الاختبارات التجريبية بمادة الرياضيات لطلاب الصف الثالث الثانوي / العلمي دورة 2022م

التابع اللوغاريتمي — **المدة : ساعتان** — **الدرجة : 600 ستمئة**

السؤال الأول: حل التمرينين الآتيين :

☺ حل المتراجحة الآتية : $ln^3x - 3lnx - 2 < 0$

☹ حل في R^2 جملة المعادلتين : $\begin{cases} x - 3y = 2ln2 \\ x + y \ = \ 4ln2 \end{cases}$

السؤال الثاني: ليكن (C) الخط البياني للتابع f المعرف على المجال $I =]1\,,+\infty[$ وفق: $f(x) = x + ln(x^2 - 1)$

والمطلوب:

1- أثبت أن f متزايد تماماً على I .

2- أثبت أن للمعادلة $f(x) = 0$ حل وحيد $\alpha \in I$ ، ثم أثبت أن $1 < \alpha < \sqrt{1 + \frac{1}{e}}$.

السؤال الثالث : ليكن لدينا التابع f المعرف وفق : $f(x) = ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - 2x$ والمطلوب :

1- أوجد D_f مجموعة تعريف التابع f .

2- ابحث عن كل مقارب للخط (C) أفقي أو شاقولي أو مائل وادرس وضع (C) بالنسبة لكل مقارب تجده .

3- ادرس تغيرات f وارسم خطه البياني (C) .

4- استنتج رسم الخط البياني (C') للتابع المعرف وفق : $f'(x) = ln\left(1 - \frac{1}{x}\right) + 2x + 1$

السؤال الرابع : ليكن (C) الخط البياني للتابع f المعرف بالعلاقة : $f(x) = ln(x + 2) + ln(x + 1)$ والمطلوب:

1- ادرس تغيرات f ونظم جدولاً بها .

2- أثبت أن للمعادلة $f(x) = 0$ حل وحيد أياً كان $x \in D$ ثم اوجد هذا الجذر .

3- ارسم مقاربات (C) ثم ارسم (C) .

السؤال الخامس : ليكن (C_1) الخط البياني للتابع f المعرف على المجال $]-1\,,+\infty[$ وفق : $f(x) = ln(x + 1)$

و ليكن (C_2) الخط البياني للتابع g المعرف على المجال $R/\{-1\}$ وفق : $g(x) = \frac{x}{x+1}$ والمطلوب :

1- أثبت أن : (C_1) ، (C_2) متماسان في المبدأ واكتب معادلة المماس المشترك Δ لهما .

2- ادرس الوضع النسبي للخطين (C_1) ، (C_2) على المجال $]-1\,,+\infty[$.

3- ادرس تغيرات كل من التابعين f و g ونظم جدولا بذلك .

4- ارسم Δ ثم ارسم (C_1) ، (C_2) .

انتهت الأسئلة

2022

حل اختبار التابع اللوغاريتمي

السؤال الأول

1

$\ln^3 x - 3\ln x - 2 < 0$

$\ln^3 x - 3\ln x - 2 = 0 \quad ; \quad x > 0$

$\Rightarrow (\ln x + 1)(\ln^2 x - \ln x - 2) = 0$

$\Rightarrow (\ln x + 1)(\ln x - 2)(\ln x + 1) = 0$

$\Rightarrow (\ln x + 1)^2(\ln x - 2) = 0$

إما $\ln x + 1 = 0 \Rightarrow \ln x = -1 \Rightarrow x = e^{-1}$

أو $\ln x - 2 = 0 \Rightarrow \ln x = 2 \Rightarrow x = e^2$

x	0		e^{-1}		e^2		$+\infty$
$(\ln x+1)^2$		$+$	0	$+$		$+$	
$\ln x - 2$		$-$		$-$	0	$+$	
الجداء		$-$	0	$-$	0	$+$	
المتراجحة							

$x \in]0, e^{-1}[\cup]e^{-1}, e^2[$

2

$x - 3y = 2\ln 2 \quad \cdots (1)$

$x + y = 4\ln 2 \quad \cdots (2)$

نطرح (1) من (2) نجد:

$4y = 2\ln 2 \Rightarrow y = \frac{1}{2}\ln 2$

$\Rightarrow y = \ln\sqrt{2}$

نعوض في (2)

$x + \frac{1}{2}\ln 2 = 4\ln 2$

$\Rightarrow x = 4\ln 2 - \frac{1}{2}\ln 2$

$\Rightarrow x = \frac{7}{2}\ln 2 \Rightarrow x = \ln\sqrt{2^7}$

$(x, y) = (\ln\sqrt{2}, \ln\sqrt{2^7})$

السؤال الثاني

1 f معرف ومستمر واشتقاقي في I

$f'(x) = 1 + \frac{2x}{x^2-1} > 0$

اذاً f متزايد تماماً في I

2

$\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = -\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

x	1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

من جدول التغيرات نجد أن f مستمر ومطرد في I

وبما أن $f(I) = \mathbb{R}$ و $0 \in \mathbb{R}$ اذاً للمعادلة $f(x) = 0$ حل وحيد في المجال I وليكن α

وبما أن $\alpha \in I$ اذاً $\alpha > 1$

$f\left(\sqrt{1+\frac{1}{e}}\right) = \sqrt{1+\frac{1}{e}} + \ln\left[1 + \frac{1}{e} - 1\right]$

$= \sqrt{1+\frac{1}{e}} - \ln e = \sqrt{1+\frac{1}{e}} - 1 > 0$

وبالتالي فإن $\sqrt{1+\frac{1}{e}} > \alpha$

ومنه فإن $1 < \alpha < \sqrt{1+\frac{1}{e}}$

السؤال الثالث:

1 f معرف لـ $\frac{x+1}{x} > 0$

بسط : $x = -1$ ، مقام : $x = 0$

		-1		0	
	$+$		$-$		$+$

$D_f =]-\infty, -1[\cup]0, +\infty[$

2

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0 + \infty = +\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0 - \infty = -\infty$

$\lim\limits_{x \xrightarrow{<} -1} f(x) = -\infty + 2 = -\infty$

$x = -1$ مقارب // yy' (شاقولي)
وان c على يسار المقارب نحو oy^-

$\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} f(x) = +\infty$

$x = 0$ مقارب (محور التراتيب)
وان (c) على يمين المقارب نحو oy^+

نبحث عن مقارب مائل معادلته $y = ax + b$ في جوار $\mp\infty$

$$a = \lim_{x \to \mp\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \mp\infty} \frac{\ln(1+\frac{1}{x})}{x} - 2 = -2$$

$$b = \lim_{x \to \mp\infty} (f(x) - ax) = \lim_{x \to \mp\infty} \ln(1+\frac{1}{x}) = 0$$

اذاً $\Delta : y = -2x$ مقارب مائل للخط (c)
في جوار $\mp\infty$.

ولدراسة وضع c مع Δ ندرس اشارة الفرق

$$f(x) - y_\Delta = \ln(1+\frac{1}{x})$$

أي نقارن الكسر $\frac{x+1}{x}$ بالعدد 1،

$$\frac{x+1}{x} - 1 = \frac{x+1-x}{x} = \frac{1}{x}$$

بما أن البسط موجب دائماً فا شارة الكسر هي اشارة المقام

x	$-\infty$ -1		0 $+\infty$
$f(x) - y_\Delta$	$-$		$+$
الوضع النسبي	(c) تحت Δ في جوار $-\infty$		c فوق Δ في جوار $+\infty$

3| f معرفة ومستمرة واشتقاقية على كل من المجالين
$]-\infty, -1[\ ,\ ]0, +\infty[$

$$f(x) = \ln(x+1) - \ln x - 2x$$

$$f'(x) = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x} - \frac{2}{1}$$

$$= \frac{x - x - 1 - 2x^2 - 2x}{x(x+1)} = \frac{-2x^2 - 2x - 1}{x(x+1)} < 0$$

اذاً f متناقص تماماً على D .

x	$-\infty$ -1		0 $+\infty$
$f'(x)$	$-$		$-$
$f(x)$	$+\infty \searrow -\infty$		$+\infty \searrow -\infty$

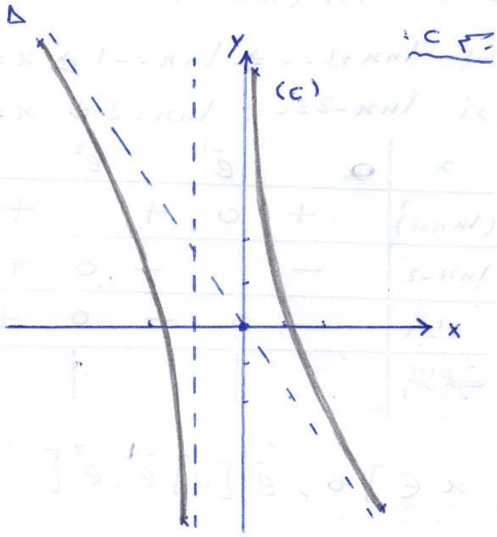
$f(D) = R$

رسم Δ : $y = -2x$

$x = 0 \Rightarrow y = 0 \quad (0,0)$

$x = 1 \Rightarrow y = -2 \quad (1,-2)$

رسم c :



4| c' ينتج عن c بإجراء التحويل الهندسي :

$$(x, y) \longrightarrow (-x, y+1)$$

أي نرسم c_1 نظير c بالنسبة لمحور التراتيب ثم
نرسم c' صورة c_1 وفق السحاب شعاعه $\vec{j}$

السؤال الرابع :

1| f معرفة لما $x > -1$ ، $x > -2$

$D =]-1, +\infty[$

f معرفة ومستمرة واشتقاقية على $]-1, +\infty[$

$\lim\limits_{x \xrightarrow{>} -1} f(x) = -\infty$

$x = -1$ مقارب // yy' وان (c) على يمين المقارب نحو oy^-

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

$$f'(x) = \frac{1}{x+2} + \frac{1}{x+1}$$

$$= \frac{x+1+x+2}{(x+2)(x+1)} = \frac{2x+3}{(x+2)(x+1)} > 0$$

f متزايد تماماً ع D

x	-1 $\qquad\qquad\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	$+$
$f(x)$	$-\infty \nearrow +\infty$

$f(D) = R$

2] من جدول المتغيرات نجد أن:

f مستمر ومطرد ع D و $f(D) = R$

وبما أن $0 \in R$ اذاً للمعادلة $f(x) = 0$

حل وحيد أياً كان $x \in D$

$f(x) = 0 \Rightarrow \ln(x+2) + \ln(x+1) = 0$

$\Rightarrow \ln\left[x^2 + 3x + 2\right] = 0$

$\Rightarrow x^2 + 3x + 2 = 1$

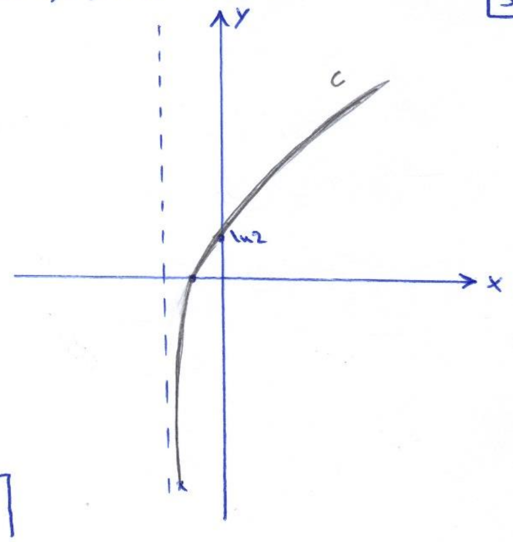
$\Rightarrow x^2 + 3x + 1 = 0$

$\Delta = 9 - 4 = 5 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = \sqrt{5}$

$x_1 = \frac{-3-\sqrt{5}}{2} < -1$ مرفوض

$x_2 = \frac{-3+\sqrt{5}}{2} \simeq -\frac{1}{2}$ مقبول

3] $x = 0 \Rightarrow y = \ln 2 \Rightarrow (0, \ln 2)$ نقطة تقاطع



3

السؤال الخامس

1]

$$\left.\begin{array}{l} f(0) = 0 \\ g(0) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow f(0) = g(0)$$

م الشرط الأول محقق

$$\left.\begin{array}{l} f'(x) = \frac{1}{x+1} \Rightarrow f'(0) = 1 \\ g'(x) = \frac{x+1-x}{(x+1)^2} = \frac{1}{(x+1)^2} \Rightarrow g'(0) = 1 \end{array}\right\} f'(0) = g'(0)$$

م الشرط الثاني محقق

اذاً C_1 , C_2 متماسان في المبدأ ومعادلة مماسهما المشترك من الشكل

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

$$\Delta : y = x$$

2] $f(x) - g(x) = \ln(x+1) - \frac{x}{x+1}$

ندرس تغيرات تابع مساعد:

$$h(x) = \ln(x+1) - \frac{x}{x+1}$$

h معرف ومستمر واشتقاقي في $]-1, +\infty[$

$\lim\limits_{x \xrightarrow{>} -1} h(x) = -\infty + \infty$ عدم تعيين

$$\lim_{x \xrightarrow{>} -1} h(x) = \lim_{x \xrightarrow{>} -1} \frac{(x+1)\ln(x+1) - x}{x+1} = +\infty$$

حيث $\boxed{\lim\limits_{x \xrightarrow{>} -1} (x+1)\ln(x+1) = 0}$

$$\lim_{x \to +\infty} h(x) = +\infty$$

$$h'(x) = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{(x+1)^2} = \frac{x+1-1}{(x+1)^2} = \frac{x}{(x+1)^2}$$

بما أن المقام موجب تماماً فإشارة المشتق من إشارة البسط

$x = 0 \Rightarrow h(0) = 0$

x	-1		0		$+\infty$
$h'(x)$		$-$	0	$+$	
$h(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

من جدول التغيرات نجد أن $h(x)\geq 0$

ومنه بأن $f(x)-g(x)\geq 0$

ومنه $f(x)\geq g(x)$

أي أن C_1 فوق C_2 أياً كان $x>-1$

3] تغيرات f :

f معرف ومستمر واشتقاقي في $]-1,+\infty[$

$$\lim_{x\to -1^+} f(x) = -\infty$$

$x=-1$ مقارب // $y'y$ وان (C) يقع يمين المقارب نحو $o\bar{y}$

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$$

$$f'(x)=\frac{1}{x+1}>0$$

x	-1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

$$f(D)=\mathbb{R}$$

تغيرات g :

g معرف ومستمر واشتقاقي في $]-1,+\infty[$

$$\lim_{x\to -1^+} g(x) = \frac{-1}{+0} = -\infty$$

$x=-1$ مقارب // $y'y$ وان C يقع يمين المقارب نحو $o\bar{y}$

$$\lim_{x\to +\infty} g(x) = 1$$

$y=1$ مقارب // $x'x$ في جوار $+\infty$

$$g'(x)=\frac{1}{(x+1)^2}>0$$

x	-1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	1

4] رسم Δ : $y=x$

$x=0 \Rightarrow y=0 \quad (0,0)$

$x=1 \Rightarrow y=1 \quad (1,1)$