_n + 2$ في حالة $n \geq 0$

نعرف $(y_n)_{n\geq 0}$ بالعلاقة $y_n = x_n - 8$

١ – اثبت ان $(y_n)_{n\geq 0}$ متتالية هندسية واكتب x_n بدلالة n واحسب $\lim_{n\to+\infty} x_n$

٢ – اوجد المجموعين التالين بدلالة n : $s_n = y_1 + y_2 + \cdots y_n$ و $s'_n = x_1 + x_2 + \cdots x_n$

امين المحمد ٠٩٤٩٣٩٣٢٧٩

النموذج الوزاري الثاني

تمرين : لتكن $(x_n)_{n\geq 0}$ المتتالية المعطاة وفق: $x_0 = 5$ و $x_{n+1} = \frac{6}{5}x_n + \frac{4}{5}$ في حالة $n \geq 0$

١ – احسب x_1 و x_2 و x_3 ثم ادرس اطراد المتتالية

٢ – نعرف $(y_n)_{n\geq 0}$ بالعلاقة $y_n = x_n + 4$ اثبت ان $(y_n)_{n\geq 0}$ متتالية هندسية

٣ – اكتب y_n بدلالة n ثم احسب $y_2 + \cdots + y_{10}$ بدلالة قوة للعدد $\frac{6}{5}$

امين المحمد ٠٧٨٠٩٤٩٣٩٣٢٧٩

النموذج الوزاري الثالث

لتكن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرفة بالعلاقة التدريجية: $u_0 = \frac{1}{2}$ و $u_{n+1} = \frac{u_n}{2-u_n}$

١ – اثبت ان $0 < u_n < 1$ ايا كانت n من N

٢ – نعرف $(v_n)_{n\geq 0}$ حيث $v_n = \frac{1}{u_n} - 1$ اثبت ان $(v_n)_{n\geq 0}$ متتالية هندسية واستنتج v_n بدلالة n

٣ – اكتب u_n بدلالة n واحسب $\lim_{n\to+\infty} u_n$

٤ – اوجد بدلالة n المجموعين $s_n = v_0 + v_1 + \cdots v_n$ و $s'_n = v_2 + v_4 + \cdots v_{2n}$

أمين المحمد ٠٩٤٩٣٩٣٢٧٩

النموذج الوزاري الخامس

سؤال : لتكن المتتالية $u_n = 4n + 1$ اثبت ان المتتالية حسابية وعين اساسها

واحسب $u_0 + u_1 + \cdots + u_{10}$

تمرين : لتكن المتتاليتين $(x_n)_{n\geq 0}$ و $(y_n)_{n\geq 0}$ المعرفتين وفق: $x_n = \frac{4n+5}{n+1}$ و $y_n = \frac{4n+1}{n+2}$ اثبت ان المتتاليتين $(x_n)_{n\geq 0}$ و $(y_n)_{n\geq 0}$ متجاورتين

امين المحمد ٠٩٤٩٣٩٣٢٧٩

النموذج الوزاري السادس

تمرين : لتكن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعطاة وفق $u_0 = 5:$ و $u_{n+1} = \frac{2u_n+1}{u_n+2}$

١ – اثبت ان $0 \leq u_n \leq 1$

٢ – اثبت ان $(u_n)_{n\geq 0}$ متزايدة

٣ – علل تقارب المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ واحسب نهايتها

امين المحمد ٠٩٤٩٣٩٣٢٧٩

النموذج الوزاري السابع

تمرين : المتتالية $(u_n)_{n\geq 1}$ معرفة عند $n \geq 1$ وفق : $u_n = \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!}$

١ – اثبت ان $\frac{1}{(n+1)!} \leq \frac{1}{2^n}$

٢ – اثبت ان $u_n < 2$ واستنتج ان u_n متقاربة

النموذج الوزاري الثامن

لتكن المتتاليتين $(u_n)_{n\geq1}$ و $(v_n)_{n\geq1}$ المعرفتين وفق العلاقتين $u_n = -\frac{1}{n}$ و $v_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}}$

١ – ادرس اطراد المتتاليتين $(u_n)_{n\geq1}$ و $(v_n)_{n\geq1}$

٢ – اثبت ان المتتاليتين $(u_n)_{n\geq1}$ و $(v_n)_{n\geq1}$ متجاورتان

امين المحمد ٠٩٤٩٣٩٣٢٧٩

النموذج الوزاري العاشر

لتكن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعطاة وفق $u_0 = 2:$ و $u_{n+1} = \frac{u_n}{1+4u_n}$ من اجل كل n من N

١ – اثبت بالتدريج ان $U_n > 0$ ايا كان العدد الطبيعي n

٢ – اثبت ان المتتالية $(v_n)_{n\geq 0}$ المعرفة بالعلاقة $v_n = \frac{1}{u_n}$ حسابية ، ثم اكتب عبارة v_n بدلالة n ثم استنتج عبارة u_n بدلالة n

٣ – ليكن S_n المجموع المعرف بالشكل $S_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_n$ اكتب s_n بدلالة n واستنتج $\lim_{n\to\infty} S_n$

امين المحمد ٠٩٤٩٣٩٣٢٧٩

امين المحمد ٠٩٤٩٣٩٣٢٧٩

ندوة امتحانية اولى 2023

لتكن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرفة وفق العلاقة اتدريجية $\begin{cases} u_0 = -1, u_1 = \frac{1}{2} \\ u_{n+2} = u_{n+1} - \frac{1}{4}u_n \end{cases}$

١ – لنعرف المتتالية $(v_n)_{n\geq 0}$ وفق العلاقة $v_n = u_{n+1} - \frac{1}{2}u_n$ اثبت ان $(v_n)_{n\geq 0}$ هندسية اساسها $\frac{1}{2}$ ثم اكتب عبارة v_n بدلالة n

٢ – لنعرف المتتالية $(w_n)_{n\geq 0}$ وفق العلاقة $w_n = \frac{u_n}{v_n}$ بملاحظة ان $u_{n+1} = v_n + \frac{1}{2}u_n$ و $v_{n+1} = \frac{1}{2}v_n$ اثبت ان $(w_n)_{n\geq 0}$ حسابية اساسها $r = 2$ واكتب عبارة w_n بدلالة n

٣ – استنتج ان عبارة u_n بدلالة n هي $u_n = \frac{2n-1}{2^n}$ ثم ادرس اطراد المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$

٤ – المتتالية $(S_n)_{n\geq 0}$ المعرفة وفق $S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$ اثبت بالتدريج ان $s_n = 2 - \frac{2n+3}{2^n}$

لبنى المحمد ٠٩٤٩٣٩٣٢٧٩

امين المحمد ٠٩٤٩٣٩٣٢٧٩

ندوة امتحانيه ثانية 2023

لتكن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ معرفة بالشكل $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \frac{2u_n+1}{u_n+2} \end{cases}$

١ – نعرف المتتالية $(x_n)_{n\geq 0}$ بالشكل $x_n = \frac{u_n-1}{u_n+1}$ اثبت ان $(x_n)_{n\geq 0}$ هندسية

٢ – جد x_n بدلالة n واحسب نهايتها

٣ – اكتب u_n بدلالة n واستنتج $u_n = \frac{3^n-1}{3^n+1}$ وجد النهاية

امين المحمد ٠٧٩٤٩٣٩٣٢٧٩

الاختبار الاول

اثبت ان المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعطاة تدريجيا: $u_0 = 0$ و $u_{n+1} = \sqrt{1+u_n^2}$ متزايدة تماما

الاختبار الثاني

نعرف المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$كما يلي: $u_0 = 1$ و $u_{n+1} = \sqrt{12+u_n}$

١ – اثبت ان $0 \leq u_n \leq 4$ ايا كان العدد الطبيعي n

٢ – اثبت ان المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ متزايدة

امين المحمد ٠٩٤٩٣٩٣٧٩

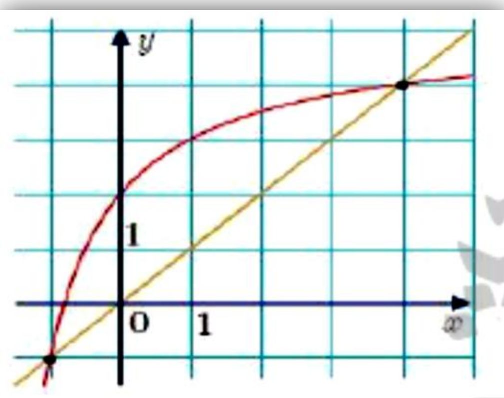
الاختبار الثالث

لتكن المتتاليتين $(u_n)_{n\geq1}$ و $(v_n)_{n\geq1}$ المعرفتين وفق العلاقتين $u_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n}$ و $v_n = u_n + \frac{1}{4n}$ اثبت ان المتتاليتين متجاورتين

امين المحمد ٠٩٤٩٣٩٣٢٧٩

الاختبار الرابع

نعرف المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ كما يأتي
$$\begin{cases} u_0 = \frac{1}{2} \\ u_{n+1} = \frac{5u_n+4}{u_n+2} \end{cases}$$



١ – باستعمال الرسم . مثل على محور الفواصل ودون حساب u_0 و u_1 و u_2 و u_3

٢ – ضع تخمين حول اطراد المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ وتقاربها

٣ – نعرف المتتالية $(v_n)_{n\geq 0}$ بالعلاقة $v_n = \frac{u_n-4}{u_n+1}$

١ – بين ان $(v_n)_{n\geq 0}$ متتالية هندسية وعين الاساس وحدها الاول

٢ – اكتب عبارة v_n بدلالة n ثم استنتج عبارة u_n بدلالة n وعين نهاية المتتالية u_n

امين المحمد ٠٩٤٩٣٩٣٢٧٩

الامتحان الموحد 2017

لتكن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ معرفة تدريجيا وفق $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{u_n}{u_n+1} \end{cases}$

١ – اثبت بالتدريج ان $u_n > 0$ ايا كان العدد الطبيعي n

٢ – اثبت ان المتتالية $(v_n)_{n\geq 0}$ المعرفة بالعلاقة $v_n = \frac{1}{u_n}$ متتالية حسابية واكتب عبارة v_n بدلالة n واستنتج عبارة u_n

امين المحمد ٠٩٤٩٩٣٣٢٧٩

دورة اولى 2017

لتكن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ معرفة تدريجيا وفق $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n - 2 \end{cases}$ ولتكن $(v_n)_{n\geq 0}$ المعرفة وفق $v_n = u_n + 3$

١ – اثبت ان $(v_n)_{n\geq 0}$ متتالية هندسية واوجد اساسها

٢ – اكتب عبارة v_n بدلالة n ثم عبارة u_n بدلالة n

٣ – ليكن في حالة عدد طبيعي n : $S_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_n$ عبر عن S_n بدلالة n واستنتج نهاية المتتالية $(S_n)_{n\geq 0}$

دورة ثانية 2017

لتكن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ معرفة وفق ما ياتي : $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$

١) اثبت ان المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ متناقصة

٢) اثبت ان $1 \leq u_n \leq 0$ واستنتج انها متقاربة واحسب نهايتها

امين المحمد ٠٧٧٩٣٩٣٧٧٩

دورة اولى 2018

لتكن المتتاليتان $(u_n)_{n\geq1}$ و $(v_n)_{n\geq1}$ المعرفتان بالشكل $u_n = 5 - \frac{1}{n}$ و $v_n = 5 + \frac{1}{n^2}$

١) اثبت ان المتتالية $(u_n)_{n\geq1}$ متزايدة

٢) اثبت ان المتتالية $(v_n)_{n\geq1}$ متناقصة

٣) هل المتتاليتان $(u_n)_{n\geq1}$ و $(v_n)_{n\geq1}$ متجاورتان ؟ علل اجابتك

أمين المحمد ٠٩٤٩٣٩٣٧٧٩

دورة ثانية 2018

$(u_n)_{n\geq 0}$ متتالية هندسية اساسها $q=2$ وفيها $u_0=1$ والمطلوب : احسب u_3

واستنتج قيمة المجموع $S=u_3+u_4+\cdots+u_7$

امين المحمد ٠٩٤٩٣٩٣٧٧٩

دورة اولى 2019

لتكن المتتالية $(S_n)_{n\geq 1}$ المعرفة وفق : $S_n = 1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{3^n}$ والمطلوب

١) اثبت ان المتتالية $(s_n)_{n\geq 0}$ متزايدة تماما

٢) اثبت ان s_n تكتب بالشكل $s_n = \frac{1}{2}\left(3-\frac{1}{3^n}\right)$ ثم استنتج عنصرا راجحا على المتتالية $(s_n)_{n\geq 0}$ وبين انها متقاربة

امين المحمد ٠٩٤٩٣٩٣٢٧٩

دورة ثانية 2019

لتكن المتتالية $(v_n)_{n\geq 0}$ المعرفة بالشكل $u_n = \frac{2n-1}{n+1}$ المطلوب :

١) ادرس اطراد المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$

٢) اثبت ان العدد 2 راجح على المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$

٣) احسب $\lim_{n\to+\infty} u_n$ ثم جد عددا طبيعيا n_0 يحقق ايا كان $n > n_o$ كان $u_n \in]1.9\,, 2.1[$

امير المحمد ٠٩٤٩٣٩٣٢٧٩

دورة اولى 2020

نتامل المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرفة بالعلاقة التدريجية $u_0 = 3$ و $u_{n+1} = \frac{u_n}{2} + \frac{2}{u_n}$ عند $n \geq 0$

١ – اثبت ان التابع $f(x) = \frac{x}{2} + \frac{2}{x}$ متزايد تماما على المجال $[2, +\infty[$

٢ – اثبت بالتدريج ان $2 \leq u_{n+1} \leq u_n$ ايا كان العدد الطبيعي n

٣ – استنتج ان المتتالية متقاربة ، واحسب نهايتها

امين المحمد ٠٩٤٩٣٩٣٢٧٩

امين المحمد ٠٩٤٩٣٩٣٢٧٩

دورة ثانية 2020

لتكن المتتالية $(u_n)_{n\geq 1}$ المعرفة وفق : $S_n = \frac{1}{e} + \frac{2}{e^2} + \cdots + \frac{n}{e^n}$ والمطلوب

١) اثبت ان $n \leq 2^n$ ايا كان العدد الطبيعي $n \geq 1$

٢) استنتج ان $\frac{2}{e-2}$ عنصر راجح على المتتالية $(u_n)_{n\geq 1}$

٣) اثبت ان المتتالية $(u_n)_{n\geq 1}$ متقاربة .

امين المحمد ٠٩٤٩٩٣٩٣٢٧٩

دورة ثانية 2021

لنتامل المتتالية $(u_n)_{n\geq0}$ المعرف وفق $u_0 = \frac{5}{2}$ وايا كان العدد الطبيعي n :

$$u_{n+1} = (u_n - 2)^2 + 2$$

١) اثبت بالتدريج ان $2 \leq u_n \leq 3$ ايا كان العدد الطبيعي n

٢) اثبت ان المتتالية $(u_n)_{n\geq0}$ متناقصة

٣) استنتج تقارب المتتالية $(u_n)_{n\geq0}$ وجد $\lim_{n\to+\infty} u_n$

أمين المحمد ٠٩٤٤٩٣٩٣٢٧٩

دورة اولى 2022

نعرف المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ وفق $u_0 = \frac{5}{2}$ و $u_{n+1} = u_n^2 - 4u_n + 6$ والمطلوب :

١) اثبت بالتدريج ان $2 \leq u_n \leq 3$ ايا كان العدد الطبيعي n

٢) اثبت ان $u_{n+1} - u_n = (u_n - 3)(u_n - 2)$

٣) استنتج ان المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ متناقصة

٤) بين ان المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ متقاربة واحسب نهايتها

امين المحمد ٠٩٤٩٣٩٣٢٧٩

امين المحمد ٠٩٤٩٣٩٣٢٧٩

دورة ثانية 2022

لتكن المتتاليتان $(u_n)_{n\geq1}$ و $(v_n)_{n\geq1}$ المعرفتان وفق $u_n = \frac{1}{5} + \frac{1}{5^2} + \cdots \frac{1}{5^n}$ و $v_n = u_n + \frac{1}{2^n}$

المطلوب :

١ – اثبت ان $(u_n)_{n\geq1}$ متزايدة و $(v_n)_{n\geq1}$ متناقصة

٢ – استنتج ان المتتاليتان $(u_n)_{n\geq1}$ و $(v_n)_{n\geq1}$ متجاورتان

٣ – اثبت ان $u_n = \frac{1}{4}(1 - \frac{1}{5^n})$ ثم احسب $\lim_{n\to+\infty} u_n$ واستنتج $\lim_{n\to+\infty} v_n$

امين المحمد ٠٩٤٩٣٩٣٢٧٩

دورة اولى 2023

لتكن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ وفق $u_0 = 2$ و $u_{n+1} = 3 + \sqrt{u_n - 1}$ والمطلوب :

١ – اثبت ان $2 \leq u_n \leq 5$ ايا كان $n \geq 0$

٢ – اثبت ان المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ متزايدة تماما ، واستنتج تقاربها، ثم احسب نهايتها

دورة ثانية 2023

المتتالية $(u_n)_{n\geq 1}$ معرفة وفق $u_n = \frac{n}{\sqrt{n^4+1}} + \frac{n}{\sqrt{n^4+2}} + \frac{n}{\sqrt{n^4+3}} + \cdots + \frac{n}{\sqrt{n^4+n}}$ المطلوب

١) اثبت ان $\frac{n^2}{\sqrt{n^4+n}} \leq u_n \leq \frac{n^2}{\sqrt{n^4+1}}$ ايا كان $n \geq 1$

٢) استنتج تقارب المتتالية $(u_n)_{n\geq 1}$ واحسب النهاية .

امين المحمد ٠٩٤٩٣٩٣٢٧٩

تمرين : لتكن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ كما ياتي حيث $u_0 = 1$ و $u_{n+1} = \sqrt{12 + u_n}$

١) اثبت ان $0 \leq u_n \leq 5$ ايا كان العدد الطبيعي n

٢) اثبت ان المتتالية $(u_n)_{n\geq 1}$ متزايدة تماما واستنتج انها متقاربة واحسب نهايتها

امين المحمد ٠٩٤٩٣٩٣٢٧٩