المساعد في الاشعة لطلاب البكلوريا

اعداد : أمين المحمد

٠٩٤٩٣٩٣٢٧٩

Amen Almohamd

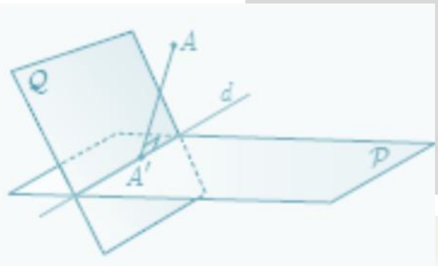
عرض ملفك الشخصي

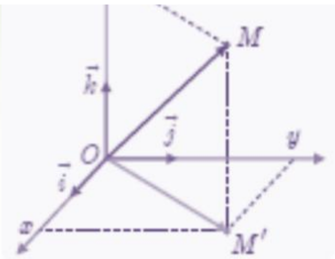
لكل عمل اذا تم نقصان

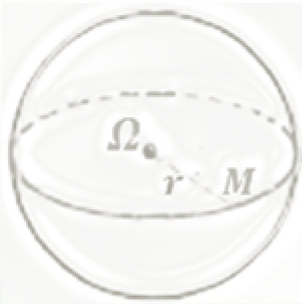
ارجو من الله ان اكون قد وفقت في تقديم ما ينفع وارجو التماس العذر لكل هفوة

هذا العمل موجه لطلابي لتبسيط الدراسة لهم . ما كان من توفيق فهو من الله

وما كان من خطأ او نسيان فهو مني ومن الشيطان



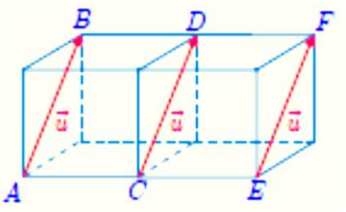




المساعد في الاشعة من الالف الى الياء في منهاج البكلوريا

هندسيا :

تعريف : الشعاع $\vec{u}$ هو بنية رياضية جديدة يتعين بثنائية من النقاط (A, B) . بتالي $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ ويعين ثلاثة عناصر



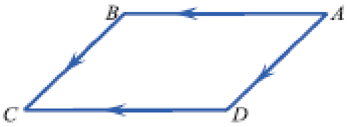
المنحى :المستقيم (AB) او أي مستقيم يوازيه

الجهة : من A الى B او العكس

النظيم : (الطول) : هو المسافة بين النقطتين A و B

حالة خاصة : الشعاع الصفري هو الشعاع المعين ب (A, A) أي $\vec{u} = \overrightarrow{AA} = \vec{0}$

تساوي الاشعة : نقول عن شعاعين انهما متساويان اذا كان لهما نفس العناصر السابقة في الشكل السابق نلاحظ ان $\vec{u} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{EF}$

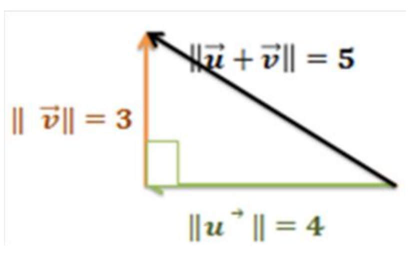


الشعاعان المتعاكسان : نقول عن شعاعين انهما متعاكسين اذا كان لهما نفس المنحى والنظيم ومختلفان في الجهة مثل : $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{CD}$

تساؤل : اذا كان المثلث ABC متساوي الاضلاع فهل الشعاعان $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ متساويان

خاصة : اذا كان $ABCD$ متوازي اضلاع فان $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$

$$\|\vec{u} + \vec{v}\| \leq \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$$

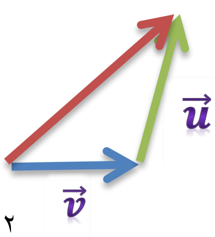


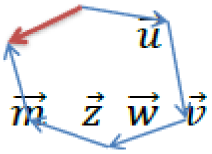
مثال : ليكن $ABCD$ مربع مركزه O

١- $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$
٢- $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$
٣- $\overrightarrow{BO} = \overrightarrow{OD}$
٤- $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{CD}$

الاشعة المتتالية : نقول عن شعاعين انهما متتاليان اذا كان نهاية الاول هو بداية للثاني مثل $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{BC}$

جمع الاشعة : طريقة شال للأشعة المتتالية ويكون الشعاع الناتج هو بداية الاول نهاية الثاني



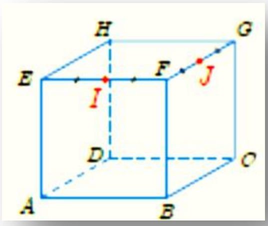


ملاحظة : يمكّن تعميم قاعدة شال من أجل أي عدد من الأشعة ونحصل بذلك

او طريقة قطر متوازي الاضلاع للأشعة التي لها نفس المبدأ

ملاحظة : طرح شعاعين لهما نفس المبدأ هو نهاية الثاني نهاية الاول أي $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CB}$

تحليل شعاع(شال العكسية) أي $\overbrace{\overrightarrow{AB}}^{C} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}$ تسمى زرع نقطة



مثال ١ : في الشكل الجانبي

١ - اوجد ناتج ما يلي :

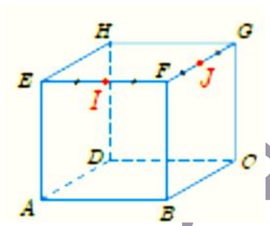
$\overrightarrow{HE} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \dots\dots\dots$ و $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CG} + \overrightarrow{FI} = \dots\dots$

$\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{BA} = \dots + \dots = \dots$و

ملاحظة : لإثبات صحة مساواة نوجد ناتج الطرف الاول وناتج الطرف الثاني

٢ - اثبت صحة العلاقة التالية : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CF} = \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{CB}$

معلومة : من اجل ثلاث نقاط متمايزة A و B و C توجد نقطة وحيدة M تحقق : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CM}$



مثال٢ : في الشكل الجانبي بين موقع النقطة M المحققة للعلاقة

$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{FE} + \overrightarrow{DG} =$---

$\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{HB}) =$--

----

$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AG} + \overrightarrow{BF} =$ --

----

دورة $\overrightarrow{DM} = \overrightarrow{DH} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{GJ}$ --

----

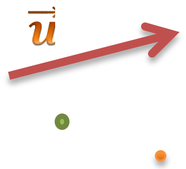
$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AH} - \overrightarrow{BM}$ --

----

ضرب شعاع بعدد: ليكن $\vec{u}$ شعاع غير صفري وليكن λ عدد حقيقي فان الشعاع $\vec{v} = \lambda\vec{u}$ يحقق

١ – حامل $\vec{v}$ يماثل حامل $\vec{u}$ ٢ – جهة $\vec{v}$ من جهة $\vec{u}$ اذا كان λ موجب وتخالف جهة $\vec{u}$ اذا كان λ سالب ٣ - $||\vec{v}|| = |\lambda|||\vec{u}||$

مثال ٣ : ليكن $\vec{u}$ كما في الشكل عين $\vec{v}$ الذي بدايته A و B وفق الحالات التالية



١ - $\vec{v} = -\frac{1}{2}\vec{u}$

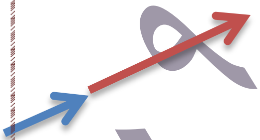
٢ - $\vec{v} = 2\vec{u}$

مثال : ليكن ABCمثلث فيه E تحقق $\overrightarrow{AE} = 2\overrightarrow{BC}$ وF تحقق $\overrightarrow{BF} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$ عين Eو F

الارتباط الخطي : نقول ان الشعاعين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ مرتبطين خطيا اذا كان حاملي الشعاعين متوازيان أي ان $\vec{v} = \lambda\vec{u}$

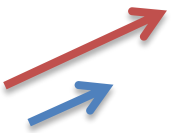
التطبيقات الهندسية للارتباط الخطي : اذا كان $\vec{u}$ و $\vec{v}$ مرتبطين خطيا $\vec{v} = \lambda\vec{u}$

نميز حالتين



١ - ان تكون الاشعة معرفة بثلاثة نقاط أي $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ و $\vec{v} = \overrightarrow{BC}$ بتالي تكون النقاط A, B, C على استقامة واحدة

٢ - ان تكون الاشعة معرفة بأربع نقاط أي $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ و $\vec{v} = \overrightarrow{CD}$ بالتالي المستقيمان (AB) و (CD)متوازيان



ملاحظة : لإثبات ان الاشعة مرتبطة

١- اما كتابة الشعاعين بدلالة نفس الاشعة ثم التعويض

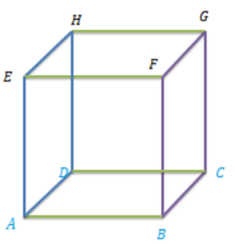
٢- الانطلاق من علاقة مألوفة وزرع نقطة

٣- كتابة شعاع بطريقتين ثم الجمع

٤- الاعتماد على المركبات في معلم

مثال٤ : ليكن ABC مثلث فيه E تحقق $4\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{BC}$ و $5\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AC}$ اثبت ان BوE وF على استقامة واحدة

تذكرة : اذا كانت G مركز ثقل للمثلث ABC فان $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{0}$

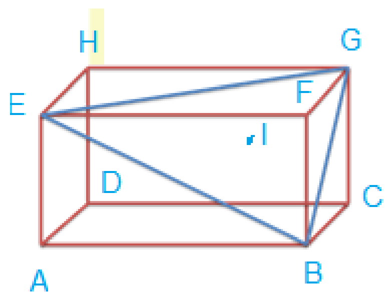


ملاحظة : في المكعب الجانبي $ABCDEFG$

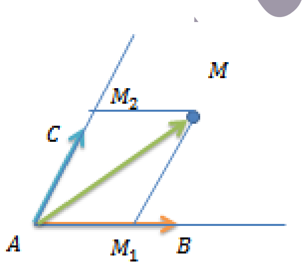
ان $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AG}$ و $\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CG} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{\dots\dots}$

مثال٥ : ليكن $ABCDEFG$ متوازي مستطيلات فيه I مركز ثقل المثلث EBG .

اثبت ان D و I و F على استقامة واحدة .



المعلم في المستوي :اذا كانت النقاط A و Bو C الثلاثة ليست على استقامة واحدة فهي تعرف مستوي (ABC) اذا كانت النقطة M من المستوي(ABC) بتالي حسب قطر متوازي الاضلاع يكون $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AM_1} + \overrightarrow{AM_2}$ وبسبب الارتباط الخطي نحصل $\overrightarrow{AM} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}$ بتالي احداثيات M وفق المعلم $(A, \ \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\ )$ هي (x, y) و هناك ثلاث حالات للمعلم



١- كيفي وفيه $AB \neq AC$ و AB غير عمودي على AC

٢- متعامد وفيه $AB \neq AC$ و $AB \perp AC$

٣- متجانس وفيه $AB = AC$ و $AB \perp AC$

الاشعة في معلم $(O,\vec{i},\vec{j})$: لتكن النقاط $A(x_A,y_A)$ $B(x_B,y_B)$ $C(x_C,y_C)$

١- الشعاع $\overrightarrow{AB}=\begin{bmatrix} x_B-x_A \\ y_B-y_A \end{bmatrix}$

٢- احداثيات I منتصف القطعة AB هي $I(\frac{x_B+x_A}{2},\frac{y_B+y_A}{2})$

٣- احداثيات G مركز ثقل ABCهي $G=(\frac{x_A+x_B+x_C}{3},\frac{y_A+y_B+y_C}{3})$

٤- ليكن لدينا الشعاعين $\vec{u}(x,y)$ و $\vec{v}(x',y')$ عندئذ

١- $\vec{u}+\vec{v}=(x+x',y+y')$

٢- $k\vec{u}=(kx,ky)$

٣- $\vec{u}=\vec{v}\Leftrightarrow x=x',y=y'$

٤- $\vec{u},\vec{v}$ مرتبطين خطيا $\Leftrightarrow \frac{x}{x'}=\frac{y}{y'}$

٥- في المعلم المتجانس فان نظيم الشعاع $\vec{u}$ يعطى $\|\vec{u}\|=\sqrt{x^2+y^2}$

٦- في المعلم المتجانس المسافة $AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}$

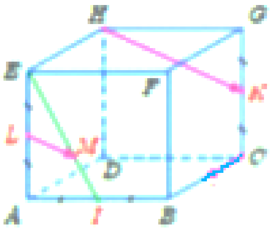
مثال ٦ : في معلم متجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$ لتكن النقاط $A(3,2)$ و $B(-2,1)$ و $C(1,-1)$

١- هل النقاط Aو B و C على استقامة واحدة

٢- اثبت ان المثلث ABC قائم

٣- عين النقطة D التي تحقق العلاقة $\overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB})+3\overrightarrow{AC}$

٤- عين G مركز ثقل المثلث ABC



مثال ٧ : ليكن $ABCDEFGH$ مكعب و I و K و L منتصفات الاضلاع كما في الشكل و M تحقق العلاقة $3\overrightarrow{EM} = 2\overrightarrow{EI}$

١- لماذا M مركز ثقل المثلث AEB

٢- اثبت ان $\overrightarrow{LM}$ و $\overrightarrow{HK}$ مرتبطين خطيا وما المعنى الهندسي

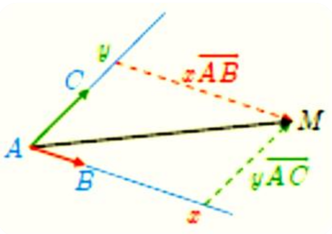
٣- لتكن M' نظيرة M بالنسبة الى I اثبت ان AM' يوازي LM

الخاصة المميزة لمستقيم : يتعين المستقيم من نقطتين A و B متمايزتين . نقول ان النقطة M تنتمي للمستقيم (AB) اذا كانت العلاقة $\overrightarrow{AM} = \lambda\overrightarrow{AB}$ ، $\lambda \in R$ والعكس صحيح

هذه المعلومة مفيدة للشكل الوسيطي للمستقيم (AB)

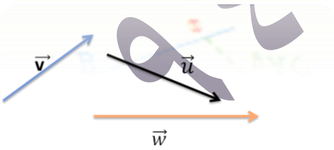
الخاصة المميزة لمستوي : متى تكون النقطة M من المستوي المحدد (ABC)

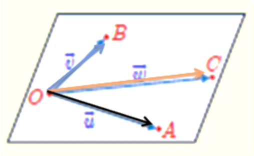
يتعين المستوي من ثلاث نقاط متمايزة A و B و C ليست على استقامة واحدة التي تعين شعاعين غير مرتبطين خطيا $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ و $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$ ويشكلان معلم للمستوي . اذا كانت



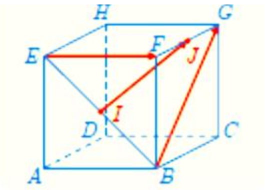
$$M \in (ABC) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}$$

الارتباط الخطي لثلاثة اشعة : نقول عن ثلاث اشعة $\vec{u}$ و $\vec{v}$ و $\vec{w}$ في الفراغ انها مرتبطة خطيا(هندسيا) اذا وجدنا نقطة O حيث $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$ و $\vec{v} = \overrightarrow{OB}$ و $\vec{w} = \overrightarrow{OC}$ والنقاط O و A و B و C تقع في نفس المستوي .شعاعيا : نجد $\vec{w} = x\vec{u} + y\vec{v}$





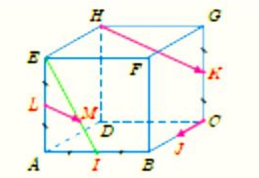
مثال٨: في الشكل الجانبي اثبت ان الاشعة $\overrightarrow{IJ}, \overrightarrow{BG}$ و $\overrightarrow{EF}$ مرتبطة خطيا



ملاحظة: اذا كان الشعاعان $\vec{u}$ و $\vec{v}$ مرتبطان أي $\vec{u} = \lambda\,\vec{v}$ بتالي مهما يكن $\vec{w}$ فهو مرتبط خطيا معهما حيث يكتب $\vec{u} = \lambda\,\vec{v} + 0\vec{w}$

ملاحظة: الارتباط الخطي لثلاثة أشعة لا يعني بالضرورة وقوعها بحد ذاتها في مستوٍ واحد ولكن حتما لهذه الأشعة المرتبطة خطيا أشعة مساوية لها تقع مُستوٍ واحد

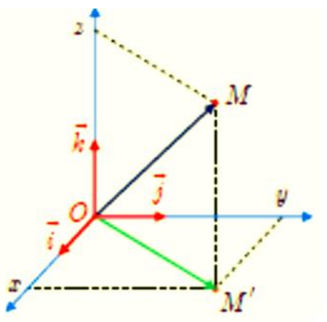
مثال ٩: ليكن $ABCDEFGH$ مكعب و I وj و K و L منتصفات الاضلاع كما في الشكل و M تحقق العلاقة $\overrightarrow{3EM} = 2\overrightarrow{EI}$



١- اثبت ان M مركز ثقل للمثلث AEB

٢- اثبت ان $\overrightarrow{LM}$ و $\overrightarrow{HK}$ و $\overrightarrow{CJ}$ مرتبطين خطيا وهل يوجد معنى الهندسي

المعلم في الفراغ :اذا كانت لدينا الاشعة $\vec{\imath}$ و $\vec{\jmath}$ و $\vec{k}$ غير مرتبطة خطيا فهي تشكل معلم في الفراغ لأجل كل نقطة M نجد كما في الشكل الجانبي



$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{AM'} + \overrightarrow{M'M} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}$$

نسمي (x, y, z) احداثيات M في هذا المعلم

بتالي يمكن اجراء الحسابات في معلم ثلاثي البعد كما المعلم ثنائي البعد

الاشعة في معلم $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$: اذا كانت النقاط $A(x_A,y_A,z_A)$ و $B(x_B,y_B,z_B)$ و $C(x_C,y_C,z_C)$

١- الشعاع $\overrightarrow{AB}=\begin{bmatrix} x_B-x_A \\ y_B-y_A \\ z_B-z_A \end{bmatrix}$

٢- احداثيات I منتصف القطعة AB هي $I(\frac{x_B+x_A}{2},\frac{y_B+y_A}{2},\frac{z_B+z_A}{2})$

٣- احداثيات G مركز ثقل ABC هي $G=(\frac{x_A+x_B+x_C}{3},\frac{y_A+y_B+y_C}{3},\frac{z_A+z_B+z_C}{3})$

٤- ليكن لدينا الشعاعين $\vec{u}(x,y,z)$ و $\vec{v}(x',y',z')$ عندئذ

١- $\vec{u}+\vec{v}=(x+x',y+y',z+z')$

٢- $k\vec{u}=(kx,ky,kz)$

٣- $\vec{u}=\vec{v}\Leftrightarrow x=x',y=y',z=z'$

٤- $\vec{u},\vec{v}$ مرتبطين خطيا $\Leftrightarrow \frac{x}{x'}=\frac{y}{y'}=\frac{z}{z'}$

٥- في معلم متجانس فان نظيم $\vec{u}$ يعطى $\|\vec{u}\|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$

٦- في المعلم المتجانس المسافة بين A و B

$$\mathbf{AB}=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2+(z_B-z_A)^2}$$

كيفية ايجاد الاحداثيات

١- ان تكون مبدأ الاحداثيات فتكون اصفار

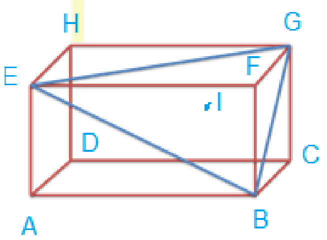
٢- اما ان تكون النقطة على احد المحاور فيكون لها قيمة على هذا المحور فقط

٣- ان تكون على مستوي مشكل من محورين فيكون لها على المحورين والثالث صفر

٤- ان تكون مقابلة قطريا للمبدأ فيكون لها على الثلاث محاور

٥- ان تعلم من خلال علاقة شعاعية مكتوبة لنقاط معلومة الاحداثيات

ملاحظة : يجب الانتباه الى المعلم المعطى عند حساب المسافة والنظيم واثبات التعامد وكتابة معادلة المستوي الديكارتية ومعادلة الكرة يجب ان يكون المعلم حصرا متجانس لأننا نستخدم فيثاغورس اما الارتباط الخطي لا يتأثر اذا كان المعلم كيفي (أي اثبات التوازي)



مثال١٠ : ليكن $ABCDEFG$ متوازي مستطيلات فيه I مركز ثقل المثلث EBG لناخذ المعلم $(D,\overrightarrow{DC},\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DH})$

اوجد احداثيات جميع النقاط واثبت ان النقاط D و I و F على استقامة واحدة

التطبيقات الهندسية للارتباط الخطي لثلاث اشعة

١- اذا كانت الاشعة مؤلفة من اربع نقاط فان النقاط تكون من مستوي واحد (الخاصة المميزة لمستوي)

$$M \in (ABC) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}$$

مثال١١ دورة ٢٠٢١- ٤٠درجة:

في معلم متجانس لتكن $A(2,0,1), B(1,-2,1), C(5,0,5), D(6,2,5)$

١ – اثبت ان الاشعة $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ غير مرتبطة خطيا

....

....

٢ – عين α و β حيث $\overrightarrow{AD} = \alpha\overrightarrow{AB} + \beta\overrightarrow{AC}$ واستنتج ان النقاط A, B, C, D تقع في نفس المستوي

....

....

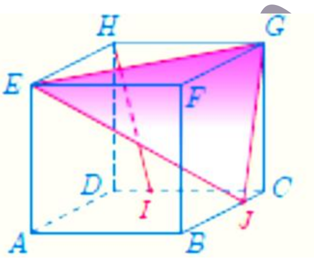
....

....

....

٢- اذا كانت الاشعة مؤلفة من خمس نقاط يكون المستقيم موازي للمستوي

$$MN \parallel (ABC) \Leftrightarrow \overrightarrow{MN} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}$$



مثال ١٢: ليكن المكعب $ABCDEFGH$ و I تحقق $\overrightarrow{DI} = \frac{1}{4}\overrightarrow{DC}$ و J تحقق $\overrightarrow{BJ} = \frac{3}{4}\overrightarrow{BC}$ اثبت ان المستقيم $(HI)//(EJG)$

الحل: ....

....

....

....

....

لإثبات ان نقطة تنتمي لمستوي
١- البحث عن α و β
٢- الاستفادة من علاقة شعاعية
٣- تعويض الاحداثيات في معادلة المستوي اذا كانت مكتوبة

مثال ١٣: في معلم لتكن لدينا النقاط A, B, C, D, E حيث

$$A(1,2,1) \quad B(-1,5,3) \quad C(3,2,0)$$

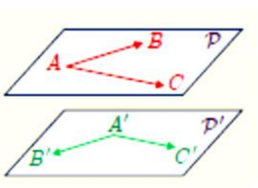
$$\overrightarrow{CD} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BD} \quad , \quad \overrightarrow{AE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$$

١) اثبت ان النقاط $\boldsymbol{A, B, C}$ ليست على استقامة واحدة

٢) استنتج ان $\boldsymbol{E, D \in (ABC)}$

٣) هل النقطة $\boldsymbol{F(2,4,-1)}$ تقع في المستوي $\boldsymbol{ABC}$

٣- اذا وجد شعاعين غير مرتبطين خطيا من مستوي اول ومرتبطان خطيا مع اشعة التوجيه لمستوي اخر كان المستويان متوازيان



مثال : ليكن $ABCDEFGH$ مكعب فيه M تحقق $\overrightarrow{EM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{EH}$ وN تحقق $\overrightarrow{AN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$

١- اثبت ان $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{EA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{DB}$

٢- هل الاشعة $\overrightarrow{EA}$ و $\overrightarrow{MN}$ و $\overrightarrow{HB}$ مرتبطة خطيا

مركز الابعاد المتناسبة

تعريف :لتكن النقاط المثقلة (A,α)و (B,β) توجد نقطة وحيدة G تحقق

$$\alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GB} = \vec{0} \text{ و } \alpha + \beta \neq 0$$

نلاحظ : بزرع النقطة A بين G و B نجد $\alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{AB} = \vec{0}$ أي

$(\alpha+\beta)\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{AB} = \vec{0}$ بتالي $(\alpha+\beta)\overrightarrow{AG} = \beta\overrightarrow{AB}$ أي $\overrightarrow{AG} = \frac{\beta}{(\alpha+\beta)}\overrightarrow{AB}$

لذلك $\alpha + \beta \neq 0$ وتكون G من المستقيم AB وهي نقطة وحيدة(من الخاصة المميزة)

تعريف : نقول ان G مركز ابعاد متناسبة (م.أ.م) للنقاط المثقلة (A,α)و (B,β)و(C,γ)

١- $\alpha + \gamma + \beta \neq 0$ ٢- $\alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GB} + \gamma\overrightarrow{GC} = \vec{0}$ بالمثل بزرع A

٢- $\overrightarrow{AG} = \frac{\beta}{\alpha+\gamma+\beta}\overrightarrow{AB} + \frac{\gamma}{\alpha+\gamma+\beta}\overrightarrow{AC}$ هي الخاصة المميزة لمستوي أي $G \in (ABC)$

سؤال مركز الابعاد يرد بأسلوبين

١- تعين الاثقال (من علاقة معطاة او رسمة)

٢- تعين G (اذا الاثقال معلومة)

٣- $A(x_A,y_A,z_A)$ و $B(x_B,y_B,z_B)$ و$C(x_C,y_C,z_C)$ فان

$$G = \left(\frac{\alpha x_A+\beta x_B+\gamma x_C}{\alpha+\beta+\gamma}, \frac{\alpha y_A+\beta y_B+\gamma y_C}{\alpha+\beta+\gamma}, \frac{\alpha z_A+\beta z_B+\gamma z_C}{\alpha+\beta+\gamma}\right)$$

مثال١٤ : اوجد α, γ, β للنقاط (A, α) و(B, β) و(C, γ) حيث G م.ا.م المحققة للعلاقة

$$2\overrightarrow{CA} + 3\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{GA} = 2\overrightarrow{GC}$$

---------------------------- --

مثال١٥: في التدريجات التالية عبر عن كل نقطة بصفتها مركز للنقطتين الاخرين

الحل --

---------------------------------- ---

-- -----------------------------------

خواص: اذا كان ان G مركز ابعاد متناسبة (م.أ.م) للنقاط المثقلة (A, α) و(B, β) و(C, γ)

١- خاصة التجانس : فان G مركز ابعاد متناسبة (م.أ.م) للنقاط المثقلة $(A, k\alpha)$ و$(B, k\beta)$ و$(C, k\gamma)$

٢- من اجل أي نقطة M فان $\alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB} + \gamma\overrightarrow{MC} = (\alpha + \gamma + \beta)\overrightarrow{MG}$

٣- الخاصة التجميعية اذا كانت H (م.أ.م) للنقاط المثقلة (A, α) و(B, β) فان G (م.أ.م) للنقاط المثقلة $(H, \alpha + \beta)$ و(C, γ)

انشاء مركز الابعاد المتناسبة لنقطتين : اذا كان ان G مركز ابعاد متناسبة (م.أ.م) للنقاط المثقلة (A, α) و(B, β) فان $\overrightarrow{AG} = \frac{\beta}{\alpha+\beta}\overrightarrow{AB}$ والعكس صحيح

ملاحظة : اذا كانت αوβ من نفس الاشارة تكون G بين A و B و اذا كانت αوβ مختلفتين في الاشارة تكون G خارج A و B

مثال١٦ : لتكن لدينا G مركز ابعاد متناسبة (م.أ.م) للنقاط المثقلة $(A, 2)$ و$(B, 3)$ عين G

---------------------- --

ملاحظة : اذا كان $\overrightarrow{AG} = \alpha\overrightarrow{AB}$ فان G(م.أ.م) لـ(B, α) و لـ$(A, 1 - \alpha)$

مثال ١٧: اذا كان $\overrightarrow{AG} = 2\overrightarrow{AB}$ فان G (م.أ.م) للنقاط المثقلة $(A, \dots)$ و $(B, \dots)$

ملاحظة : يمكن الاستفادة من مركز الابعاد المتناسبة لإثبات ان النقاط على استقامة واحدة او لإثبات ان النقطة تنتمي الى مستوي .

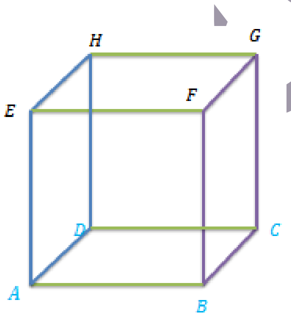
مثال ١٨: ليكن $A - BCD$ رباعي وجوه و النقطة M تحقق $\overrightarrow{BM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$ و النقطة N تحقق $\overrightarrow{DN} = \frac{2}{3}\overrightarrow{DA}$ و H منتصف MN والنقطتان I, J منتصفات AB , CD المطلوب

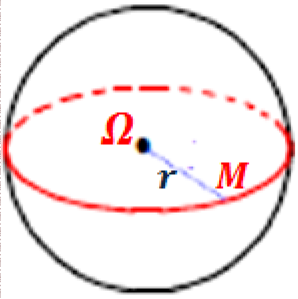
١) اثبت ان H مركز ابعاد متناسبة لرؤوس رباعي الوجوه

٢) اثبت ان النقاط I, H, J تقع على استقامة واحدة

٣) اثبت ان المستقيمان (IJ), (MN) متقاطعلين

مثال ١٨: ليكن $ABCDEFGH$ مكعب والنقطة K محققة للعلاقة $2\overrightarrow{AK} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CA} + 3\overrightarrow{AG}$ اثبت ان K تقع في المستوي (BCG) وعين K





الكرة :في معلم متجانس هي مجموعة نقاط $M(x,y,z)$ التي تبعد عن نقطة $\Omega(x_o,y_o,z_o)$ بعدا ثابتا r أي $\Omega M = r$ بالتالي

$$(x-x_o)^2+(y-y_o)^2+(z-z_o)^2=r^2$$

مثال : في معلم $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ اكتب معادلة الكرة التي مركزها $\Omega(2,-1,3)$ وتمر من $A(-1,0,1)$

ملاحظة : النقاط $M(x,y,z)$ التي تحقق $(x-x_o)^2+(y-y_o)^2+(z-z_o)^2=k$ هي احد الحالات

١- $k>0$ كرة مركزها (x_o,y_o,z_o) ونصف قطرها $\sqrt{k}$

٢- $k=0$ النقطة (x_o,y_o,z_o)

٣- $k<0$ المجموعة الخالية

مثال ١٩: في معلمٍ $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ عيّن طبيعة مجموعة النقاط $M(x,y,z)$ في الحالات الآتية:

١- $x^2+y^2+z^2-2x+6y-2=0$

٢- $x^2+y^2+z^2-10x+2z+26=0$

$x^2+y^2+z^2-4x+5=0$-٣

—————————————————————————————————

—————————————————————————————————

مثال ٢٠ : في معلم متجانس $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ لتكن لدينا النقاط المثقلة $(A,a),(B,b),(C,c)$ حيث $A(1,1,3),B(2,2,1),C(3,1,2)$

والنقاط D و E تحقق العلاقتان $\overrightarrow{CD}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BD}$ و $\overrightarrow{AE}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BD}$

$a-$ اثبت ان النقاط A,B,C تشكل مستوي وان D و E تنتمي لهذا المستوي

$b-$ هل يمكن تعين a,b لتكون $G(1,2,0)$ مركز ابعاد متناسبة للنقاط $A,B,(C,1)$

c – لتكن H مركز ابعاد متناسبة ل $(A,1)$ و $(B,2)$ و $(C,3)$ و G مركز ثقل المثلث ABC ماذا تمثل مجموعة النقاط التي تحقق العلاقة

١ – $\|-\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MB}-3\overrightarrow{MC}\| = \|2\overrightarrow{AM}-2\overrightarrow{BM}\|$

٢ – $\|\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}+3\overrightarrow{MC}\| = \|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+3\overrightarrow{MG}\|$

مثال ٢١ : لتكن لدينا النقاط $A(1,-1,2)$ و $B(2,1,0)$ و $C(2,3,-1)$ و $D(0,0,2)$

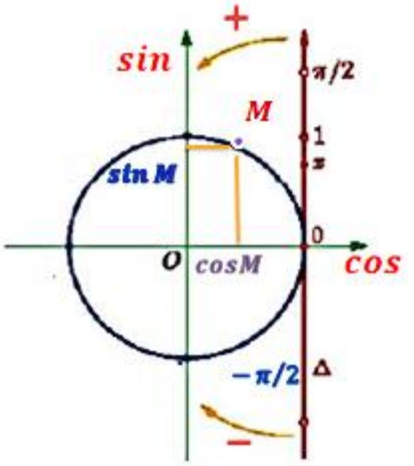
١ – عين احداثيات G م . أ . م للنقاط $(A,1)$ و $(B,2)$ و $(C,2)$ و $(D,1)$

٢ – ماذا تمثل مجموعة النقاط M التي تحقق $\|\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}\| = 6$

٣ – اذا كانت H مركز ثقل المثلث ABC ماذا تمثل مجموعة النقاط المحققة

$$\|\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}\| = \|2\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}\|$$

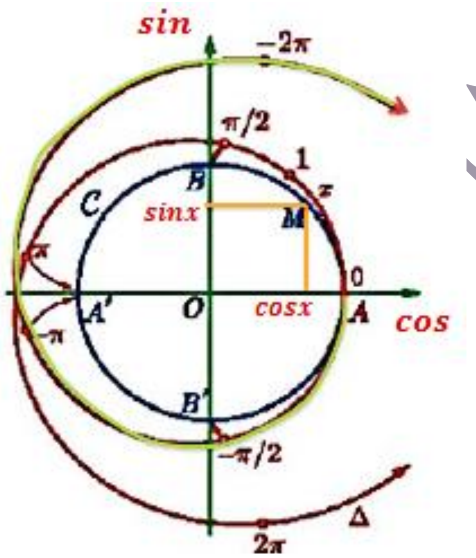
الدائرة المثلثية



تعريف : هي دائرة نصف قطرها واحد ومركزها هو مبدأ احداثيات وموجهة باتجاهين موجب عكس عقارب الساعة وسالب مع عقارب الساعة بالتالي محيط الدائرة $p = 2\pi r = 2\pi$

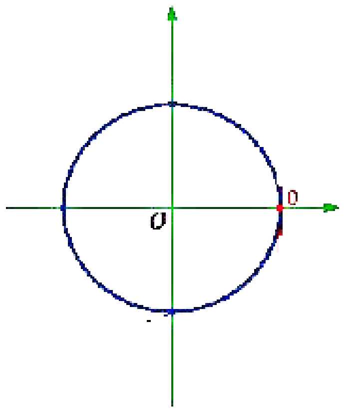
نلاحظ ان كل نقطة من محيط الدائرة يمكن ايجاد النسب المثلثية لها من خلال مسقط على النسبة وقراءة العدد المقابل مثل النقطة M

الاعداد الحقيقية ونسبها المثلثية



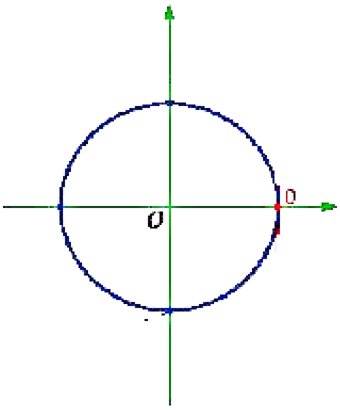
لو اخذنا مستقيم الاعداد Δ كما في الشكل حيث يكون موازيا ل محور sin و قمنا بثني مستقيم الاعداد على محيط الدائرة كما في الشكل نلاحظ ان كل عدد حقيقي x من المستقيم Δ يقابل نقطة M من محيط الدائرة أي لكل عدد حقيقي يقابل نسبة مثلثية والعددان اللذان لهما نفس الموقع على الدائرة يكون لهما نفس النسب المثلثية

مثال : عين على الدائرة المثلثية النقطة M المقابلة للعدد الحقيقي $x = \frac{3\pi}{2}$ و النقطة N المقابلة للعدد الحقيقي $x = -\frac{5\pi}{2}$ و النقطة L المقابلة للعدد الحقيقي $x = \frac{621\pi}{4}$



مثال : عين على دائرة مثلثية النقاط A و B و C و D و E المقابلة

للأعداد $\frac{\pi}{3}$ و $\frac{-5\pi}{6}$ و $\frac{11\pi}{4}$ و $\frac{7\pi}{2}$ و $\frac{17\pi}{3}$



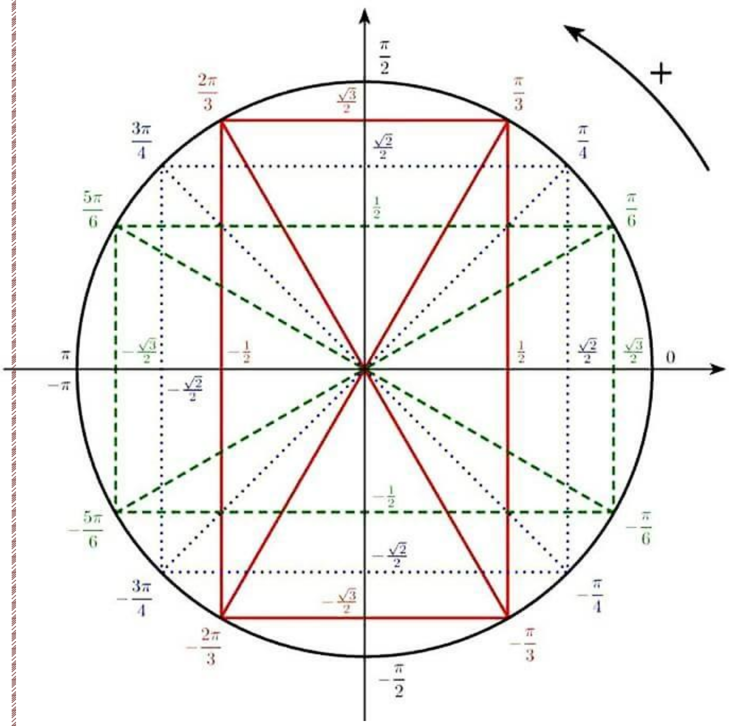
ملاحظة : العدد الزوجي من الدورانات يعيدنا الى نفس الموقع بالتالي يمكن حذفه عند التعين

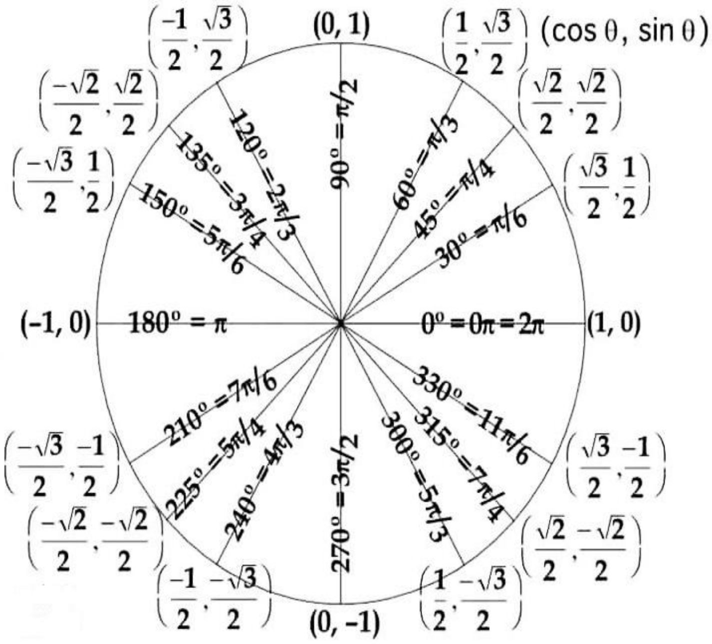
الراديان : هو طول القوس المرسوم على دائرة مثلثية لينطبق الشعاع الاول على الشعاع الثاني وان كل $180° = \pi Rad$ بالتالي للتحويل من الراديان الى الدرجة نضرب بـ $\frac{180}{\pi}$ وللتحويل من الدرجة الى الراديان نضرب بـ $\frac{\pi}{180}$

مثال :حول الدرجات 0 و 30 و 45 و 60 و 90 و 120 و 150 الى راديان

النسب المثلثية للزوايا الشهيرة في الربع الاول

الزاوية / النسبة	0	$30° = \frac{\pi}{6}$	$45° = \frac{\pi}{4}$	$60° = \frac{\pi}{3}$	$90° = \frac{\pi}{2}$
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
Cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
Tan	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	





$-1 \le \sin x \le +1$

$-1 \le \cos x \le +1$

$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$

الارجاع للربع الاول

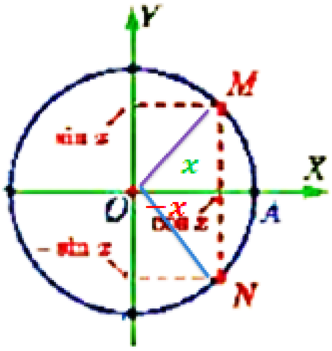
بفرض x زاوية شهيرة بالتالي

١ – الزاوية $2\pi k + x$ و الزاوية $2\pi k - x$ لهما نفس الموقع على الدائرة بالتالي

$$\sin(2\pi k + x) = \sin x \text{ و } \sin(2\pi k - x) = \sin -x$$

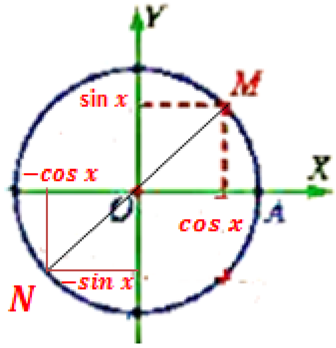
$$\cos(2\pi k + x) = \cos x \text{ و } \cos(2\pi k - x) = \cos -x$$

مثال : احسب النسب المثلثية للزاوية $\frac{13\pi}{3}$



٢ – الزاوية $-x$ نظيرة x بالنسبة لمحور الفواصل

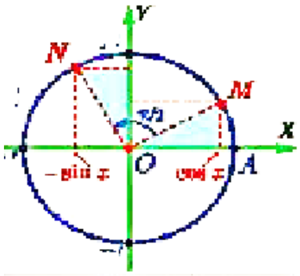
$$\sin(-x) = -\sin x \text{ و } \cos(-x) = \cos x$$



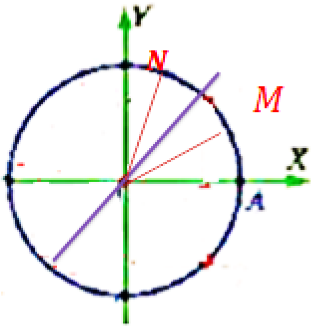
٣ – الزاوية $x+\pi$ نظيرة x بالنسبة للمبدأ

$\cos(\pi+x)=-\cos x$ و $\sin(\pi+x)=-\sin x$

مثال : اوجد النسب المثلثية للزاويتان $-\frac{\pi}{6}$ و $\frac{19\pi}{6}$



٤ – الزاوية $\frac{\pi}{2}+x$ كما في الشكل نجد تقلب النسبة ونتنبه للإشارة حسب الربع $\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=-\sin x$ و $\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=\cos x$



٥ – الزاوية $\frac{\pi}{2}-x$ كما في الشكل نجد تقلب النسبة ونتنبه للإشارة موجبة دوما $\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\sin x$ و $\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\cos x$

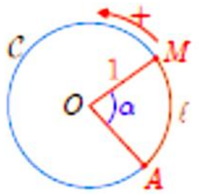
مثال : اختزل التابعين التاليين

$$\boldsymbol{f(x)=\cos x+\cos(\pi-x)+\cos(\pi+x)+\cos(2\pi-x)}$$

$$\boldsymbol{g(x)=\sin\left(\frac{5\pi}{2}-x\right)+\sin(3\pi+x)+\cos(5\pi-x)+\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)}$$

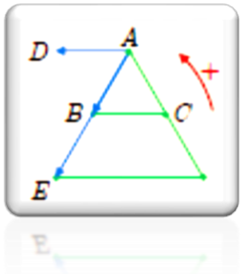
مثال: عين النسب المثلثية للأعداد $\frac{4\pi}{3}$ و $\frac{\pi}{3}$ و $\frac{71\pi}{3}$ و $\frac{97\pi}{3}$

الجداء السلمي في الفراغ



تذكرة : الزاوية الموجهة بين شعاعين هو طول القوس على الدائرة المثلثية الذي يرسمه الشعاع الاول حتى ينطبق على الثاني (او الزاوية الهندسية المقابلة) كما في الشكل نجد $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM}) = l = \alpha$

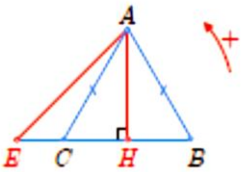
ملاحظة : لا يمكن معرفة الدوران اذا لم يكن للشعاعين نفس البداية



مثال٢٢ : ليكن ABC مثلث متساوي الاضلاع عين الدورانات التالية

$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \ldots\ldots$ و $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}) = \ldots\ldots\ldots$

$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CB}) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ و $(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BE}) = \ldots\ldots\ldots$



مثال٢٣ : ليكن ABC مثلث متساوي الاضلاع و EHA قائم ومتساوي الساقين في H عين القياسات الاساسية التالية :

$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ و $(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{CB})$ و $(\overrightarrow{AH}, \overrightarrow{EB})$ و $(\overrightarrow{EA}, \overrightarrow{EC})$ و $(\overrightarrow{EA}, \overrightarrow{CH})$ و $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AE})$

تعريف :الجداء السلمي للشعاعين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ هو العدد الحقيقي

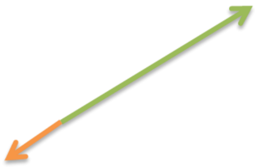
١- $\vec{u}.\vec{v} = \frac{1}{2}(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2)$ حيث $\|\vec{u}+\vec{v}\| \neq \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$

٢- $\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\|.\|\vec{v}\|.cos\theta$ حيث θ الزاوية الموجهة بين $\vec{u}$, و $\vec{v}$ اي $(\vec{u},\vec{v}) = \theta$

٣- اذا كان $\vec{u}$, و $\vec{v}$ مرتبطين خطيا نميز حالتين

١- اما $\vec{u}$, و $\vec{v}$ بنفس الجهة بتالي $(\vec{u},\vec{v}) = 0$ يصبح

$\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\|.\|\vec{v}\|.cos0$ أي $\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\|.\|\vec{v}\|$



٢- اما $\vec{u}$, و $\vec{v}$ متعاكسين بالجهة بتالي $(\vec{u},\vec{v}) = \pi$ يصبح

$\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\|.\|\vec{v}\|.cos\pi$ أي $\vec{u}.\vec{v} = -\|\vec{u}\|.\|\vec{v}\|$

٤- اذا كان $\overrightarrow{C'D'}$ المسقط القائم للشعاع $\overrightarrow{CD}$ على حامل $\overrightarrow{AB}$ فان

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{C'D'}$ كما في الشكل

اذا كانت الاشعة غير مرتبطة خطيا نأخذ خاصة المسقط القائم فتصبح

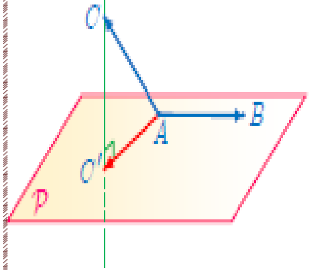
مرتبطة خطيا

٥- اذا كان $\vec{u}(x,y,z)$ و $\vec{v}(x',y',z')$ فان $\vec{u}.\vec{v} = x.x' + y.y' + z.z'$

الاثبات : $\|\vec{u}\|^2 =$--------------- و $\|\vec{v}\|^2 =$---------------

و $\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 =$ --------------- وبتعويض في العلاقة الاولى نجد

$\vec{u}.\vec{v} =$ ------------------

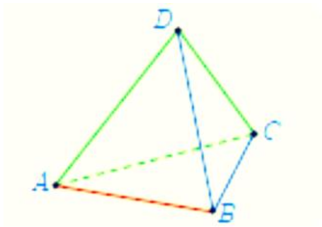


٦- ان $\overrightarrow{AB}^2 = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AB} = AB.AB = AB^2$

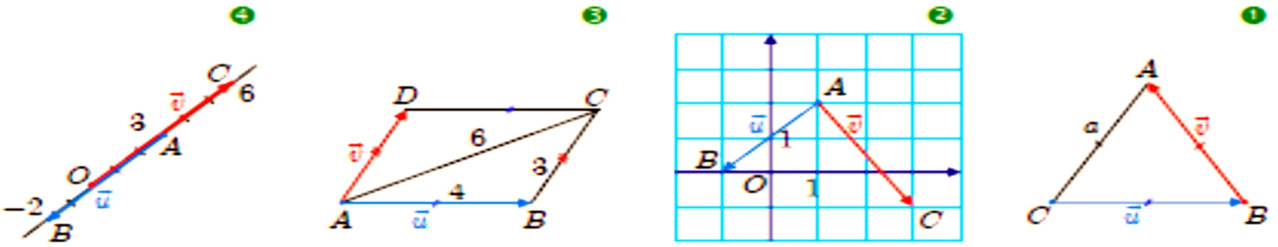
٧- الجداء السلمي لشعاعين يساوي الجداء السلمي للأول والمسقط القائم

للثاني على مستوي يحوي الاول كما في الشكل $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC'}$

مثال ٢٤: ليكن $ABCD$ رباعي وجوه منتظم حرفه a احسب $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$



مثال ٢٥: اوجد الجداء السلمي في الحالات التالية



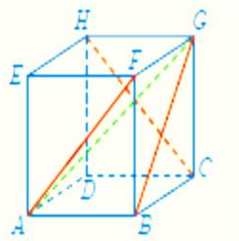
خواص الجداء السلمي :

١–الخاصة التبديلية $\vec{u}.\vec{v} = \vec{v}.\vec{u}$

٢–الخاصة التوزيعية $\vec{u}.(\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u}.\vec{v} + \vec{u}.\vec{w}$ و $(\vec{v} + \vec{w}).\vec{u} = \vec{v}.\vec{u} + \vec{w}.\vec{u}$

٣–$(a\vec{u}).(b\vec{v}) = (ab)(\vec{v}.\vec{u})$

مثال٢٦ : $\boldsymbol{ABCDEFGH}$ مكعب حرفه a احسب $\overrightarrow{AE}.\overrightarrow{AF}$, $\overrightarrow{AE}.\overrightarrow{CH}$, $\overrightarrow{AE}.\overrightarrow{AG}$ $\overrightarrow{AF}.\overrightarrow{HC}$



مثال٢٧: اذا علمت ان نظيم $\vec{u}$ يساوي 5 ونظيم $\vec{v}$ يساوي 3 وان$\vec{u}.\vec{v} = -4$ احسب

$\vec{u}.(\vec{u}+\vec{v}) =$ ----------------------

$\vec{u}.(\vec{u}-\vec{v}) =$ ----------------------

$3\vec{u}.(\vec{v}-3\vec{u}) =$ ----------------------

$(\vec{u}+\vec{v}).(\vec{u}-3\vec{v}) =$ ----------------------

ملاحظة : اذا كان $\vec{u}.\vec{v} = \vec{u}.\vec{w}$ لا يجوز الاختصار $\vec{v} = \vec{w}$

مثال٢٨: $\vec{u} = (2,0,0)$ و $\vec{v} = (0,3,0)$ و $\vec{w} = (0,-3,0)$

مثال٢٩: في معلم متجانس $(\boldsymbol{O}, \vec{\boldsymbol{\imath}}, \vec{\boldsymbol{\jmath}}, \vec{\boldsymbol{k}})$ احسب الجداء السلمي $\vec{u}.\vec{v}$ و $\vec{u}.\vec{w}$ و $\vec{v}.\vec{w}$

$\vec{u}(1+\sqrt{2}, \sqrt{3}, 0)$, $\vec{v}(1-\sqrt{2}, 0, -1)$, $\vec{w}(0, -\sqrt{3}, 1)$

التعامد: نقول عن شعاعان $\vec{u}$ و $\vec{v}$ انهما متعامدان اذا كان حاملي الشعاعين متعامدين بتالي

$$\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\|.\|\vec{v}\|.\cos\frac{\pi}{2} = \|\vec{u}\|.\|\vec{v}\|.0 = 0$$

التعامد في معلم متجانس: ليكن $\vec{u} = (x, y, z)$ و $\vec{v} = (x', y', z')$

نقول ان $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متعامدان $\Leftrightarrow \vec{u}.\vec{v} = xx' + yy' + zz' = 0$

مثال ٣٠: فيما يلي بين اذا كان الشعاعان متعامدان او عين الوسيط α ليكونا متعامدان

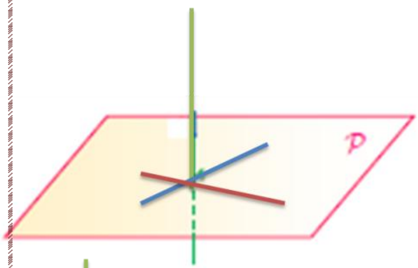
١-: $\vec{u} = (-\sqrt{2}, 1, 1)$ و $\vec{v} = (\sqrt{2}, 1 + \sqrt{2}, 1 - \sqrt{2})$

٢- $\vec{u} = \left(2, -\frac{1}{2}, 5\right)$ و $\vec{v} = \left(-\frac{2}{5}, 3, \alpha\right)$

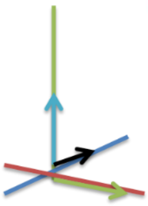
٣- $\vec{u} = \left(\sqrt{3}, -\frac{1}{3}, 2\right)$ و $\vec{v} = \left(\alpha, 2\alpha, \frac{1}{2}\right)$

مثال ٣١: اطوال الاشعة $\vec{u}$ و $\vec{v}$ و $\vec{u} + \vec{v}$ هي بالترتيب 6 و 8 و 10 هل الشعاعان $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متعامدان

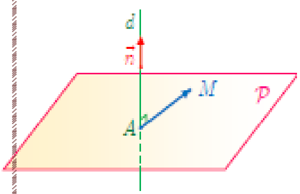
مثال ٣٢: اذا كان $\vec{u}+\vec{v}$ و $\vec{u}-\vec{v}$ متعامدان اثبت ان لهما الطول ذاته



تذكرة : نقول عن مستقيم انه عمود على مستوي اذا كان عمودي على مستقيمين متقاطعين فيه



تعريف : نقول ان الشعاع $\vec{n}$ ناظم على المستوي اذا كان حامله عمودي على المستوي أي $\vec{n}$ عمودي على اشعة التوجيه للمستوي $\vec{v}$ و $\vec{u}$)



معادلة مستوي في معلم متجانس : المستوي p الذي ناظمه $\vec{n}(a,b,c)$ ويمر من النقطة $A(x_0,y_0,z_0)$ هو مجموعة النقاط $M(x,y,z)$ التي تحقق $\overrightarrow{AM}.\vec{n}=0$

أي $\big((x-x_0),(y-y_o),(z-z_o)\big)(a,b,c)=0$

أي $ax+by+cz-ax_0-by_0-cz_0=0$

بفرض $-ax_0-by_0-cz_0=\text{d}$ بتالي معادلة المستوي $\boldsymbol{p: ax+by+cz+d=0}$

نتيجة : يمكن كتابة معادلة المستوي بمعرفة ناظمه ونقطة منه

مثال : اكتب معادلة المستوي الذي ناظمه $n(2,-2,1)$ ويمر من $A(3,1,-2)$

تعين المستوي

١ – يعرف بناظمه ونقطة منه	٦ – مستوي محوري لقطعة
٢ – تقاطع مستقيمين	٧ – مستوي يمس كرة بنقطة معرفة
٣ – مستقيمين متوازيان	٨ – مستوي علم شعاعي توجيهه
٤ – مستوي يوازي مستوي ويمر من نقطة	٩ – المستوي العمودي على مستوي اخر وعلم نقطتان
٥ – مستوي مار من مستقيم ونقطة خارجه	

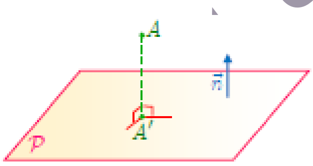
مثال٣٣: في معلم متجانس $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ اكتب معادلة المستوي p

١–الذي ناظمه $\vec{n}(1,1,2)$ ويمر من النقطة $A(2,1,-3)$

٢–الموازي للمستوي $Q:2x-y+3z+4=0$ والمار من $A(1,0,1)$

٣–الذي ناظمه $\vec{n}(2,-3,-1)$ ويمر من النقطة $A(\sqrt{2},-2,-1)$

بعد نقطة عن مستوي :في معلم متجانس لتكن معادلة مستوي $P: ax+by+cz+d=0$



بتالي بعد النقطة $A(\alpha,\beta,\gamma)$ يعطى

$$dist(A,P)=\frac{|a\alpha+b\beta+c\gamma+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

اذا كان $A'(\alpha',\beta',\gamma')$ المسقط القائم ل $A(\alpha,\beta,\gamma)$ على P بتالي $dist(A,P)=AA'$

لكن $\overrightarrow{AA'}=(\alpha-\alpha',\beta-\beta',\gamma-\gamma')$ وبما ان $\vec{n}$ و $\overrightarrow{AA'}$ مرتبطان خطيا

فان $|\vec{n}.\overrightarrow{AA'}|=\|\vec{n}\|AA'$ أي ان $AA'=\frac{|\vec{n}.\overrightarrow{AA'}|}{\|\vec{n}\|}$ بالحساب نجد المطلوب

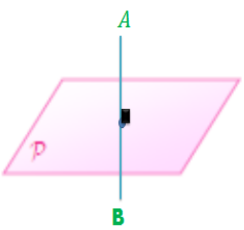
مثال ٣٤: احسب بعد النقطة A عن P في الحالتين

١- $\boldsymbol{P: 2x - y + 3z - 5 = 0}$ و $\boldsymbol{A(5, -3, 4)}$

٢- $\boldsymbol{P: y - z = 0}$ و $\boldsymbol{A(2, 2, 5)}$

مثال ٣٥: اكتب معادلة الكرة التي مركزها $\boldsymbol{A(2, -2, 2)}$ وتمس مستوي $P: x + 2y + 3z = 5$

(تعين الكرة بمعرفة مركزها ونصف قطرها)



المستوي المحوري للقطعة $[AB]$: هو مجموعة النقاط $M(x, y, z)$ التي تبعد عن طرفي القطعة نفس البعد ويكون عمودي على القطعة في منتصفها

مثال٣٦: في معلم متجانس لتكن النقطتان $A(5,2,-1)$ و $B(3,0,1)$ اكتب معادلة المستوي المحوري للقطعة AB وبين اذا كانت $C(-2,5,-2)$ و $D(3,2,1)$ منه

ملاحظة : ناظم المستوي يكون عمودي على شعاعي التوجيه للمستوي

مثال٣٧ : في معلم متجانس لتكن لدينا النقاط $A(1,5,4)$ و $B(10,4,3)$ و $C(4,3,5)$ و $D(0,4,5)$

١–اثبت ان A و B و C تشكل مستوي

٢–اكتب معادلة الديكارتية المستوي (ABC)

٣–اثبت $D \in (\mathrm{ABC})$

التمثيل الوسيطي لمستقيم(AB): من الخاصة المميزة لمستقيم نجد $M \in (AB) \iff \overrightarrow{AM} = t\,\overrightarrow{AB}$

حيث $\overrightarrow{AB} = (a,b,c)$ و $M(x,y,z)$ بتالي نجد $\begin{bmatrix} x - x_A \\ y - y_A \\ z - z_A \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$

أي $(AB) = \begin{cases} x = at + x_A \\ y = bt + y_A \\ z = ct + z_A \end{cases} \quad t \in R$ أي ان الشكل الوسيطي نحتاج موجه للمستقيم ونقطة

ملاحظة : لكتابة الشكل الوسيطي لمستقيم

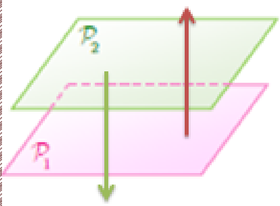
١– نحتاج شعاع موجه ونقطة مثال (٣٨)

٢– بالحل المشترك معاداتي مستوين متقاطعين (مثال ٤٠)

مثال ٣٨: اكتب معادلة المستقيم المعين بالنقطتين $A(2,1,-1)$ و $B(3,-1,1)$

دراسة الوضع النسبي (لمستوين ومستقيمين ومستقيم ومستوي)

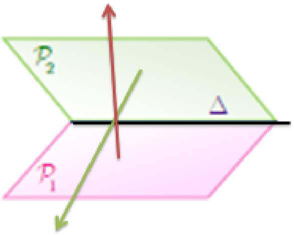
اولا : لمستويين



$P: ax + by + cz + d = 0$ و $Q: a'x + b'y + c'z + d' = 0$

١–اذا كان $\overrightarrow{n_P}(a,b,c)$ و $\overrightarrow{n_Q}(a',b',c')$ مرتبطين خطيا $\Leftrightarrow P//Q$

مثال٣٩ : ليكن $P: 2x - 4y + 6z = 0$ و $Q: x - 2y + 3z - 1 = 0$ اثبت ان المستويان متوازيان لكن غير منطبقان



٢-اذا كان $\overrightarrow{n_P}(a,b,c)$ و $\overrightarrow{n_Q}(a',b',c')$ غير مرتبطين خطيا $P \nparallel Q \Leftrightarrow$

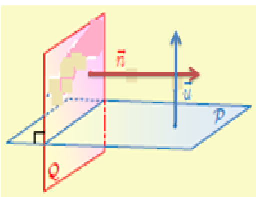
أي ان المستويان متقاطعان بفصل مشترك هو مستقيم

مثال ٤٠ : ليكن لدينا المستويان $P: x - 2y + 3z - 5 = 0$ و $Q: x + y + z + 1 = 0$

١-اثبت ان لمستويين P و Q متقاطعان بفصل مشترك d

٢-اكتب الشكل الوسيطي للمستقيم d وعين شعاعه الموجه

٣- احسب $\cos\theta$ حيث θ الزاوية المحصورة بين المستويان



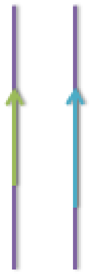
حالة خاصة من التقاطع هي التعامد يكون $\overrightarrow{n_P}.\overrightarrow{n_Q} = 0$

مثال ٤١ : ليكن لدينا المستويان $P: x + 2y + 4z - 5 = 0$

و $Q: 2x + y - z + 1 = 0$

اثبت انهما متعامدان واكتب معادلة الفصل المشترك

ثانيا: لمستقيمين : $(d) = \begin{cases} x = at + x_A \\ y = bt + y_A \\ z = ct + z_A \end{cases}$ $\quad (d') = \begin{cases} x = a's + x_A \\ y = b's + y_A \\ z = c's + z_A \end{cases}$



١-اذا كان $\overrightarrow{u_d}(a,b,c)$ و $\overrightarrow{u_{d'}}(a',b',c')$ مرتبطان خطيا $\Leftrightarrow d//d'$

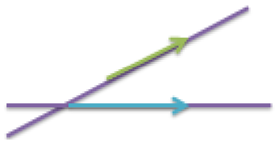
مثال ٤٢: ليكن لدينا المستقيمان $t \in R$: $(d) = \begin{cases} x = 4t + 3 \\ y = 5 \\ z = 2t + 1 \end{cases}$

$(d') = \begin{cases} x + y - 2z = 3 \\ x - y - 2z = 5 \end{cases}$ **معين بتقاطع مستويين .المطلوب اكتب (d') بالشكل الوسيطي وادرس الوضع النسبي**

ملاحظة: اذا كانت المركبتين اصفار في الشعاعين هذا لا يؤثر على الارتباط الخطي

٢–اذا $\overrightarrow{u_d}(a,b,c)$ و $\overrightarrow{u_{d'}}(a',b',c')$ غير مرتبطان خطيا $\Leftrightarrow d \nparallel d'$

نميز حالتين



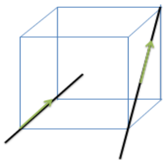
١–اما متقاطعان

مثال٤٣ : ليكن $(d) = \begin{cases} x = t+1 \\ y = 2t-3 \\ z = -t+2 \end{cases} : t \in R$ $\quad (d') = \begin{cases} x = 3s+2 \\ y = -s-1 \\ z = s+1 \end{cases} : s \in R$

١–اثبت ان المستقيمان متقاطعان وعين نقطة التقاطع

٢ – احسب تجب الزاوية بين المستقيمان

٢–او متخالفان

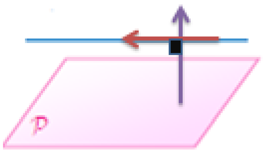


مثال٤٤: ليكن لدينا

$$(d) = \begin{cases} x = t + 1 \\ y = -3t + 2 \\ z = -3t + 3 \end{cases} : t, s \in R \qquad (d') = \begin{cases} x = s \\ y = -3s - 3 \\ z = -s + 1 \end{cases}$$

ادرس الوضع النسبي للمستقيمين

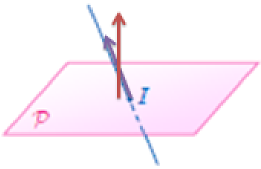
ثالثا: مستقيم $(d) = \begin{cases} x = at + x_A \\ y = bt + y_A \\ z = ct + z_A \end{cases} : t \in R$ **ومستوي** $P: ax + by + cz + d = 0$



١- اذا كان $P // d \Leftrightarrow \overrightarrow{n_P} . \overrightarrow{u_d} = 0$

مثال٤٥:ادرس الوضع النسبي للمستقيم $(d) = \begin{cases} x = t + 1 \\ y = 2t + 1 \\ z = 8t - 3 \end{cases} : t \in R$

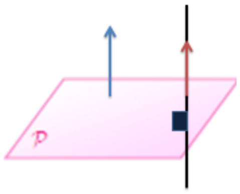
ومستوي $P: 2x + 3y - z = 0$



٢-اذا كان $\overrightarrow{n_P} . \overrightarrow{u_d} \neq 0 \Leftrightarrow P \nparallel d$ (قاطع)

مثال٤٦: لتكن لدينا النقطتان $A(-1,2,3), B(1,2,-1)$ والمستوي

$P: x + y + z = 1$ اثبت تقاطع المستقيم (AB) مع المستوي P واوجد نقطة التقاطع I



حالة خاصة من التقاطع(التعامد) يكون $\overrightarrow{n_P}$ و $\overrightarrow{u_d}$ مرتبطين خطيا

مثال ٤٧:ليكن لدينا المستقيم : $(d) = \begin{cases} x = t + 1 \\ y = 2t + 1 \\ z = 2t - 3 \end{cases}$ والمستوي $P: x + 2y + 2z = 1$

اثبت ان المستقيم عمودي على المستوي وعين نقطة التقاطع

مجموعة النقاط M في الفراغ

١- $\|\overrightarrow{MA}\| = k$ كرة مركزها A ونصف قطرها k المثال

٢- $\|\overrightarrow{MA}\| = \|\overrightarrow{AB}\|$ كرة مركزها A ونصف قطرها AB المثال

٣- $\|\overrightarrow{MA}\| = \|\overrightarrow{MB}\|$ المستوي المحوري للقطعة $[AB]$ المثال

٤- $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = 0$ كرة مركزها منتصف AB وقطرها AB

٥- $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{BC} = 0$ مستوي مار من A ناظمه $\overrightarrow{BC}$

جملة ثلاث معادلات بثلاث مجاهيل :

الحذف بالجمع : في هذه الطريقة نقوم بحذف مجهول من معادلتين ثم نحذف نفس المجهول من غير معادلتين فنحصل على معادلتين بمجهولين ودرست طريقة الحل في التاسع

مثال ٤٨ : اوجد الحل المشترك للجملة

$$(S)\begin{cases} 2x-y+3z=0\ (1) \\ x-2y+z=1\ (2) \\ x+y-z=2\ \ (3) \end{cases}$$

بجمع المعادلة (2) مع (3) نجد $2x-y=3\ (1')$ نضرب المعادلة الثالثة ب3 ونجمع مع الاولى نجد $5x+2y=6\ \ (2')$ بتالي نحصل

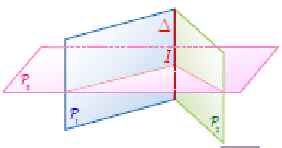
$$(S)\begin{cases} 2x-y=3\ (1') \\ 5x+2y=6\ \ (2') \end{cases}$$

نضرب المعادلة $(1')$ بالعدد 2 ونجمع مع $(2')$ نجد $9x=12$ بتالي $x=\frac{12}{9}=\frac{4}{3}$ نعوض في $(1')$ نجد $2\left(\frac{4}{3}\right)-y=3$ بالتالي $y=2\left(\frac{4}{3}\right)-3=\frac{8}{3}-\frac{9}{3}=-\frac{1}{3}$ نعوض في (3) نجد $\frac{4}{3}-\frac{1}{3}-z=2$ بالتالي $z=\frac{4}{3}-\frac{1}{3}-2=-1$

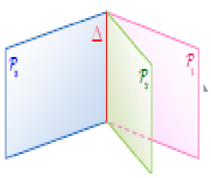
الحل هو الثلاثية $\left(x=\frac{4}{3}, y=-\frac{1}{3}, z=-1\right)$

ملاحظة: عند حل هذه الجملة سوف نحصل في النهاية على معادلة من الشكل $az=b$ هنا نميز

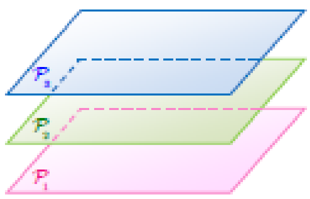
١- $a\neq 0$ بتالي $z=\frac{b}{a}$ وللجملة حل وحيد والمستويات الثلاثة تتقاطع بنقطة واحدة

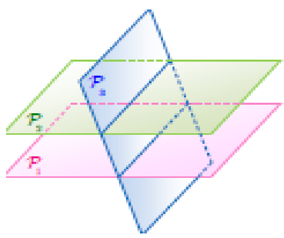


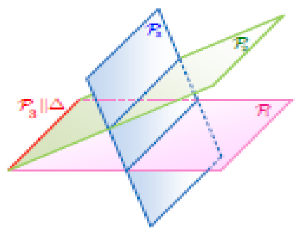
٢- $a=0$ و $b=0$ بتالي للجملة عدد لانهائي من الحلول المستويات الثلاثة تتقاطع بمستقيم



٣- $a=0$ و $b\neq 0$ مستحيلة الحل والمستويات غير متقاطعة







الحذف بالتعويض :نختار معادلتين ونعتبر احد المجاهيل ثابت ونحل هاتين المعادلتين ثم نعوض في المعادلة المتروكة

مثال ٤٩: اوجد الحل المشترك للجملة
$$(S)\begin{cases}2x-y+3z=0 \ (1)\\ x-2y+z=1 \ (2)\\ x+y-z=2 \ \ (3)\end{cases}$$

من (1) و (3) وباعتبار z ثابت نجد $2x-y=-3z$ و $x+y=z+2$ بالجمع نجد

$3x=-2z+2$ أي $x=\frac{-2z+2}{3}$ ومنه نجد $\frac{-2z+2}{3}+\mathrm{y}=\mathrm{z}+2$ أي $\mathrm{y}=\mathrm{z}+2-\frac{-2z+2}{3}$

ومنه $y=\frac{3z}{3}+\frac{6}{3}-\frac{-2z+2}{3}=\frac{5z+4}{3}$ نعوض $x=\frac{-2z+2}{3}$ و $y=\frac{5z+4}{3}$ في المعادلة (2) نجد

$\frac{-2z+2}{3}-2\frac{5z+4}{3}+z=1$ أي $\frac{-9z-6}{3}=1$ أي $-9z-6=3$ أي $-9z=6+3$ ومنه

$z=-1$ وبتالي $x=\frac{4}{3}$ و $y=-\frac{1}{3}$ الحل المشترك هو الثلاثية $(x=\frac{4}{3}, y=-\frac{1}{3}, z=-1)$

ملاحظة : يمكن اكتشاف الحل هندسيا حيث اذا كان هناك مستقيمان متوازيان بتالي الجملة مستحيلة الحل

مثال ٥٠ : اوجد الحل المشترك للجملة
$$(S)\begin{cases}x+y-2z=-1 \ \ (1)\\ 3x+y-z=-1 \ \ (2)\\ -2x-2y+4z=1 \ \ (3)\end{cases}$$

ان حل الجملة يؤول الى دراسة الوضع النسبي للمستويات الثلاثة ونلاحظ المستويان الاول والثالث متوازيان حيث $\frac{-2}{4}=\frac{1}{-2}=\frac{1}{-2}$ أي الناظمين مرتبطين خطيا ومنه الجملة مستحيلة الحل

طريقة غاوس في حل الجملة

وتعتمد هذه الطريقة على ايجاد جملة مكافئة للأصلية واسهل بإجراء بعض التحويلات السطرية وهي ضرب سطر بعدد وجمعة مع الاخر لنحصل على الشكل

$$\begin{cases}ax+by+cz=d \ \ (1)\\ 0+b'y+c'z=d' \ \ (2)\\ 0+0+c''z=d'' \ \ (3)\end{cases}$$

المعادلة الثالثة ستكون من احد الاشكال

١- $c''z = d''$ لها حل ٢- $0z = d''$ مستحيلة ٣- $0z = 0$ عدد لانهائي من الحلول

مثال ٥١: اوجد الحل المشترك بطريقة غاوص $(S)\begin{cases} -x+2y+3z=5 & (l_1) \\ 3x-y-4z=-5 & (l_2) \\ 2x+3y-2z=-2 & (l_3) \end{cases}$

بإجراء العمليات $3(l_1)+(l_2)$ و $2(l_1)+(l_2)$ نجد (المعادلة المضروبة لا تتغير)

$$(S)\begin{cases} -x+2y+3z=5 & (l_1) \\ 0+5y+5z=10 & (l_2) \\ 0+7y+4z=8 & (l_3) \end{cases}$$

نقسم المعادلة (l_2) على العدد 5 تصبح الجملة $(S)\begin{cases} -x+2y+3z=5 & (l_1) \\ 0+y+z=5 & (l_2) \\ 0+7y+4z=8 & (l_3) \end{cases}$

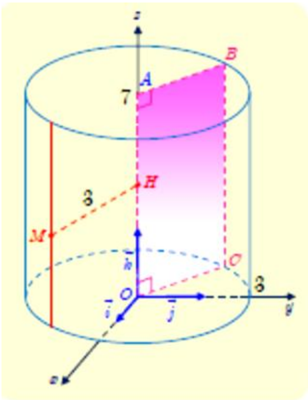
بإجراء العملية $(l_3)+(l_2)7-$ نجد $(S)\begin{cases} -x+2y+3z=5 & (l_1) \\ 0+y+z=2 & (l_2) \\ 0+0-3z=-6 & (l_3) \end{cases}$

بالتالي الجملة تملك حل وحيد

من (l_3) نجد $z=2$ نعوض في l_2 نجد $y=0$ نعوض في (l_1) نجد $x=1$ بتالي الحل المشترك هو الثلاثية $(x=1, y=0, z=2)$

مثال ٥٢: اوجد الحل المشترك للجملة
$$\begin{cases} p_1: 2x - y + 3z = 0 \\ p_2: x + 2y + z = 0 \\ p_3: 3x - 4y + 5z = 0 \end{cases}$$

مثال ٥٣ : اوجد الحل المشترك للجملة
$$\begin{cases} \boldsymbol{p_1: 2x - y + 3z = 2} \\ \boldsymbol{p_2: x + 2y + z = 1} \\ \boldsymbol{p_3: 3x - 4y + 5z = 4} \end{cases}$$



معادلة الاسطوانة : ندرس في منهاجنا الاسطوانات التي محورها يوازي احد المحاور الاحداثية في الشكل المحور طبوق على محور ZZ'

تعرف الاسطوانة بمعرفة مركزي القاعدتين ونصف قطرها او مركز القاعدة السفلى وطول الارتفاع

كيف نعبر عن معادلة الاسطوانة :في المركزين يكون هناك احداثيتان طبوقتان وواحد مختلف نكتب معادلة دائرة من الاحداثيات المتماثلة وشرط من الاحداثي المختلف

مثال٥٤ : اكتب معادلة الاسطوانة مركز قاعدتها $O_1(3,2,5)$ و $O_2(3,2,10)$ و $r = 4$

الحل :المحور يوازي ZZ'

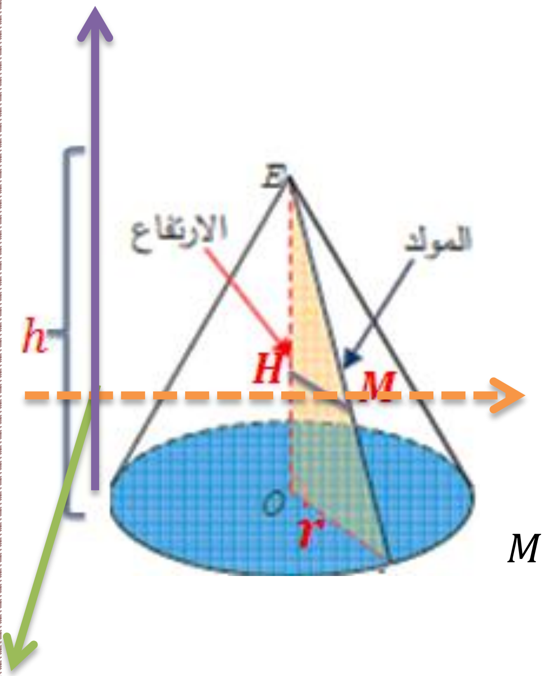
$$(x-3)^2 + (y-2)^2 = 16$$

$$5 < z < 10$$

مثال٥٥ : اكتب معادلة الاسطوانة مركز قاعدتها $O_1(7,3,1)$ و $O_2(13,3,1)$ و $r = 3$

مثال ٥٦: اكتب معادلة الاسطوانة مركز قاعدتها $O_1(0,0,0)$ و $O_2(0,8,0)$ و $r = 5$

معادلة المخروط:



نحن ندرس فقط المخروط الذي محوره يوازي احد المحاور الاحداثية أي ان احداثيات الراس والقاعدة تختلف بمركبة واحدة منها نعرف المحور

هنا $E(x_E, y_E, z_E)$ و $H(x_E, y_E, z_H)$ و $O(x_E, y_E, z_O)$

الشكل يبين ان المخروط هو مجموعة النقاط المتغيرة $M(x, y, z)$ التي تحقق

باستخدام مبرهنة النسب الثلاثة نجد $\frac{MH^2}{EH^2} = \frac{r^2}{h^2} \Longrightarrow \frac{MH}{EH} = \frac{r}{h}$ ومنه $MH^2 - \frac{r^2}{h^2}EH^2 = 0$

أي $(x - x_E)^2 + (y - y_E)^2 - \frac{r^2}{h^2}(z - z_E)^2 = 0$

$z_O \leq z \leq z_E$

يعرف المخروط بـ

١–مركز القاعدة O وراس المخروط E (يعرف منها المحور و الارتفاع h)

٢–نصف قطر القاعدة

باختصار في احداثيات الراس والمركز يكون هناك احداثين متماثلين نكتب منها القسم الاول للمعادلة والاحداثي المختلف يكتب منه القسم الثاني (الشرط)

مثال : اكتب معادلة المخروط الذي رأسه $E(5,3,7)$ ونصف قطر قاعدته 3 ومركز القاعدة $O(5,10,7)$

مثال :ماذا تمثل مجموعة النقاط المحققة للعلاقة

$$x^2 + y^2 - \frac{4}{25}z^2 = 0$$

$$0 \leq z \leq 5$$

وهل النقطة $S(1,1,3)$ و $R(-2,1,5)$ تنتمي الى هذا المجسم

مثال : اكتب معادلة مخروط رأسه $E(0,10,0)$ ومركز قاعدته $O(0,3,0)$

مثال : ماذا تمثل مجموعة النقاط المحققة للعلاقة

$$(y-5)^2 + (z+3)^2 - \frac{16}{25}(x-7)^2 = 0$$

$$2 \leq x \leq 7$$

تمرينات ومسائل

١–ليكن $ABCD$ رباعي وجوه و M تحقق $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC}$ عبر عن $\overrightarrow{AM}$ بدلالة $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{BC}$ واستنتج ان $M \in (ABC)$

٢– عبر عن M بصفتها م.أ.م للنقاط (A,α) و (B,β) و (C,γ)

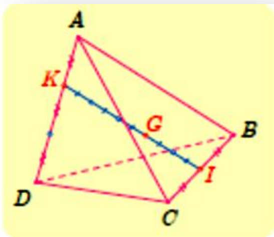
تمرين : ايمكن تعين a,b لتقع النقاط $A(2,3,0)$ و $B(3,2,1)$ و $M(a,b,2)$ على استقامة واحدة ايمكن تعين a ايكون الشعاعين $\vec{u}(2,a,5)$ و $\vec{v}(1,-2,a)$ مرتبطة خطيا

تمرين : نتامل النقاط $A(1,1,\sqrt{2})$ و $B(\sqrt{2},-\sqrt{2},0)$ و C نظيرة A بالنسبة للمبدا O

اثبت ان المثلث ABC قائم ومتساوي الساقين

الحل :

تمرين : بالاستفادة من معلومات الشكل عين الاعداد الاربعة a و b و c و d ليتحقق ما يلي

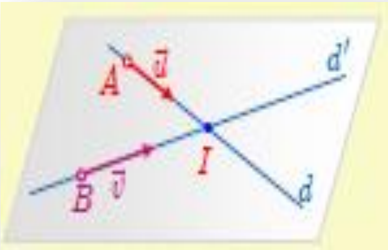


١ – K مركز ابعاد متناسبة للنقطتين (A,a) و (D,d)

٢ – I مركز ابعاد متناسبة للنقطتين (B,b) و (C,c)

٣ – G مركز ابعاد متناسبة للنقطتين (A,a) و (B,b) و (C,c) و (D,d)

تمرين : في معلم (O,i,j,k) لدينا النقطتان $A(3,-1,1)$ و $B(3,-3,-1)$ والشعاعين $\vec{u}(1,0,-2)$ و $\vec{v}(2,1,-3)$. d هو مستقيم مار بالنقطة A وموجه بالشعاع $\vec{u}$ و d' مستقيم مار من B وموجه ب $\vec{v}$

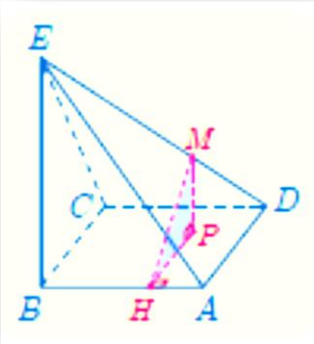


١ – هل يوجد عددان a, b حيث $\overrightarrow{AB} = a\vec{u} + b\vec{v}$

٢ – استنتج ان d و d' متقاطعين وعين I نقطة التقاطع

٣ – اكتب معادلة المستوي المشكل من تقاطع المستقيمين

تمرين: ليكن $E - ABCD$ هرم قاعدته مربع . و $[BE]$ عمودي على المستوي $(ABCD)$ و $EB = 4\sqrt{2}$ و $AB = 4$ و M نقطة تحقق العلاقة $3\overrightarrow{DM} = \overrightarrow{DE}$ ولتكن P المسقط القائم للنقطة M على $(ABCD)$ و H المسقط القائم للنقطة P عل المستقيم (AB) من اجل المعلم $\left(B, \frac{1}{4}\overrightarrow{BA}, \frac{1}{4}\overrightarrow{BC}, \frac{1}{4\sqrt{2}}\overrightarrow{BE}\right)$



١ ــ اوجد احداثيات جميع الرؤوس و M و P و H واحسب MH

٢ ــ اثبت ان $\overrightarrow{AD}$ عمودي على $\overrightarrow{EA}$

٣ ــ احسب مساحة المثلث AED

٤ ــ اكتب معادلة المستوي (EAD) واحسب بعد B عنه

٥ ــ احسب حجم الهرم الذي راسه B وقاعدته المثلث AED

تمرين: A و B و C ثلاثة نقاط ليست على استقامة واحدة من الفراغ .وD و E نقطتان تحققان $3\overrightarrow{CE} = \overrightarrow{AE}$ و $2\overrightarrow{AB} = 3\overrightarrow{AD}$

١ – اثبت ان النقاط A و B و C و D و E تقع في مستوي واحد

٢ – لتكن I منتصف $[CD]$ و J منتصف $[BE]$ اثبت وقوع A و I و J على استقامة واحدة

تمرين : في معلم $\left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ النقاط $A(3, 2, 1)$ و $B(1, 2, 0)$ و $C(3, 1, -2)$

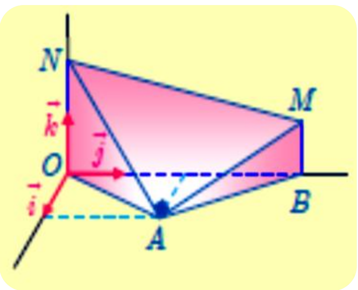
١ – اثبت ان النقاط A و B و C ليست على استقامة وحيدة

٢ – عند أي قيمة للوسيط m تنتمي النقطة $M(m, 1, 3)$ الى المستوي (ABC)

٣ – ما العلاقة بين x و y لتقع النقاط A و B و C و $D(x, y, 3)$ في مستوي واحد

تمرين: اوجد على محور الفواصل نقطة C متساوية البعد عن النقطتين $A(2,-1,3)$ و $B(0,5,-1)$

تمرين : m و n عددان حقيقيان موجبان يحققان $n > m > 0$ نتامل النقاط $A(3,3,0)$ و $B(0,6,0)$ و $M(0,6,m)$ و $n(0,0,n)$ في معلم متجانس $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. عين m و n ليكون المثلث MAN قائم في A ويساوي حجم المجسم $AOBMN$ هو $5\sqrt{3}$



تمرين : نتامل رباعي الوجوه $ABCD$. ونقطتين I و J معرفتين وفق $\overrightarrow{IA} = 2\overrightarrow{IB}$ و $\overrightarrow{JC} = 2\overrightarrow{JD}$

١ – هل يمكن ان تنطبق احدى النقاط على الاخرى

٢ – اثبت انه ايا كانت النقطة M من الفراغ ،كان

$$\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} = -\overrightarrow{MI} \text{ و } \overrightarrow{MC} - 2\overrightarrow{MD} = -\overrightarrow{MJ}$$

٣ – جد مجموعة النقاط M من الفراغ التي تحقق

$$\left\|\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}\right\| = \left\|3\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MD}\right\|$$

تمرين اعط في الحالتين معادلة المستقيم المار من A والعمودي على المستقيم d

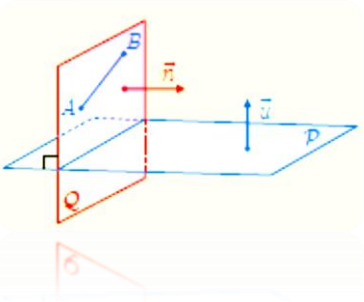
$d: 2x+5y-5=0 \, , A(5,3)$	$d: x-3y+2=0 \, , A(-1,2)$

تمرين :اثبت انه في حال اربع نقاط من A و B و C و D من المستوي ان :

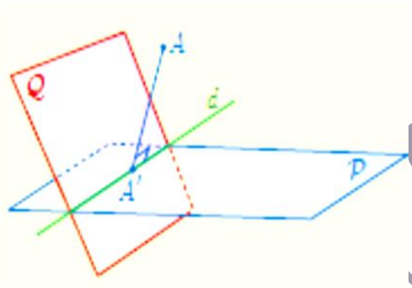
$$2\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{DB} = AB^2 - BC^2 + CD^2 - DA^2$$

تمرين : ادرس تعامد كل زوج من المستويات

$p: 7x+3y-z-1=0$ و $Q: 6x-11y-9z-5=0$ و $R: 2x-3y+5z+4=0$



تمرين: في معلم متجانس $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ لدينا النقطتان $A(1,-1,2)$ و $B(2,0,4)$ والمستوي $p: x-y+3z-4=0$, جد معادلة المستوي Q العمودي على P ويمر من A و B .



تمرين : في معلم متجانس $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ لدينا النقطة $A(3,-1,2)$ و المستويان

$Q: x+y+2z-5=0,\ p: 2x-y+z-4=0$

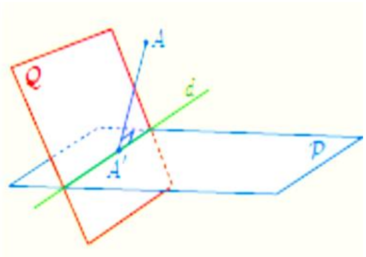
١ – اثبت ان المستويان متقاطعان

٢ – اكتب معادلة d الفصل المشترك

٣ – احسب بعد النقطة A عن الفصل المشترك

تمرين : في معلم متجانس $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ لدينا النقطة $A(1,-2,-2)$ و المستويان

$Q: 2x + y - z - 1 = 0,\ p: x - 2y + z - 2 = 0$



١ – اثبت ان المستويان متقاطعان

٢ – اكتب معادلة d الفصل المشترك

٣ – احسب بعد النقطة A عن الفصل المشترك

تمرين : في معلم متجانس $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ نتامل النقطتين $A(2,-1,-1)$ و $B(-1,3,5)$.

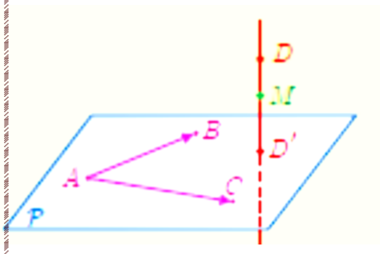
والمستوي P الذي يقبل المعادلة $2x-3y+z-5=0$

١ - اثبت ان المستقيم (AB) يقطع المستوي P وعين احداثيات C نقطة التقاطع

٢ – اوجد A' مسقط A على P

٣ – احسب $\sin\theta$ حيث θ هي الزاوية بين المستقيم و المستوي

تمرين: في معلم متجانس $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ نتامل النقطتين $A(2,5,3)$ و $B(-1,0,-1)$
ومستويا P يقبل $\vec{u}(1,1,-2)$ و $\vec{v}(3,-1,-1)$ شعاعي توجيه . اثبت ان المستقيم (AB) عمودي على المستوي P ثم اكتب معادلة لهذا المستوي المار من المبدأ



تمرين : في معلم متجانس $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ نتامل النقاط $A(1, 2, 0)$ و $B(0, 0, 1)$ و $C(1, 5, 5)$ يطلب تعين D' المسقط القائم للنقطة $D(-11, 9, -4)$ على المستوي (ABC)

تمرين : في معلم متجانس (O, i, j, k) لدينا النقطة $A(2, 2, -2)$ والمستوين P و Q حيث

$P: x - y + z = 0$ و $Q: 3x + z - 1 = 0$

الهدف حساب بعد A عن d الفصل المشترك للمستوين P و Q

١ ـ اكتب معادلة الفصل المشترك d

٢ ـ اوجد A' المسقط القائم لـ A على المستقيم d

٣ ـ استنتج بعد A عن d

تمرين : نتامل في معلم متجانس $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ لدينا النقطة $A(2,1,2)$ والمستوين P و Q حيث

$P: x + y - 2z - 1 = 0$ و $Q: x + y + z = 0$

١ – اثبت ان المستوين P و Q متعامدان

٢ – احسب بعد A عن كل من المستوين P و Q

٣ – استنتج بعد A عن الفصل المشترك للمستوين P و Q

تمرين: نتامل في معلم متجانس $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ المستوين

$P: x-2y+3z-5=0$ و $Q: x+y+z+1=0$

١ ــ علل كون P و Q ومتقاطعين . نرمز بالرمز d الى فصلها المشترك

٢ ــ اثبت ان d هو مجموعة النقاط $M\left(-\frac{5}{8}z+\frac{1,2}{8}z-2, z\right)$ عندما تتحول z في R

٣ ــ اعط شعاع موجه لـ d

٤ ــ اكتب معادلة للمستوي R العمودي على كل من P و Q ويمر بالنقطة $A(2,-5,2)$

تمرين : في معلم متجانس $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ نتامل النقطتين $A(2,1,2)$ و $B(-2,0,2)$

١ ــ اعط معادلة للمجموعة ε المكونة من النقاط $M(x,y,z)$ التي تحقق $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=0$

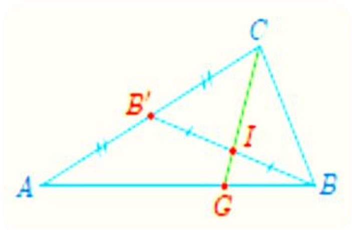
٢ ــ ما طبيعة المجموعة ε

تمرين : نتامل نقطتين مختلفتين A و B في الفراغ . نضع $r=\frac{1}{2}AB$ و نعرف I منتصف $[AB]$

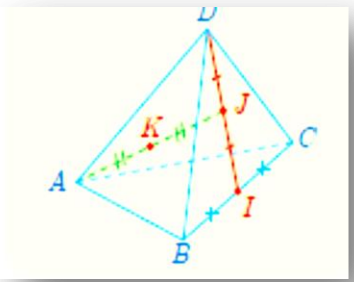
١ – اثبت انه في حالة نقطة ما M من الفراغ تحقق المساواة $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=MI^2-r^2$

٢ - اثبت ان مجموعة النقاط من الفراغ التي تحقق $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=0$ هي كرة مركزها I ونصف قطرها r وهي ايضا الكرة التي تقبل $[AB]$ قطرا فيها

تمرين : انطلاقا من الشكل المجاور. جد الامثال α و β و γ ولتكون I مركز الابعاد المتناسبة للنقاط (A,α) و (B,β) و (C,γ) واستنتج λ التي تحقق $\overrightarrow{GA} + \lambda\overrightarrow{GA} = 0$



تمرين : انطلاقا من الشكل المجاور . جد الامثال α و β و γ و δ لتكون K مركز ابعاد متناسبة للنقاط (A,α) و (B,β) و (C,γ) و (D,δ)



تمرين : نتأمل النقطتين $A(-2,1,0)$ و $B(2,3,1)$ اعط تمثيلا وسيطيا لكل من

١ - المستقيم (AB)

٢ - القطعة المستقيمة $[AB]$

٣ - نصف المستقيم $[AB)$

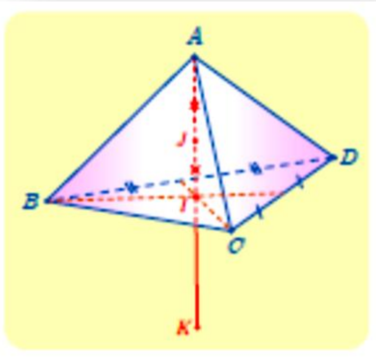
٤ – نصف المستقيم $[BA)$

تمرين : ليكن $ABCD$ رباعي الوجوه . وليكن α عددا حقيقيا ، و I منتصف $[AB]$ و J منتصف $[CD]$ والنقطتان E و F معرفتان بالشكل $\overrightarrow{AE} = \alpha\overrightarrow{AD}$ و $\overrightarrow{BF} = \alpha\overrightarrow{BC}$ واخيرا H منتصف $[EF]$

١ – تحقق ان E هي مركز ابعاد متناسبة لـ $(A, 1-\alpha)$ و (D, α) و كذلك F هي مركز ابعاد متناسبة لـ $(B, 1-\alpha)$ و (C, α)

٢ – a) اثبت ان النقطة H هي مركز ابعاد متناسبة للنقاط $(A, 1-\alpha)$ و (D, α) و$(B, 1-\alpha)$ و (C, α)

b) اثبت وقوع النقاط I و J و H على استقامة واحدة



تمرين : ليكن $A-BCD$ رباعي وجوه وليكن I مركز ثقل المثلث BCD و J منتصف $[AI]$ و K نظيرة A بالنسبة الى I . عبر عن I ثم K بصفتها مركز ابعاد متناسبة للنقاط A و B و C و D بعد تزويدها باثقال مناسبة

تمرين : نتامل رباعي الوجوه $A-BCD$ ولتكن $x \in]0,1[$ ولتكن P و Q و R و S النقاط التي تحقق $\overrightarrow{CS} = x\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{CR} = x\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{AQ} = x\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AP} = x\overrightarrow{AB}$
النقطتان I و J هما منتصفا الحرفين $[AC]$ و $[BD]$ اثبت تلاقي المستقيمات (IJ) و (PR) و (QS) في نقطة واحدة

تمرين : ليكن لدينا المعلم المتجانس $(O,\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC})$ وليكن G مركز ثقل المثلث ABC

١ – احسب احداثيات G وتحقق ان (OG) عمودي على (ABC)

٢ – تعرف النقاط $A'(2,0,0)$ و $B'(0,2,0)$ و $C'(0,0,3)$ المستوي $(A'B'C')$

a) اكتب المعادلة الديكارتية للمستوي $(A'B'C')$

b) اثبت ان $M(x,y,z)$ تنتمي للمستقيم (AC) اذا وجد عدد حقيقي k بحيث

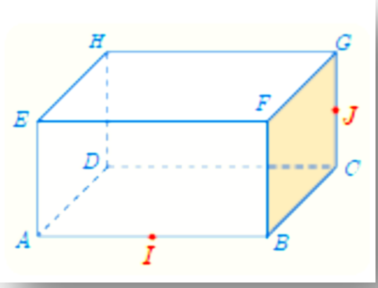
$$\begin{cases} x = 1 - k \\ y = 0 \\ z = k \end{cases}$$

c) احسب احداثيات K النقطة المشتركة بين (AC) والمستوي $A'B'C'$

٣ - a) احسب احداثيات L النقطة المشتركة بين (BC) والمستوي $A'B'C'$

b) اثبت توازي المستقيمات (AB) و $(A'B')$ و (KL)

٤ – عين تقاطع المستويان (ABC) و $(A'B'C')$ بدلالة النقاط السابقة



تمرين : ليكن $ABCDEFGH$ متوازي مستطيلات فيه $AB = 2$
و$BC = GC = 1$ والنقطتان I و J منتصفات $[AB]$ و $[CG]$
من اجل المعلم $\left(A, \frac{1}{2}AB, AD, AE\right)$

١ - احسب الطولين DJ و IJ
٢ – اثبت ان المستقيمين (DI) و (IJ) متعامدان واحسب $COS(IJD)$
٣ - a) اعط معادلة للمستوي (DIJ)
b) احسب بعد H عن (DIJ)
٤ – احسب حجم الرباعي $DHIJ$
٥ – اعط تمثيل وسيطي للمستقيم d المار بالنقطة J وعمودي على (HDI)
٦ – احسب احداثيات J' نقطة تقاطع المستقيم d والمستوي (HDI)
٧ – اوجد بعدة طرق بعد J عن المستوي (HDI)

تمرين: في معلم متجانس لدينا النقاط التالية $A(4,1,2.5)$ $B(2,-1,2.5)$ $C(4,1,1)$

١ – اثبت ان النقاط A, B, C ليست على استقامة واحدة

٢ – اوجد النقطة D التي تجعل الشكل $ABCD$ متوازي اضلاع

٣ – اثبت ان الشعاعين $\overrightarrow{AC}$ و $\overrightarrow{AB}$ متعامدان واحسب مساحة المثلث ABC

٤ – لتكن لدينا العلاقة $\overrightarrow{AE} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AD}$ اثبت ان $E \in (ABC)$

٥ – عبر عن E بصفتها م . أ. م للنقاط A, B, C, D

تمرين: ليكن لينا الهرم $A-BCDE$ قاعدته مربع طول ضلعه 4 و $AB = 5$ حيث $AB \perp BCDE$ ولتكن M نقطة من AD تحقق العلاقة $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{6}\overrightarrow{AD}$ لناخذ المعلم $(B,\frac{1}{4}\overrightarrow{BC},\frac{1}{4}\overrightarrow{BE},\frac{1}{5}\overrightarrow{BA})$

١ – اوجد احداثيات جميع الرؤوس

٢ – لتكن G مركز ثقل المثلث ACE اثبت ان النقاط M, B, G على استقامة واحدة

٣ – اكتب معادلة المستوي (ACE)

٤ – احسب بعد D عن المستوي (ACE)

٥ – عين $\acute{E}$ المسقط القائم ل E على(AC) واحسب $E\acute{E}$ واحسب S_{AEC}

٦ – احسب حجم $D-AEC$

٧ – لتكن لدينا $\overrightarrow{AJ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$ و $\overrightarrow{BI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BJ}$ عين α و β و γ لتكون I مركز ابعاد متناسبة ل (A,α) و (B,β) و (C,γ)

تمرين : ليكن لدينا المستويان $\begin{cases} P_1: 2x - y + z + 1 = 0 \\ P_2: x + y - z = 0 \end{cases}$

١ - اثبت ان المستويان متعامدان

٢ – اكتب تمثيلا وسيطيا للفصل المشترك d

٣- اكتب التمثيل الوسيطي للمستقيم d' المار من النقطة $A(1, 1, \frac{2}{3})$ وشعاعه الموجه $\vec{u}(1, 2, 1)$

٤ - اثبت ان d' و d متقاطعان وعين نقطة التقاطع

تمرين : ليكن لدينا المكعب $ABCDEFG$ طول ضلعه 4 فيهI و J و M وNمنتصفات القطع $[AB]$ و $[AD]$ و$[EC]$ و$[EF]$بالترتيب ولتكن O نقطة تلاقي اقطاره

لناخذ المعلم $\left(A,\frac{1}{4}\overrightarrow{AB},\frac{1}{4}\overrightarrow{AD},\frac{1}{4}\overrightarrow{AE}\right)$

١ – عين احداثيات رؤوس المكعب

٢– عين احداثيات I و J و M في المعلم المعطى

٣- ما نوع المثلث IJM علل الاجابة

٤– اكتب معادلة المستوي المحوري للقطعة $[EC]$ وتحقق انها هي المستوي (IJM)

٥– اكتب معادلة الكرة التي مركزها O وتمس اوجه المكعب

٦ – اكتب معادلة الاسطوانة التي قطر قاعدتها السفلى $\{AB]$ وقطر قاعدتها العليا $[EF]$

٧ – اكتب معادلة المخروط الذي مركز قاعدته I وراسه N

٨ - اكتب معادلة المخروط الذي قاعدته I تمس اضلع المربع $ABCD$ وراسهP مركز المربع EFGH

٩– اذا كانت L منتصف $[FG]$ و K منتصف $[HG]$ برهن ان $IJKL$ مستطيل

تمرين : ليكن لدينا المستويات التالية

$p_1 : x + 2y - z + 1 = 0$

$p_2 : -x - y + z - 2 = 0$

$p_3 : 2x - y - z + 2 = 0$

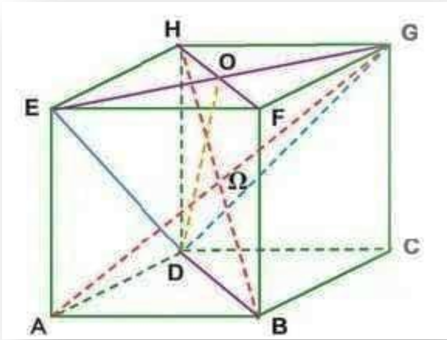
١ - اثبت ان المستويان p_1 و p_2 متقاطعان بالفصل المشترك d واكتب معادلته

٢ - اثبات ان d قاطع لـ p_3 وعين نقطة التقاطع M

٣ - لتكن لدينا النقطة $E(-2, 1, 1)$ اثبت $E \in d$ وعين E' مسقط E على p_3

٤ - اوجد $\sin EME'$ واستنتج قياس الزاوية $\widehat{EME'}$

٥ - اكتب معادلة الكرة التي مركزها E وتمس المستوي p_3



تمرين : ليكن $ABCDEFGH$ طول ضلعه 4 و مركز المكعب هو Ω و O مركز المربع $EFGH$

١ – اثبت ان (OD) هو الفصل المشترك للمستويين EDG و $HDBF$

٢ – لناخذ المعلم $\left(D, \frac{1}{4}\overrightarrow{DA}, \frac{1}{4}\overrightarrow{DC}, \frac{1}{4}\overrightarrow{DH}\right)$

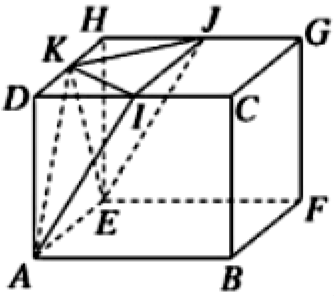
a) اوجد احداثيات كل رؤوس المكعب

b) اثبت ان (HB) و (OD) متعامدان

c) بين ان HB ناظم للمستوي (DEG) ثم اكتب معادلة ذلك المستوي

d) اوجد $Cos(\overrightarrow{\Omega A}, \overrightarrow{\Omega B})$

مسألة:نتامل مكعب $ABCDEFGH$ ولتكن I و J و K منتصفات الاضلاع $[DC]$ و $[HG]$ و $[DH]$ بالترتيب . نتخذ $\left(A,\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AE},\overrightarrow{AD}\right)$ معلم متجانس



١) اوجد احداثيات النقاط A,I,E

٢) اكتب معادلة المستوي $(AIJE)$

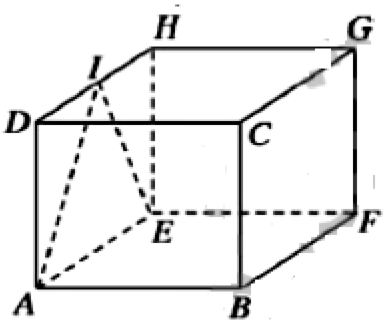
٣) احسب بعد K عن المستوي $(AIJE)$ وحجم الهرم $KAIJE$

٤) اكتب تمثيل وسيطي للمستقيم d العمودي على المستوي $(AIJE)$ والمار من النقطة K

٥) احسب احداثيات N نقطة تقاطع المستقيم d مع المستوي $(AIJE)$

٦) اثبت ان N هي مركز ابعاد متناسبة للنقاط (A,α) و (I,β) و (E,γ) حيث يطلب تعين الاثقال

تمرين: النموذج الوزاري الثاني



ليكن المكعب الجانبي الذي طول ضلعه 1 . مزود بمعلم متجانس $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AE}, \overrightarrow{AD})$

حيث I هي منتصف $[DH]$

١) اعط احداثيات النقاط I و E و A

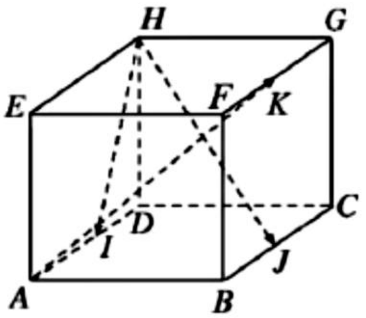
٢) جد احداثيات o مركز ثقل المثلث AEI

٣) اين تقع النقطة M التي تحقق العلاقة $3\overrightarrow{FM} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{EO}$

٤) احسب $IA.IE$ واستنتج $\cos(AIE)$

تمرين : اكتب معادلة المستوي المحوري للقطعة $[AB]$ حيث $A(2,-1,3)$ و $B(4,3,-1)$

تمرين : $ABCDEFGH$ مكعب . I و J و K هي بالترتيب منتصفات $[AD]$ و $[BC]$ و $[FG]$



١) باختيار معلم متجانس $(D,\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DC},DH)$ احسب مركبات الاشعة $\overrightarrow{AK}$ و $\overrightarrow{HI}$ و $\overrightarrow{HJ}$

٢) اوجد عددين حقيقين a و b يحققان المساواة $\overrightarrow{AK}=a\overrightarrow{HI}+b\overrightarrow{HJ}$ ثم استنتج ان الاشعة $\overrightarrow{AK}$ و $\overrightarrow{HI}$ و $\overrightarrow{HJ}$ مرتبطة خطيا

تمرين : النموذج الوزاري الرابع

ليكن $ABCDEFGH$ مكعب حيث K من CD تحقق $\overrightarrow{DK} = \frac{1}{4}\overrightarrow{DC}$ والنقطة $J \in BC$ حيث $\overrightarrow{BJ} = \frac{3}{4}\overrightarrow{BC}$ والمطلوب

١) اوجد احداثيات النقط H, E, J, K, G في معلم $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AE}, \overrightarrow{AD})$

٢) اثبت ان الشعاعين $\overrightarrow{EG}$ و $\overrightarrow{EJ}$ غير مرتبطين خطيا

٣) اثبت ان الاشعة $\overrightarrow{HK}$ و $\overrightarrow{EG}$ و $\overrightarrow{EJ}$ مرتبطة خطيا

٤) اثبت ان المستقيم (HK) يوازي المستوي (EGJ)

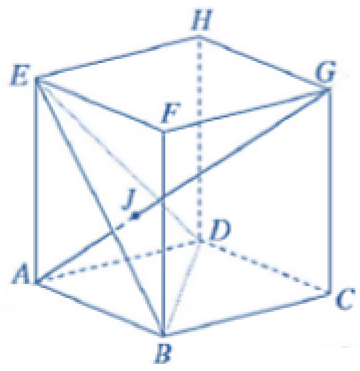
تمرين : في الفضاء المنسوب لمعلم متجانس (O, i, j, k) لدينا النقاط

$A(1,0,-1)$ و $B(2,2,3)$ و $C(3,1,-2)$ و $D(-4,2,1)$

١) اثبت ان المثلث ABC قائم واحسب مساحته

٢) اثبت ان الشعاع $n(2,-3,1)$ ناظم على المستوي (ABC) واستنتج معادلة المستوي (ABC)

٣) احسب بعد النقطة D عن المستوي (ABC) واحسب حجم رباعي الوجوه $D-ABC$



تمرين : النموذج الوزاري الخامس

$ABCDEFGH$ مكعب طول ضلعه يساوي 3

١) عين احداثيات النقاط G و E و B و D في معلم $\left(A;\frac{1}{3}AB,\frac{1}{3}AD,\frac{1}{3}AE\right)$

٢) اعط تمثيلا وسيطيا للمستقيم (AG)

٣) اثبت ان المستقيم (AG) عمودي على المستوي (EDB)

٤) المستقيم (AG) يتقاطع مع المستوي (EDB) في J عين احداثياتها

٥) اثبت ان J هي نقطة تلاقي ارتفاعات المثلث EDB ومركز ثقله

٦) احسب حجم رباعي الوجوه $AEDB$

تمرين : النموذج الوزاري السادس

$ABCD$ رباعي وجوه و G مركز ثقل المثلث DBC جد مجموعة النقاط في الفراغ التي تحقق

$$\|\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{MC}\| = \|3\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MD}-\overrightarrow{MC}\|$$

تمرين : نتامل النقطتان $A(1,1,1)$ و $B(3,2,0)$ في الفراغ المنسوب لمعلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ ليكن P المستوي المار بالنقطة B ويقبل $\overrightarrow{AB}$ شعاعا ناظما وليكن المستوي Q الذي معادلته $x-y+2z+4=0$. واخيرا لتكن S كرة التي مركزها A ونصف قطرها AB

١) اثبت ان $2x+y-z-8=0$ هي معادلة المستوي P

٢) جد معادلة الكرة S

٣) اثبت ان المستوي Q مستوي مماس للكرة S

٤) اثبت ان النقطة $C(0,2,-1)$ هي مسقط النقطة A على المستوي Q

٥) ليكن d المستقيم الذي يقبل تمثيلا وسيطيا $d\begin{cases} x=t \\ y=12-5t\ .\ t\in R \\ z=4-3t \end{cases}$

a) اثبت ان d هو الفصل المشترك للمستويين P و Q

b) اثبت ان المستقيم d محتوى في المستوي المحوري للقطعة المستقيمة $[BC]$

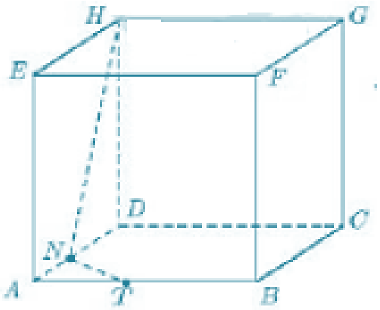
تمرين: النموذج الوزاري الثامن

ليكن $ABCD$ رباعي وجوه منتظم طول حرفه 4 وفيه I منتصف $[CD]$

١ – وضع النقطة M المحققة للعلاقة $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BI}$

٢ – احسب العدد $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$

تمرين : ليكن المكعب $ABCDEFGH$ طول حرفه 1 و T نقطة من $[AB]$ وتحقق $\overrightarrow{AT} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$ و N نقطة من $[AD]$ تحقق $\overrightarrow{AN} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AD}$



١ – في معلم متجانس $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$ اوجد T و N و F و H

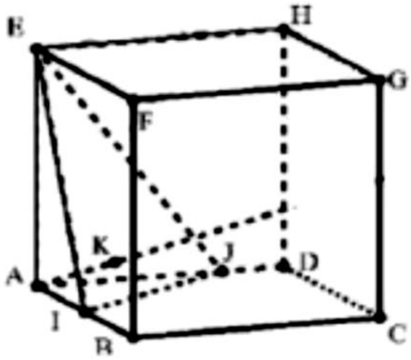
٢ - جد الشعاعين $\overrightarrow{NH}$ و $\overrightarrow{NT}$ثم معادلة المستوي (HNT)

٣ – جد تمثيلا وسيطيا للمستقيم (EF)

٤ – استنتج نقطة تقاطع المستقيم $[EF]$ مع المستوي (HNT)

٥ – اذكر مقطع المكعب بالمستوي (HNT) وما طبيعته ؟

تمرين : ليكن المكعب $ABCDEFGH$ طول حرفه 4 ولتكن I منتصف $[AB]$ و النقطة J تحقق العلاقة $4\overrightarrow{AJ} = 3\overrightarrow{AD}$ نتامل المعلم المتجانس $\left(A, \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}, \frac{1}{4}\overrightarrow{AD}, \frac{1}{4}\overrightarrow{AE}\right)$ والمطلوب



١ – اوجد رؤوس المكعب مع النقطتين I و J

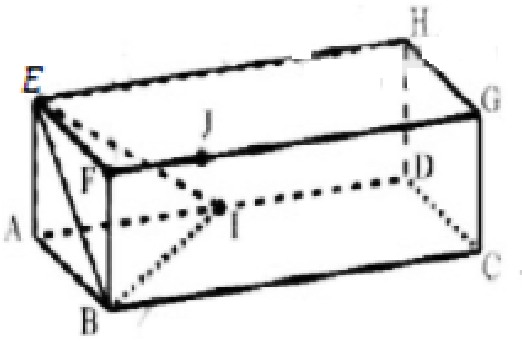
٢ - اثبت ان معادلة المستوي (EIJ) هي $6x + 4y + 3z - 12 = 0$

٣ – اكتب التمثيل الوسيطي للمستقيم d المار من A وعمودي على المستوي (EIJ) ثم اوجد احداثيات K نقطة تقاطع d مع (EIJ)

٤ – احسب مساحة المثلث AEJ ثم استنتج حجم رباعي الوجوه $I - AEJ$

٥ – احسب بعد النقطة A عن المستوي (EIJ) واستنتج مساحة المثلث EIJ

تمرين : صف مجموعة النقاط $M(x,y,z)$ التي تحقق العلاقة $x^2+z^2=16$ و $2\le y\le 5$



تمرين : ليكن $ABCDEFGH$ متوازي مستطيلات فيه $AB=2$ و $AD=4$ و $AE=2$ ولتكن I منتصف $[AD]$ والنقطة J تحقق العلاقة $FJ=\frac{1}{4}FG$ ناخذ معلم متجانس, $\left(A;\frac{1}{2}AB,\frac{1}{4}AD,\frac{1}{2}AE\right)$ والمطلوب

١ – اوجد احداثيات رؤوس متوازي المستطيلات و I و J

٢ – اثبت ان معادلة المستوي (EIB) هي $x+y+2z-2=0$

٣ – بين نوع المثلث EIB واحسب مساحته

٤ – احسب بعد G عن المستوي (EIB) ثم استنتج حجم رباعي الوجوه $G-EIB$

٥ – اكتب التمثيل الوسيطي للمستقيم d المار من J والعمودي على المستوي (EIB)

٦ – استنتج ان المسقط القائم للنقطة J على المستوي (EIB) تقع على القطعة المستقيمة $[BI]$

تمرين : **في معلم متجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ لدينا النقطة $A(2,-1,0)$ و المستوي P الذي معادلته**

$2x+y-2z+9=0$ اكتب معادلة الكرة التي مركزها A وتمس المستوي P

تمرين: نتأمل في الفضاء المنسوب الى معلم متجانس $\left(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$. النقاط $A(1,5,4)$ و $B(10,4,3)$ و $C(4,3,5)$ و $D(0,4,5)$

١ - بين ان النقاط A و B و C ليست على استقامة واحدة

٢ – بين ان النقاط A و B و C و D تقع في مستوي واحد

٣ – استنتج ان النقطة D هي مركز ابعاد متناسبة للنقاط المثقلة (A, α) و (B, β) و (C, γ) حيث α و β و γ اثقال يطلب تعينها

تمرين : في الفضاء المنسوب الى معلم متجانس $\left(O:\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}\right)$ لدينا النقاط $A(1,0,-1)$ و $B(2,2,3)$ $C(3,1,-2)$ و $D(-4,2,1)$

١ – اثبت المثلث ABC قائم واحسب مساحته

٢ – اثبت ان الشعاع $\vec{n}(2,-3,1)$ ناظم على المستوي (ABC) واستنتج معادلة المستوي (ABC)

٣ – احسب بعد النقطة D عن المستوي (ACB) ثم استنتج حجم رباعي الوجوه $DABC$

تمرين : ليكن المستقيمان المعرفان وسيطيا وفق

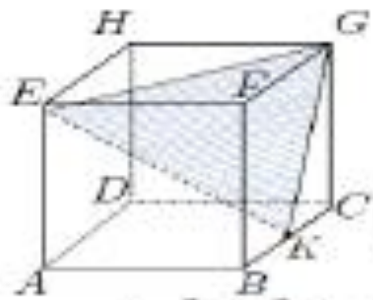
$$L:\begin{cases} x=-1 \\ y=1-t \\ z=1-2t \end{cases} : t\in R \quad \text{و} \quad L':\begin{cases} x=4-5s \\ y=3-2s \\ z=-1-2s \end{cases} : s\in R$$

١ – اثبت ان L و L' متقاطعين في نقطة يطلب تعينها

٢ – اكتب معادلة المستوي الناتج عن تقاطع المستقيمين L و L'

تمرين : ليكن $ABCDEFGH$ متوازي مكعب طول حرفه يساوي 1 والنقطة K منتصف $[BC]$

ولنختر المعلم $\left(A: \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\right)$



١ – جد احداثيات النقاط : E و F و G و K

٢ – اثبت ان $\vec{n}(2,-2,1)$ ناظم على المستوي (EGK)

٣ – اثبت ان معادلة المستوي (EGK) هي $2x-2y+z-1=0$

٤ – اثبت ان بعد النقطة F عن المستوي (EGK) تساوي $\frac{2}{3}$ ثم تحقق ان المسقط القائم للنقطة F على المستوي (EGK) هي النقطة $L\left(\frac{5}{9}, \frac{4}{9}, \frac{7}{9}\right)$

٥ – احسب مساحة المثلث EFG واستنتج حجم رباعي الوجوه $KEFG$ واستنتج مساحة المثلث EGK

تمرين :في معلم متجانس $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ لدينا المستقيمين

$$d':\begin{cases} x = 1 - \frac{1}{2}s \\ y = -2 - s \\ z = 3 + \frac{1}{2}s \end{cases} : s \in R \quad \text{و} \quad d:\begin{cases} x = 3 + t \\ y = 2t \\ z = 1 - t \end{cases} : t \in R$$

١) اثبت ان d و d' متوازيان وغير منطبقان

٢) اوجد نقطة A من d ونقطة B من d' ثم تحقق ان الشعاعين $\overrightarrow{AB}$ و $u_d(1,2,-1)$ غير مرتبطين خطيا ثم اكتب معادلة المستوي P المحدد بالمستقيمين d و d'

تمرين : في معلم متجانس ، نتامل النقاط $A(1,3,4)$ و $B(5,3,4)$ و $C(4,-1,2)$

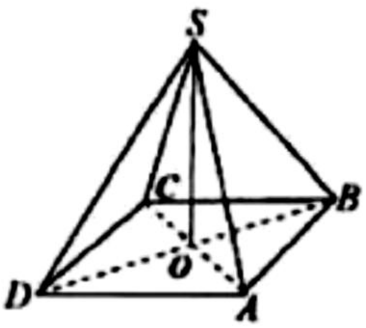
١ ــ اثبت ان C لا تقع على المستقيم (AB)

٢ ــ N نقطة من المستقيم (AB) جد احداثيات N بدلالة x

٣ ــ احسب NC^2 بدلالة x واستنتج بعد C عن (AB)

٤ ــ جد معادلة للكرة التي مركزها C وتمس المستقيم (AB)

تمرين : $S - ABCD$ هرم قاعدته مربع طول ضلعه يساوي 4
وطول كل حرف من حروفه الجانبية يساوي 4 وتانقطة O مرتسم S
القائم على القاعدة والمطلوب :



١ – احسب $\overrightarrow{SA}.\overrightarrow{SB}$

٢ - احسب طو القطر CA ثم احسب $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AS}$

٣ – عين G مركز الابعاد المتناسبة للنقاط المثقلة $(A, 2)$ و $(B, 3)$ و $(S, 1)$

تمرين : ١) اكتب معادلة للكرة التي مركزها O مبدأ الاحداثيات ونصف قطرها $R = \sqrt{3}$

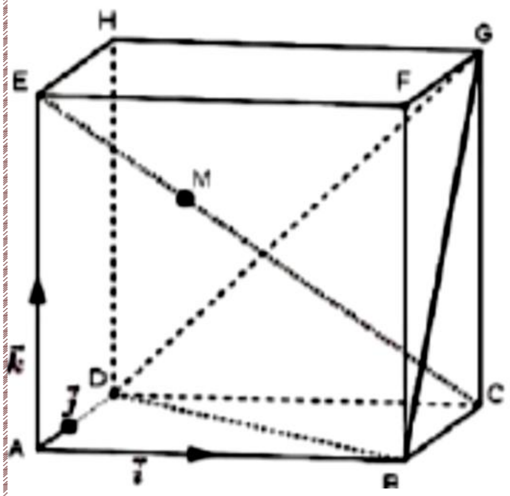
٢) تحقق ان المستوي P الذي معادلته $P: x - y + z + 3 = 0$ يمس الكرة S

تمرين :ليكن لدينا المستقيم $t \in R$ $d \begin{cases} x = t + 1 \\ y = t \\ z = 5 \end{cases}$ و النقطة $C(1, 1, 1)$

١) اوجد نقطتين A و B من هذا المستقيم

٢) هل النقطة C تنتمي للمستقيم

٣) اكتب معادلة المستوي المشكل من d و C



تمرين : ليكن $ABCDEFGH$ مكعب طول حرفه يساوي 2

نتامل المعلم المتجانس $(A;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$

في المعلم $\overrightarrow{AB}=2\vec{i}$ و $\overrightarrow{AD}=2\vec{j}$ و $\overrightarrow{AE}=2\vec{k}$

١) اكتب معادلة للمستوي (GBD)

٢) اكتب تمثيل وسيطي للمستقيم (EC)

٣) جد احداثيات نقطة تقاطع المستقيم (EC) مع المستوي (GBD)

٤) اوجد احداثيات M التي تحقق العلاقة $\overrightarrow{EM}=\frac{1}{3}\overrightarrow{EC}$

٥) اثبت تعامد المستقيمين (HM) و (EC)

تمرين : دورة 2017

اكتب شعاعي التوجه للمستقيمين d و d'

$$d':\begin{cases} x = s \\ y = -3s - 3 \\ z = -s + 1 \end{cases} : s \in R \quad \text{و} \quad d:\begin{cases} x = t + 1 \\ y = -3t + 2 \\ z = -3t + 3 \end{cases} : t \in R$$

وهل المستقيمان d و d' في مستوي واحد ؟ علل اجابتك

تمرين :في معلم متجانس (O,i,j,k) لدينا النقاط $A(1,1,0)$ و $B(1,2,1)$ و $C(4,0,0)$

١ – اثبت ان النقاط A و B و C ليست على استقامة واحدة

٢ – اثبت ان معادلة المستوي (ABC) تعطى بالعلاقة: $x+3y-3z-4=0$

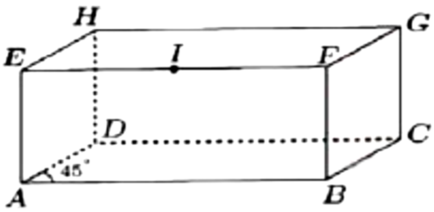
٣ – ليكن المستويان P و Q معادلتهما $P: x+2y-z-4=0$ و $Q: 2x+3y-2z-5=0$

اثبت ان المستويان يتقاطعان في الفصل المشترك d الذي تمثيله الوسيطي $t\in R$: $d\begin{cases} x=t-2 \\ y=3 \\ z=t \end{cases}$

٤ – ماهي نقطة تقاطع المستويات P و Q و (ABC)

٥ – احسب بعد A عن المستقيم d

تمرين : $ABCDEFGH$ متوازي سطوح فيه $AB = 2$ و $BC = GC = 1$ وقياس الزاوية $\widehat{DAB} = 45$ والنقطة I منتصف $[EF]$ المطلوب



١) احسب $AB.AD$

٢) عين موضع النقطة M التي تحقق العلاقة $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{FB} + \frac{1}{2}GH$

تمرين : في معلم متجانس $(O: i, j, k)$ نتامل النقطتين $A(1,0,1)$ و $B(0,1,1)$

١) اكتب تمثيل وسيطي للمستقيم d المار من A ويقبل شعاع توجيه له $\vec{u}(2,2,1)$

٢) اثبت ان المستقيمين (AB) و d متعامدان

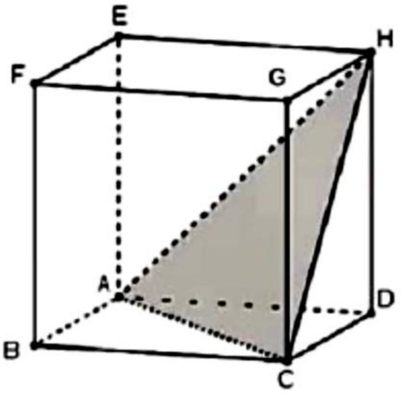
تمرين : ليكن لدينا المستقيم $d\begin{cases} x = s+1 \\ y = -s+3 \; : \; s \in R \\ z = s \end{cases}$ والنقطة $A(1,1,1)$

١) بين ان A لا تنتمي للمستقيم d

٢) اوجد A' مسقط A على المستقيم d

٣)استنتج بعد A عن d

٤) اكتب معادلة المستوي Q المار من A والعمودي على d



تمرين :نتأمل معلم متجانس $(A:\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE})$ المكعب $ABCDEFGH$

١) اكتب في هذا المعلم احداثيات النقاط D و F و H و C و A

٢) اكتب معادلة للمستوي (ACH)

٣) اثبت ان المستوي P الذي معادلته $\boldsymbol{P: -2x + 2y - 2z + 1 = 0}$ يوازي المستوي (ACH)

٤) بفرض I مركز ثقل المثلث (ACH) اثبت ان D و I و F على استقامة واحدة

٥) اكتب معادلة الكرة S التي مركزها $\Omega(1,-1,1)$ ونصف قطرها $R=\sqrt{3}$ وبين ان المستوي (ACH) يمس الكرة S

تمرين : في معلم متجانس (O, i, j, k) لدينا النقطتين $A(2, 1, -2)$ و $B(-1, 2, 1)$ والمستوي $P: 3x - y - 3z - 8 = 0$

١) اثبت ان المستقيم (AB) يعامد المستوي P

٢) اكتب تمثيلا وسيطيا للمستقيم (AB) ، ثم عين احداثيات النقطة A' المسقط القائم للنقطة A على P

تمرين : في معلم متجانس (O, i, j, k) لدينا النقطة $A(1, 2, 0)$ والمستويات

$$P: 2x - y + 2z - 2 = 0$$

$$Q: x + y + z - 1 = 0$$

$$R: x - z - 1 = 0$$

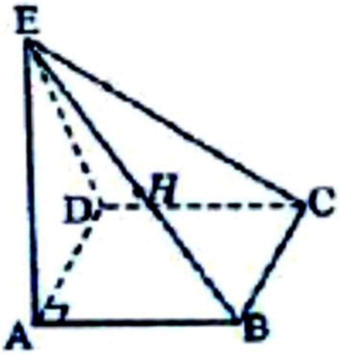
١) اثبت ان المستويان P و Q متقاطعان بالفصل المشترك Δ اكتب تمثيل وسيطي له

٢) تحقق ان المستوي R يعامد Δ ويمر من A

٣) اثبت ان المستويات تتقاطع بنقطة واحدة I يطلب تعين احداثياتها

٤) استنتج بعد النقطة A عن المستقيم Δ

تمرين : $(EABCD)$ هرم رباعي راسه E قاعدته مربع طول ضلعه 3 و $[AE]$ عمودي على المستوي $(ABCD)$ و $EA=3$ نختار معلما متجانس $(A,\frac{1}{3}\overrightarrow{AB},\frac{1}{3}\overrightarrow{AD},\frac{1}{3}\overrightarrow{AE})$ والمطلوب



١) عين احداثيات A,B,C,D,E .

٢) اوجد معادلة المستوي (EBC)

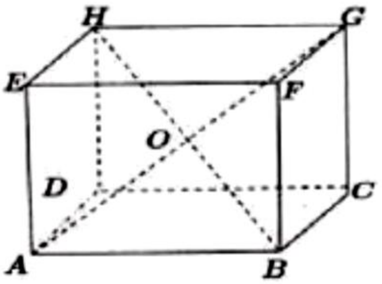
٣) اكتب تمثيل وسيطي للمستقيم المار من A ويعامد المستوي (EBC)

٤) استنتج ان H منتصف $[EB]$ هي المسقط القائم لـ A على المستوي (EBC)

٥) احسب حجم رباعي الوجوه $(A-EBC)$

تمرين : نتامل في معلم متجانس (O, i, j, k) المستوي $P; 2x + y - 3z + 2 = 0$ والنقطة $A(1, 5, -2)$
المطلوب
١ – اثبت ان A لاتنتمي للمستوي P
٢ - اكتب معادلة المستوي Q المار من A والموازي لـ P
٣ – ليكن المستوي $Q := x + y + z + 1 = 0$ بين فيما اذا كانت المستويات P و Q و R تشترك في نقطة او مستقيم ولا تشترك

تمرين : مكعب $ABCDEFGH$ طول حرفه 2 و O نقطة تقاطع القطرين $[AG]$ و $[HB]$ نختار معلم متجانس $\left(A, \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}, \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}, \frac{1}{2}\overrightarrow{AE}\right)$ والمطلوب



١ – اوجد احداثيات النقاط A و B و G و H و O

٢ – اعط معادلة للمستوي (GOB)

٣ - احسب $OG.OB$ واستنتج $cos\widehat{GOB}$

٤ – اكتب تمثيلا وسيطيا للمستقيم (DC)

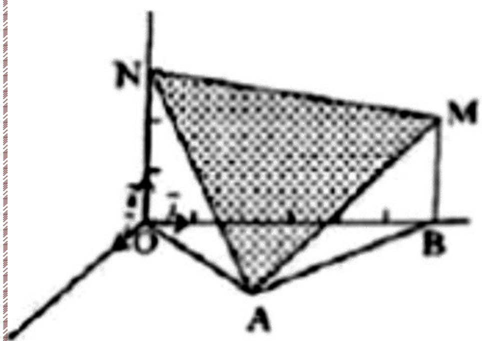
٥ – اثبت ان المستقيم (DC) يوازي (GOB)

٦ – جد الاعداد α و β و γ لتكون D مركز ابعاد متناسبة للنقاط (A,α) و (B,β) و (C,γ)

تمرين : في معلم متجانس $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ نتامل النقاط $A(-1,2,3)$ و $B(2,1,1)$ و $C(-3,4,-1)$ و $D(3,1,1)$ والمطلوب

١) اوجد AC و AB وبين ان المستقيمين (AC) و (AB) متعامدان
٢) اثبت ان الشعاع $n(2,4,1)$ يعامد المستوي (ABC) واكتب معادلة المستوي (ABC)
٣) جد تمثيلا وسيطيا للمستقيم d المار من D والعمودي على المستوي (ABC)
٤) احسب بعد D عن المستوي (ABC) ثم احسب حجم الهرم $D-ABC$
٥) بفرض ان G مركز ابعاد متناسبة للنقاط المثقلة $(A,1)$ و $(B,-1)$ و $(C,2)$ اثبت ان المستقيمين (AB) و (CG) متوازيان

تمرين : في معلم متجانس $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ لدينا النقاط $M(0,0,2)$ و $N(0,0,3)$ و $B(0,6,0)$ و $A(1,3,0)$



المطلوب :

١) اكتب معادلة للمستوي (AMN)

٢) اكتب تمثيلا وسيطيا لمستقيم Δ المار من O ويعامد المستوي (AMN)

٣) اثبت ان المستوي الذي معادلته $z-1=0$ هو المستوي المحوري للقطعه المستقيمة $[BM]$

٤) احسب حجم الهرم $AOBMN$

٥) احسب حجم رباعي الوجوه $A-ONB$ ثم استنتج مساحة المثلث OAB

دورة 2022: في معلم متجانس $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ لدينا النقاط $A(2,0,0)$ و $B(0,1,0)$ و $C(0,0,1)$

١ – احسب $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ واستنتج $Cos(\widehat{BAC})$

٢ – اذا كانت النقطة G مركز ثقل للمثلث ABC ، عين مجموعة النقاط M التي تحقق العلاقة

$$\left\|2\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}\right\| = \left\|\overrightarrow{AB}\right\|$$

مسألة : في معلم متجانس $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ لدينا النقطة $A(1,1,2)$ و المستويان P و Q

حيث $\begin{matrix} P : x - y + 2z - 1 = 0 \\ Q : 2x + y + z + 1 = 0 \end{matrix}$ والمطلوب

١ – اثبت ان المستويان P و Q متقاطعين بفصل مشترك d

٢ – اكتب التمثيل الوسيطي للمستقيم d

٣ – اكتب معادلة للمستوي R المار من A ويعامد كلا من المستوين P و Q

٤ - جد احداثيات النقطة B الناتجة عن تقاطع المستقيم d والمستوي R

٥ – احسب بعد النقطة A عن المستقيم d

٦ - اكتب معادلة الكرة S التي مركزها النقطة A وتمس المستوي Q

مسألة : في معلم متجانس $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ لدينا النقاط $A(2,-2,2)$ و $B(1,1,0)$ و $C(1,0,1)$ و $D(0,0,1)$ والمطلوب :

١ – تحقق ان النقاط B و C و D ليست على استقامة واحدة

٢ – اثبت ان $y+z-1=0$ هي معادلة للمستوي (BCD)

٣ – اعط تمثيلا وسيطيا للمستقيم Δ المار من النقطة A ويعامد المستوي (BCD)

٤ - عين احداثيات النقطة K المسقط القائم للنقطة A على المستوي (BCD)

٥ – اكتب معادلة الكرة التي تقبل $[AD]$ قطرا لها

دورة 2023 : في معلم متجانس $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ لدينا النقاط $A(1, -1, 2)$ و $B(2, 0, 4)$ والمستوي $P: x - y + 3z - 4 = 0$ جد معادلة للمستوي Q الموازي P المار من A واكتب معادلة للكرة التي قطرها $[AB]$

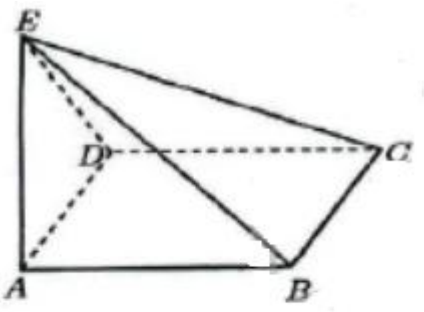
تمرين : ليكن لدينا المستوي $P: x - y + z - 1 = 0$ والنقطة $A(1, 2, 1)$

١) اثبت ان A لا تنتمي للمستوي P

٢) اوجد A' المسقط القائم لـA على المستوي P

٣) احسب بعد A عن P بطريقتين

٤) اكتب معادلة الكرة التي مركزها A وتمس المستوي



مسالة٢٠٢٣ : $ABCDE$ هرم راسه E قاعدته مربع طول ضلعه 4 و $[AE]$ عمودي على المستوي $(ABCD)$ و $EA = 3$ نختار معلما متجانس $\left(A, \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}, \frac{1}{4}\overrightarrow{AD}, \frac{1}{3}\overrightarrow{AE}\right)$ والمطلوب

١) عين احداثيات A, B, C, D, E .

٢) اوجد احداثيات M التي تحقق العلاقة $4\overrightarrow{CM} = 3\overrightarrow{CE}$

٣) احسب $\overrightarrow{EB}.\overrightarrow{BC}$ واستنتج نوع المثلث EBC واحسب مساحته

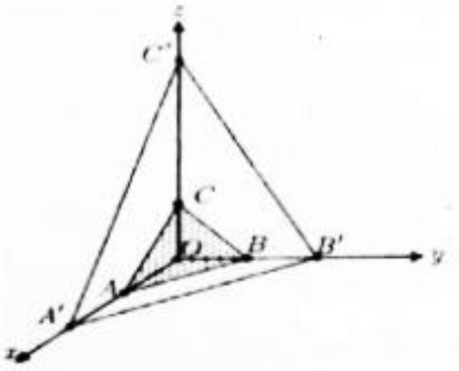
٤) اعط تمثيلا وسيطيا للمستقيم (EC)

٥) اكتب معادلة للمستوي (EBC) واحسب بعد النقطة A عن المستوي (EBC) ثم استنتج حجم الهرم $AEBC$

تمرين : في معلم متجانس $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ لدينا النقاط $A(2,2,4)$ و $B(-2,0,2)$ المطلوب

١ – اعط معادلة للمستوي المحوري للقطعة المستقيمة $[AB]$

٢ – اعط معادلة للمجموعة S المكونة من النقاط $M(x,y,z)$ التي تحقق العلاقة $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=0$ ما طبيعة المجموعة S



مسالة :نتأمل النقاط $A(1,0,0)$ و $B(0,1,0)$ و $C(0,0,1)$ و $D(1,1,1)$ والمطلوب

١ - جد احداثيات G مركز ثقل المثلث ABC واثبت ان OG عمودي على المستوي (ABC)

٢ - جد معادلة المستوي (ABC)

٣ - تعرّف النقاط $A'(2,0,0)$ و $B'(0,2,0)$ و $C'(0,0,4)$ المستوي $(A'B'C')$ اثبت ان $2x+2y+z-4=0$ معادلة للمستوى $(A'B'C')$

٤ - اثبت ان Δ الفصل المشترك للمستوين (ABC) و $(A'B'C')$ يقبل التمثيل الوسيطي

$$\Delta:\begin{cases} x=t \\ y=3-t : t\in R \\ z=-2 \end{cases}$$

٥ - احسب بعد $D(1,1,1)$ عن المستقيم Δ

مسألة : في الشكل الجانبي هرم منتظم $S-ABCD$ طول حرفه 3 قاعدته المربع $ABCD$ وفيه I تحقق $\overrightarrow{BI}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$ و J تحقق $\overrightarrow{SJ}=\frac{1}{3}\overrightarrow{SC}$ و Q و R منتصفات AB و AS والمطلوب

١) احسب $\overrightarrow{SC}.\overrightarrow{CB}$ و $\overrightarrow{SA}.\overrightarrow{SC}$

٢) اثبت ان $\overrightarrow{BS}-\overrightarrow{DS}=\overrightarrow{2BQ}+3\overrightarrow{BI}$

٣) اثبت ان المستقيمان (IR) و (QJ) متقاطعان

٤) استنتج وقوع النقاط I و Q و R J في مستوي واحد

٥) اثبت ان المستقيمين (IJ) و (RQ) متوازيان