ركن الرياضيات

المساعد لطلاب الصف التاسع في الرياضيات الفصل الثاني

اعداد : أمين المحمد

٠٩٤٩٣٩٣٢٧٩

Amen Almohamd

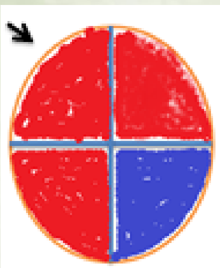
عرض ملفك الشخصي

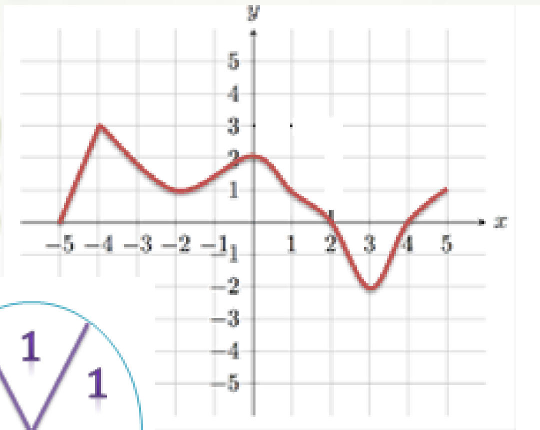
لكل عمل اذا تم نقصان

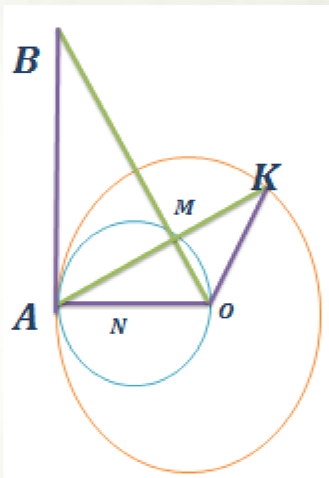
ارجو من الله ان اكون قد وفقت في تقديم ما ينفع وارجو التماس العذر لكل هفوة

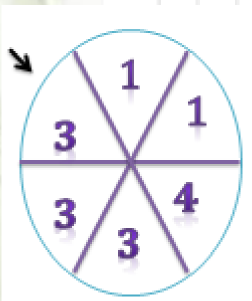
هذا العمل موجه لطلابي لتبسيط الدراسة لهم . ما كان من توفيق فهو من الله

وما كان من خطأ او نسيان فهو مني ومن الشيطان





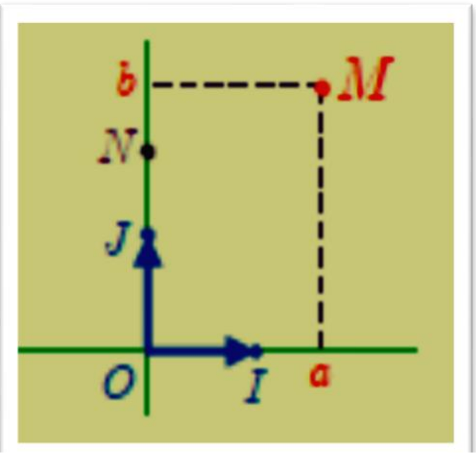




الوحدة الرابعة : المعادلة الخطية بمجهولين

تذكرة: المحاور الاحداثية وتمثيل على مستقيم اعداد

هامستقيمان متعامدان في الصفر الشاقولي يسمى التراتيب والافقي يسمى الفواصل



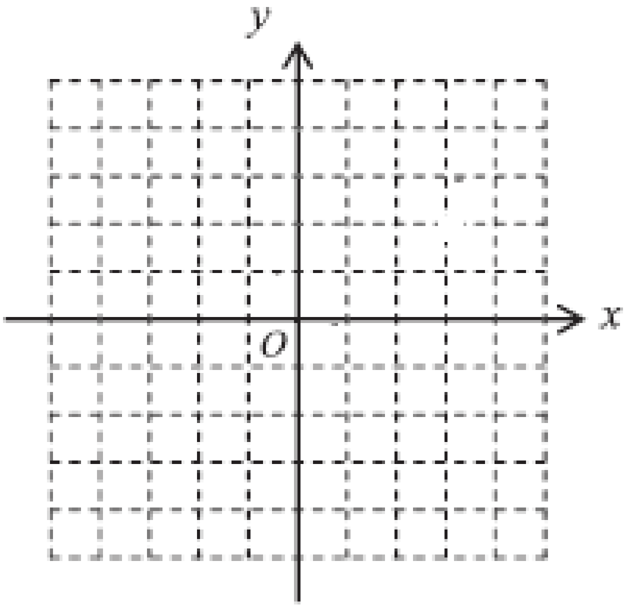
النقطة $M(a,b)$ اما ان تكون على محور او في الربع

١) على محور xx' اذا كان $b = 0$

٢) على محور yy' اذا كان $a = 0$

٣) في الربع اذا كان $a \neq 0$ و $b \neq 0$

مثال: عين النقاط في مستوي احداثي $A(0,1)$ و $B(-1,3)$ و $C(-1,-1)$ و $D(-2,0)$ و $F(0,-2)$



المعادلة الخطية بمجهولين

هي كل معادلة تصبح بعد النشر والاختزال من الشكل $ax + by = c$

مثال : ١ ــ المعادلة $2x - 5y = 6$

٢ ــ المعادلة $2(x + 3y) - y = 5(x - 4)$

تصبح بعد النشر $2x + 6y - y = 5x - 20$

تصبح بعد الاختزال $-3x + 5y = -20$

تعريف :حل المعادلة $ax + by = c$

نقول ان الثنائية (c, d) حلا للمعادلة اذا كانت المساواة صحيحة بعد التعويض

مثال : لتكن لدينا المعادلة $-2x + 3y = 10$

١ - هل الثنائية $(1, 3)$ حل للمعادلة

٢- عين قيمة a لتكون الثنائية $(a, 2)$ حلا

الحل :

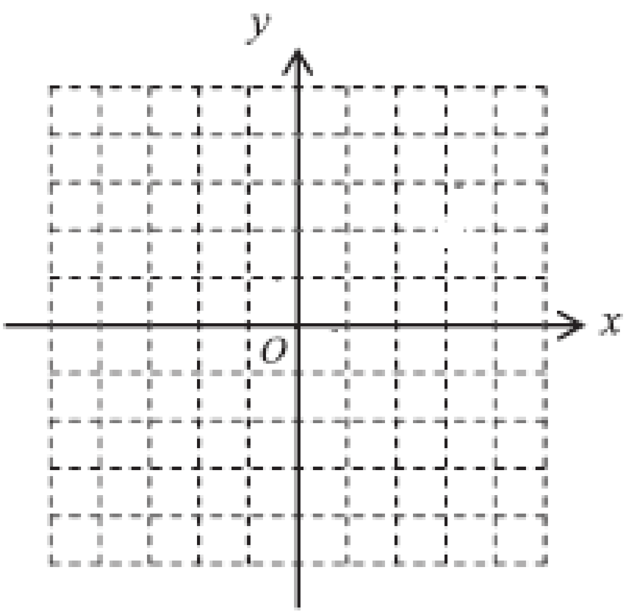
ملاحظة : ان التمثيل البياني للمعادلة $ax + by = c$ هو مستقيم والمستقيم يملك عدد لانهائي من النقاط ومنة المعادلة السابقة تملك عدد لانهائي من الحلول

حالات المعادلة $ax + by = c$

١- كل معادلة تصبح بعد النشر و الاختزال من الشكل $ax + by = c$ حيث $a, b, c \neq 0$ تمثل معادلة مستقيم d غير مار من المبدأ ولرسمه في معلم متجانس نحتاج نقطتين

مثال: ارسم المستقيم الذي معادلته

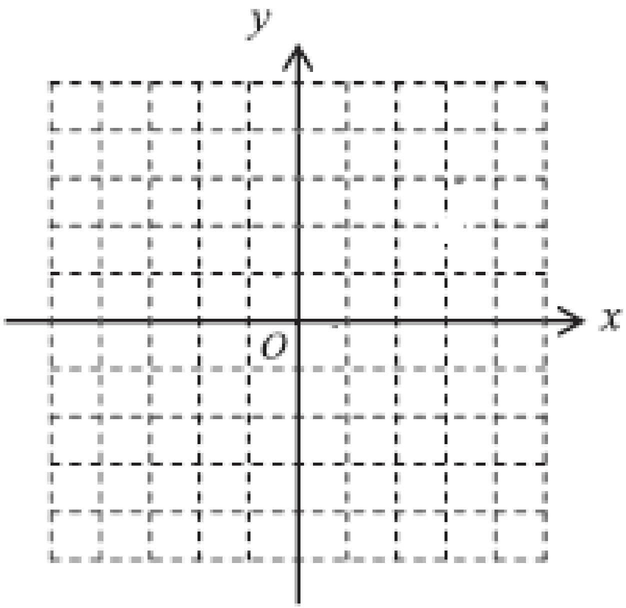
$$\mathrm{d}: 2x + y = 4$$



٢ - كل معادلة تصبح بعد النشر و الاختزال من الشكل $ax + by = 0$ حيث $a, b, \neq 0$ تمثل معادلة مستقيم d مار من المبدأ ولرسمه في معلم متجانس نعين نقطة منه

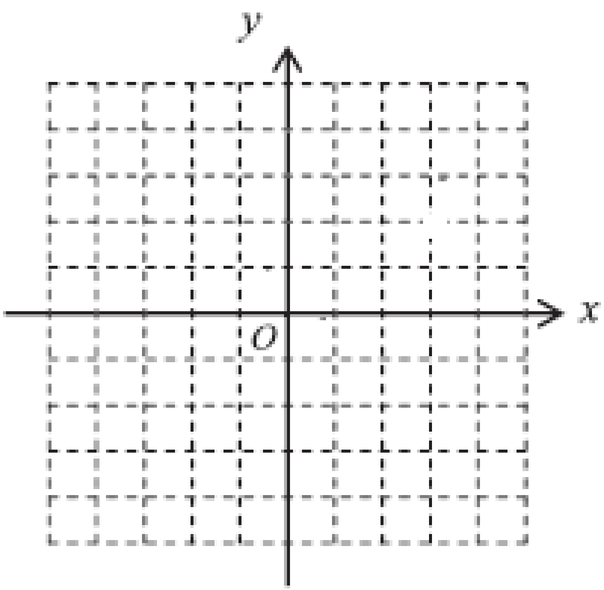
مثال : ماذا تمثل المعادلة $3(x+1) = 2y + 3$ ثم ارسمها

الحل :



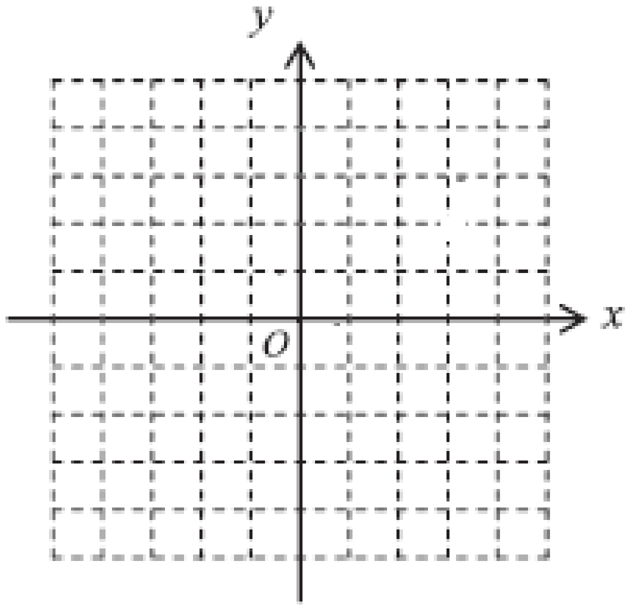
٣ - كل معادلة تصبح بعد النشر و الاختزال من الشكل $ax = c$ حيث $a, c \neq 0$ تمثل معادلة مستقيم d يوازي محور التراتيب yy'

مثال : ماذا تمثل المعادلة $-2(3x+y) + 4 = -2(y+1)$ ثم ارسم المستقيم



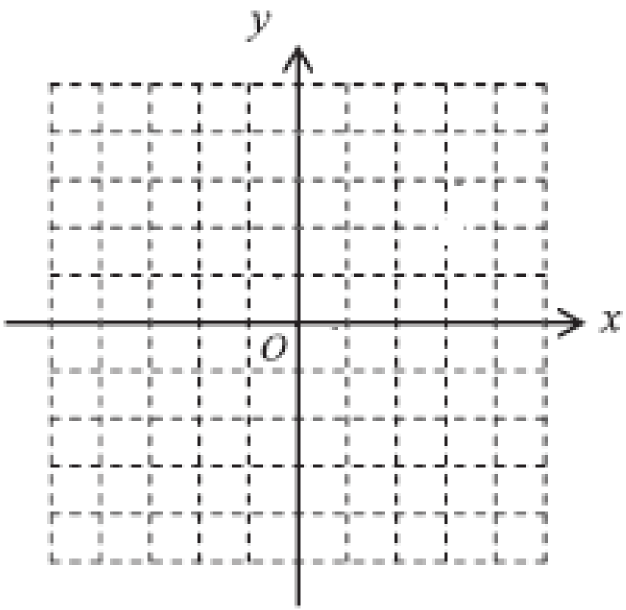
٤ - كل معادلة تصبح بعد النشر و الاختزال من الشكل $by = c$ حيث $b, c, \neq 0$
تمثل معادلة مستقيم d يوازي محور الفواصل xx'

مثال : ماذا تمثل المعادلة $-2(3x + y) + 4 = -6(x + 1)$ ثم ارسم المستقيم



مثال: اذا علمت ان عمر احمد يزيد عن ضعف عمر خالد ب 6 سنوات عبر عن العلاقة بين العمرين بمعادلة ثم ارسم المستقيم المكافئ

الحل : نفرض عمر احمد x وعمر خالد y بتالي الفرق بين عمر احمد وضعف عمر خالد هو 6 فتكون المعادلة $x - 2y = 6$



جملة معادلتين بمجهولين

الشكل العام للجملة $a, b, a', b' \in R$: $S\begin{cases} a\,x + b\,y = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$

مثال :جملة المعادلتين $S\begin{cases} 2\,x + \;y = 4 \\ 3x - 2y = -1 \end{cases}$

تعريف : نقول ان الثنائية(a, b)حل للجملة اذا كانت حلل للمعادلتين معا

مثال :في الجملة السابقة هل الثنائية $(1, 2)$ حل للجملة

خواص:

١ـ ضرب او جمع طرفي معادلة بعدد ثابت يعطي معادلة مكافئة للأصلية وكذلك بالنسبة للقسمة والطرح

مثال : الجملتين $S\begin{cases} x + \;y = 2 \\ x - 2y = 1 \end{cases}$ و $S'\begin{cases} 2\,x + 2y = 4 \\ \;x - 2y = 1 \end{cases}$ متكافئتان

٢ ــ ان جملة المعادلتين بمجهولين تملك حل وحيد اي ثنائية واحدة فقط

ملاحظة: الحصول على جملة مكافئة للأصلية مهم جدا في حل جملة معادلتين

حل جملة معادلتين (جبريا طريقة الحذف بالجمع)

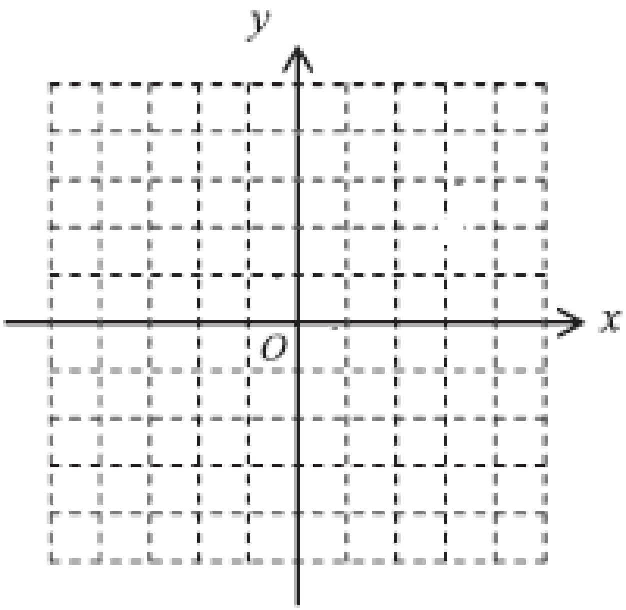
في هذه الطريقة يتم حذف مجهول (ذو الامثال المتعاكسة)من المعادلتين عن طريق جمعهما واذا لم تكن متعاكسة نحولها الى متعاكسة بضربها برقم ثم نجمع

مثال : اوجد الحل المشترك جبريا للجملة $S\begin{cases} 2x+\ y=4 \\ 3x-y=1 \end{cases}$

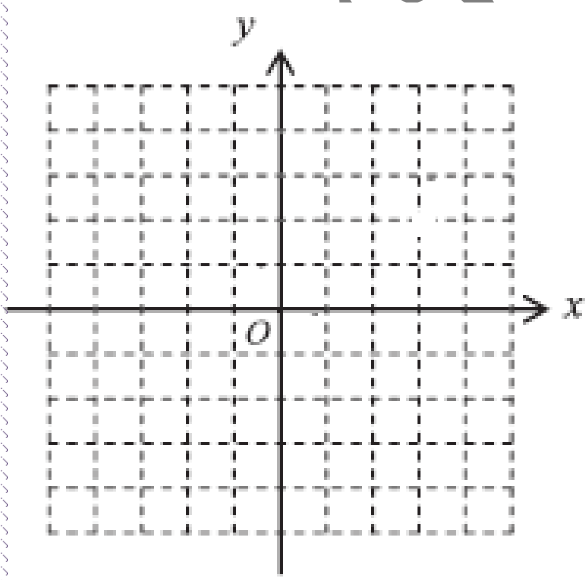
الحل : بجمع المعادلتين طرفا لطرف نجد $5x=5$ بتالي $x=1$

نعوض في المعادلة الاولى نجد $y=2$ الحل هو $(1,2)$

التأكد بيانيا



مثال : اوجد الحل المشترك للجملة $S\begin{cases} 0.3x+0.2y=1 \\ x-2y=2 \end{cases}$ ثم تأكد بالرسم



حل جملة معادلتين (جبريا طريقة الحذف بالتعويض)

وتعتمد هذه الطريقة على عزل مجهول من احد المعادلتين ثم تعويضه في الاخرى

مثال : حل الجملة التالية $S\begin{cases} x + 2y = 8 \;\ldots\ldots(1) \\ 3x - y = 3 \;\ldots\ldots(2) \end{cases}$

الحل :

من (1) **نجد** $(3)\;---\;\; x = 8 - 2y$ **نعوض في** (2) **نجد**

$3(8-2y) - y = 3$ **ومنه** $24 - 6y - y = 3$ **ومنه** $-7y = -21$

بتالي $y = 3$ **نعوض في** (3) **نجد** $x = 8 - 2(3)$ **بتالي** $x = 2$ **الحل المشترك**
هو الثنائية $(x = 2, y = 3)$

مسألة : ليكن x **و** y **عددان حقيقيان حيث يزيد** x **عن ضعف** y **بـ** 1

a **– عبر عن ما سبق رمزيا وسمها** d_1

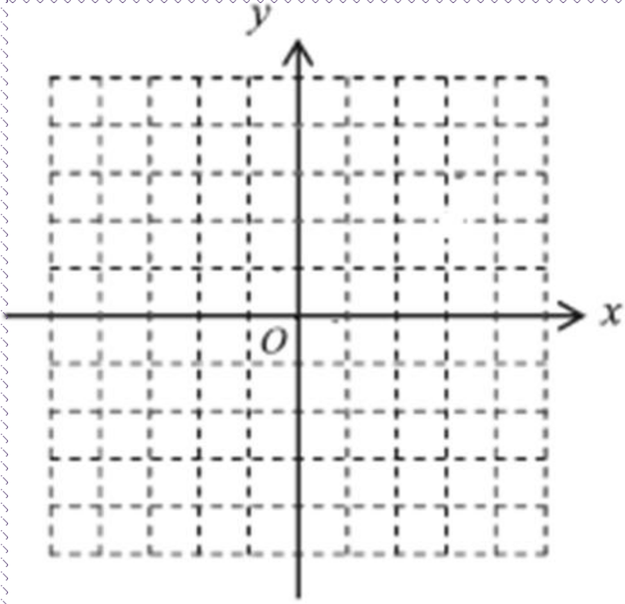
b **- اذا كان** $d_2 = x + 2y = 5$

١- **عين** a **لتنتمي النقطة** $A(1, a)$ **الى** d_2

٢- **اوجد الحل المشترك لجملة** d_1 **و** d_2

٣ – **عين** M **و** N **نقاط تقاطع** d_2 **مع محور الفواصل والتراتيب وارسم** d_1 **و** d_2

٤– **احسب** $tan\ OMN$



اختر الاجابة وصح وخطأ

المستقيم الذي معادلته $d: 3(x+4y)-5x=-2(x+1)$

يوازي محور الفواصل	يوازي محور التراتيب	مار من المبدأ

المعادلة من الشكل $ax+by=c$ تملك

حل	حلان	عدد لانهائي من الحلول

حل المعادلة $2x+3y=11$ هو الثنائية

$(1,2)$	$(1,3)$	$(3,1)$

للإيجاد نقطة تقاطع المستقيم d مع محور التراتيب نعوض

نعوض $x=0$	نعوض $y=0$	نعوض $x=1$

١ – المعادلتان المتكافئتان تمثلان مستقيمان طبوقان

٢- المعادلة الخطية بمجهولين تمثل هندسيا منحني

٣- الثنائية $(3,1)$ حلا للمعادلة $2x-y=5$

٤– اذا كان ناتج قسمة x على y هو 4 والباقي 11 فان المعادلة هي $x-4y=11$

تمرين : ليكن لدينا المستقيمين $d_1: ax + 3y = 6$ و $d_2: 4x + by = 10$

١ – عين قيمة المجهولين a و b لتكون المعادلتان متكافئتان

٢ – عين Aو B نقطة التقاطع مع محور الفواصل ومع محور التراتيب

٣ – ارسم المستقيم في معلم متجانس واحسب AB و جيب الزاوية BAO

مسالة : مجموعة من المضلعات الخماسية و الثلاثية عددها 21وعدد الاضلاع 59.

المطلوب : ما هو عدد المثلثات وما عدد المخمسات

تمرين : ليكن المستقيم d الذي معادلته $x + by = 3$

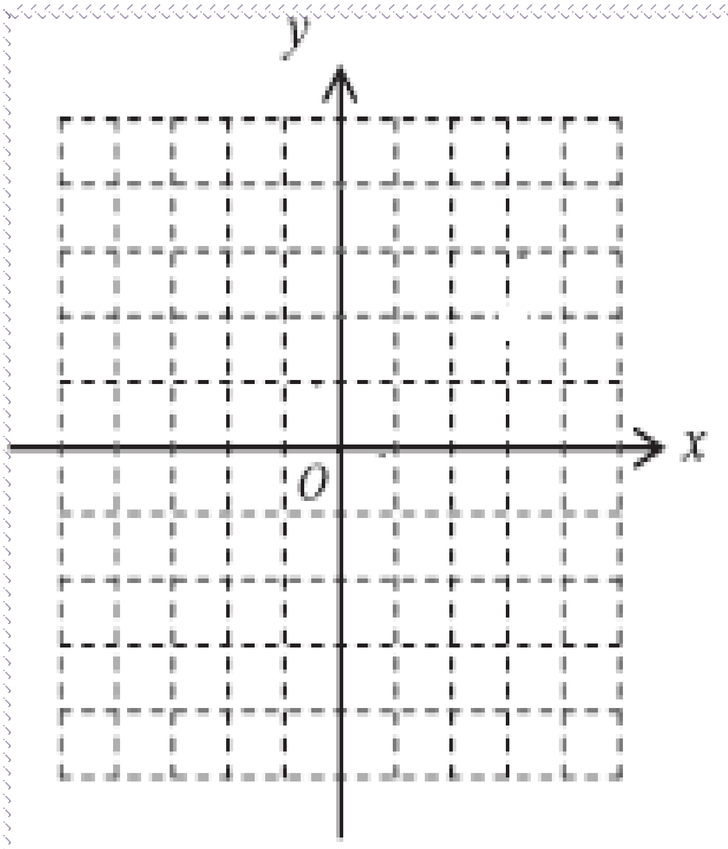
١- عين قيمة b لتكون النقطة $A(1,1)$ من المستقيم d

٢- اذا علمت ان ضعفي x يزيد على y بمقدار 6

a) عبر عن العبارة اللفظية جبريا ولتكن d'

b) اوجد الحل المشترك لجملة معادلتي d و d'

٣- تأكد من الحل الجبري بيانيا


y
x
O

مسالة: ليكن لدينا المستقيمين $d: y + x = 1$ و $d': y - x = 2$

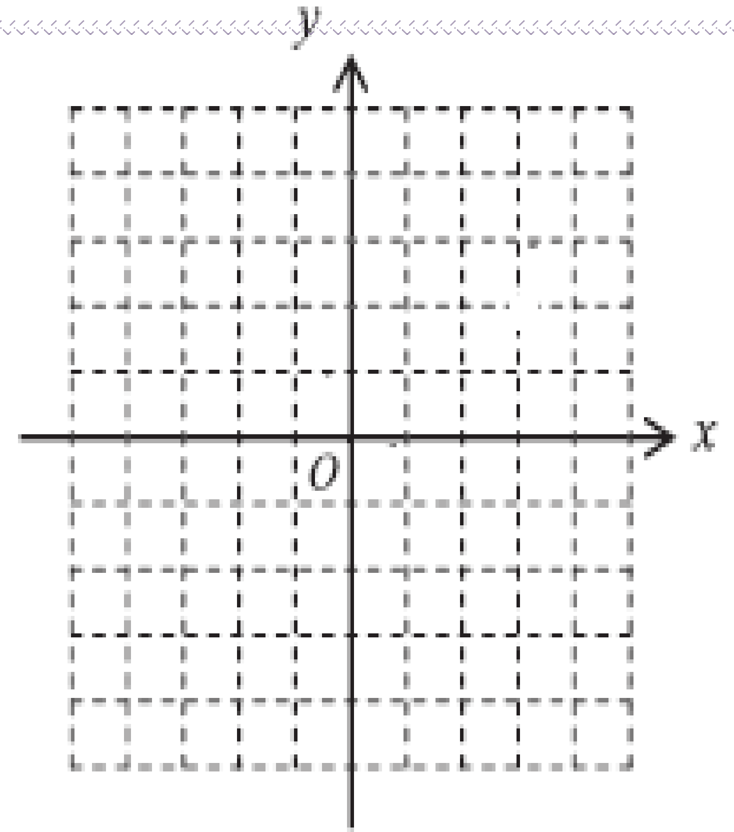
١ - عين A و B نقطة تقاطع d مع محور الفواصل ومحور التراتيب

٢ - عين C و D نقاط تقاطع d' مع محور الفواصل والتراتيب

٣ – اوجد الحل المشترك جبريا

٤ - ارسم d و d' في معلم متجانس و اثبت ان d و d' متعامدين

٥ - اثبت ان $ANBO$ رباعي دائري



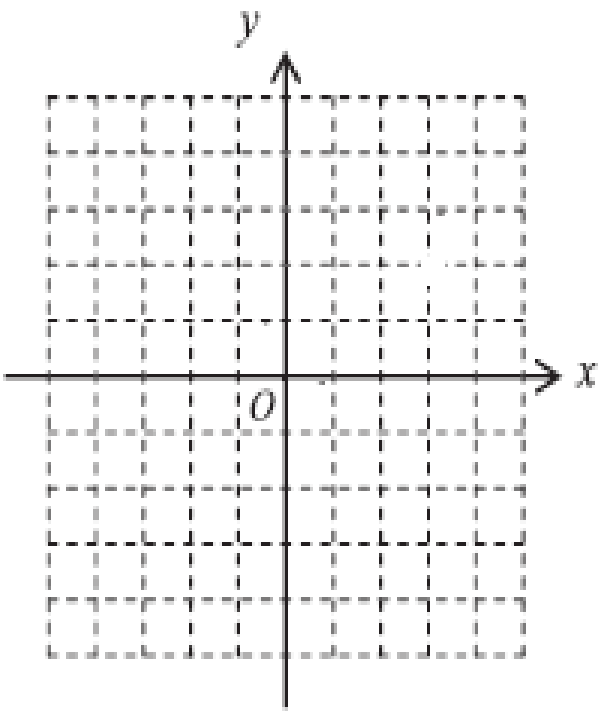
تمرين: اشترى احمد 3 دفاتر وقلمان ب 100 ليرة سورية واشترى خالد 2 دفترو 4 اقلام بـ 100 ليرة سورية ما هو سعر الدفتر وسعر القلم

تمرين: اوجد حل الجملة التالية $S\begin{cases}3(x+y)-5y=2x+1 \;\ldots\ldots(1)\\ -x+3y=4\ldots\ldots(2)\end{cases}$

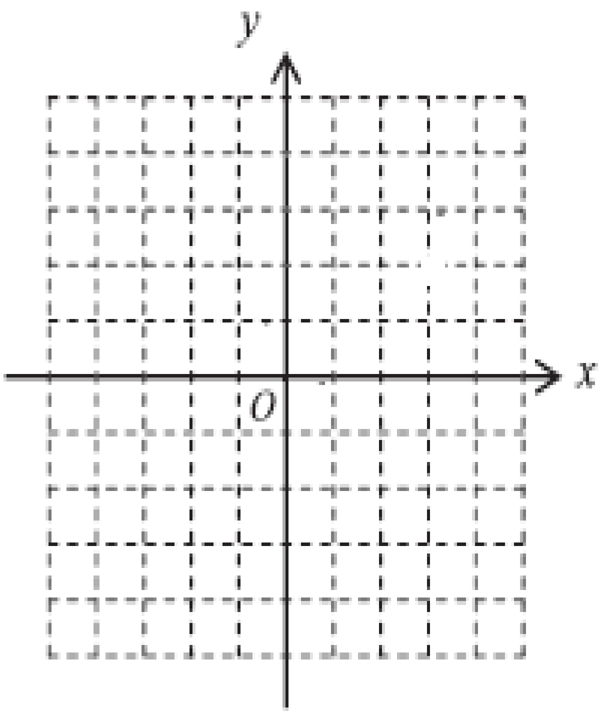
تمرين: هل الثنائية $(1,3)$ حل للجملة $S\begin{cases}x+2y=7 \;\ldots\ldots(1)\\ 4x-y=1\ldots\ldots(2)\end{cases}$

ملاحظة: نعطي قيم للمتحول الذي يحوي امثال واذا اعطينا قيمة يجب ان تدرس بحيث يكون الجواب يقبل القسمة على امثال المجهول الاخر واذا كان احد المجاهيل معزول نعوض في الاخر

مثال : ارسم المستقيم $d: y = 3x - 2$



مثال : ارسم المستقيم الذي معادلته $d: x + 3y = 4$



تمرين: اوجد الحل المشترك للجملة $S\begin{cases} y = 2x + 7 \quad \dots\dots (1) \\ y = 12x - 3 \ \dots\dots (2) \end{cases}$

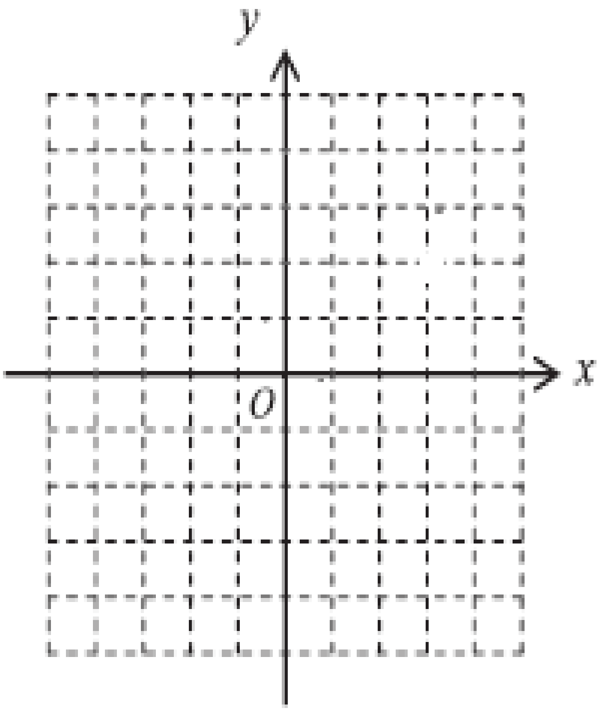
تمرين : اوجد الحل المشترك للجملة $S\begin{cases} x - 3y = 4 \quad \dots\dots (1) \\ 2x + 5y = 7 \ \dots\dots (2) \end{cases}$

مثال : ليكن المستقيم $d: 2x - 3y = 6$

١) عين A نقطة التقاطع مع xx'

٢) عين B نقطة التقاطع مع yy'

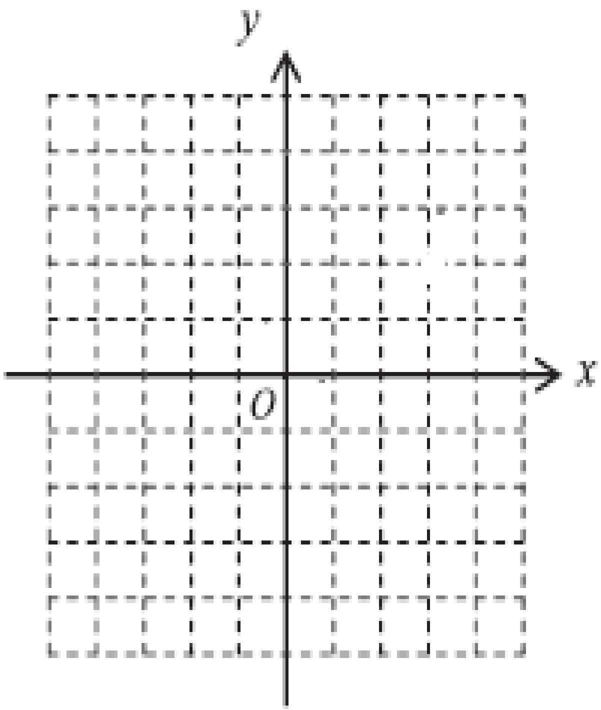
٣) احسب مساحة المثلث AOB



مثال : اوجد الحل المشترك للجملة $S\begin{cases} 3x + y = 5 \;\ldots\ldots (1) \\ x + 2y = 4 \;\ldots\ldots (2) \end{cases}$

مثال : هل الثنائية $(x, y) = (1, 2)$ حل للجملة $S\begin{cases} x + 2y = 5 \;\ldots\ldots (1) \\ 3x + y = 5 \;\ldots\ldots (2) \end{cases}$

مثال : هل الثنائية $(x, y) = (3, 5)$ حل للجملة $S\begin{cases} x + 2y = 5 \;\ldots\ldots (1) \\ x - y = 1 \;\ldots\ldots (2) \end{cases}$



مثال : اوجد الحل المشترك للجملة

$$S\begin{cases} 2x + y = 10 \quad \dots\dots (1) \\ -2x + 4y = 5 \dots\dots (2) \end{cases}$$

مثال : اوجد الحل المشترك للجملة

$$S\begin{cases} 2x + 3y = 4 \quad \dots\dots (1) \\ 3x + 2y = 1 \dots\dots (2) \end{cases}$$

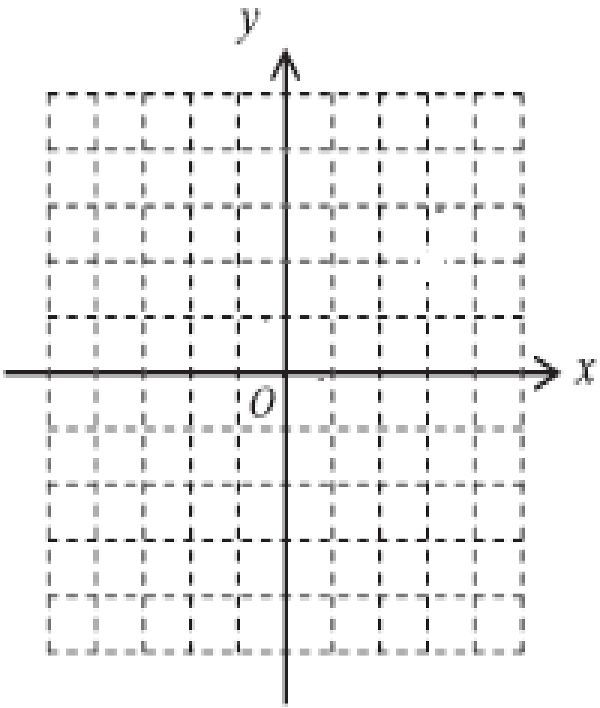
مثال : لتكن لدينا المعادلتان

$$S\begin{cases} 3y + x = 5 \quad \dots\dots (1) \\ 2y - x = 3 \dots\dots (2) \end{cases}$$

١) اثبت ان $3y - 5 = 2y - 3$

٢) استنتج y ثم احسب x واستنتج الحل المشترك

٣) تاكد من الحل بيانيا



مسالة : ليكن لدينا المستقيم $d: x + by = 3$

١) اوجد قيمة b ليمر d من النقطة $A(1,1)$

٢) اذا علمت ان ضعفي x يزيد على y بمقدار 6

a) عبر عن هذه الجملة رمزيا وسمي المعادلة d'

b) اوجد الحل المشترك جبريا للمعادلتين d و d' وتاكد بيانيا

تمرين :عمرلجين الان ثلاث اضعاف عمر سارة وبعد 15 سنة عمر لجين مثلي عمر سارة ما عمر لجين وما عمر سارة

تمرين : في مزرعة ارانب ودجاجات

عدد رؤوس الحيوانات 28 وعدد القوائم 76 ماهو عدد الارانب وما هو عدد الدجاجات

تمرين :مجموع ما يقتني ماهر وعامر من الطوابع 144 اعطى ماهر اثنين من الطوابع لعامر فاصبح لدى عامر مثلي ما لدى ماهر بعد الاعطاء ماعدد طوابع ماهر وما عدد طوابع عامر

تمرين : مزرعة تحوي ارانب ودجاجات عدد الدجاجات ثلاثة اضعاف الارانب فتح باب المزرعة هرب 15 دجاجة فاصبح عدد الارانب ضعف الدجاجات ماهو عدد الدجاجات وما هو عدد الارانب

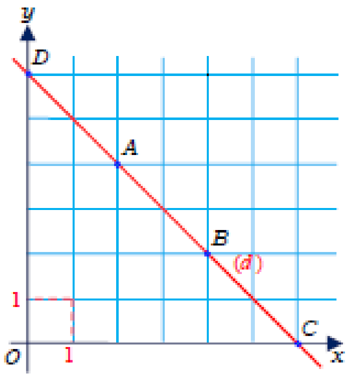
تمرين : اوجد الحل المشترك للمعادلتان $2x + 3y = 5$ و $x + 2y = 3$

تمرين : اوجد الحل المشترك للمعادلتان $\sqrt{2}x + y = 5$ و $x - \sqrt{2}y = 0$

تمرين : هل الثنائية $(3, 1)$ حل للجملة

$$S\begin{cases} 2x + y = 7 \;\dots\dots (1) \\ x - 5y = -2 \;\dots\dots (2) \end{cases}$$

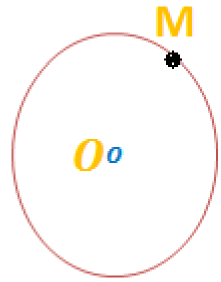
تمرين: ليكن d المستقيم المرسوم جانبا



١) اكتب احداثيات النقاط A و B و C و D ماذا تلاحظ عند جمع الفواصل والتراتيب لكل نقطة

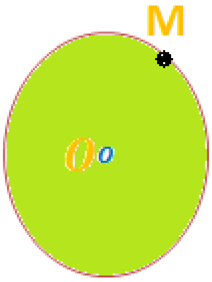
٢) هل تقع النقطة $D(1,4)$ تقع على d وماذا تلاحظ

الوحدة الثالثة : الزوايا والمضلعات في الدائرة والمضلعات المنتظمة



تذكرة : الدائرة: هي مجموعة نقاط M من المستوي تبعد بعد r ثابت عن نقطة

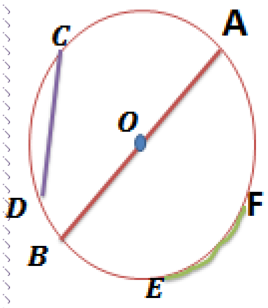
O نسمي O المركز و r نصف القطر يرمز لها $C(o,r)$ أي $OM = r$



القرص الدائري : هي مجموعة نقاط M من المستوي تبعد عن نقطة O بعد

اصغر او يساوي r r $OM \leq r$

محيط الدائرة : $p_C = 2\pi r$ و**مساحة الدائرة** $S_C = \pi r^2$



الوتر: هو قطعة مستقيمة تصل بين نقطتين من محيط الدائرة واذا مر من المركز

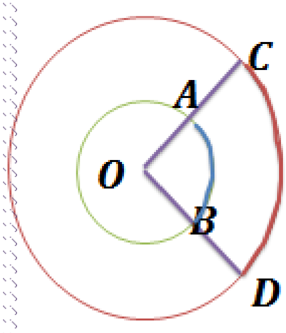
سمي قطر **مثل** : CD وتر والقطر AB

القوس : هو مجموعة نقاط المحصورة بين نقطتين من محيط الدائرة **مثل** $\widehat{EF}$

ملاحظة١: قياس قوس الدائرة $360°$

ملاحظة٢: يجب التميز بين قياس القوس وطول القوس في الدائرة حيث يقاس

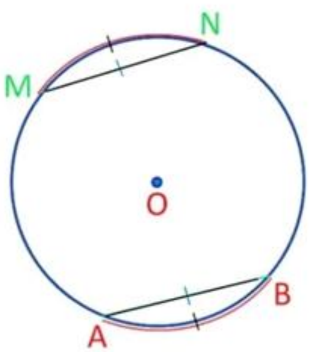
القوس بالدرجات : قياس قوس اي دائرة هو 360°



مثال: في الشكل الجانبي ان $\widehat{AB} = \widehat{DC}$ (الاقواس متساوية القياس)

لكن $AB \neq DC$ (اطوال الاقواس غير متساوية)

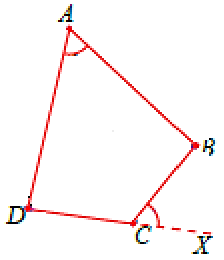
ملاحظة٣: طول قوس الدائرة يختلف من دائرة لأخرى حسب نصف القطر



ملاحظة٤: الاوتار المتساوية تقابل اقواس متساوية والعكس صحيح في الشكل الجانبي

لدينا $\widehat{AB} = \widehat{MN} \Leftrightarrow AB = MN$

اقسام الزاوية : تتكون كل زاوية من ضلعين ورأس كما في الشكل

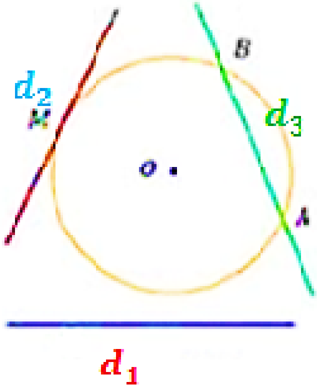


الزاويتان المتتامتان: مجموعهما $90°$ **والزاويتان المتكاملتان** مجموعهما $180°$

الزاوية الخارجية في مضلع :هي الزاوية الناتجة عن ضلع من اضلاعه وامتداد الاخر

مثل: الزاوية $B\hat{C}X$

الوضع النسبي بين المستقيم والدائرة

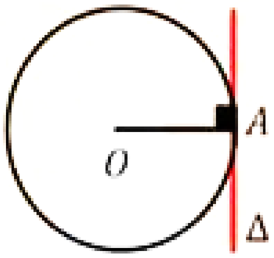


١) المستقيم خارج الدائرة : لا يشترك مع الدائرة باي نقطة وبعد المركز عن المستقيم اكبر من نصف القطر مثل d_1

٢) المستقيم مماس للدائرة : يشترك مع الدائرة بنقطة واحدة ويكون بعد المركز عن المستقيم يساوي نصف القطر مثل d_2

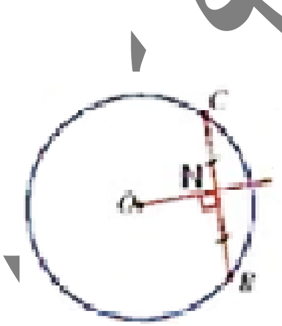
٣) المستقيم قاطع للدائرة : يشترك مع الدائرة بنقطتين ويكون بعد المركز عنه اصغر من نصف القطر مثل d_3

ملاحظة: المماس يكون عمودي على نصف القطر في نقطة التماس



اي ان $OA \perp \Delta$

خاصة:

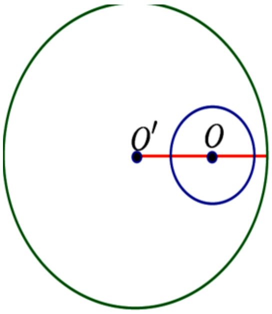


١) المستقيم المار من المركز ويعامد الوتر سوف يمر من منتصف الوتر

٢) المستقيم المار من المركز ومنتصف الوتر سوف يعامد الوتر

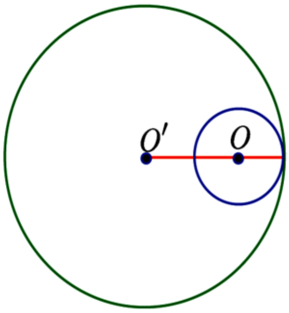
٣) المستقيم المعامد للوتر والمار من منتصفه سوف يمر من مركز الدائرة

الوضع النسبي لدائرتان لتكن لدينا الدائرتان $C(o, r)$ و $C'(o', R)$



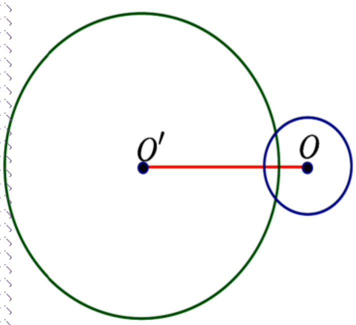
١) نقول ان الدائرتان متباعدتان داخلا كما في الشكل اذا كان البعد بين المركزين اصغر من الفرق بين انصاف الاقطار اي $oo' < R - r$

مثال : لتكن لدينا الدائرتان $C(o, 5)$ و $C'(o', 9)$ حيث $oo' = 3$ ادرس الوضع النسبي للدائرتان



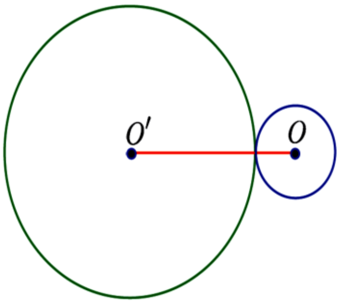
٢) نقول ان الدائرتان متماستان داخلا كما في الشكل اذا كان البعد بين المركزين يساوي الفرق بين انصاف الاقطار اي $oo' = R - r$

مثال : لتكن لدينا الدائرتان $C(o, 3)$ و $C'(o', 9)$ حيث $oo' = 6$ ادرس الوضع النسبي للدائرتان



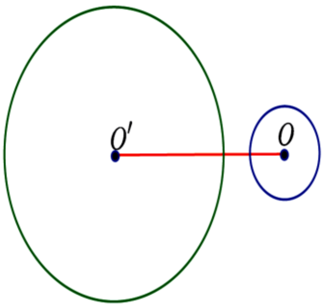
٣) نقول ان الدائرتان متقاطعتان كما في الشكل اذا كان البعد بين المركزين اصغر من المجموع انصاف الاقطار واكبر من الفرق اي $R - r < oo' < R + r$

مثال : لتكن لدينا الدائرتان $C(o, 5)$ و $C'(o', 8)$ حيث $oo' = 6$ ، ادرس الوضع النسبي للدائرتان



٤) نقول ان الدائرتان متماستان خارجا كما في الشكل اذا كان البعد بين المركزين يساوي المجموع انصاف الاقطار اي $oo' = R + r$

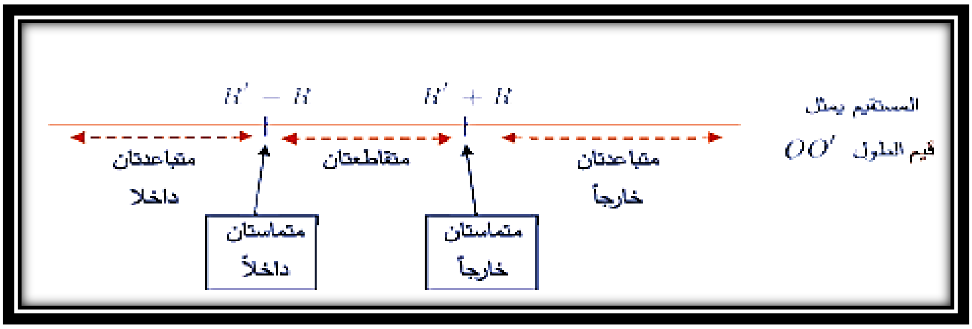
مثال : لتكن لدينا الدائرتان $C(o, 5)$ و $C'(o', 9)$ حيث $oo' = 14$ ادرس الوضع النسبي للدائرتان



٥) نقول ان الدائرتان متباعدتان خارجا كما في الشكل اذا كان البعد بين المركزين اكبر من مجموع انصاف الاقطار اي $oo' > R + r$

مثال : لتكن لدينا الدائرتان $C(o, 3)$ و $C'(o', 5)$ حيث $oo' = 9$ ادرس الوضع النسبي للدائرتان

نلخص الافكار في المخطط التالي



مثال : لتكن لدينا $C(o,2)$ و $C'(o',8)$ ادرس الوضع النسبي في الحالات التالية

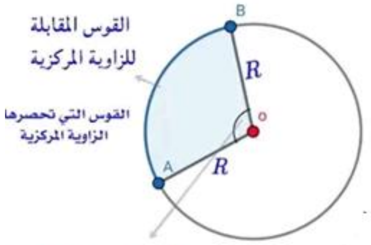
١) $OO' = 3$
٢) $OO' = 6$
٣) $OO' = 7$
٤) $OO' = 10$
٥) $OO' = 12$
٦) $OO' = 0$
٧) $OO' = 15$

مثال: لتكن $C(O,R)$ و $C'(O',5)$ اذا كان $d = oo' = 7$ احسب R لتكون الدائرتان متماستان خارجا ثم عين R لتكون متماستان داخلا

مثال: لتكن $C(O,2r-1)$ و $C'(O',r)$ حيث الدائرتان متحدتان في المركز احسب r لتكون الدائرتان طبوقتان

مثال: ليكن $C(O,2)$ و $C'(O',5)$ ولدينا $OO' = 3(x+1)$ عين قيمة x لتكون الدائرتان متماستان خارجا ومثل القيم على مستقيم اعداد

الزوايا في الدائرة

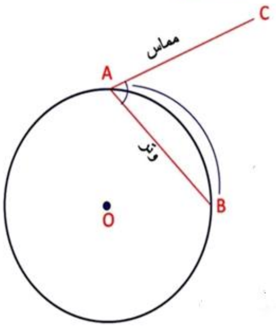


زاوية مركزية

١) المركزية : يقع راسها على مركز الدائرة والاضلاع انصاف اقطار كما في الشكل الزاوية $A\hat{O}B$ مركزية تقابل القوس $\widehat{AB}$

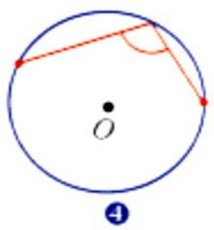
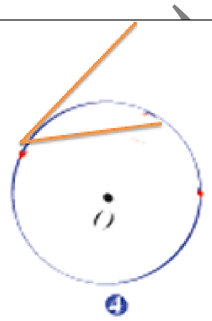
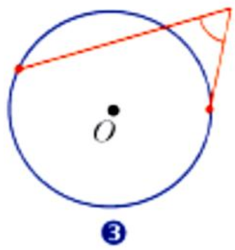
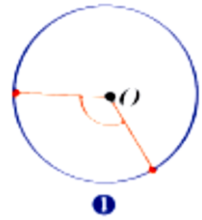
٢) المحيطية: يقع راسها على المحيط والاضلاع اوتار كما في الشكل

الزاوية $A\hat{D}B$ محيطية تقابل القوس $\widehat{AB}$

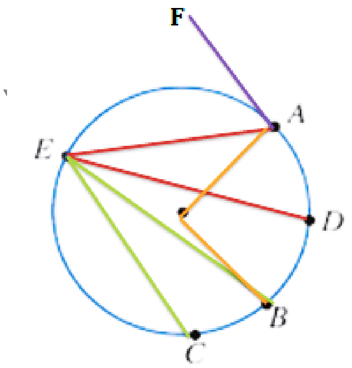


٣) المماسية : يقع راسها على المحيط واحد الاضلاع مماس والاخر وتر كما في الشكل $C\hat{A}B$ محيطية تقابل القوس $\widehat{AB}$

مثال : حدد الزوايا المركزية والمحيطية والمماسية في الشكل واذكر اسم القوس المقابل

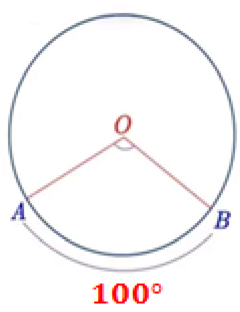
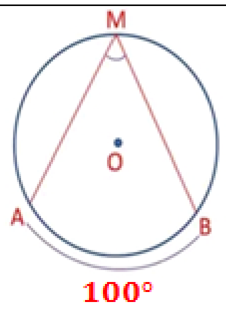
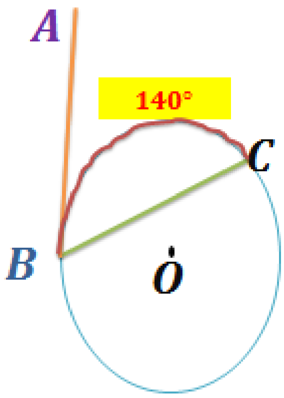
				

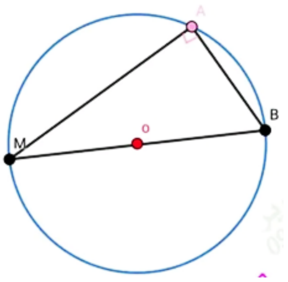
مثال : حدد نوع الزاوية وقوسها المقابل



مبرهنة : تقاس الزاوية المركزية بقياس القوس المقابل لها والمحيطية والمماسية بنصف القوس المقابل لها

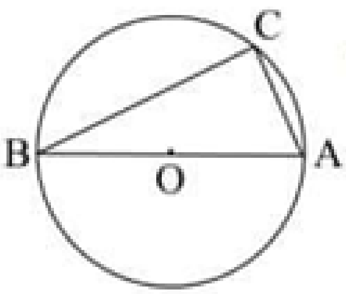
مثال : حدد نوع الزاوية وقياسها حيث القوس معلوم



ملاحظة : الزاوية المحيطية التي تقابل قوس نصف الدائرة تكون قائمة

ان الزاوية $M\hat{A}B$ محيطية تقابل قوس نصف الدائرة $\widehat{MB}$ ومنه $M\hat{A}B = \frac{1}{2}(180) = 90°$



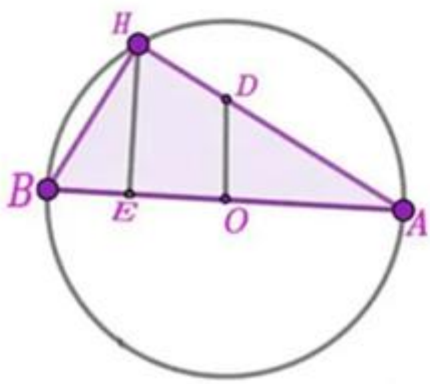
مثال(تكميلي 2018): في الشكل الجانبي دائرة C مركزها O وطول قطرها AB و

C نقطة تحقق $\widehat{BC} = 2\widehat{CA}$ والمطلوب

١) اثبت ان $\widehat{AC} = 60°$ واحسب قياس زوايا المثلث ABC

٢) احسب اطوال المثلث ABC

مثال : في الشكل الجانبي دائرة مركزها O ونصف قطرها $R = 6$ فاذا علمت ان $HBA = 2HAB$ و $DO \perp AB , HE \perp AB$

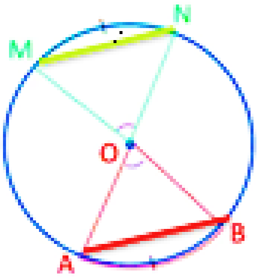


١) احسب قياسات المثلث HAB واطوال اضلاعه

٢) احسب HE و AE

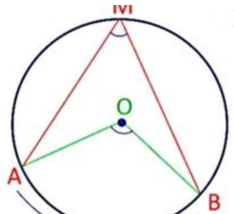
٣) برهن تشابه المثلثين DOA و HEA ثم احسب OD ومساحة المثلث DOA بطريقتين

خواص :



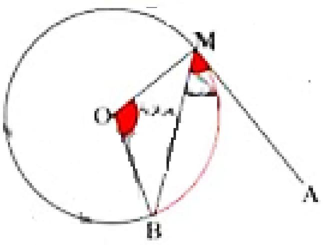
١) كل قوسين طبوقين يحددان وتران طبوقان وزاويتان مركزيتان طبوقتان

أي $M\hat{O}N = A\hat{O}B \Leftrightarrow \overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{MN} \Leftrightarrow MN = AB$



٢) تقاس الزاوية المحيطية والمماسية بنصف المركزية المشتركة معها بالقوس

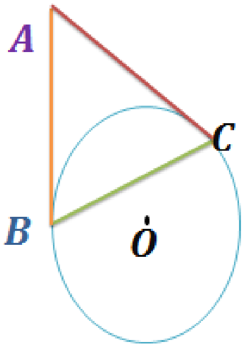
اي $A\hat{M}B = \frac{1}{2} A\hat{O}B$ (محيطية تشترك مع المركزية بالقوس $\overset{\frown}{AB}$)



اي $A\hat{M}B = \frac{1}{2} M\hat{O}B$ (مماسية تشترك مع المركزية بالقوس $\overset{\frown}{MB}$)

٣) تتساوي الزاويتان المحيطيتان و المماسيتان المشتركتان بنفس القوس

لدينا $A\hat{M}B = A\hat{N}B$ (محيطيتان تشتركان بالقوس $\overset{\frown}{AB}$)

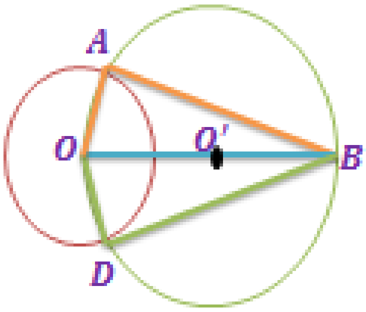


لدينا $A\hat{B}C = A\hat{C}B$ (مماسيتان تشتركان بالقوس $\overset{\frown}{CB}$)

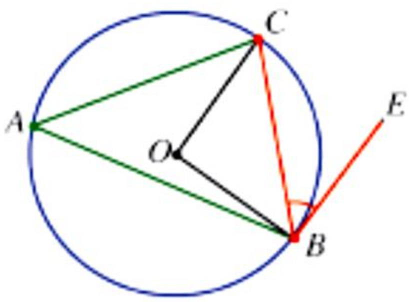
أي المثلث ABC مثلث متساوي الساقين

أي $AB = AC$ ومنه النتيجة التالية

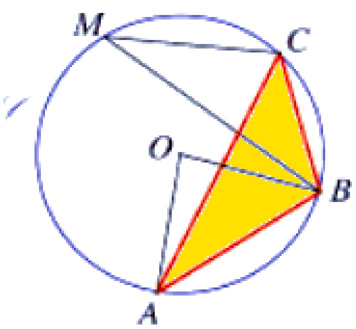
نتيجة : من نقطة خارج الدائرة يمكن رسم مماسين طبوقين



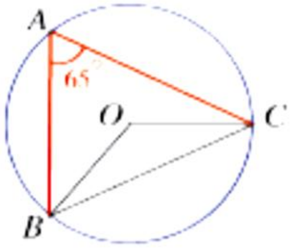
تطبيق : لدينا في الشكل $C(o,r)$ و $C'(o',R)$ متقاطعتان و AB و DB مماسين للدائرة C اثبت تطابق المثلثين AOB و ODB



مثال : في الشكل الجانبي اذا كان $C\hat{O}B = 100$ فاحسب قياس القوس $\overset{\frown}{CB}$ ثم احسب قياس $C\hat{A}B$ و $C\hat{B}E$

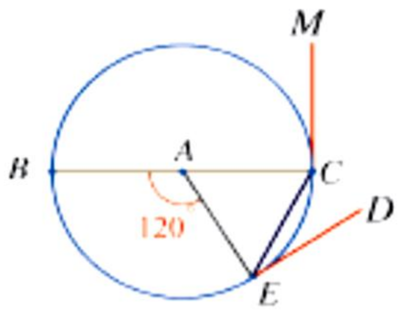


مثال: في الشكل الجانبي لدينا $A\hat{O}B = 84$ و $B\hat{M}C = 31$ احسب قياس زوايا المثلث ABC



تطبيق : في الشكل الجانبي : نعلم ان $B\hat{A}C = 65°$ احسب قياس الزوايا

١) $B\hat{O}C$ ٢) $O\hat{B}C$ ٣) $O\hat{C}B$

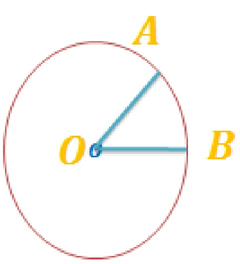


تطبيق: $[BC]$ قطر في دائرة C مركزها A و E نقطة من الدائرة

تحقق $B\hat{A}E = 120$ و (ED) و (CM) مماسان للدائرة

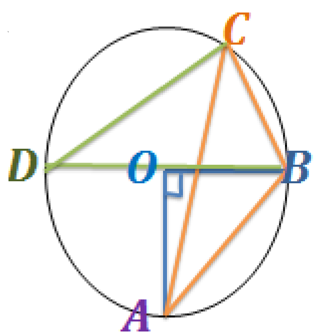
١) احسب قياس الزوايا : $C\hat{A}E$ و $E\hat{C}B$ و $E\hat{B}C$

٢) احسب قياس الزاوية المماسية : $C\hat{E}D$ و قياس $B\hat{C}M$



تمرين: ١) في الشكل الجانبي احسب قيمة x حيث $AB = 45°$ و $AOB = 30 + x°$

٢) في الشكل الجانبي احسب قيمة x حيث $AB = 5(x+4)°$ و $AOB = 3(8+x)°$



تطبيق : في الشكل الجانبي لدينا $B\hat{C}D = 30°$ احسب قياس زوايا المثلث ABC

الرباعي الدائري

تذكرة١

المضلع: هو شكل هندسي يتألف من اضلاع نهاية الاول بداية للثاني له نوعان

المحدب : قياس الزوايا الداخلية اكبر من $180°$

المقعر : قياس الزوايا الداخلية اصغر من $180°$

منتظم : اذا تساوت اطوال الاضلاع وقياس الزوايا مثل المربع المثلث متساوي الاضلاع

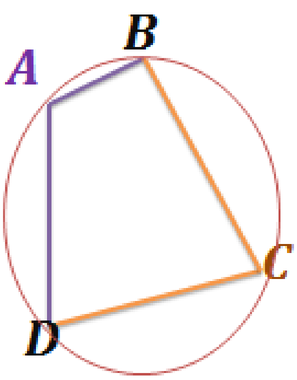
تذكرة ٢

١) تتلاقى محاور المثلث القائم في منتصف الوتر

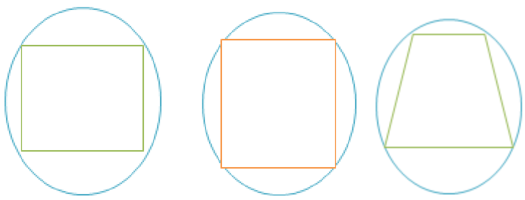
٢) محور اي ضلع في مثلث متساوي الاضلاع هو منصف ومتوسط وارتفاع

٣) طول ضلع مربع قطره a هو $\frac{a\sqrt{2}}{2}$ أي مساحة المربع الذي علم قطره $S = \frac{a^2}{2}$

تعريف الرباعي الدائري : هو شكل رباعي تقع رؤوسه على محيط الدائرة كما في الشكل $ABCD$ رباعي ودائري

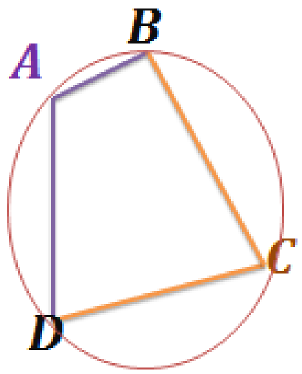


امثلة مالوفة : المستطيل والمربع و شبه المنحرف متساوي الساقين



لكن متوازي الاضلاع والمعين وشبه المنحرف العادي ليست رباعيات دائرية

خواص



١) في الشكل الجانبي $ABCD$ رباعي دائري :

ان الزاويتان A و C زاويتان متقابلتان تحققان

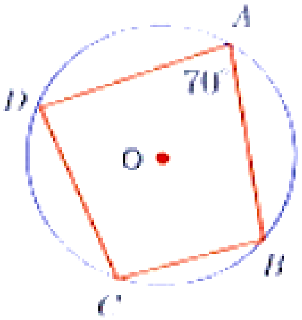
A محيطية قوسها $\overset{\frown}{DCB}$ ومنه $\hat{A} = \frac{1}{2}\ \overset{\frown}{DCB}$

C محيطية قوسها $\overset{\frown}{DAB}$ ومنه $\hat{C} = \frac{1}{2}\ \overset{\frown}{BAB}$

بالجمع نجد $\hat{A} + \hat{C} = \frac{1}{2}\ \overset{\frown}{DCB} + \frac{1}{2}\ \overset{\frown}{DAB} = \frac{1}{2}\left(\text{الدائرة}\right)^{\circ} = \frac{1}{2}(360) = 180^{\circ}$

نستنتج اذا كان $ABCD$ رباعي دائري $\Leftrightarrow$ كل زاويتان متقابلتان متكاملاتان

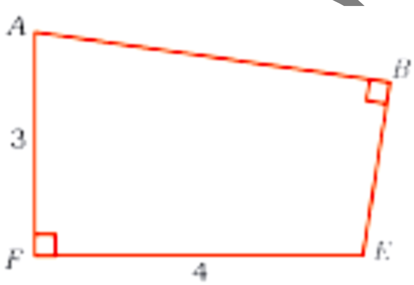
تطبيق: في الشكل المجاور $A = 70$ ونلاحظ وهو رباعي دائري استنتج قياس الزاوية

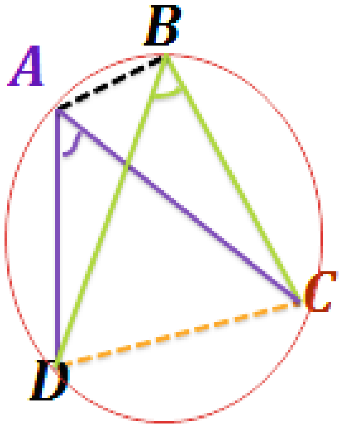


تطبيق : في الشكل المرسوم جانبا لدينا الشكل الرباعي $ABEF$ فيه $B = F = 90$ و $FE = 4$ و $AF = 3$

١) اثبت ان النقاط A و B و F و E تقع على دائرة (أي رباعي دائري)

٢) عين مركز هذه الدائرة واحسب نصف قطرها



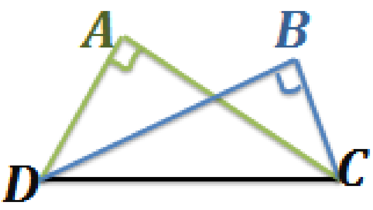


٢) في الشكل الجانبي $ABCD$ رباعي دائري فيه $C\hat{A}D$ محيطية

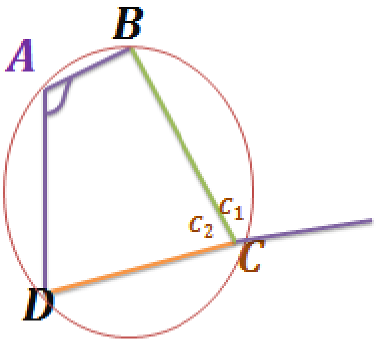
تقابل القوس $\overset{\frown}{DC}$ و $C\hat{B}D$ محيطية تقابل القوس $\overset{\frown}{DC}$ ومنه

$CAB = CDB = \frac{1}{2}\overset{\frown}{DC}$ (محيطيتان تشتركان بنفس القوس)

نستنتج : اذا كان $ABCD$ رباعي دائري $\Leftrightarrow$ كل زاويتان تقابلان نفس الضلع وتقعان في نفس الجهة من الضلع تكونان متساويتان



تطبيق: اثبت ان الرباعي ABCD دائري وعين المركز للدائرة المارة بالرؤوس



٣) في الشكل الجانبي $ABCD$ رباعي دائري فيه C_1 زاوية

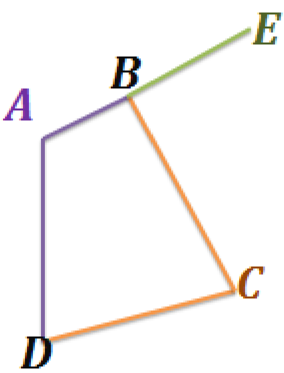
خارجية و C_2 مجاورتها الداخلية لكن

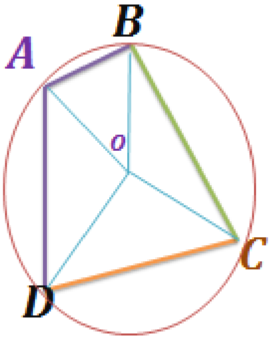
$C_1 + C_2 = 180$ و أي $C_2 = 180 - C_1$ وايضا

$C_1 + A = 180$ أي $A = 180 - C_1$ ومنه $A = C_2$

نستنتج : اذا كان $ABCD$ رباعي دائري $\Leftrightarrow$ كل زاوية خارجية تساوي المقابلة لمجاورتها

تطبيق: في الشكل الجانبي رباعي فيه $A\hat{D}C = 80$ و $E\hat{B}C = 80$ اثبت انه دائري

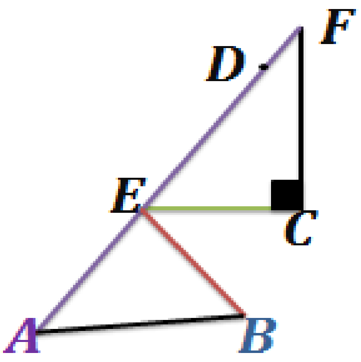




٤) في الشكل الجانبي $ABCD$ رباعي دائري ومركز الدائرة O ومنه

$AO = BO = CO = DO$

نستنتج : اذا كان $ABCD$ رباعي دائري $\Leftrightarrow$ توجد نقطة متساوية عن البعد عن الرؤوس وهي مركز الدائرة



تطبيق: في الشكل الجانبي لدينا $EC = 3$ و $CF = 4$

$DF = 2$, $AF = 8$ و $EB = 3$ و $AB = 3\sqrt{2}$

١ – احسب طول EF واستنتج ED و AE

٢- اثبت ان المثلث AEB قائم وعين الراس القائم

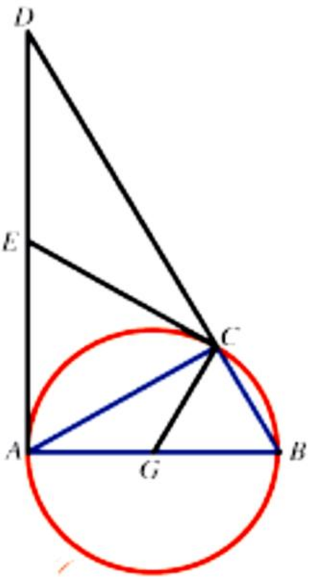
٣ - اثبت ان الرباعي $ABCD$ دائري وعين المركز

تمرين : لدينا ABC مثلث متساوي الساقين وقياس زاوية الرأس A يساوي 120 و G مركز الدائرة C المارة برؤوسه . ويتقاطع في النقطة M الدائرة مماسا في C و B و C

١) ارسم شكلا يتفق مع معطيات المسالة

٢) اثبت ان الرباعي $MBGC$ دائرى

ملاحظة: لإثبات مستقيم انه مماس يجب ان نثبت انه يصنع زاوية 90 مع نصف القطر

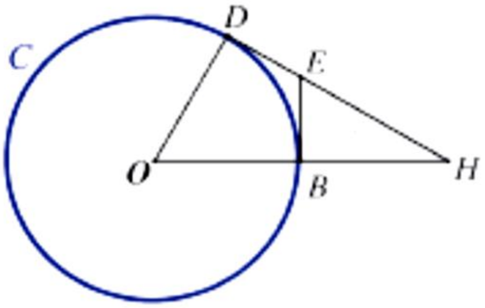


مسألة :ليكن ABC مثلث قائم في C مرسوم في دائرة C فيه $AB = 12$ و $BAC = 30$ مماس الدائرة C في النقطة A يتقاطع مع المستقيم (BC) في النقطة D

١) احسب مساحة المثلث ACD

٢) لتكن E منتصف القطعة $[AD]$ و G مركز الدائرة C اثبت ان المستقيم (CE) مماس للدائرة C

٣) اثبت ان الرباعي $AGCE$ دائري

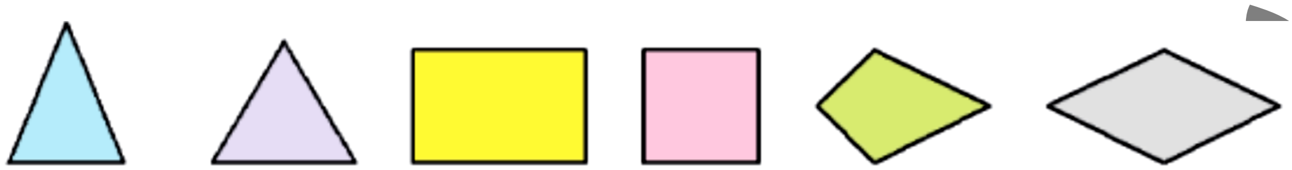


مسالة: في الشكل المرسوم جانبا : (BE) و (DE)
مماسان للدائرة $C(o,6)$ في النقطتين B و D على
التوالي و $BOD = 60$
١ – احسب DH
٢ – اثبت ان النقاط O و B و E و D واقعة على دائرة
واحدة C' عين مركزها وارسمها
٣ – احسب طول نصف قطر الدائرة C'

المضلعات المنتظمة

تعريف : المضلع المنتظم هو مضلع تساوت اطوال اضلاعه وقياس زواياه

مثل : اكتب جوار كل شكل مضلع منتظم او غير منتظم



خواص

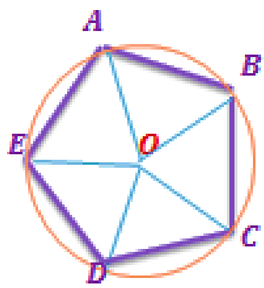
١) كل مضلع منتظم تمر من رؤوسه دائرة (نسمي مركز الدائرة مركز المضلع المنتظم)

٢) مجموع زوايا اي مضلع منتظم او غير منتظم $180(n-2)$

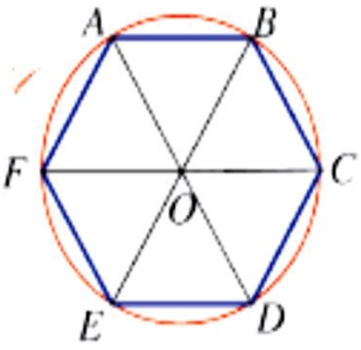
٣) قياس الزاوية الواحدة بين ضلعين متتالين في المضلع المنتظم $\frac{180(n-2)}{n}$

٤) قياس الزاوية المركزية المقابلة لاحد الاضلاع $\frac{360}{n}$

تمرين : مخمس منتظم $ABCDE$ احسب مجموع قياس الزوايا ثم احسب قياس الزاوية ABC واحسب قياس الزاوية AOB

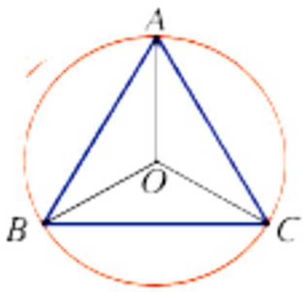


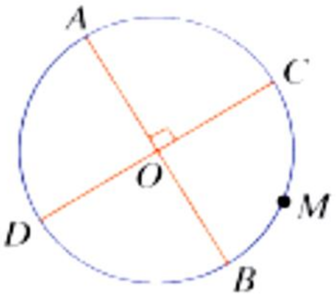
نتيجة : قياس كل قوس يقابل ضلع في مضلع منتظم هو $\frac{360}{n}$



تمرين: مسدس منتظم $ABCDEF$ احسب مجموع قياس الزوايا ثم احسب قياس الزاوية ABC واحسب قياس الزاوية AOB واستنتج قياس القوس AB

تمرين: ليكن ABC مثلث متساوي الاضلاع احسب قياس AOB





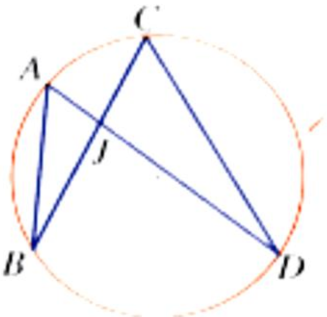
تمرين : $[AB]$ و $[CD]$ قطران ممتعامدان في دائرة مركزها O و M نقطة من القوس الصغرى BC احسب قياس كل من

١) AMB	٢) AMC	٣) BMC

تمرين: A و B و C و D نقاط من دائرة C نعلم

$A\hat{B}C = 22°$ و $B\hat{A}D = 58$ الوتران $[AD]$ و $[BC]$

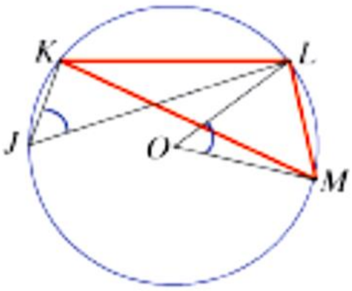
متقاطعين في J احسب قياس كل من



١) BCD	٢) CDA	٣) CJD

تمرين : J و K و L و M نقاط من دائرة مركزها O حيث

$K\hat{J}L = L\hat{O}M = 52$ احسب قياس زوايا المثلث LMK



تمرين : C دائرة مركزها O وقطرها $[AB]$ حيث $AB = 8$

١) ارسم شكلا حسب معطيات النص ووضع على C نقطة E تحقق $BAE = 52$

٢) اثبت ان المثلث AEB قائم الزاوية

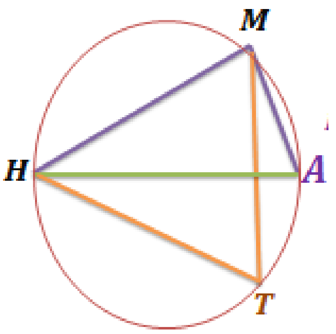
٣) وضع على AB التي لا تضم E نقطة K واحسب قياس كل من BOE و BKE

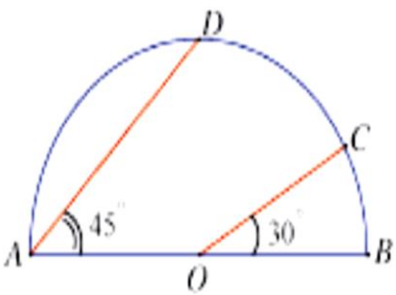
مسالة : C دائرة قطرها $AH = 9\ cm$ و M نقطة من C تحقق $AM = 4.5cm$ و T نقطة اخرى من C

١ – تحقق من ان المثلث MAH قائم الزاوية

٢ – احسب قياس الزاوية MHA

٣ – ما قياس الزاوية HTM



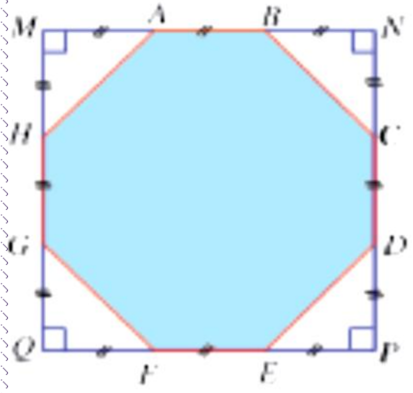


مسالة : C و D نقطتان من نصف دائرة مركزها O وقطرها $[AB]$

تحققان $BOC = 30$ و $BAD = 45$

١ – ما طبيعة المثلث ADB علل الاجابة

٢ – ما طبيعة المثلث COD علل الاجابة

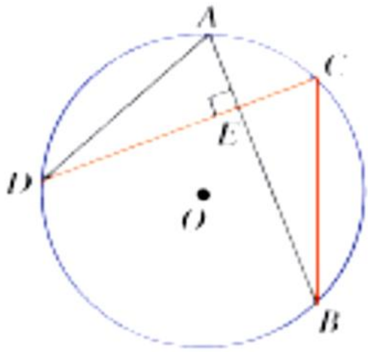


تمرين : $MNPQ$ مربع و $ABCDEFGH$ مثمن مشار اليه في الشكل المرفق

١ – هل المثمن منتظم . علل الاجابة

٢ – S هي مساحة المربع $MNPQ$ و S' مساحة المثمن اثبت ان $S' = \frac{7}{9}S$

تمرين: ليكن $ABCD$ رباعي دائري مركزه O حيث $ADC = 72$ احسب قياس الزاوية ABC



مسالة : A و B و C و D اربع نقاط من دائرة C مركزها O الوتران $[AB]$ و $[CD]$متعامدان في E و $BCD = 69$

١ – احسب قياس الزاوية ADC

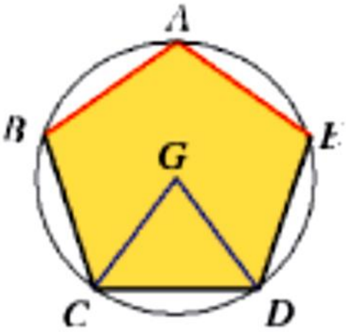
٢ - ١ – ارسم المتوسط المتعلق بالضلع $[BC]$ في المثلث EBC ولتكن F نقطة تلاقيه مع $[BC]$

٢ – ما طبيعة المثلث EFC علل الحابة

٣ – استنتج قياس الزاوية CEF

٣ – يقطع المستقيم (EF) القطعة المستقيمة $[AD]$ في النقطة H

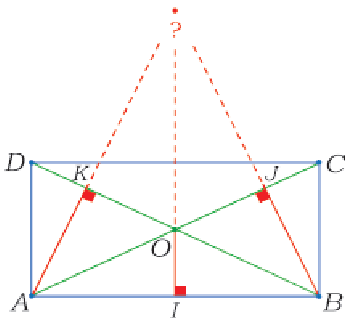
تمرين : $ABCDE$ مخمس منتظم مركزه G



١) احسب قياس الزاوية CGD

٢) احسب قياس الزاوية EAB

نتأمل مستطيلا $ABCD$ يتقاطع قطراه في O

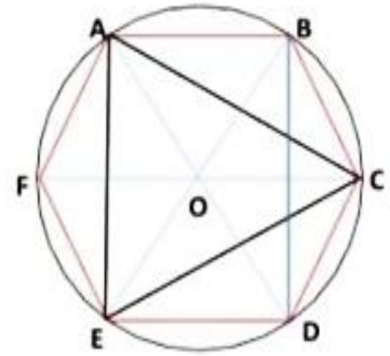


١ – سم كل رباعي دائري في الشكل مع التعليل

٢ – اثبت ان المستقيمات (BJ) و (AK) و (IO) تتلاقى في نقطة واحدة

لتكن $C(O,r)$ و $C'(O',5)$ اذا علمت ان $d = OO' = 13$ عين قيمة r لتكون الدائرتان متماستان خارجيا

لتكن $C(O,r)$ و $C'(O',7)$ اذا علمت ان $d = OO' = 13$ ماهو شرط r لتكون الدائرتان متقاطعتان



اجب بصح او خطأ

ليكن $ABCDE$ مسدس منتظم ونصف قطر الدائرة 4

١) $AOB = 60$

٢) قياس القوس $AF = 30$

٣) المثلث BAD قائم

٤) مساحة المثلث OBC هي $4\sqrt{3}$

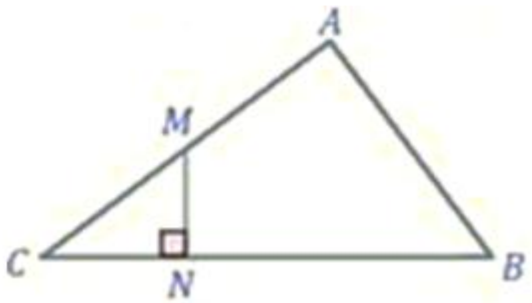
٥) مساحة المسدس هي $12\sqrt{3}$

٦) المثلث ACE متساوي الاضلاع

٧) الشكل $ABDE$ مربع

٨) المستقيمان (AD) و (EB) متعامدان

٩) الشكل $AEOF$ معين



تمرين :المثلث ABC فيه $AB = 9$ و $AC = 12$ و $BC = 15$

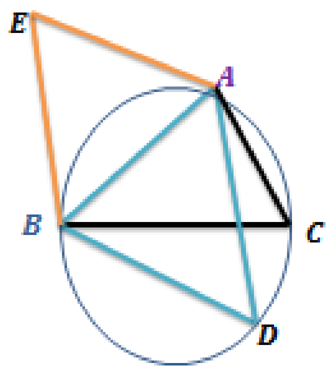
و $NM = 3$ و $MN \perp BC$ المطلوب

١) اثبت ان ABC مثلث قائم

٢) اثبت ان الرباعي $AMNB$ دائري

٣) اكتب $sin\ c$ في المثلثان ABC و MNC ثم احسب MC

٤) اثبت تشابه المثلثان ABC و MNC وعين ثابت لتصغير



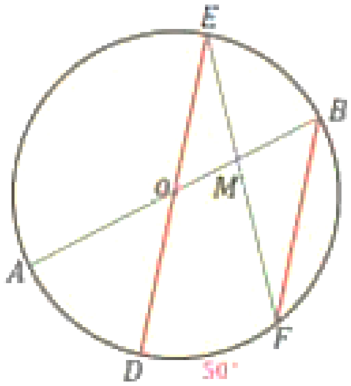
مسالة : في الشكل الجانبي ABC مثلث متساوي الاضلاع و النقطة O هي مركز الدائرة المارة برؤوسه و D هي المقابلة قطريا للنقطة B

١) ما طبيعة المثلث ABD ؟

٢) ما قياس الزاوية ADB معللا الاجابة

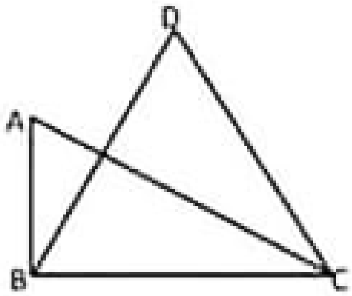
٣) ان (EA) و (EB) مماسان في A و B اثبت ان المثلث AEB متساوي الاضلاع

٤) لتكن I منتصف القطعة $[CD]$ ولتكن J نظيرة O بالنسبة ل I اثبت ان (DC) و (OJ) متعامدان



مسالة : AB و DE قطران في دائرة C مركزها O والنقطة F من القوس BD حيث $DF = 50°$ و AB و EF متقاطعين في M لدينا $DEF = EFB$ المطلوب

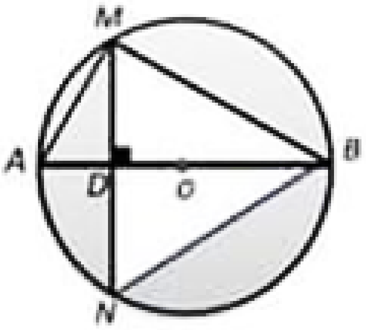
١) اثبت ان $DE//FB$ واستنتج قياس الزاوية EFB
٢) اثبت ان D منتصف AF
٣) احسب قياس زوايا المثلث MBF



تمرين : في الشكل جانبي ABC مثلث قائم في B فيه $AB = 60$ والمثلث BCD متساوي الاضلاع طول ضلعه $6\sqrt{3}$

١) اثبت ان $BAC = 60$
٢) اثبت ان A و B و C و D تقع على دائرة واحدة عين مركزها ونصف قطرها
٣) اثبت ان CA منصف الزاوية BCD

مسألة: AB قطر في الدائرة $C(O,4)$ والنقطة M تحقق $BM = 2AM$



١) اثبت ان قياس القوس $AM = 60^\circ$ واستنتج قياس القوس BM

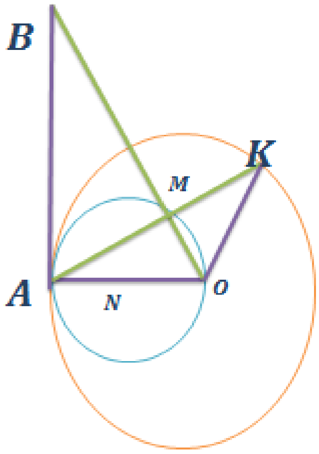
٢) علل كون المثلث AMB قائم الزاوية واحسب قياس زواياه

٣) اثبت ان طول $BM = 4\sqrt{3}$ ثم احسب AM و DM

٤) احسب قياس الزاوية NMB ثم استنتج قياس القوس NB

٥) اثبت ان المثلث MNB متساوي الاضلاع واحسب مساحته

٦) اثبت ان مساحة الجزء المظلل تساوي $4\left(4\pi - 3\sqrt{3}\right)$



مسالة دورة : في الشكل الجانبي C_1 دائرة مركزها O ونصف قطرها OA و C_2 دائرة مركزها N وهما متماستان داخلا في A حيث $AO = 4$ و $OB = 8$ وقياس القوس $OM = 60$ و AB مماس مشترك في A

١- اثبت ان $BA = 4\sqrt{3}$

٢- احسب قياس القوس AM ثم استنتج قياس AMO

٣- احسب طول كل من OM و AM و BM

٤- اثبت ان الرباعي $BAOK$ دائري ثم عين مركز الدائرة المارة من رؤوسه

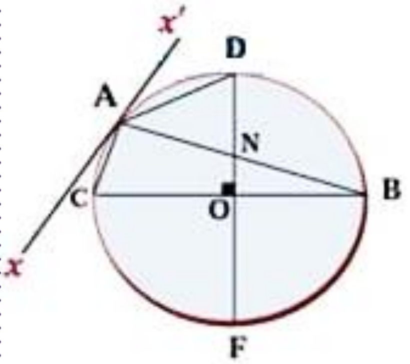
مسالة : في الشكل المجاور $C(O,R)$ دائرة وقياس الزاوية $ABC = 20$ و xx' مماس والمطلوب

١ – احسب قياس زوايا المثلث ABC

٢ – احسب قياس الزاوية CAX وقياس القوس AD

٣ – احسب قياس الزاوية ADF

٤ – احسب قياس زوايا المثلث AND



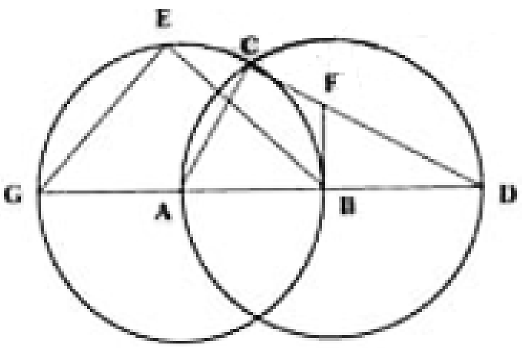
مسالة : في الشكل الجانبي لدينا دائرة $C(B,6)$ ودائرة مركزها A حيث الدائرتان متقاطعتان وطبوقتان و BF مماس للدائرة $EG = EB$ والمطلوب

١) اثبت ان CD مماس للدائرة C ؟

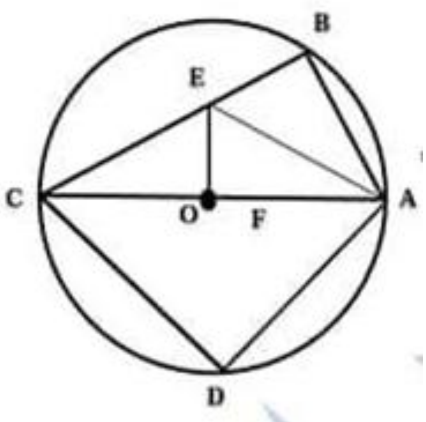
٢) احسب قياس زوايا المثلث ACD واحسب CD ؟

٣) احسب طول FB ثم ان $FD = 2CF$

٤) اثبت ان طول $GE = 6\sqrt{2}$ وان الرباعي $ACFB$ دائري واحسب نصف قطر الدائرة المارة بالرؤوس



مسالة : في الشكل المجاور لدينا دائرة C مركزها O ونصف قطرها 4 وفيها $AE = CE$ و $AD = CD$ وفيها قياس الزاوية $BAC = 30$ و $AB = 4$

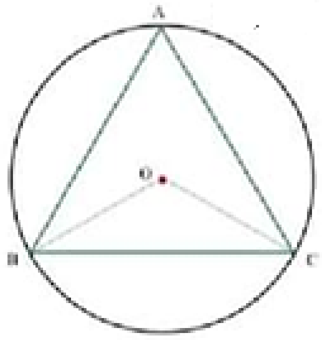


١) احسب طول كل من AB و AD

٢) احسب قياس القوس AD

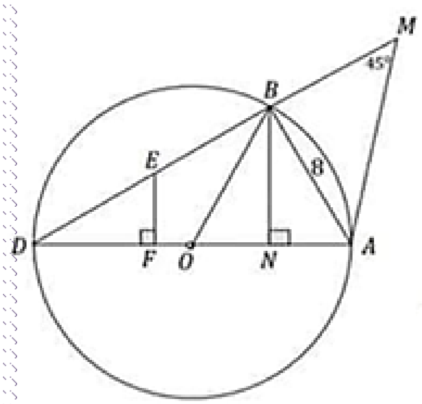
٣) احسب محيط الشكل $CBAD$

٤) برهن ان الرباعي $BEDA$ رباعي دائري وعين مركز الدائرة المارة برئوسة



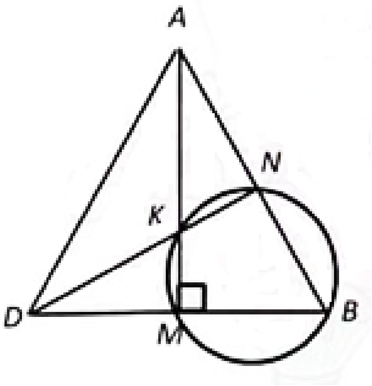
تمرين : في الشكل الجانبي ABC مثلث متساوي الاضلاع تمر برؤوسه دائرة مركزها O ونصف قطرها $10\ cm$ والمطلوب

١ - احسب قياسات كلا من AB و BC و AC
٢ – احسب قياسات زوايا المثلث OBC
٣ – احسب طول AB
٤ – احسب قياس ABO



مسالة : في الشكل الجانبي دائرة C مركزها O وقطرها $AD = 16$ و $AB = 8$ و $BMA = 45°$ والمطلوب

١) ما نوع المثلث ABD مع التعليل واستنتج قياس الزاوية BAD
٢) ما نوع المثلث AOB واستنتج AN واحسب BN
٣) استنتج BM
٤) اثبت ان المثلثين DBN و DEF متشابهين
٥) اثبت ان الرباعي $ABEF$ دائري وعين مركز الدائرة المارة برؤوسه



مسالة: في الشكل المجاور ABD مثلث متساوي اضلاع طول ضلعه $6\ cm$ و AM ارتفاع متعلق بالضلع BD الدائرة C تمر من النقاط $MBKN$ المطلوب

١) اثبت ان $BNC = 90°$ واستنتج ان النقطة K مركز ثقل المثلث ABC

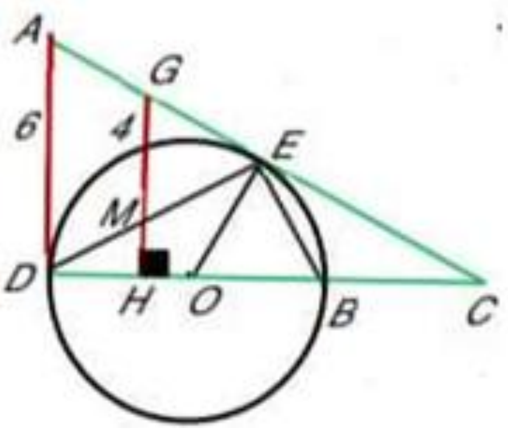
٢) اثبت ان قياس $BAM = NDB$

٣) اثبت صحة العلاقة $BN \times AB = 2DM$

٤) احسب طول AN واستنتج طول KN

٥) اثبت ان $MDK = MBK$ واحسب مساحة المثلث DKB

٦) اثبت ان الرباعي $ANMD$ دائري واحسب نصف قطر الدائرة المارة برؤوسه



مسالة : في الشكل المجاور دائرة $C(O,2\sqrt{3})$ و AE و AD مماسان مرسومان من A قياس القوس $\widehat{ED} = 2\widehat{EB}$ وليكن $GM = 4$ و $AD = 6$ والمطلوب

١) احسب قياس القوسين $\widehat{ED}$ و $\widehat{EB}$

٢) اوجد قياس زوايا المثلث EOC واحسب اطوال أضلاعه

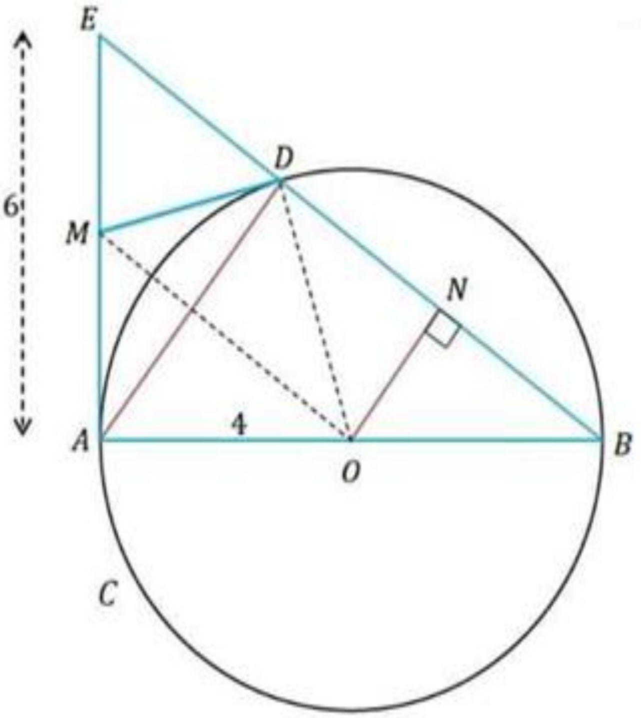
٣) اثبت ان B منتصف OC

٤) اثبت ان المثلث AED متساوي الاضلاع

٥) اثبت تشابه المثلثان GME و ADE واحسب محيط المثلث GME

٦) اثبت ان الرباعي $GHOE$ دائري وعين مركز الدائرة المارة بالرؤوسة

مسالة : في الشكل الجانبي $C(O,4)$ و $[AB]$ قطرا فيها و $[AE]$ مماس لها في النقطة A نصل EB فيقطع الدائرة في D بفرض $[AE]=6$ والنقطة M منتصف $[AE]$ و $ON \perp BD$



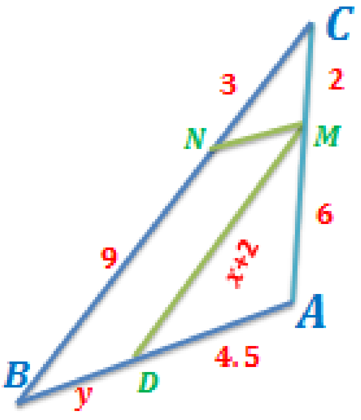
١ – ما نوع المثلث ABE و ABD مع التعليل

٢ – احسب كل من $[EB]$ و $[AD]$

٣ – اثبت ان المثلث MAD متساوي الساقين واحسب طول $[ON]$

٤ – اثبت ان $M\hat{A}D = A\hat{B}D$ اثبت ان $A\hat{O}D = 2A\hat{B}D$

٥ – اثبت تطابق المثلثان DMO و AMO واستنتج ان MD مماس للدائرة



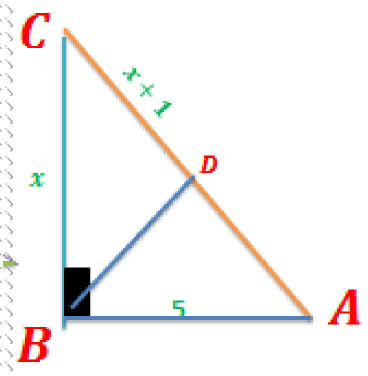
تمرين : ليكن ABC مثلث فيه $DM//BC$ و $NB = 9$ و $CN = 3$ و $DM = x + 2$ و $BD = y$ و $AD = 4.5$ و $AM = 6$ و $CM = 2$

١) احسب قيمة كل من x و y

٢) اثبت ان المستقيمين MN و AB متوازيان

٣) اثبت ان المثلث MNC مصغر عن المثلث ABC واستنتج معامل التصغير

٤) بين ان مساحة $S_{ABC} = 16 \times S_{MNC}$



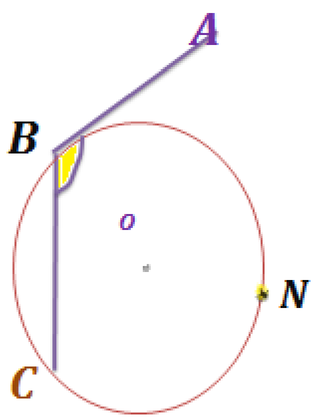
تمرين : في الشكل المرسوم جانبا

١) احسب قيمة x

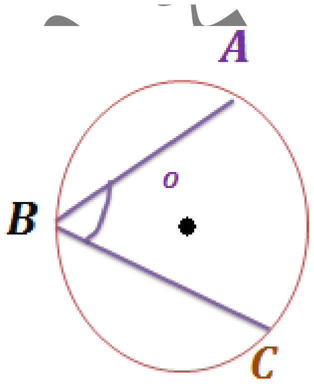
٢) احسب $Cos\ B$ في المثلث ABC

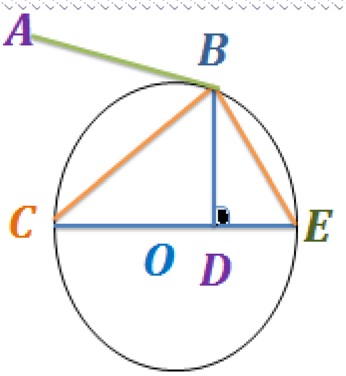
٣) احسب $Cos\ B$ في المثلث ABD واستنتج ان $AB^2 = CB \times BD$

تمرين : في الشكل الجانبي ليكن $BNC = 290°$ و $ABC = 2(x+4)$ احسب x



تمرين: في الشكل الجانبي احسب قيمة x حيث $AC = 4(x+5)°$ و $ABC = 60°$





تمرين : في الشكل الجانبي $CB = 80°$ حيث AB مماس

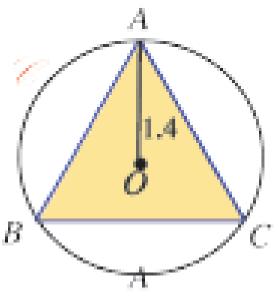
١ – احسب قياس زوايا المثلث ABE

٢ – احسب قياس ABC

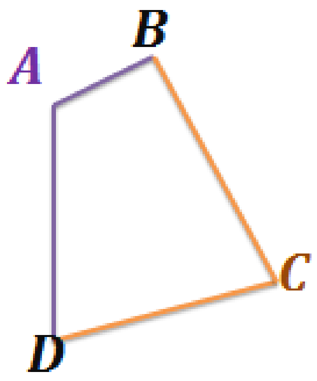
ملاحظة : ١) طول ضلع مثلث متساوي الاضلاع مرسوم في دائرة نصف قطرها r هو $r\sqrt{3}$

٢) طول ضلع مربع مرسوم في دائرة نصف قطرها r هو $r\sqrt{2}$

مثال : طول ضلع المثلث متساوي الاضلاع مرسوم في دائرة قطرها 8 هو $8\sqrt{3}$ ، $3\sqrt{8}$ ، $4\sqrt{3}$



مثال: ليكن ABC مثلث متساوي الاضلاع مرسوم في دائرة C مركزها O ونصف قطرها $r = 1.4$ احسب AB

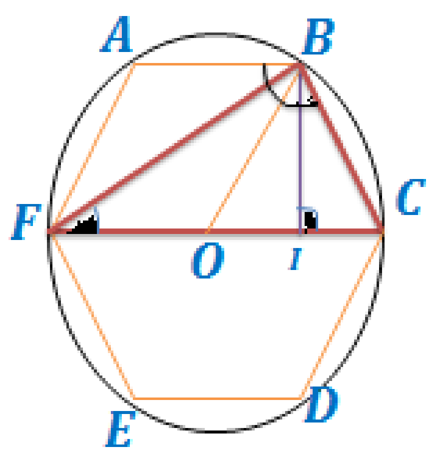


تمرين : في الشكل الجانبي لدينا $D = 70°$ و $B = 110°$ و $A = (3x + 2)°$

و $C = (2x - 1)°$

١) اثبت ان الرباعي $ABCD$ دائري

٢) احسب قيمة x



ليكن $ABCDE$ مسدس منتظم في دائرة $C(O,3)$

١) احسب مجموع زوايا المسدس

٢) احسب قياس الزاوية ABC

٣) احسب قياس الزاوية BOC

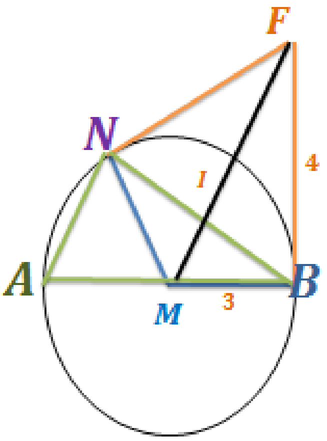
٤) احسب قياس الزاوية BFC

٥) ما نوع المثلث BFC واحسب طول FB

٦) ما نوع المثلث BOC وقياس BC

٧) احسب مساحة المثلث BOC و FBC

٨) ما نوع الرباعي $ABOF$ واثبت ان $FB \perp OI$



مسألة : في الشكل المرسوم جانبا C دائرة مركزها M و AB قطر فيها يساوي 3 و FB و FN مماسان و $BF = 4$

١) اثبت ان المثلثان FBM و ANB قائمان

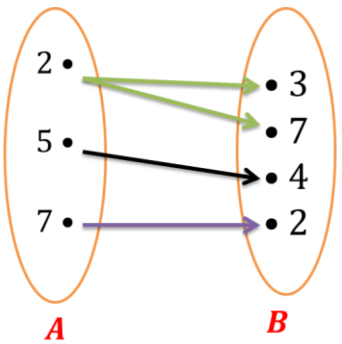
٢) اثبت ان $FBN = NAB$

٣) اثبت ان الرباعي $BFMN$ دائري وعين مركز الدائرة المارة بالرؤوس واحسب نصف قطرها

٤) اثبت ان FM منصف للزاوية NFB ثم استنتج ان $AN = FM$

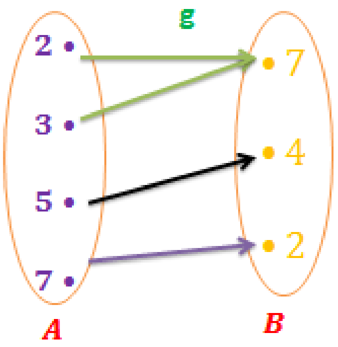
الوحدة الخمسة في الجبر : التابع

تعريف : التابع هو علاقة تربط كل عنصر من مجموعة A بعنصر وحيد من مجموعة ثانية B ويرمز له عادة f او g اوh



مثال ١ : هل العلاقة f التالية تمثل تابع

الحل : هذه العلاقة ليست تابع لان العنصر 2 من A ارتبط مع عنصرين من B



مثال ٢ : هل العلاقة g المعرفة بالمخطط التالي هي تابع

الحل : العلاقة التالية هي تابع لان كل عناصر A مرتبطة بعنصر واحد فقط من B

مفاهيم اساسية : اذا كان f تابع يربط العنصر x من A بالعنصر y من B نرمز لذلك

$$f: A \to B$$

$$f: x \to y$$

عندئذ نسمي :

١- A منطلق التابع f

٢- B مستقر التابع f

٣- x سلف العنصر y وفق f

٤- y صورة العنصر x وفق f ونرمز لذلك ب $f(x) = y$

أي انه في المثال الثاني وفق التابع g نجد .

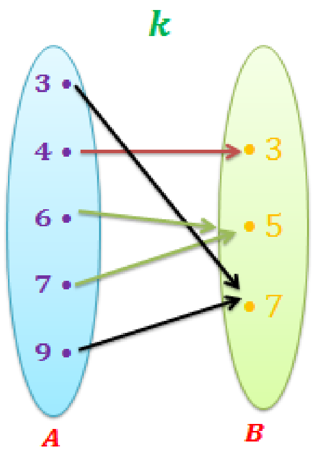
المنطلق هو A و المستقر هو B و صورة العدد 3 هي 7 ونرمز لذلك $f(3) = 7$

مثال ٣ : املا الجدول بحسب الصيغة

الصيغة الرمزية	الصيغة اللفظية
$f(\dots) = ..$	3 هو صورة للعدد 2 وفق f
$f(\dots) = ..$	سلف 2 هو 1 وفق f
$g(\dots) = \dots\ ,\ g(\dots) = ..$	اسلاف 10 هي 1 و 5 وفق g
$h(3) = 1$	العدد .... هو صورة .....

ملاحظة : اكبر قيمة للتابع نقصد بها اكبر صورة للتابع واصغر قيمة للتابع هي اصغر صورة

مثال ٤ : ليكن لدينا التابع المعرف بالمخطط التالي (مخطط فن)



١- عين المنطلق والمستقر

٢- عين اسلاف العدد 7

٣- ما هو العدد الذي صورته 3

٤- اكبر قيمة للتابع واصغر قيمة للتابع

٥- مجموع صور الاعداد الفردية

٦- صورة مجموع قواسم 3

طرق تعريف التابع :

اولا طريقة الجدول : في هذه الطريقة نرتب اسلاف التابع وصورها ضمن جدولين كل سلف يقابله صورته

ملاحظة : المنطلق لا يمكن ان يكرر فيه العدد

مثال ٥ : ليكن لدينا التابع f المعرف بالجدول الاتي.

A	B
1	2
2	5
3	2
4	3
5	1[illegible]
6	2

١) عين منطلق ومستقر التابع ....

٢) صورة العدد 5 وفق f ....

٣) اسلاف العدد 2 وفق f.............. ....

٤) صورة مجموع الاعداد الاصغر من 3.................................

٥) اين يبلغ اصغر قيمة وماهي اكبر قيمة . ...

مثال ٦ : في احدى الصحف احصينا عدد اسطر المقالات القصيرة وسجلنا النتائج في جدول

عدد الاسطر	1	2	3	4	5	6	7
عدد المقالات	3	6	24	38	24	15	9

هذا الجدول يعرف تابع يقرن بعدد الاسطر عدد المقالات

١- ماذا تعني الكتابة $f(7) = 9$

....

٢- كم عدد المقالات المؤلفة من 4 اسطر .وعبر عن ذلك باستخدام الرمز f

....

٣- وفق التابع السابق : ما صورة العدد 6 وما الاعداد التي صورتها 24

تمرين : ليكن لدينا التابع الذي يربط بكل يوم درجة الحرارة وفق الجدول

اليوم	21	22	23	24	25
درجة الحرارة	25	25	21	23	21

١- ما هو المنطلق وما هو المستقر

....

٢- اوجد صورة 21

....

٣- احسب $f(23)$

....

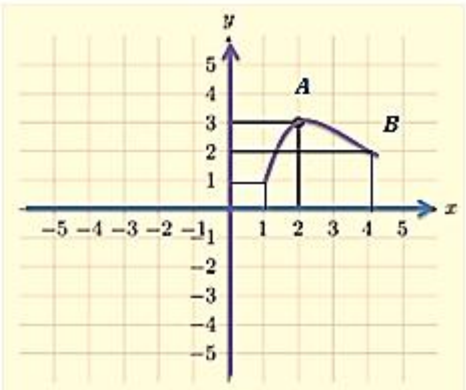
٤- عين اسلاف 25

....

٥- اوجد مجموع صور الايام الفردية

....

ثانيا :طريقة الخط البياني : في هذه الطريقة نعتبر ان جزء محور الفواصل هو المجموعة الاولى (المنطلق) ونعتبر جزء من محور التراتيب هو المجموعة الثانية (المستقر) بتالي كل نقطة من المستوي تربط رقم من محور الفواصل برقم من محور التراتيب كما في الشكل نلاحظ ان النقطة A تربط العدد 2 بالعدد 3 والنقطة B تربط العدد 4 بالعدد 2

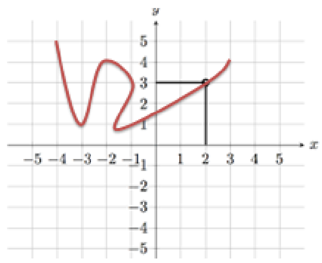


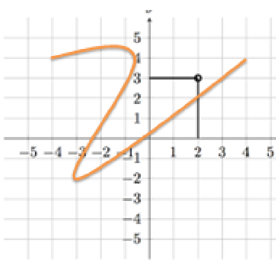
وكل نقطة من هذا الخط تحقق ذلك ومنه يمكن تعريف تابع بخط بياني

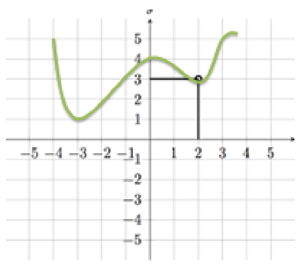
ملاحظة : المنطلق من محور الفواصل والمستقر من محور التراتيب

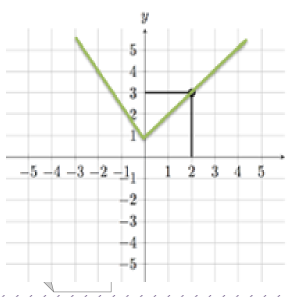
ملاحظة : ليس من الضرورة ان يكون كل خط معرف لتابع حتي يكون الخط معرف لتابع يجب كل مستقيم شاقولي ان يتقاطع مع الخط بنقطة واحدة فقط

مثال : بين أي من الخطوط التالية يمثل تابع

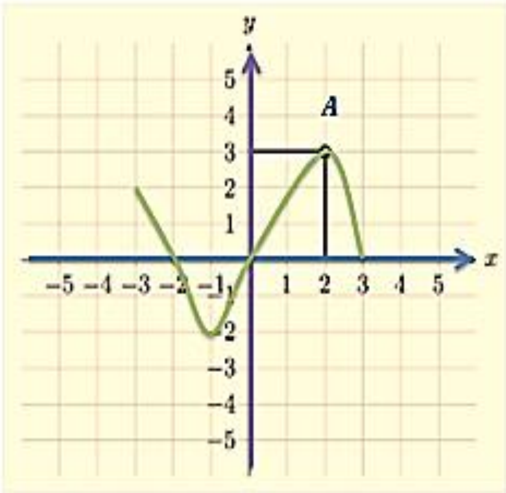








مثال ٧: ليكن لدينا التابع f المعرف وفق الخط



١- عين المنطلق والمستقر

٢- ماهي صورة -3

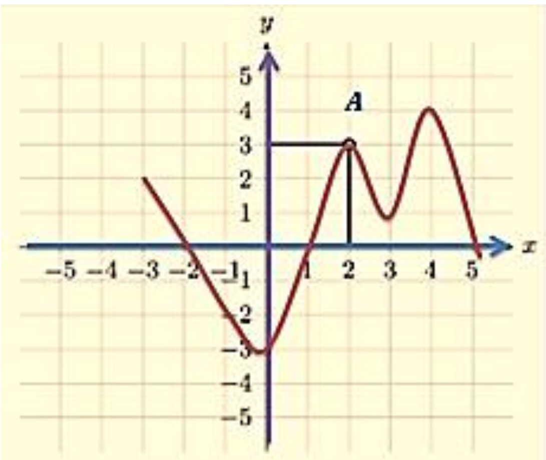
٣- اوجد اسلاف الصفر

٤- اكبر قيمة للتابع واين يبلغها

٥- اوجد $f(1)$

٦- ما هو العدد الذي صورته -2

الثالث : ليكن لدينا التابع g المعرف بالخط البياني التالي



١- عين المنطلق والمستقر

....

٢- اوجد صورة العدد 2

....

٣- عين اسلاف الصفر

....

٤- اوجد صورة الصفر

. ...

٥- ماهي اصغر قيمة للتابع واين يبلغها

....

٦- احسب $g(3)$

....

٧- ما هو عدد اسلاف 3

....

ثالثا : تعريف التابع من خلال قاعدة الربط

اذا كان f تابع يربط العنصر x بالعنصر y أي $f: x \to y$ $f(x) = y$ وفق هذه الطريقة

تكون y هي عمليات جبرية على x أي الصورة هي عمليات جبرية على السلف

مثال ٨: $f: x \to y = 2x + 1$ اختصارا نكتب $f: x \to \underbrace{2x + 1}_{y}$ او $f(x) = 2x + 1$

مثال ٩: ليكن لدينا التابع h الذي ينقل كل عدد x الى مربعه مجموع له واحد

١- عبر جبريا عن هذا التابع

٢- اوجد صورة العدد 3 (أي $x = 3$ و $y = ?$)

٣- احسب $h(-1)$ (أي $x = -1$ و $y = ?$)

٤- اوجد اسلاف العدد 5 (أي $x = ?$ و $y = 5$)

الحل :

١- $h: x \to x^2 + 1$ او $h(x) = x^2 + 1$

٢- نعوض $x = 3$ في التابع نجد $h(3) = (3)^2 + 1 = 9 + 1 = 10$

٣- $h(-1) = (-1)^2 + 1 = 1 + 1 = 2$

٤- لدينا $y = 5$ أي $x^2 + 1 = 5$ نحل هذه المعادلة نجد $x^2 = 4$ أي اما $x = 2$ او $x = -2$

مثال ١٠ : ليكن لدينا التابع المعرف بالعلاقة $k(x) = x^2 + 5x + 6$

١- اثبت ان $k(x) = (x + 2)(x + 3)$

٢- احسب $k(0)$ و $k(1)$

٣- عين اسلاف 6.

٤- اوجد الاعداد التي صورتها صفر.

مثال ١١: ليكن لدينا التابع $f(x) = (x^2 - 25) + (x - 5)(2x + 1)$

١- حلل عبارة $f(x)$

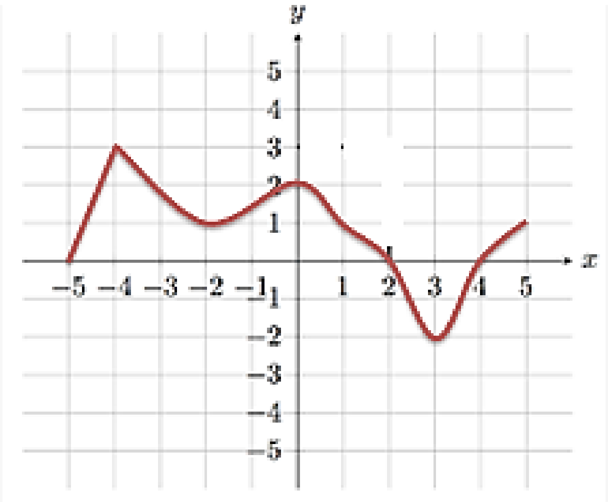
٢- انشر عبارة $f(x)$

٣- اوجد صورة 1

٤- اوجد اسلاف الصفر

٥- اوجد الاعداد التي صورتها -30

تمرين : ليكن لدينا التابع g المعرف بالخط الجاني



١ – عين المنطلق (مجموعة التعريف)

٢ – المستقر (مجموعة القيم)

٣ – اسلاف الصفر

٤ – صورة الصفر

٥ – العدد الذي صورته واحد

٦ – اكبر قيمة للتابع

٧ – اصغير قيمة للتابع

٨ – احسب $g(3)$ و $g(-4)$

٩ – عدد اسلاف 2

تمرين : لنعرف التابع الذي يربط بكل يوم عدد ساعات الكهرباء موصولة

اليوم	1	2	3	4	5	6	7
عدد ساعات الوصل	5	3	5	0	2	1	3

١ – ماذا تعني الكتابة $f(1)$

٢ – اوجد صورة 6

٣ – العدد الذي صورته 2

٤ – عين اكبر قيمة واصغر قيمة للتابع

٥ – حل المعادلة $f(2)x^2 + f(3)x = 0$

تمرين : ليكن لدينا التابع المعرف بالجدول التالي

A	B
3	1
3	2
1	3
2	5
4	7

١) عين المنطلق والمستقر

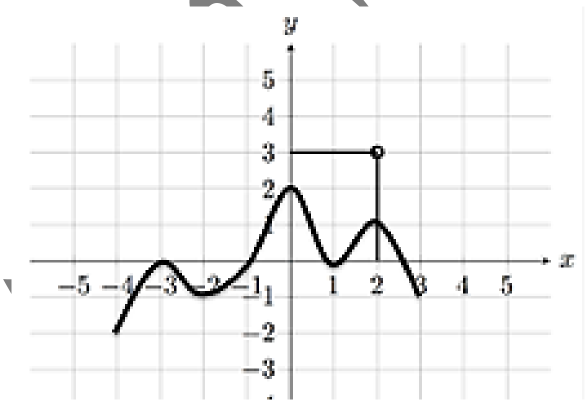
٢) صورة العدد 3

٣) اسلاف العدد 3

٤) العدد الذي صورته 2

٥) اكبر قيمة واصغر قيمة

تمرين : ليكن لدينا التابع المعرف بالخط الجانبي



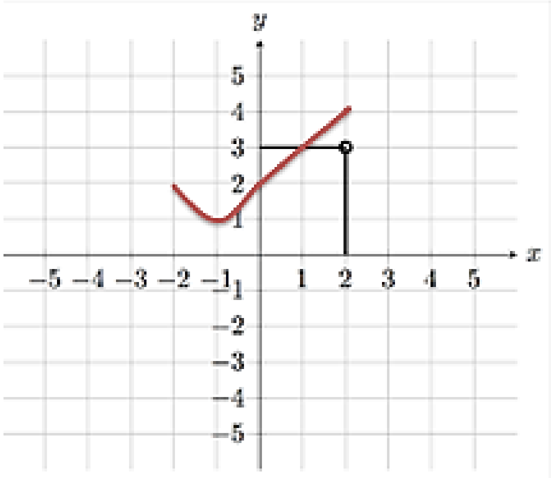
١ – منطلق ومستقر التابع

٢ – صورة العدد 1

٣ – صورة الصفر

٤ – اسلاف الصفر

٥ - $f(4)$ و اكبر واصغر قيمة واين يبلغها



تمرين : ليكن لدينا التابع f المعرف بالخط الجانبي

١ – عين المنطلق والمستقر

٢ – صورة العدد $1-$

٣ – اوجد $f(0)$

٤ – اسلاف العدد 2

٥ – العدد الذي صورته 3

٦ – اين يبلغ اكبر قيمة وما هي واين يبلغ اصغر قيمة

٧ – طبيعة العدد $\frac{f(1)+2f(2)}{3}$

تمرين : ليكن لدينا التابع f الذي يربط كل عدد بمربعه

١ – اكتب قاعدة ربط التابع $f(x)$

٢ – اوجد صورة 3

٣ – عين اسلاف 16

تمرين : ليكن لدينا التابع k معرف بالشكل $k: x \longrightarrow x^2 + 2x + 1$ و $f(x) = (x+1)^2$

١ – اوجد صورة الصفر

٢ – اوجد $k(1)$

٣ – اسلاف 1

٤ – اثبت ان $f(x) = k(x)$ ثم اوجد اسلاف 9

تمرين : ليكن لدينا التابع $f: A \to B$ و $g: B \to C$

A	B	C
1	5	4
2	6	3
3	1	4
4	2	5

١) اوجد صورة 1 وفق g

٢) سلف 5 وفق f

٣) اوجد $g(f(4))$

٤) مجموع صور الاعداد الفردية وفق f

١- اختر الاجابة الصحيحة

١- صيغة التابع الذي يربط كل عدد x بمربع مجموعه مع 5

$x^2 + 25$	$(x+5)^2$	$x^2 + 5$

٢- احد اسلاف الصفر وفق التابع $h(t) = t^2 + t - 6$

$t = -6$	$t = 3$	$t = 2$

٣- العدد الذي ليس له اسلاف وفق التابع $k(x) = (x+2)^2$ هو

-6	6	0

٤- العدد الذي ليس له صورة وفق التابع $l(x) = x + \frac{1}{x}$ هو

$x = 2$	$x = 1$	$x = 0$

٥- التابع الذي يربط كل عدد r بمساحة الدائرة التي نصف قطرها r هو

$f: r \to 2\pi r^2$	$f: r \to \pi r^2$	$f: r \to 2\pi r$

٢- ضع اشارة صح او خطأ

١- اذا قرنا كل عدد xببعدد y وفق العلاقة $(x+2y)(2x+y) = 0$ تمثل تابع

٢- ليكن u التابع المعرف بالشكل $u: t \to (t-1)^2$ يوجد عددان صورتهما 9

٣- يمكن تعريف التابع باي خط بياني

الوحدة السادسة في الجبر: الاحتمالات والاحصاء

مقدمة في جبر المجموعات

لتكن لدينا A و B مجموعتان عندئذ

١) $A \cup B$ (A اجتماع B) هو مجموعة العناصر المشتركة والغير مشتركة

٢) $A \cap B$ (A تقاطع B) هو مجموعة العناصر المشتركة فقط

٣) $A \backslash B$ (A فرق B) هو مجموعة العناصر الموجودة في A والغير موجودة في B

ملاحظة : المجموعة التي لا تحوي عناصر هي المجموعة الخالية ونرمز لها $\emptyset$ (فاي)

مثال :لتكن لدينا المجموعات $A = \{2,4\}$ و $B = \{1,3,5,\}$ و $C = \{2,3\}$

المطلوب : اوجد $A \cap B$ و $A \cap C$ و $A \cup B$ و $C \cup B$ و $B \backslash C$

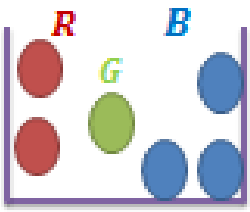
مفاهيم اساسية

١) التجربة العشوائية :هي التجارب التي نعلم جميع امكاناتها لكن لا نعلم النتيجة التي سوف تقع (نحصل عليها) ويوجد نوعين من التجارب

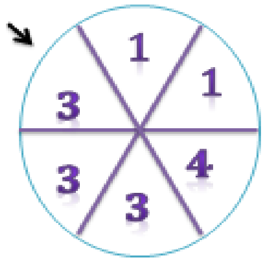
١) التجارب العشوائية البسيطة : وهي التجربة التي نقوم بها مرة واحدة

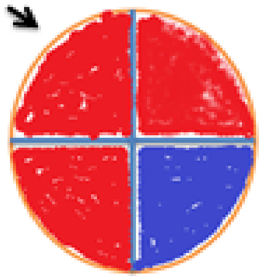
مثل : تجربة حجر النرد او سحب من الصندوق

او دولاب الحظ او القاء قطعة نقود



٢) التجارب المركبة :وهي التجربة التي نقوم بها عدد متتالي من المرات مثل القاء قطعة نقود مرتان او القاء قطعة نقود ثم سحب كرة او دولابي حظ ..



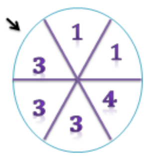
٢) فضاء العينة : **هو مجموعة كل نتائج التجربة العشوائية (مجموعة الامكانات) ويرمز لها Ω (اوميغا)**

مثال : اوجد فضاء العينة في التجارب التالية

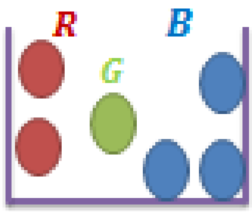
١) القاء حجر نرد

٢) قطعة النقود

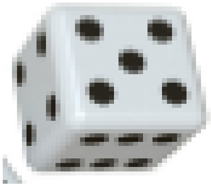
٣) دولاب الحظ



٤) صندوق كرات الوان



٣) الحدث : هو مجموعة جزئية من فضاء العينة ويكون موصوف ونحن نستنتجه يرمز له بأحرف كبيرة A او B



مثال : في تجربة حجر النرد : اكتب الاحداث التالية

A حدث الارقام الاولية

Bحدث الارقام الزوجية

Cحدث الارقام الاكبر من 4

Dحدث الارقام الزوجية والاولية

٤) الحدثان المتنافيان : نقول ان الحدثان A و B متنافيان اذا $A \cap B = \phi$ ويستحيل ان يتحققا معا

٥) الحدثان المتعاكسان: نقول ان الحدثان A و B متعاكسان اذا

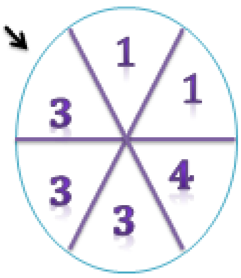
$A \cap B = \phi$ و $A \cup B = \Omega$

مثال : في تجربة حجر النرد السابقة

هل الحدثان A و B متعاكسان

هال الحدثان C و D متنافيان

مثال : في دولاب الحظ : اكتب الاحداث التالية



A حدث الارقام الاولية

B حدث الارقام الزوجية

C حدث الارقام الاكبر من 4

D حدث الارقام الزوجية والاولية

هل الحدثان A و B متعاكسان

هال الحدثان C و D متنافيان

ملاحظة : اذا لم يحوي الحدث على أي عنصر يسمى الحدث المستحيل

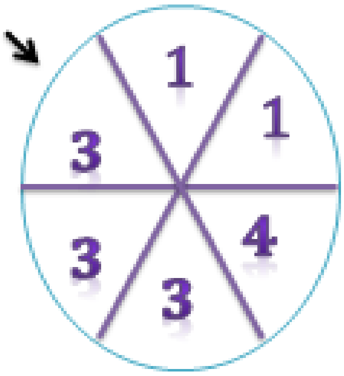
واذا حوى على عنصر سمي حدث بسيط واذا حوا كل النتائج يسمى الحدث الاكيد

ملاحظة : نقول ان الحدث وقع اذا اعطت التجربة احد عناصره

٦) **شجرة الامكانات :** هي مخطط يمثل جميع نتائج التجربة كل نتيجة تقابل فرع من فروع الشجرة

تعريف الاحتمال : اذا كان A حدث في تجربة عشوائية مجموعة نتائجها Ω فان احتمال الحدث A عدد امكانات A تقسيم عدد امكانات Ω (مع مراعاة التكرار) أي $P(A)=\frac{n(A)}{n(\Omega)}$

مثال : في تجربة دولاب الحظ في الشكل



ليكن A حدث الارقام الفردية

١)عين فضاء العينة

٢) اوجد الحدث A واحسب احتماله

خواص الاحتمال

١) احتمال أي حدث A يحقق $0 \le P(A) \le 1$

٢) اذا كان A و B متنافيان فان $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

٣) اذا كان A و B متعاكسان فان $P(A) + P(B) = 1$

مثال :في تجربة القاء قطعة نقود :نرمز للشعار H ونرمز للكتابة T

١) اكتب فضاء العينة Ω

٢) ارسم شجرة الامكانات محملة بالاحتمالات

تطبيق : نلقي حجر نرد متجانس مرقم بـ $1, 2, 3. 4, 5, 6$ وليكن A حدث ظهور عدد اصغر او يساوي 2 و B حدث ظهور عدد اكبر تماما من 4

١ – اكتب فضاء العينة

٢ – ارسم شجرة الامكانات

١ - اكتب الحدث A واحسب احتماله

٢ - اكتب الحدث B واحسب احتماله

٣ – اثبت ان A و B متنافيان

٤ – احسب احتمال حدث E ظهور عدد n يحقق $n \leq 2$ او $n > 4$

التجارب الاحتمالية المركبة والاحصاء

التجارب المركبة : هي التجربة التي نقوم بها عدد متتالي من المرات مثل القاء قطعة نقود مرتان او القاء قطعة نقود ثم سحب كرة او دولابي حظ ..

مثال : في تجربة القاء قطعة نقود مرتين متتاليتان

١ – اكتب جميع نتائج التجربة Ω

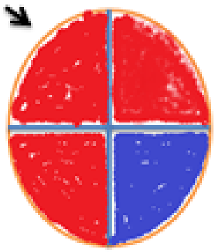
٢ – ارسم شجرة الامكانات محملة بالاحتمالات

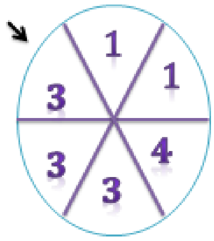
٣ – احسب احتمال ان تكون النتيجة شعار في الإلقاءين

٤ – اذا كررنا التجربة 24 مرة ماهو عدد المرات المتوقع للحصول على شعار في المرتين

ملاحظة : ١) نسمي الفرعين المتتاليان مسار وان احتمال المسار هو جداء الارقام المحملة على المسار وعند الانتقال الى مسار اخر نجمع

٢)اذا كررنا تجربة n مرة فان عدد المرات المتوقع للحصول على حدث A هو $n \times p(A)$





مثال : في تجربة دولاب الوان ثم دولاب ارقام

٢ – ارسم شجرة الامكانات مزودة بالاحتمالات

٣ – ليكن A حدث اللون احمر والرقم فردي اكتب الحدث A ثم احسب احتماله

٤ – ليكن B حدث اللون ازرق والرقم زوجي اكتب الحدث B ثم احسب احتماله

٦ – اذا كررنا التجربة 60 مرة ما هو عدد المرات المتوقع للحصول على اللون احمر والرقم فردي

مثال: صندوق يحوي خمس بطاقات ،ثلاثة زرقاء B واثنتان خضراوان G نسحب عشوائيا بطاقة ونسجل لونها ولا نعيدها ثم نسحب بطاقة اخرى ونسجل لونها

١) ارسم شجرة الامكانات وزود الفروع بالاحتمالات

٢) ليكن E حدث البطاقتين زرقاوين احسب احتماله

٣) ليكن F حدث سحب بطاقتين من لون واحد احسب احتمال F

٤) ليكن L حدث سحب بطاقتين من لونين مختلفين احسب احتمال L

٥) اثبت ان L و F حدثان متعاكسان

مثال : صندوق يحوي ستة كرات مرقمة بالشكل $2, 2, 2, 3, 6$ نسحب عشوائيا كرة ونسجل رقمها

المطلوب :

١ – اكتب الحدث A ظهور العدد زوجي واحسب احتماله

٢ – اكتب الحدث B ظهور العدد فردي واحسب احتماله

٣ – اثبت ان A و B متعاكسان واحسب احتمال الحدث B بطريقة ثانية

٤ – اذا كررنا عملية السحب 36 مرة ، ما هو عدد المرات المتوقع للحصول على عدد زوجي

مثال :صندوق اول يحوي ثلاث كرات حمراء وكرتان زرقاوين وصندوق ثاني يحوي اربع كرات صفراء و ثلاثة كرات زرقاء نسحب كرة من الصندوق الاول ونسجل لونها ثم نسحب من الصندوق الثاني كرة ونسجل لونها

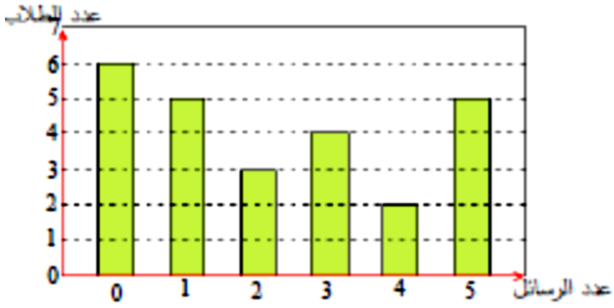
١ – ارسم شجرة الامكانات مع الاحتمالات

٢ – احسب احتمال ان تكون الكرتان من نفس اللون

٣ – احسب احتمال ان تكون الكرة الاولى حمراء والثانية صفراء

٤ – احسب احتمال ان تكون الكرة الثانية صفراء

مثال : صف يحوي 25 طالب سجل كل طالب على ورقة عدد الرسائل الالكترونية التي ارسلوها وكانت النتائج كما في المخطط التالي نسحب ورقة عشوائيا



المطلوب :

١ – اكتب فضاء العينة Ω

٢ – ارسم شجرة الامكانات مزودة بالاحتمالات

٣ – ليكن A حدث الورقة تحمل الرقم 1 او 2 احسب احتمال E باستخدام الشجرة

٤ – ليكن B حدث عدد الرسائل 4 فاكثر سجل الحدث واحسب احتماله

٥ – ليكن C حدث الورقة تحمل العدد اكبر تماما من 2 سجل الحدث واحسب احتماله

٦ – اثبت ان A و C حدثان متعاكسان واحسب احتمال C بطريقة ثانية اعتمادا على معكوسه

مفاهيم اساسية في الاحصاء

١ – **المتوسط الحسابي** : هو مجموع القيم تقسيم عددها نرمز له $\bar{x}$

٢ – **المنوال** : هو القيمة الاكثر تكرار

٣ – **المدى** : هو الفرق بين اكبر قيمة واصغر قيمة نرمز له E

الوسيط : هو العدد M الذي يقسم العينة الى

ما لا يقل عن نصف المفردات اصغر منه

ما لا يقل عن نصف المفردات اكبر منه

خطوات حساب الوسيط :

١) نرتب المفردات تصاعديا او تنازليا

٢) نحسب ترتيب الوسيط وهنا نميز حالتين

١) عدد المفردات n فردي يكون ترتيب الوسيط $\frac{n+1}{2}$

٢) عدد المفردات n زوجي يحسب الترتيب من $\frac{n}{2}$ و $\frac{n}{2}+1$

٣) نوجد الوسيط M

ملاحظة :

١ – قد يكون للعينة اكثر من منوال

٢ – اذا كان عدد المفردات فردي فان الوسيط هو احد المفردات

٣ – اذا كان عدد المفردات زوجي فان الوسيط يمكن ان يكون ليس من لمفردات

مثال : لتكن لدينا المفردات التالية $1, 1, 5, 7, 10, 9, 4, 8, 8, 8$ والمطلوب احسب كل من المتوسط و المنوال والمدى و الوسيط

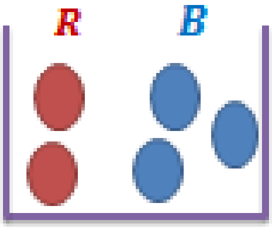
الربيعات :

يوجد لكل عينة من المفردات ثلاث ربيعات Q_1, Q_2, Q_3 حيث الربيع الثاني هو نفسه الوسيط $Q_2 = M$ و الربيع الاول Q_1 هو وسيط القسم الاول من العينة و Q_3 هو وسيط القسم الثاني من العينة

كيفية ايجاد الربيعات :

اولا نوجد الوسيط $Q_2 = M$ ثم نوجد وسيط القسم الاول وهو Q_1 ووسيط القسم الثاني وهو Q_3

مثال : لتكن لدينا العينة $4, 16, 5, 59, 12, 13, 5, 17, 7$ اوجد المنوال والمدى والوسيط و الربيعات Q_1, Q_2, Q_3 لهذه العينة

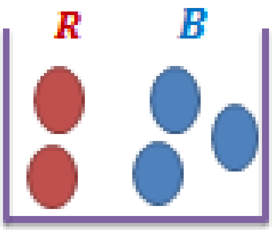


تطبيق : في تجربه القاء قطعة نقود ثم سحب كرة من الصندوق

١ – ارسم شجرة الامكانات

٢ – اوجد فضاء العينة Ω

٣ – احسب احتمال ظهور (H, R)



تطبيق: في تجربة سحب كرة من الصندوق

١ – ارسم شجرة الامكانات

٢ – اوجد فضاء العينة Ω

٣ – احسب احتمال الكرة حمراء

٤ – كررنا التجربة 15 مرة ما هو عدد المرات المتوقع للحصول عل كرة حمراء

تمرين : لتكن لدينا المجموعات $A = \{1,3,4\}$ و $B = \{2,5\}$ و $C\{3,4\}$

اوجد ما يلي $A \cap B$ و $A \cup B$ و $A \cap C$ و $A \cup C$ و $B \cap C$ و $B \cup C$ و $A \backslash B$ و $B \backslash C$

تطبيق :في تجربة سحب كرات من الصندوق مرقمة كما في الشكل نسجل اللون ثم الرقم

١ – R حدث اللون احمر والرقم فردي احسب $P(R)$

٢ – B حدث اللون احمر والرقم فردي احسب $P(B)$

٣ – هل الحدثان R و B متنافيان وهل هما متعاكسان

نسجل اللون ثم الرقم

تمرين : ليكن f تابع معرف بالشكل $f(x) = 2x + 3$ خطه البياني Δ والمطلوب

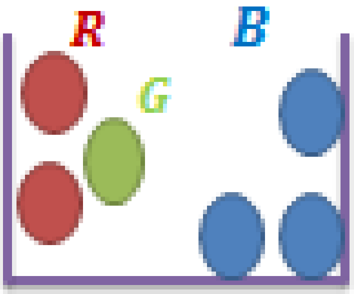
١ – اوجد $f(-1)$ و $f(0)$

٢ – جد قيم x التي تحقق $f(x) = -1$

٣ – حل جبريا جمله المعادلتين $\begin{cases} \Delta: y = 2x + 3 \\ d: y - x = 1 \end{cases}$

٤ – في معلم متجانس ارسم Δ و d واوجد احداثيات نقطة التقاطع

تمرين : صندوق كما في الشكل نسحب كرة ونسجل اللون



١) ماهي مجموعة نتائج التجربة

٢) شكل شجرة الاحتمالات

٣) اذا كان R حدث اللون احمر احسب $P(R)$

٤) اذا كان R' حدث اللون ليس احمر احسب $P(R')$

٥) كررنا التجربة 36 مرة ما هو عدد المرات المتوقع للحصول على لون ازرق

تمرين : في تجربة القاء حجر النرد

١ – عين فضاء العينة

٢ – A حدث الذي يدل على الارقام الاولية احسب $P(A)$

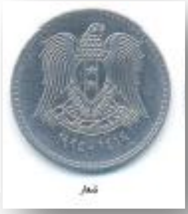
٣ – B حدث الذي يدل على الارقام الزوجية احسب $P(B)$

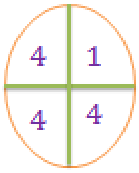
٤ – C حدث الذي يدل على الارقام اكبر تماما من 4 احسب $P(C)$

٥ – D حدث الذي يدل على الارقام الفردية احسب $P(D)$

٦ – E حدث الذي يدل على الارقام تقبل القسمة على 2 و 3 احسب $P(E)$

تمرين : في تجربة القاء قطعة نقود ثم دولاب حظ كما في الشكل





١) اكتب فضاء العينة

٢) شجرة الامكانات

٣) احتمال ان يكون شعار والرقم 4

٤) كررنا التجربة 20 مرة ما هو عد المرات المتوقع لنحصل على شعار والرقم 1

تمرين :لتكن لدينا المفردات التالية$\{1,3,5,7,9,10,4,8,8,8\}$

اوجد المتوسط والمنوال والمدى والوسيط

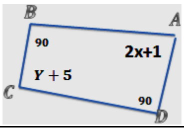
تمرين : لتكن لدينا العلامات المرتبة وفق الجدول التكراري التالي

العلامة	**5**	**7**	**3**	**4**	**10**	**9**
التكرار	**2**	**1**	**5**	**2**	**1**	**1**

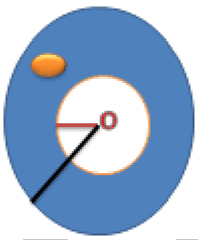
اوجد المتوسط و المنوال و المدى والوسيط

اختر الاجابة الصحيحة

١ – في البيان الاحصائي $\{1,2,5,7,9\}$ مرتبة الوسيط		
A) 2	B) 3	C) 5
٢ – AB ضلع في مضلع منتظم مركزه O عدد اضلاعه 10 فان قياس $\widehat{AOB}$		
A) 36	B) 45	C) 60
٣ – دائرتان $C_1(O,3)$ و $C_2(G,5)$ حيث $GO = 2$ فانهما		
A) متقاطعتان	B) متماستان داخلا	C) متماستان خارجا
٤ – اذا كانت الدائرتان $C_1(o_1\ ,r)$ و $C_2(o_2,R)$ في حالة تقاطع		
A) $R - r \le o_1o_2 \le R + r$	B) $R - r < o_1o_2 < R + r$	C) $o_1o_2 < R + r$
٥ – اذا كانت الدائرتان $C(o,2)$ و $C'(o',10)$ متماستان خارجا فان		
A) $oo' = 8$	B) $oo' = 12$	C) $oo' < 8$
٦ – البيان الذي عدد مفرداته 13 ترتيب وسيطه هو		
A) 5	B) 6	C) 7
٧ – تجربي تحوي حدثان A و B اذا كان $P(A) = \frac{2}{10}$ فان احتمال B هو		
A) $\frac{4}{5}$	B) $\frac{2}{10}$	C) 0.3
٨ – اذا كان A و B حدثان متعاكسان فان		
A) $P(A) + P(B) = 1$	B) $P(A) - P(B) = 1$	C) $P(A) + P(B) = 0$
٩ – اذا كانت A زاوية محيطية B مركزية مشتركة معها بالقوس فان		
A) $\hat{A} = \hat{B}$	B) $\hat{A} = 2\hat{B}$	C) $\hat{B} = 2\hat{A}$
١٠ – للمثلث متساوي الاضلاع		
A) ثلاث محاور تناظر	B) محور تناظر	C) مركز تناظر
١١ – الزاوية المماسية المشتركة مع المحيطية بالقوس تحقق		
A) المماسية تساوي ضعف المحيطية	B) المماسية تساوي نصف المحيطية	C) المماسية تساوي المحيطية
١٢ – $ABCD$ رباعي دائري فيه $B\hat{C}D = 115°$ فان $B\hat{A}D$ هي		
A) $65°$	B) $25°$	C) $115°$

١٣ – مسدس منتظم مرسوم في دائرة نصف قطرها 5 فان المحيط هو		
A) 9	B) 15	C) 30
١٤ – صندوق فيه ثلاث كرات سوداء وكرة حمراء واربع كرات زرقاء فان احتمال سحب كرة غير زرقاء		
A) $\frac{1}{2}$	B) $\frac{1}{8}$	C) $\frac{3}{8}$
١٥ – العبارة $f(2) = 1$ تقرا		
A) سلف العدد 2 هو 1	B) صورة 2 هي 1	C) صورة 1 هي 2
١٦ – في الشكل الجانبي الرباعي $ABCD$		
A) رباعي دائري	B) شبه منحرف	C) متوازي اضلاع
١٧ – في بيان مفرداته مرتبة تصاعديا فان 50% من المفردات تقريبا تقع قبل		
A) المتوسطة	B) الوسيط	C) الربيع الثالث
١٨ – اذا كان A و B حدثان متنافيان فان		
A) $P(A) + P(B) = 1$	B) $A \cup B = \Omega$	C) $A \cap B = \Phi$
١٩ – ان مماس الدائرة يكون		
A) عمودي على أي وتر	B) عمودي على نصف القطر في نقطة التماس	C) غير عمودي على نصف القطر
٢٠ – اذا كان $f(x)$ معطى $f(x) = (x-1)^2$ فان اسلاف 9 هي		
A) $3, -3$	B) $2, -3$	C) $4, -2$
٢١ – أي من المعادلات تمثل مستقيم		
A) $y^2 = 3x$	B) $xy = 4x$	C) $x = 4y - 5$
٢٢ – المستقيم الذي معادلته $d: 5x - y = 4$ يقطع محور التراتيب بالنقطة		
A) $(4, 0)$	B) $(0, 4)$	C) $(0, -4)$
٢٣ – المستقيم الغير المار من المبدأ		
A) $y = 0$	B) $2x + 3y = 4x$	C) $3x = 5$
٢٤ – الربيع الاول للبيان $2, 9, 5, 8, 4, 10$		
A) 4.5	B) 4	C) 3
٢٥ – مربع طول قطره 8 فان مساحته		
A) $32cm^2$	B) $4cm^2$	C) $64cm^2$

٢٦ – المستقيم الذي يمس دائرة قطرها 10 يكون بعده عن المركز		
A) 10	B) 5	C) اقل من 5
٢٧ – مسدس منتظم مرسوم في دائرة نصف قطرها 5 فان محيط المسدس		
A) 9	B) 15	C) 30
٢٨ – مسدس منتظم مرسوم في دائرة نصف قطرها 4 فان مساحة المسدس		
A) $24\sqrt{3}cm^2$	B) $24cm^2$	C) $24\sqrt{2}$
٢٩ – o مركز مضلع منتظم يملك عشرة اضلاع احد اضلاعه AB قياس الزاوية AOB		
A) 30	B) 36	C) 100
٣٠ – مربع مرسوم في دائرة نصف قطرها 4 فان طول ضلعه		
A) $3\sqrt{2}$	B) $3\sqrt{3}$	C) 4
٣١ – مجموع زوايا أي مخمس هو		
A) $540°$	B) $450°$	C) $500°$
٣٢ – قياس زاوية بين ضلعين متتاليين في مخمس منتظم		
A) $150°$	B) $180°$	C) $108°$
٣٣ – في العينة الاحصائية قد تملك اكثر من منوال هذه العبارة		
A) صحيحة	B) غير صحيحة	C) لايمكن معرفة ذلك
٣٤ – بيان احصائي يملك 6 مفردات والمتوسط الحسابي 22 فان مجموعها		
A) 122	B) 142	C) 132
٣٥ – مدى العينة $110, 90, 25, 19, 14, 12, 7$ هو		
A) 110	B) 103	C) 117
٣٦ – في تجربة القاء قطعتي نقود احتمال الحصول على وجهين متماثلين		
A) 0.25	B) 0.5	C) 0.2
٣٧ – تجربة عشوائية تحوي نتيجتين فقط احتمال الاولى 18% فان احتمال الاخرى		
A) 50%	B) 18%	C) 82%
٣٨ – احد اسلاف الصفر وفق التابع $f(x) = (x-3)(2x-10)$		
A) 30	B) -10	C) 5

٣٩ – اذا كانت A, B, C, D اربع نقاط متتالية على محيط دائرة فان		
A) $DBC = DAC$	B) $DAB = BCD$	C) $ADC + ABC = 90$
٤٠ – اذا كانت A, B, C, D اربع نقاط متتالية على محيط دائرة مركزها o		
A) $AOD = \frac{1}{2}ABD$	B) $AOD = 2ABD$	C) $DAB = BCD$
٤١ – ABC مثلث قائم تمر من رؤوسه دائرة قطرها $AC = 2x$ و $BA = \sqrt{3}x$ فان $\widehat{C}$		
A) 60	B) 45	C) 30
٤٢ – اذا كان طول المتوسط لضلع في مثلث يساوي نصف طول ذلك الضلع كان المثلث		
A) متساوي الساقين	B) متساوي الاضلاع	C) قائم
٤٣ – محور أي وتر في الدائرة		
A) يمر من المركز	B) لا يمر من المركز	C) لا يمكن التكهن
٤٤ – احد اسلاف الصفر وفق التابع $h(t) = t^2 + t - 6$		
A) $t = 2$	B) $t = 3$	C) $t = -6$
٤٥ – العدد الذي ليس له اسلاف وفق التابع $k(x) = (x+2)^2$ هو		
A) 0	B) 6	C) -6
٤٦ – التابع الذي يربط كل عدد r بمساحة الدائرة التي نصف قطرها r هو		
A) $f: r \to 2\pi r$	B) $f: r \to \pi r^2$	C) $f: r \to 2\pi r^2$
٤٧ – لتكن لدينا المجموعتان $A = \{2, 4\}$ و $B = \{1, 2, 3, 5,\}$ فان $A \cup B$		
A) Φ	B) $\{1, 2, 3, 4, 5\}$	C) $\{2\}$
٤٨ – في الشكل الجانبي دائرتان $C(o, R)$ و $c(o, r)$ احتمال ان تقع الكرة في المنطقة المضللة هو 		
A) $\frac{r}{R}$	B) $\frac{R^2 - r^2}{R^2}$	C) $2\pi r$