اختبار الجزء الأول

أولاً: أجب عن خمسة فقط من الأسئلة الستة الآتية: (40 درجة)

السؤال الأول: حل المتراجحة: $e^x - 1 \leq 6e^{-x}$.

السؤال الثاني: ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $\mathbb{R}^*$ وفق: $f(x) = x + \frac{E(x)}{x}$، المطلوب: أثبت أن المستقيم $y = x + 1$ مقارب مائل لـ C وادرس الوضع النسبي لـ Δ مع C.

السؤال الثالث: أوجد التابع الأصلي للتابع f بحيث: $f(x) = \ln x \ ; \ x \in]0, +\infty[$.

السؤال الرابع: ليكن f التابع المعرف على $\mathbb{R}$ وفق: $f(x) = e^x \cdot \sin x$. أثبت أن f هو حل للمعادلة التفاضلية $y' - y = e^x \cos x$.

السؤال الخامس: لتكن المتتالية $u_n = 4n + 1$. أثبت أن المتتالية حسابية وعين أساسها واحسب

$$S = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_{10}$$

السؤال السادس: تأمل جدول التغيرات:

x	0		$\frac{1}{e}$		1		$+\infty$
f'		$+$	0	$-$	$\|\|$	$-$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	$-e$	$\searrow$	$-\infty \ \|\| \ +\infty$	$\searrow$	0

1- جد D_f , $f(D_f)$.

2- دل على القيمة الحدية وبيّن نوعها.

3- جد مجموعة حلول المتراجحة $f(x) > 0$.

4- ارسم C من خلال هذا الجدول.

ثانياً: حل التمارين الثلاثة الآتية:

التمرين الأول: لتكن المتتالية $(u_n)_{n\geq1}$ المعرفة بالصيغة: $u_n = \frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{3}{3^3} + \frac{4}{3^4} + \cdots + \frac{n}{3^n}$

1- أثبت بالتدريج على n أن $n \leq 2^n$ أياً تكن n.

2- استنتج مما سبق عنصراً راجحاً على المتتالية u_n.

3- أهي متقاربة؟

التمرين الثاني: ليكن f التابع المعرف على $\mathbb{R}\backslash\{1\}$ وفق الصيغة: $f(x) = \frac{1}{1-x}$. أثبت أن المشتق من المرتبة n يعطى بالصيغة: $f^{(n)}(x) = \frac{n!}{(1-x)^{n+1}}$ حيث $x \neq 1$.

التمرين الثالث: أثبت أن حجم الكرة التي مركزها (O) ونصف قطرها (R) يعطى بالعلاقة: $v = \frac{4}{3}\pi R^3$.

ثالثاً: حل المسألتين الآتيتين:

المسألة الأولى: ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف وفق $f(x) = x - \ln\left(2 + \frac{1}{x}\right)$، المطلوب:

1- أوجد D_f وادرس تغيرات f.

2- أثبت أن المستقيم $d: y = x - \ln 2$ مقارب لـ C في جوار $\pm\infty$.

3- ادرس الوضع النسبي لـ C مع d.

4- أثبت أن للمعادلة $f(x) = 0$ حل وحيد $\alpha \in]1,2[$.

5- ارسم C واستنتج رسم C_1 الخط البياني للتابع $g(x) = x + \ln\left(2 - \frac{1}{x}\right)$.

المسألة الثانية: ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $\mathbb{R}$ وفق: $f(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$، المطلوب:

1- a) بيّن أن التابع f فردي وادرس تغيراته وارسم C.

b) اكتب معادلة المماس d لـ C في المبدأ. وادرس الوضع النسبي لـ C مع d.

2- a) ليكن m عدداً حقيقياً. أثبت أن للمعادلة $f(x) = m$ حلاً وحيداً في $\mathbb{R}$ وليكن α هذا الحل.

b) أثبت أن المعادلة $f(x) = m$ تكافئ $e^{2x} - 2me^x - 1 = 0$ ثم استنتج أن $\alpha = \ln\left(m + \sqrt{m^2 + 1}\right)$

3- احسب مساحة السطح المحصور بين C ومحوري الإحداثيات والمستقيم $x = 1$.

تمرين إضافي:

$$f(x) = x + \frac{x}{\sqrt{x^2 + 9}}\ ; D_f = \mathbb{R}$$

1- أثبت أن المستقيم $\Delta: y = x + 1$ مقارب في جوار $+\infty$ وادرس الوضع النسبي لـ C مع Δ.

2- أثبت ان المستقيم $\Delta': y = x - 1$ مقا رب في جوار $-\infty$.

3- أثبت أن التابع f متزايد تماماً على $\mathbb{R}$.

السؤال الأول: حل المتراجحة $e^{x}-1 \leq 6e^{-x}$

$e^{x}-1 \leq 6e^{-x}$ $\times e^{x}$

$e^{2x}-e^{x}-6 \leq 0$

$(e^{x}-3)(e^{x}+2) \leq 0$

$e^{x}-3 \leq 0 \Rightarrow e^{x} \leq 3 \Rightarrow$

$x \leq \ln 3$ $x \in]-\infty, \ln 3]$

السؤال الثاني: $f(x)=x+\frac{E(x)}{x}$ اثبت $y=x+1$ مقارب مائل لـ C في جوار $+\infty$ وادرس وضعه النسبي.

$f-y=\frac{E(x)}{x}-1$

لدينا $x-1<E(x) \leq x$

نقسم على $x>0$

$\frac{x-1}{x}<\frac{E(x)}{x} \leq 1$

$\frac{x-1}{x}-1<\frac{E(x)}{x}-1 \leq 0$

$\frac{x-1}{x}-1<f-y \leq 0$

$\lim_{x\to+\infty}(0)=0$

$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x-1}{x}-1\right)=0$

$\Rightarrow \lim_{x\to+\infty}(f-y)=0$ ومنه $y=x+1$ مقارب مائل في جوار $+\infty$

السؤال الثالث: $f(x)=\ln x$

$F(x)=\int_{1}^{x} f(t)\,dt$

$u=\ln t$ $u'=\frac{1}{t}$

$v'=1$ $v=t$

$F(x)=[t.\ln t]_{1}^{x}-\int_{1}^{x} 1\,dt$

$=x\ln x-[t]_{1}^{x}$

$=x\ln x-x+1$

$F(x)=x.\ln x-x$

السؤال الرابع: $f(x)=e^{x}.\sin x$ اثبت انه حل للمعادلة

$y'-y=e^{x}\cos x$

$y=e^{x}.\sin x$

$y'=e^{x}\sin x+e^{x}\cos x$

نعوض

$\cancel{e^{x}\sin x}+e^{x}\cos x-\cancel{e^{x}\sin x}\overset{?}{=}e^{x}\cos x$

$e^{x}\cos x=e^{x}\cos x$ محققة.

السؤال الخامس: $u_n=4n+1$ اثبت u_n حسابية

$S=u_0+u_1+u_2+\dots+u_{10}$ ثم احسب

$u_{n+1}-u_n=4n+4+1-4n-1$
$=4$

متتالية حسابية أساسها $r = 4$

$n = 10 - 0 + 1 = 11$

الإثبات: $S = n\dfrac{a+b}{2}$

$a = u_0 = 4(0) + 1 = 1$

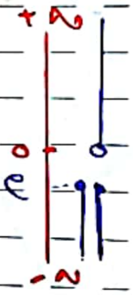
$b = u_{10} = 4(10) + 1 = 41$

$S = 11\dfrac{1+41}{2} = 11(21)$
$= 231$

التمرين السادس:

x	0		$\frac{1}{e}$		1		$+\infty$
f'		$+$	0	$-$	||	$-$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	$-e$	$\searrow$	$-\infty$ || $+\infty$	$\searrow$	0

$D_f =]0,1[\cup]1,+\infty[$



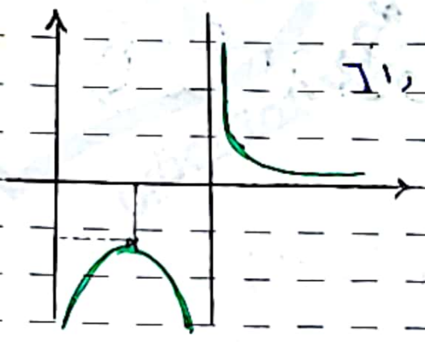
$f(D_f) =]-\infty,-e] \cup]0,\infty[$

2) أدل على القيمة الحدية وبين نوعها.

$f(\frac{1}{e})$ قيمة حدية كبرى

3) $f(x) > 0$
$]1,+\infty[$

4)



التمرين الأول:

$u_n = \dfrac{1}{3} + \dfrac{2}{3^2} + \dfrac{3}{3^3} + \dfrac{4}{3^4} + \dots + \dfrac{n}{3^n}$

1) اثبت $n \leq 2^n$ 2) عنصراً $[3]$

3) أثبت أنها متقاربة

$E(n):\ n \leq 2^n$

من أجل $n = 1$: $1 \leq 2$ محققة

الفرض: $n \leq 2^n$ $\quad n+1$

الطلب: $n+1 \leq 2$

لدينا فرضاً $n \leq 2^n$

$n+1 \leq 1 + 2^n$

لكن $1 + 2^n < 2 \cdot 2^n$

ومنه $n+1 \leq 2 \cdot 2^n$

$n+1 \leq 2^{n+1}$

العبارة محققة من أجل $n+1$ إذا هي صحيحة

$u_n \leq \dfrac{2^1}{3} + \dfrac{2^2}{3^2} + \dfrac{2^3}{3^3} + \dfrac{2^4}{3^4} + \dots + \dfrac{2^n}{3^n}$

$u_n \leq \left(\dfrac{2}{3}\right)^1 + \left(\dfrac{2}{3}\right)^2 + \left(\dfrac{2}{3}\right)^3 + \left(\dfrac{2}{3}\right)^4 + \dots + \left(\dfrac{2}{3}\right)^n$

مجموع متتالية هندسية أساسها $q = \dfrac{2}{3}$ وحدها الأول $\dfrac{2}{3}$ وعدد الحدود n

$u_n \leq a\dfrac{1-q^n}{1-q}$

$u_n \leq \dfrac{2}{3}\,\dfrac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^n}{1-\frac{2}{3}}$

$u_n \leq \dfrac{2}{3} \times \dfrac{3}{1}\left(1-\left(\dfrac{2}{3}\right)^n\right)$

$u_n \leq 2 - 2\left(\dfrac{2}{3}\right)^n$

$u_n \leq 2$ ومنه $M = 2$

$u_{n+1} - u_n = \dfrac{n+1}{3^{n+1}} > 0$

ومنه متزايدة ومحدودة من الأعلى فهي متقاربة

التمرين الثاني

$f(x) = \frac{1}{1-x}$

اثبات أن المشتق من المرتبة n يعطى بـ

$f^{(n)}(x) = \frac{n!}{(1-x)^{n+1}}$ $x \neq 1$

من أجل $n=1$

$f'(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$

نشتق التابع

$f'(x) = \frac{\quad}{(1-x)^2}$

محققة من أجل $n=1$

الفرض: $f^{(n)}(x) = \frac{n!}{(1-x)^{n+1}}$

الطلب: $f^{(n+1)}(x) = \frac{(n+1)!}{(1-x)^{n+2}}$

البرهان: نشتق الفرض

$(f^{(n)}(x))' = \frac{-(1-x)^n(n+1)(-1)n!}{((1-x)^{n+1})^2}$

$f^{(n+1)} = \frac{(n+1)n!(1-x)^n}{(1-x)^{2n+2}}$

$f^{(n+1)}(x) = \frac{(n+1)!}{(1-x)^{n+2}}$

محققة من أجل $n+1$

أي القضية محققة

التمرين الثالث: اثبات أن حجم الكرة التي

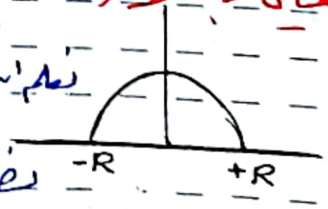
مركزها (0) ونصف قطرها R

يعطى بالعلاقة $V = \frac{4}{3}\pi R^3$

نعلم أن الكرة ناتجة عن دوران

نصف دائرة مركزها (0)

ونصف قطرها R



معادلة الدائرة $x^2+y^2=R^2$

$y^2 = R^2 - x^2$

$V = \pi\int_{-R}^{+R}(f(x))^2$

$V = \pi\int_{-R}^{+R} y^2\, dx$

$= \pi\int_{-R}^{+R}(R^2 - x^2)\, dx$

$= \pi\left[R^2x - \frac{x^3}{3}\right]_{-R}^{+R}$

$= \pi\left[R^3 - \frac{R^3}{3} - \left(-R^3 + \frac{R^3}{3}\right)\right]$

$= \pi\left[R^3 - \frac{R^3}{3} + R^3 - \frac{R^3}{3}\right]$

$= \pi\left[2R^3 - \frac{2R^3}{3}\right]$

$= \pi\frac{4R^3}{3} = \frac{4}{3}\pi R^3$

المسألة الثانية

$f(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$ $\mathbb{R}$

$f(-x) = \frac{1}{2}(e^{-x} - e^x)$

$= -\frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) = -f(x)$

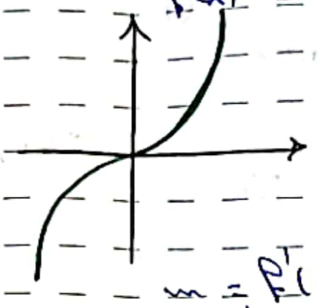
ومنه f تابع فردي وخطه البياني متناظر بالنسبة للمبدأ

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

$f'(x) = \frac{1}{2}(e^{x} + e^{-x}) > 0$

x	$-\infty$		$+\infty$
f'		$+$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$



نقطة التماس $(0,0)$

$m = f'(0) = 1$

$y = x$ معادلة المماس

لدراسة الوضع النسبي ندرس اشارة الفرق

$f(x) - y_T = \frac{1}{2}(e^{x} - e^{-x}) - x = h$

$h'(x) = \frac{1}{2}(e^{x} + e^{-x}) - 1$

$h'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$

$h(0) = 0$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
h'		$+$	0	$+$	
h		$\nearrow$	0	$\nearrow$	

$h < 0 \quad]-\infty, 0[$

$f - y_T < 0 \Rightarrow f < y_T$

T فوق C

$h > 0 \quad]0, \infty[$

$f - y_T > 0 \Rightarrow f > y_T$

C فوق T

* نستنتج من جدول تغيرات f أنه أياً كان m من $\mathbb{R}$ فإن للمعادلة $f(x) = m$ حل وحيد $\alpha \in \mathbb{R}$

$f(x) = m \Leftrightarrow \frac{1}{2}(e^{x} - e^{-x}) = m$

$e^{x} - e^{-x} = 2m \qquad \times e^{x}$

$e^{2x} - 1 = 2m e^{x} \Rightarrow$

$e^{2x} - 2m e^{x} - 1 = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac = 4m^2 + 4$

$= 4(m^2 + 1) \Rightarrow$

$\sqrt{\Delta} = 2\sqrt{m^2 + 1}$

$e^{x} = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{2m - 2\sqrt{m^2+1}}{2a}$

$= m - \sqrt{m^2 + 1} < 0$ مرفوض

$e^{x} = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{2m + 2\sqrt{m^2+1}}{2}$

$e^{x} = m + \sqrt{m^2 + 1}$

$\ln e^{x} = \ln(m + \sqrt{m^2 + 1}) \Rightarrow$

$x = \ln(m + \sqrt{m^2 + 1}) \Rightarrow$

$\alpha = \ln(m + \sqrt{m^2 + 1})$

$S = \int_0^1 f(x)\,dx$

$= \int_0^1 \frac{1}{2}(e^{x} - e^{-x})\,dx$

$= \frac{1}{2}\left[e^{x} + e^{-x}\right]_0^1$

$= \frac{1}{2}\left[e + e^{-1} - (1 + 1)\right]$

$= \frac{1}{2}\left[e + \frac{1}{e} - 2\right]$

وحدة طول.

محمد رسول صباغ

المسألة الأولى ...

$f(x) = x - \ln\left(2 + \frac{1}{x}\right)$

1) ادرس تغيرات f

$f(x) = x - \ln\left(\frac{2x+1}{x}\right)$ معرفة بشرط

$\frac{2x+1}{x} > 0$

$D_f =]-\infty, -\frac{1}{2}[\cup]0, +\infty[$

$\lim_{x \to 0} f(x) = -\infty$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty - \ln(2) = +\infty$

$\lim_{x \to -\frac{1}{2}} f(x) = +\infty$

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty - \ln(2) = -\infty$

$$f'(x) = 1 - \frac{\frac{\cancel{2x} - \cancel{2x} - 1}{x^2}}{\frac{2x+1}{x}}$$

$$= 1 + \frac{1}{x(2x+1)} > 0$$

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$		//////		$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$	//////	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

2) اثبت ان $y = x - \ln 2$ مقارب $\mp\infty$

$$f - y_\Delta = -\ln\left(\frac{2x+1}{x}\right) + \ln 2$$

$$= \ln\left(\frac{2x}{2x+1}\right)$$

$\lim_{x \to \mp\infty} (f - y_\Delta) = 0$ اذن $y = x - \ln 2$ مقارب مائل في جوار $\mp\infty$

$$f - y_\Delta = \ln\left(\frac{2x}{2x+1}\right)$$

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		0		$+\infty$
$f - y$		$+$		//////		$-$	
		Δ تحت C		//////		Δ فوق C	

4) اثبت ان المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً في $]1, 2[$

واضح من جدول التغيرات ان :

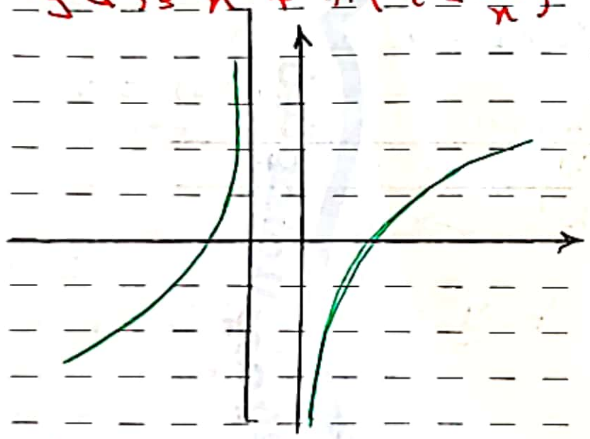
$f(1) = 1 - \ln(3) < 0$
$f(2) = 2 - \ln\left(\frac{5}{2}\right) > 0$ لأن

$f(1) \times f(2) < 0$

اذن المعادلة $f(x)=0$ لها حل وحيد $\alpha \in]1, 2[$ حسب مبرهنة القيمة الوسطى

5) ارسم C ثم استنتج رسم C_1

$g(x) = x + \ln\left(2 - \frac{1}{x}\right)$



$g(x) = -f(-x)$ واضح لنا

اذن C_g و C_f متناظران بالنسبة للمبدأ