برعاية معالي وزير التربية والتعليم

الأستاذ الدكتور/ رضا حجازي

وتوجيهات رئيس الادارة المركزية لتطوير المناهج

د/ أكرم حسن

شرح مبسط وتمارين متنوعة لمنهج الرياضيات

للصف الثالث الثانوى

للعام الدراسي 2023/2024

الهندسة الفراغية – الوحدة الأولى

لجنة الإعداد

أ/ اسامة جابر | أ/ رفعت حمزة

أ/ محمود السيد | أ/ محمد صلاح

لجنة المراجعة

أ/ عثمان مصطفى | أ/ شريف البرهامي

إشراف علمي

مستشار الرياضيات

أ/ منال عزقول

مثال محلول (١)

إذا كان بعد النقطة (−٤، ٣، ٤) عن محور س يساوي أ وعن المستوى ص ع يساوي ب فإن أ + ب = ...

(أ) ١ (ب) ٩ (ج) −١ (د) −٩

الحل

البعد عن محور س = $\sqrt{ع^{٢}+ص^{٢}} = \sqrt{٣^{٢}+٤^{٢}} = ٥$ ∴ أ = ٥

البعد عن المستوي ص ع = | س | = | −٤ | = ٤ ∴ ب = ٤

∴ أ + ب = ٩

تدريب (١)

إذا كانت النقطة أ (١−ك، ٢ك، ٣+ك) تقع في المستوى الاحداثي س ص فإن أ هي .....

(أ) (٤، ٦، ٠) (ب) (−٤، −٦، ٠) (ج) (−٢، −٦، ٠) (د) (٤، −٦، ٠)

مثال محلول (٢)

إذا كان بعد النقطة (−١، ك، ٣) عن محور س يساوي ٥. فإن ك = ...

(أ) ٤ (ب) ±٤ (ج) ٣ (د) ±٣

الحل

البعد عن محور س = $\sqrt{ع^{٢}+ص^{٢}} = \sqrt{ك^{٢}+٣^{٢}} = ٥$

∴ $ك^{٢} + ٩ = ٢٥$ ومنها $ك^{٢} = ١٦$ ∴ ك = ±٤

تدريب (٢)

المستقيمان $\overleftrightarrow{س س}$ ، $\overleftrightarrow{ع ع}$ يكونان مستوى الاحداثيات الذي معادلته هي .....

(أ) س=٠ (ب) ص=٠ (ج) ع=٠ (د) ص=١

البعد بين نقطتين في الفراغ

إذا كان أ(س₁ ، ص₁ ، ع₁) ، ب(س₂ ، ص₂ ، ع₂)

فان أب $=\sqrt{(س_1-س_2)^2+(ص_1-ص_2)^2+(ع_1-ع_2)^2}$

مثال محلول (٣)

إذا كان أ(٤، −٣، ٢) ، ب(٥، ٣، ١) فان طول $\overline{أب}$ يساوي ..... وحدة طول

ⓐ $\sqrt{٣٨}$ ⓑ ٣٨ ⓒ $\sqrt{٢}$ ⓓ ٢

الحــــــل

أب $=\sqrt{(٤-٥)^2+(-٣-٣)^2+(٢-١)^2}=\sqrt{١+٣٦+١}=\sqrt{٣٨}$ وحدة طول

تدريب (٣)

أثبت أن النقط أ(٤، ٤، ٠)، ب(٤، ٠، ٤)، جـ(٠، ٤، ٤) مثلث متساوي الأضلاع وأوجد مساحته

[$٨\sqrt{٣}$]

مثال محلول (٤)

إذا كانت أ(٢، −٥، ٧)، ب(١، ٣، ٦)، نقطة جـ تنتمي الى محور الصادات وتقع على بعدين متساويين من أ، ب فإن النقطة جـ هي ...

ⓐ (٠، ٢، ٠) ⓑ (٠، ١، ٠) ⓒ (٠، −٢، ٠) ⓓ (٠، −١، ٠)

الحــــــل

نفرض جـ(٠ ، ص، ٠)

∵ اجـ = ب جـ ∴ $\sqrt{٢^2+(ص+٥)^2+٧^2}=\sqrt{١^2+(ص-٣)^2+٦^2}$

∴ ٤+(ص+٥)^2 + ٤٩ = ١+(ص−٣)^2 + ٣٦ بالفك والتجميع

∴ ١٦ص=−٣٢ ومنها ص=−٢ ∴ جـ(٠، −٢، ٠)

تدريب (٤)

إذا كانت ﺃ، ب، ﺣ ثلاث نقاط في الفراغ حيث ﺃ(٣، ٤، ٨)، ب(١، ٢، ٧)، ﺣ(٣، ٠، ٦) فإن

.....

ﺃ ٢ﺃب = ب ﺣ   ب ﺃب = ٢ب ﺣ   ﺟ ﺃب = ﺃﺣ   د ٣ﺃب = ب ﺣ

إحداثيات نقطة منتصف قطعة مستقيمة

إذا كان ﺃ($س_١$ ، $ص_١$ ، $ع_١$) ، ب($س_٢$ ، $ص_٢$ ، $ع_٢$) وكانت ﺟ منتصف $\overline{ﺃب}$

فإن أحداثي نقطة ﺟ $\left(\frac{س_١ + س_٢}{٢} ، \frac{ص_١ + ص_٢}{٢} ، \frac{ع_١ + ع_٢}{٢}\right)$

مثال محلول (٥)

إذا كان ﺣ(٣، ٧، −٥) ، ﺀ(١، ٣، −١) فإن احداثيات منتصف $\overline{ﺣﺀ}$

ﺃ (٤، ١٠، −٦)   ب (٢، ٥، −٣)   ﺟ (٢، ٤، −٤)   د (١، ٢، −٢)

الحـــــــــل

منتصف $\overline{ﺣﺀ}$ = $\left(\frac{٣+١}{٢} ، \frac{٧+٣}{٢} ، \frac{-٥-١}{٢}\right)$ = (٢، ٥، −٣)

تدريب (٥)

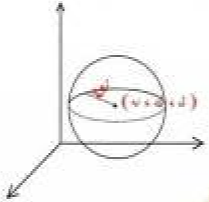
إذا كان ﺃ(١، −٣، ٢)، ب(٤، −١، ٤) أوجد أحداثي نقطة منتصف $\overline{ﺃب}$

[($\frac{٥}{٢}$ ، −٢ ، ٣)]

الكرة

هي مجموعة من نقط الفراغ التي تبعد عن نقطة ثابته (مركز الدائرة) بعدا ثابتا (طول نصف القطر)

إذا كانت النقطة (س، ص، ع) تقع على الكرة التي مركزها النقطة (ل، ك، ن) وطول نصف قطرها نق فان



الصورة القياسية لمعادلة كرة في الفراغ

(س−ل)^{٢}+(ص−ك)^{٢}+(ع−ن)^{٢}=نق^{٢}

المعادلة العامة للكرة فى الفراغ

س^{٢}+ص^{٢}+ع^{٢}+٢ل س+٢ك ص+٢ن ع+ء=٠

مركزها (− ل، − ك، − ن) = (−$\frac{١}{٢}$معامل س، −$\frac{١}{٢}$معامل ص، −$\frac{١}{٢}$معامل ع)

نق^{٢}=ل^{٢}+ك^{٢}+ن^{٢}− ء ، حيث ل^{٢}+ك^{٢}+ن^{٢} > ء

مساحة سطح الكرة =٤π نق٢ ، حجم الكرة = $\frac{٤}{٣}$π نق٣

مثال محلول (٦)

أوجد الصورة القياسية والصورة العامة لمعادلة الدائرة التي مركزها (٣، −٢، ٤) وطول نصف قطرها ٤ وحدات

الحـــــل

الصورة القياسية (س−٣)^{٢}+(ص+٢)^{٢}+(ع−٤)^{٢}=١٦

والصورة العامة س^{٢}+ص^{٢}+ع^{٢}−٦س+٤ص−٨ع+١٣=٠

تدريب (٦)

أوجد الصورة القياسية والصورة العامة لمعادلة الدائرة التي مركزها (١، −٣، ٢) وطول نصف قطرها ٣ وحدات

مثال محلول (٧)

عين مركز وطول نصف قطر الكرة التي معادلتها

س^٢ + ص^٢ + ع^٢ +٨س −٦ص −٤ ع +٥ = ٠

الحـــــــــــــل

إحداثي المركز = (−$\frac{١}{٢}$معامل س، − $\frac{١}{٢}$معامل ص، − $\frac{١}{٢}$معامل ع) = (−٤، ٣، ٢)

نق = $\sqrt{(-٤)^٢ + (٣)^٢ + (-٢)^٢ - ٥}$ = $\sqrt{١٦ + ٩ + ٤ - ٥}$ = ٢$\sqrt{٦}$ وحدة طول

تدريب (٧)

عين مركز وطول نصف قطر الكرة التي معادلتها س^٢ + ص^٢ + ع^٢ +٦س −٤ص −٢ ع +١ = ٠

[(−٣، ٢، ١) * $\sqrt{١٣}$]

الأوضاع النسبية لكرتين في الفراغ

إذا كان م ، ن كرتان نصف قطريهما نق$_١$ ، نق$_٢$ فان

إذا كانتا الكرتان م، ن	فان
متباعدتان	م ن > نق$_١$ + نق$_٢$
متماستان من الخارج	م ن = نق$_١$ + نق$_٢$
متقاطعتان	نق$_١$ − نق$_٢$ < م ن < نق$_١$ + نق$_٢$
متماستان من الداخل	م ن = نق$_١$ − نق$_٢$
متداخلتان	م ن < نق$_١$ − نق$_٢$
متحدتي المركز	م ن = صـــفر

مثال محلول (٨)

إذا كان:

$(\text{س} - ٢)^٢ + (\text{ص} + ٤)^٢ + (\text{ع} - ٢)^٢ = ١$ ، $(\text{س} + ٤)^٢ + (\text{ص} - ٤)^٢ + (\text{ع} - ٢)^٢ = ٤$ معادلتا كرتان

اوجد البعد بين المركزين وبين انهما غير متقاطعتان

الحـــــــــل

$\text{م} = (٢ ، -٤ ، ٢)$ ، $\text{ن} = (-٤ ، ٤ ، ٢)$

$\text{نق}_١ = ١$ ، $\text{نق}_٢ = ٢$

البعد بين المركزين $= \sqrt{(٢ + ٤)^٢ + (-٤ - ٤)^٢ + (٢ - ٢)^٢} = ١٠$

$\because$ $\text{م ن} > \text{نق}_١ + \text{نق}_٢$ الكرتان متباعدتان

تدريب (٨)

الكرتان اللتان معادلتهما $\text{س}^٢ + \text{ص}^٢ + \text{ع}^٢ - ٢\text{س} - ٢\text{ص} + ٢\text{ع} - ١ = ٠$

، $(\text{س} - ٥)^٢ + (\text{ص} + ٢)^٢ + \text{ع}^٢ = ٤$ تكونان...............

(أ) متماستان من الخارج (ب) متماستان من الداخل (ج) متقاطعتان (د) متباعدتان

تمارين عامة على الدرس الأول

① إذ كانت النقطة (ك، ٣، −٥) تقع على بعدين متساويين من المحورين س، ص فإن: ك=............

(أ) ±٢ (ب) ±٣ (جـ) ±٤ (د) ± ٥

② معادلة الكرة التي مركزها نقطة الأصل وتقطع جزءا طوله ٥ وحدات من الجزء الموجب للمحور س هي.........

(أ) $س^٢ + ص^٢ + ع^٢ - ٢٥ = ٠$ (ب) $س^٢ + ص^٢ + ع^٢ - ١٠٠ = ٠$

(جـ) $س^٢ + ص^٢ + ع^٢ + ٢٥ = ٠$ (د) $س^٢ + ص^٢ + ع^٢ - ٥ = ٠$

③ إذ كانت نقطة الأصل تقع على الكرة التي مركزها (−١، ٢، ٢) فإن معادلتها.............

(أ) $س^٢ + ص^٢ + ع^٢ - ٢س - ٤ص - ٤ع = ٣$ (ب) $س^٢ + ص^٢ + ع^٢ + ٢س - ٤ص - ٤ع = ٣$

(جـ) $(س+١)^٢ + (ص-٢)^٢ + (ع-٢)^٢ + ٩ = ٠$ (د) $س^٢ + ص^٢ + ع^٢ + ٢س - ٤ص - ٤ع = ٠$

④ إذا كان (−١, ٦, −٥) منتصف $\overline{أب}$ حيث أ (ك−٢ , −١, م+٣)، ب(٢, ن−٧, −٢)
فإن ك + م + ن =......

(أ) ٧ (ب) ١٢ (جـ) −٣٢ (د) ٦

⑤ إذا كان: أ (−٤، −٢، ٣) , ب(١، ٢، ك) وكان طول $\overline{أب} = \sqrt{٧٧}$، حيث ك ك∈ع⁻ فإن ك =.....

(أ) ٣ (ب) ٦ (جـ) ٩ (د) ١٢

⑥ إذا كان محور الصادات يقطع الكره التي مركزها (٣, −٤, ١٢) وطول نصف قطرها ١٣سم في النقطتين أ، ب
فإن أب=...... وحدة طول

(أ) ٦ (ب) ٨ (جـ) ٢٤ (د) ٢٦

⑦ معادلة الكرة التي مركزها م(١ , −٢ , −٥) وتمس مستوي الاحداثيات س ص هي.........

(أ) $(س-١)^٢ + (ص+٢)^٢ + (ع+٥)^٢ = ١$ (ب) $(س-١)^٢ + (ص+٢)^٢ + (ع+٥)^٢ = ٤$

(جـ) $(س-١)^٢ + (ص+٢)^٢ + (ع-٥)^٢ = ٢٥$ (د) $(س-١)^٢ + (ص+٢)^٢ + (ع+٥)^٢ = ٢٥$

⑧ طول العمود المرسوم من النقطة (−٢, −٣, ١) على محور س =....

(أ) $\sqrt{١٠}$ (ب) ١٠ (جـ) $\sqrt{١٣}$ (د) $\sqrt{٥}$

⑨ كرة تمس المستويات س ع، س ص، ص ع في النقط أ، ب، جـ على الترتيب $\overline{أد}$ قطر فيها حيث د(٣،٦،٣) فإن معادلة الكرة=.....

(أ) (س − ٣)^{٢} + (ص − ٣)^{٢} + (ع − ٣)^{٢} = ٩ (ب) (س − ٣)^{٢} + (ص − ٦)^{٢} + (ع − ٣)^{٢} = ٩

(جـ) (س − ٣)^{٢} + (ص − ٦)^{٢} + (ع − ٣)^{٢} = ٣٦ (د) (س + ٣)^{٢} + (ص + ٣)^{٢} + (ع + ٣)^{٢} = ٩

---

⑩ طول قطر الكرة التي معادلتها ٣س^{٢} + ٣ص^{٢} + ٣ع^{٢} + ١٨س − ٢٤ص + ١٢ع + ٩ = ٠ يساوي ... وحدة طول

(أ) ٢$\sqrt{٧}$ (ب) ٤$\sqrt{٧}$ (جـ) ٦$\sqrt{٢٩}$ (د) ١٢$\sqrt{٢٩}$

أسئلة مقالية

⑪ اذا كانت الكرتان: (س+١)^{٢} + (ص-٤)^{٢} + (ع - ك)^{٢} =٢٥،

(س -٣)^{٢} + ص^{٢} + (ع - ٣)^{٢} = ١٦ متماستين من الخارج. فما قيمة ك. [−٤ ، ١٠]

---

⑫ اثبت ان النقط أ (٥، ١، ٣)، ب (٧، ٣، ك)، جـ (٥، ٥، ٣) تكون مثلثا متساوي الساقين لجميع قيم ك الحقيقية، ثم اوجد قيم ك الحقيقية التي تجعل المثلث متساوي الاضلاع.

[٣ ± ٢$\sqrt{٢}$]

إجابات اختر

١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩	١٠
(ب)	(أ)	(د)	(أ)	(جـ)	(ب)	(د)	(أ)	(أ)	(ب)

هندسة فراغية -الوحدة الأولى

الدرس الثاني: المتجهات في الفراغ

ملخص الدرس

متجه الموضع في الفراغ

إذا كانت: أ (أ $_س$ ، أ $_ص$ ، أ $_ع$) نقطة في الفراغ في نظام إحداثي ثلاثي الأبعاد ، و (٠ ، ٠ ، ٠) نقطة الأصل. فإن القطعة المستقيمة الموجهة $\overrightarrow{\text{و أ}}$ تسمى متجه موضع النقطة أ وتكتب اختصاراً $\overrightarrow{أ}$ = (أ $_س$ ، أ $_ص$ ، أ $_ع$)

حيث أ $_س$ تسمى مركبة المتجه $\overrightarrow{أ}$ في اتجاه محور س، أ $_ص$ تسمى مركبة المتجه $\overrightarrow{أ}$ في اتجاه محور ص،

أ $_ع$ تسمى مركبة المتجه $\overrightarrow{أ}$ في اتجاه محور ع

معيار المتجه

هو طول القطعة المستقيمة التي تمثل المتجه

إذا كان $\overrightarrow{أ}$ = (أ $_س$ ، أ $_ص$ ، أ $_ع$) فإن معيار $\overrightarrow{أ}$ (يقصد طول القطعة المستقيمة الموجهة $\overrightarrow{\text{و أ}}$)

$$\|\overrightarrow{أ}\| = \sqrt{(أ_س)^٢ + (أ_ص)^٢ + (أ_ع)^٢}$$

ملحوظة $\|ك\overrightarrow{أ}\| = |ك|\,\|\overrightarrow{أ}\|$

مثال محلول (١)

إذا كان $\overrightarrow{أ}$ = (٢ ، -٢ ، ١) أوجد $\|\overrightarrow{أ}\|$

الحـــــــــل

$\|\overrightarrow{أ}\| = \sqrt{٤ + ٤ + ١} = \sqrt{٩} = ٣$ وحدة طول

تدريب (١)

إذا كان $\overrightarrow{أ}$ = ($\sqrt{٧}$ ، ٣ ، $\sqrt{٢}$) أوجد $\|\overrightarrow{أ}\|$

[٥]

مثال محلول (٢)

إذا كان $\overrightarrow{\text{أ}} = (-٤ ، \text{ك} ، -٢)$ وكان $\|\overrightarrow{\text{أ}}\| = ٦$ أوجد قيمة ك

الحـــــــل

$\|\overrightarrow{\text{أ}}\| = \sqrt{١٦ + \text{ك}^{٢} + ٤} = ٦$ بتربيع الطرفين

$\therefore\ ٢٠ + \text{ك}^{٢} = ٣٦ \quad \therefore\ \text{ك}^{٢} = ١٦ \quad \therefore\ \text{ك} = \pm ٤$

تدريب (٢)

إذا كان $\overrightarrow{\text{أ}} = (-\text{ك} ، ٢\text{ك} ، -\text{ك})$ وكان $\|\overrightarrow{\text{أ}}\| = ٤\sqrt{٦}$ فإن $\text{أ}_{\text{س}}$ = ...

(أ) ± ٤ (ب) ± ٨ (جـ) ٣ (د) -٣

مثال محلول (٣)

إذا كان $\overrightarrow{\text{أ}} = (٢ ، -٢\sqrt{٢} ، -٢)$ وكان $\|\text{ك}\overrightarrow{\text{أ}}\| = ١٢$. أوجد قيمة ك

الحـــــــل

$\|\overrightarrow{\text{أ}}\| = \sqrt{٤ + ٨ + ٤} = \sqrt{١٦} = ٤$ وحدة طول

$\because\ \|\text{ك}\overrightarrow{\text{أ}}\| = ١٢ \quad \therefore\ |\text{ك}|\,\|\overrightarrow{\text{أ}}\| = ١٢$

$\therefore\ ٤|\text{ك}| = ١٢ \quad \therefore\ |\text{ك}| = ٣ \quad \therefore\ \text{ك} = \pm ٣$

تدريب (٣)

إذا كان $\|\text{ك}\,(١ ، -٢ ، ٢)\| = ٦$ أوجد قيمة ك

[٢]

جمع المتجهات في الفراغ

إذا كان $\overrightarrow{\text{أ}} = (\text{أ}_{\text{س}} ، \text{أ}_{\text{ص}} ، \text{أ}_{\text{ع}})$ ، $\overrightarrow{\text{ب}} = (\text{ب}_{\text{س}} ، \text{ب}_{\text{ص}} ، \text{ب}_{\text{ع}})$

فإن $\overrightarrow{\text{أ}} + \overrightarrow{\text{ب}} = (\text{أ}_{\text{س}} + \text{ب}_{\text{س}} ، \text{أ}_{\text{ص}} + \text{ب}_{\text{ص}} ، \text{أ}_{\text{ع}} + \text{ب}_{\text{ع}})$

ضرب المتجه في عدد حقيقي

إذا كان $\overrightarrow{\text{أ}} = (\text{أ}_\text{س} ، \text{أ}_\text{ص} ، \text{أ}_\text{ع})$، ك عدد حقيقي فإن $\text{ك}\overrightarrow{\text{أ}} = (\text{ك}\text{أ}_\text{س} ، \text{ك}\text{أ}_\text{ص} ، \text{ك}\text{أ}_\text{ع})$

مثال محلول (٤)

إذا كان $\overrightarrow{\text{أ}} = (١ ، -٥ ، -٣)$ ، $\overrightarrow{\text{ب}} = (٣ ، -٢ ، ٦)$ أوجد $\| ٢\overrightarrow{\text{أ}} + \overrightarrow{\text{ب}} \|$

الحـــــــــل

$٢\overrightarrow{\text{أ}} + \overrightarrow{\text{ب}} = ٢(١ ، -٥ ، -٣) + (٣ ، -٢ ، ٦)$

$٢\overrightarrow{\text{أ}} + \overrightarrow{\text{ب}} = (٢ ، -١٠ ، -٦) + (٣ ، -٢ ، ٦) = (٥ ، -١٢ ، ٠)$

$\| ٢\overrightarrow{\text{أ}} + \overrightarrow{\text{ب}} \| = \sqrt{٢٥ + ١٤٤ + ٠} = \sqrt{١٦٩} = ١٣$

تدريب (٤)

إذا كان $\overrightarrow{\text{أ}} = (٤ ، -٥ ، -٣)$ ، $\overrightarrow{\text{ب}} = (-١ ، ٧ ، ٦)$ ، $\overrightarrow{\text{ج}} = (٠ ، ٣ ، ٣)$

أوجد $\| \overrightarrow{\text{أ}} - \overrightarrow{\text{ب}} + ٣\overrightarrow{\text{ج}} \|$ $[\sqrt{٣٤}]$

مثال محلول (٥)

إذا كان $\overrightarrow{\text{أ}} = (٢ ، -٣ ، ٤)$ ، $\overrightarrow{\text{ب}} = (٢ ، ٣ ، -٢)$

وكان $٢\overrightarrow{\text{أ}} + ٣\overrightarrow{\text{ج}} = ٥\overrightarrow{\text{ب}}$ أوجد $\| \overrightarrow{\text{ج}} \|$

الحـــــــــل

$٣\overrightarrow{\text{ج}} = ٥\overrightarrow{\text{ب}} - ٢\overrightarrow{\text{أ}}$

$٣\overrightarrow{\text{ج}} = ٥(٢ ، ٣ ، -٢) - ٢(٢ ، -٣ ، ٤)$

$٣\overrightarrow{\text{ج}} = (١٠ ، ١٥ ، -١٠) - (٤ ، -٦ ، ٨)$

$٣\overrightarrow{\text{ج}} = (٦ ، ٢١ ، -١٨) \therefore \overrightarrow{\text{ج}} = (٢ ، ٧ ، -٦)$

$\| \overrightarrow{\text{ج}} \| = \sqrt{٤ + ٤٩ + ٣٦} = \sqrt{٨٩}$

تدريب (٥)

إذا كان $\frac{١}{٣}\overrightarrow{أ} = (٢ ، -١ ، ٠)$ ، $٢\overrightarrow{ب} = (-٤ ، ٤ ، -٢)$

أوجد المتجه $\overrightarrow{جـ}$ الذي يحقق $\overrightarrow{أ} - ٣\overrightarrow{ب} + \overrightarrow{جـ} = \overrightarrow{و}$ ثم أوجد $\|\overrightarrow{جـ} + \overrightarrow{أ} - \overrightarrow{ب}\|$

[(-١٢ ، ٩ ، -٣) ، ٦]

متجه الوحدة

هو المتجه الذي معياره يساوى وحدة الأطوال

فمثلا: المتجه $\overrightarrow{أ} = \left(\frac{١}{٣} ، \frac{-٢}{٣} ، \frac{٢}{٣}\right)$

نلاحظ أن $\|\overrightarrow{أ}\| = \sqrt{\frac{١}{٩} + \frac{٤}{٩} + \frac{٤}{٩}} = ١$ وحدة طول

$\therefore$ المتجه $\overrightarrow{أ} = \left(\frac{١}{٣} ، \frac{-٢}{٣} ، \frac{٢}{٣}\right)$ يمثل متجه وحدة

مثال محلول (٦)

إذا كان $\overrightarrow{أ} = \left(ك ، \frac{\sqrt{٥}}{٣} ، ٠\right)$ متجه وحدة أوجد قيمة ك

الحل

$\because \overrightarrow{أ}$ متجه وحدة $\therefore \|\overrightarrow{أ}\| = ١$

$\therefore \sqrt{ك^٢ + \frac{٥}{٩} + ٠} = ١$ $\therefore ك^٢ + \frac{٥}{٩} = ١$

$\therefore ك^٢ = \frac{٤}{٩}$ $\therefore ك = \pm\frac{٢}{٣}$

تدريب (٦)

إذا كان $\overrightarrow{أ} = \left(\frac{\sqrt{٣}}{٢} ، \frac{١}{٢} ، ك\right)$ متجه وحدة أوجد قيمة ك

[صفر]

➤ متجهات الوحدة الأساسية

هي قطع مستقيمة موجه بدايتها نقطة تقاطع المحاور ومعيارها وحدة الأطوال واتجاهها هو الاتجاهات الموجبة للمحاور الثلاثة حيث

متجه الوحدة في اتجاه محور س هو $\overrightarrow{\text{س}}$ = (١ ، ٠ ، ٠)

متجه الوحدة في اتجاه محور ص هو $\overrightarrow{\text{ص}}$ = (٠ ، ١ ، ٠)

متجه الوحدة في اتجاه محور ع هو $\overrightarrow{\text{ع}}$ = (٠ ، ٠ ، ١)

وعلى هذا يمكن التعبير عن أي متجه في الفراغ بدلالة متجهات الوحدة الأساسية كما يلي :

$\overrightarrow{\text{أ}}$ = (٤ ، -٢ ، ٣) = ٤ $\overrightarrow{\text{س}}$ - ٢ $\overrightarrow{\text{ص}}$ + ٣ $\overrightarrow{\text{ع}}$

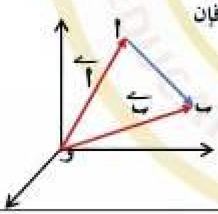
$\overrightarrow{\text{ب}}$ = (٥ ، ٠ ، ١) = ٥ $\overrightarrow{\text{س}}$ + $\overrightarrow{\text{ع}}$

$\overrightarrow{\text{جـ}}$ = ٣ $\overrightarrow{\text{ع}}$ - ٦ $\overrightarrow{\text{س}}$ = (-٦ ، ٠ ، ٣)

➤ التعبير عن القطعة المستقيمة الموجهة بدلالة احداثيات طرفيها

التعبير عن القطعة المستقيمة الموجهة بدلالة احداثيات طرفيها

إذا كانت أ (س_1 ، ص_1 ، ع_1) ، ب (س_2 ، ص_2 ، ع_2) نقطتان فإن



$\overrightarrow{\text{و أ}}$ + $\overrightarrow{\text{أ ب}}$ = $\overrightarrow{\text{و ب}}$

$\overrightarrow{\text{أ ب}}$ = $\overrightarrow{\text{و ب}}$ - $\overrightarrow{\text{و أ}}$

$\overrightarrow{\text{أ ب}}$ = $\overrightarrow{\text{ب}}$ - $\overrightarrow{\text{أ}}$

مثال محلول (٧)

إذا كان أ(٥ ، ٣ ، -٧) ، ب(٢ ، -١ ، ٥) أوجد $\overrightarrow{\text{أب}}$ ، $\|\overrightarrow{\text{أب}}\|$

الحـــــل

$\overrightarrow{\text{أب}}$ = $\overrightarrow{\text{ب}}$ - $\overrightarrow{\text{أ}}$ = (٢ ، -١ ، ٥) - (٥ ، ٣ ، -٧) ∴ $\overrightarrow{\text{أب}}$ = (-٣ ، -٤ ، ١٢)

∴ $\|\overrightarrow{\text{أب}}\|$ = $\sqrt{\text{٩+١٦+١٤٤}}$ = ١٣

تدريب (٧)

إذا كان $\overrightarrow{\text{أب}}$ = (٢ ، -١ ، ١١) ، $\overrightarrow{\text{بجـ}}$ = (٠ ، -٣ ، -٧) أوجد || $\overrightarrow{\text{أجـ}}$ || [٦]

مثال محلول (٨)

إذا كان $\overrightarrow{\text{أ}}$ = (-٣ ، -١ ، ٣) ، $\overrightarrow{\text{أب}}$ = (٥ ، ٣ ، -٢) أوجد || $\overrightarrow{\text{ب}}$ ||

الحـــــل

∵ $\overrightarrow{\text{أب}}$ = $\overrightarrow{\text{ب}}$ - $\overrightarrow{\text{أ}}$

∴ $\overrightarrow{\text{ب}}$ = $\overrightarrow{\text{أب}}$ + $\overrightarrow{\text{أ}}$ = (٥ ، ٣ ، -٢) + (-٣ ، -١ ، ٣) = (٢ ، ٢ ، ١)

∴ $\overrightarrow{\text{ب}}$ = (٢ ، ٢ ، ١) ∴ || $\overrightarrow{\text{ب}}$ || = $\sqrt{\text{٤+٤+١}}$ = ٣

تدريب (٨)

إذا كان أ = (-٢ ، ٥ ، ٤)، ب = (-٤ ، ١ ، ك)، وكان || $\overrightarrow{\text{أب}}$ || = ٢ $\sqrt{\text{١٤}}$ ،

أوجد قيمة ك

[-٢ ، ١٠]

مثال محلول (٩)

إذا كان $\overrightarrow{\text{أ}}$ + $\overrightarrow{\text{بجـ}}$ = ٤ $\overrightarrow{\text{س}}$ + ١٢ $\overrightarrow{\text{ص}}$ + ٩ $\overrightarrow{\text{ع}}$ ، $\overrightarrow{\text{أ}}$ = (-١ ، -٤ ، ٠) ، $\overrightarrow{\text{ب}}$ = (٣ ، ١ ، -٢) .

أوجد $\overrightarrow{\text{جـ}}$

الحـــــل

$\overrightarrow{\text{بجـ}}$ = (٤ ، ١٢ ، ٩) - $\overrightarrow{\text{أ}}$

∴ $\overrightarrow{\text{بجـ}}$ = (٤ ، ١٢ ، ٩) - (-١ ، -٤ ، ٠)

∴ $\overrightarrow{\text{جـ}}$ - $\overrightarrow{\text{ب}}$ = (٥ ، ١٦ ، ٩)

∴ $\overrightarrow{\text{جـ}}$ = (٥ ، ١٦ ، ٩) + $\overrightarrow{\text{ب}}$

∴ $\overrightarrow{\text{جـ}}$ = (٥ ، ١٦ ، ٩) + (٣ ، ١ ، -٢) = (٨ ، ١٧ ، ٧)

مثال محلول (١٠)

إذا كان مسقط النقطة أ (٥ ، ٤ ، ٣) في المستوى ص ع هو ب، و مسقطها في المستوى س ع هو جـ

أوجد || $\overrightarrow{\text{ب جـ}}$ ||

الحـــل

مسقط النقطة أ (٥ ، ٤ ، ٣) في المستوى ص ع هو ب (٠ ، ٤ ، ٣)

مسقط النقطة أ (٥ ، ٤ ، ٣) في المستوى س ع هو جـ (٥ ، ٠ ، ٣)

∴ $\overrightarrow{\text{ب جـ}}$ = $\overrightarrow{\text{جـ}}$ − $\overrightarrow{\text{ب}}$ = (٥ ، ٠ ، ٣) − (٠ ، ٤ ، ٣)

∴ $\overrightarrow{\text{ب جـ}}$ = (٥ ، −٤ ، ٠) ∴ || $\overrightarrow{\text{ب جـ}}$ || = $\sqrt{٢٥ + ١٦ + ٠}$ = $\sqrt{٤١}$

تدريب (٩)

إذا كانت صورة النقطة أ (١ ، −٤ ، ٥) بالانعكاس في المستوى ص ع هو ب، وصورتها بالانعكاس في المستوى س ع هو جـ أوجد || $\overrightarrow{\text{ب جـ}}$ ||

[٢ $\sqrt{١٧}$]

متجه الوحدة في اتجاه متجه معلوم

إذا كان $\overrightarrow{\text{أ}}$ = (أس ، أص ، أع) فإن متجه الوحدة في اتجاه المتجه $\overrightarrow{\text{أ}}$ يرمز له بالرمز $\overrightarrow{\text{ى}}_{\text{أ}}$

حيث $\overrightarrow{\text{ى}}_{\text{أ}} = \dfrac{\overrightarrow{\text{أ}}}{\|\overrightarrow{\text{أ}}\|} = \dfrac{\text{متجهه}}{\text{معياره}}$

مثال محلول (١١)

إذا كان $\overrightarrow{\text{أ}}$ = (٢ ، −١ ، −١) أوجد متجه الوحدة في اتجاه المتجه $\overrightarrow{\text{أ}}$

الحـــل

$\|\overrightarrow{\text{أ}}\| = \sqrt{(٢)^٢ + (−١)^٢ + (−١)^٢} = \sqrt{٦}$

$\overrightarrow{\text{ى}}_{\text{أ}} = \dfrac{(٢ ، −١ ، −١)}{\sqrt{٦}} = \left(\dfrac{٢}{\sqrt{٦}} ، \dfrac{−١}{\sqrt{٦}} ، \dfrac{−١}{\sqrt{٦}} \right)$

مثال محلول (١٢)

إذا كان $\overrightarrow{\text{أ}}$ = (٠ ، − ١ ، ٤) ، $\overrightarrow{\text{ب}}$ = (٢ ، ١ ، ٣). أوجد متجه الوحدة في اتجاه المتجه $\overrightarrow{\text{أب}}$

الحل

∵ $\overrightarrow{\text{أب}} = \overrightarrow{\text{ب}} - \overrightarrow{\text{أ}}$

= (٢ ، ١ ، ٣) − (٠ ، − ١ ، ٤) = (٢ ، ٢ ، −١)

$\|\overrightarrow{\text{أب}}\| = \sqrt{(٢)^٢ + (٢)^٢ + (-١)^٢} = ٣$

$\overrightarrow{\text{ى}} = \dfrac{\overrightarrow{\text{أب}}}{\|\overrightarrow{\text{أب}}\|} = \dfrac{(٢ ، ٢ ، -١)}{٣} = \left(\dfrac{٢}{٣} ، \dfrac{٢}{٣} ، \dfrac{-١}{٣}\right)$

تدريب (١٠)

إذا كان $\overrightarrow{\text{أ}}$ = (−١ ، −٣ ، ٤) ، $\overrightarrow{\text{أب}}$ = (٤ ، ٣ ، ٠) أوجد متجه الوحدة في اتجاه المتجه $\overrightarrow{\text{ب}}$

$\left[\left(\dfrac{٣}{٥} ، ٠ ، \dfrac{٤}{٥}\right)\right]$

مثال محلول (١٣)

إذا كان $\|\overrightarrow{\text{أ}}\| = ١٢$ ، متجه الوحدة في اتجاه المتجه $\overrightarrow{\text{أ}}$ هو $\left(\dfrac{-١}{٣} ، \dfrac{-٢}{٣} ، \dfrac{٢}{٣}\right)$

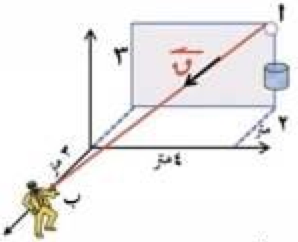
أوجد $\overrightarrow{\text{أ}}$

الحل

$\overrightarrow{\text{أ}} = \|\overrightarrow{\text{أ}}\| \, \overrightarrow{\text{ى}} = ١٢ \left(\dfrac{-١}{٣} ، \dfrac{-٢}{٣} ، \dfrac{٢}{٣}\right)$

∴ $\overrightarrow{\text{أ}}$ = (−٤ ، −٨ ، ٨)

مثال محلول (١٤)



في الشكل المقابل: إذا كان

$\|\overrightarrow{\text{ق}}\| = ١٠\sqrt{٢}$ اوجد $\overrightarrow{\text{ق}}$

الحـــــل

احداثيات أ هي (−٢ ، ٤ ، ٣) ، احداثيات ب هي (٣ ، ٠ ، ٠)

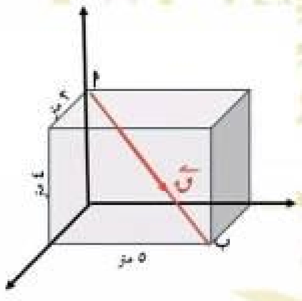
$\because \overrightarrow{\text{أب}} = \overrightarrow{\text{ب}} - \overrightarrow{\text{أ}} = (٥ ، -٤ ، -٣)$

$\|\overrightarrow{\text{أب}}\| = \sqrt{(٥)^٢ + (-٤)^٢ + (-٣)^٢} = ٥\sqrt{٢}$

$\overrightarrow{\text{ق}} = \|\overrightarrow{\text{ق}}\|\, \text{ق}_\text{ى} = ١٠\sqrt{٢}\left(\frac{٥}{٥\sqrt{٢}} ، \frac{-٤}{٥\sqrt{٢}} ، \frac{-٣}{٥\sqrt{٢}}\right)$

$\therefore \overrightarrow{\text{ق}} = (١٠ ، -٨ ، -٦)$

تدريب (١١)

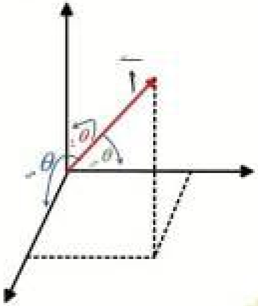


في الشكل المقابل: إذا كان

$\|\overrightarrow{\text{ق}}\| = ٦\sqrt{٥}$ اوجد $\overrightarrow{\text{ق}}$

$[(٤ ، ١٠ ، -٨)]$

زوايا الاتجاه وجيوب تمام الاتجاه للمتجه في الفراغ



إذا كان $\overrightarrow{أ} = (أ_س ، أ_ص ، أ_ع)$ متجه في الفراغ

وكانت $(\theta_س ، \theta_ص ، \theta_ع)$ قياسات الزوايا التي يصنعها المتجه مع الاتجاهات الموجبة لمحاور الاحداثيات فان:

$أ_س = \|\overrightarrow{أ}\| جتا\theta_س$ ، $أ_ص = \|\overrightarrow{أ}\| جتا\theta_ص$ ، $أ_ع = \|\overrightarrow{أ}\| جتا\theta_ع$

$\therefore \overrightarrow{أ} = \left(\|\overrightarrow{أ}\| جتا\theta_س ، \|\overrightarrow{أ}\| جتا\theta_ص ، \|\overrightarrow{أ}\| جتا\theta_ع\right)$

$\therefore \overrightarrow{أ} = \|\overrightarrow{أ}\| \left(جتا\theta_س ، جتا\theta_ص ، جتا\theta_ع\right)$

$\therefore \dfrac{\overrightarrow{أ}}{\|\overrightarrow{أ}\|} = \left(جتا\theta_س ، جتا\theta_ص ، جتا\theta_ع\right)$

$\therefore \overrightarrow{ى}_{أ} = \left(جتا\theta_س ، جتا\theta_ص ، جتا\theta_ع\right)$

أي أن متجه الوحدة في اتجاه أي متجه = جيوب تمام الاتجاه لنفس

وحيث أن $\therefore \|\overrightarrow{ى}\| = ١ \quad \therefore \sqrt{جتا^٢\theta_س + جتا^٢\theta_ص + جتا^٢\theta_ع} = ١$

$\therefore جتا^٢\theta_س + جتا^٢\theta_ص + جتا^٢\theta_ع = ١$

مثال محلول (١٥)

إذا كان جيوب تمام الاتجاه للمتجه $\overrightarrow{أ}$ هي $\left(\frac{١}{٣} ، \frac{٢}{٣} ، جتا\theta_ع\right)$ أوجد $جتا\theta_ع$

الحـــــــــــل

$\because جتا^٢\theta_س + جتا^٢\theta_ص + جتا^٢\theta_ع = ١$

$\therefore \frac{١}{٩} + \frac{٤}{٩} + جتا^٢\theta_ع = ١ \qquad \therefore \frac{٥}{٩} + جتا^٢\theta_ع = ١$

$\therefore جتا^٢\theta_ع = \frac{٤}{٩} \qquad \therefore جتا\theta_ع = \pm \frac{٢}{٣}$

تدريب (١٢)

إذا كان $(١٣٥^\circ ، ٦٠^\circ ، \theta_ع)$ هي قياسات زوايا الاتجاه للمتجه $\overrightarrow{أ}$ أوجد $\theta_ع$

$\{٦٠^\circ ، ١٢٠^\circ\}$

مثال محلول (١٦)

أوجد مجموع قياسات زوايا الاتجاه للمتجه $\overrightarrow{أ} = (٢ ، -٢ ، ٢\sqrt{٢})$

الحل

$\|\overrightarrow{أ}\| = \sqrt{٤ + ٤ + ٨} = ٤$

$\overrightarrow{ى}_{أ} = \frac{(٢ ، -٢ ، ٢\sqrt{٢})}{٤} = (\frac{١}{٢} ، -\frac{١}{٢} ، \frac{\sqrt{٢}}{٢})$

∴ جيوب تمام الاتجاه للمتجه $\overrightarrow{أ}$ هي $(\frac{١}{٢} ، -\frac{١}{٢} ، \frac{\sqrt{٢}}{٢})$

∴ جتا $\theta_{س} = \frac{١}{٢}$ ∴ $\theta_{س} = ٦٠^\circ$

، جتا $\theta_{ص} = -\frac{١}{٢}$ ∴ $\theta_{ص} = ١٢٠^\circ$

، جتا $\theta_{ع} = \frac{\sqrt{٢}}{٢}$ ∴ $\theta_{ع} = ٤٥^\circ$

∴ مجموع قياسات زوايا الاتجاه للمتجه $\overrightarrow{أ} = ٦٠^\circ + ١٢٠^\circ + ٤٥^\circ = ٢٢٥^\circ$

مثال محلول (١٧)

إذا كانت قياسات زوايا الاتجاه للمتجه $\overrightarrow{ب}$ هي $(٣٠^\circ ، ٦٠^\circ ، \theta_{ع})$

وكان $\|\overrightarrow{ب}\| = ١٢$ أوجد المتجه $\overrightarrow{ب}$

الحل

∵ جتا$^٢ \theta_{س}$ + جتا$^٢ \theta_{ص}$ + جتا$^٢ \theta_{ع} = ١$

∴ جتا$^٢ ٣٠^\circ$ + جتا$^٢ ٦٠^\circ$ + جتا$^٢ \theta_{ع} = ١$

∴ $\frac{٣}{٤} + \frac{١}{٤}$ + جتا$^٢ \theta_{ع} = ١$ ∴ ١ + جتا$^٢ \theta_{ع} = ١$

∴ جتا$^٢ \theta_{ع} = ٠$ ∴ جتا $\theta_{ع} = ٠$ ∴ $\theta_{ع} = ٩٠^\circ$

∵ $\overrightarrow{ى}_{أ} = ($جتا ٣٠° ، جتا ٦٠° ، جتا $٩٠^\circ)$

∵ $\overrightarrow{ى}_{أ} = (\frac{\sqrt{٣}}{٢} ، \frac{١}{٢} ، ٠)$

$\overrightarrow{ب} = \|\overrightarrow{ب}\| \overrightarrow{ى}_{أ} = ١٢(\frac{\sqrt{٣}}{٢} ، \frac{١}{٢} ، ٠)$ ∴ $\overrightarrow{ب} = (٦\sqrt{٣} ، ٦ ، ٠)$

تدريب (١٣)

أوجد جيوب تمام الاتجاه للمتجه $\overrightarrow{أ}$ = (−٣ م ، ٠ ، ٤ م) ثم أوجد قياس الزاوية التي يصنعها المتجه $\overrightarrow{أ}$ مع محور س

[$\left(\frac{-٣}{٥} ، ٠ ، \frac{٤}{٥}\right)$ * ١٢٦° ٥٢َ]

مثال محلول (١٨)

إذا كانت($\theta_س$ ، $\theta_ص$ ، $\theta_ع$)هي زوايا الاتجاه لمتجه ما أوجد قيمة

(١) ٣جا٢ $\theta_س$ + ٣جا٢ $\theta_ص$ + ٣ جا٢ $\theta_ع$

(٢) ٥جتا٢ $\theta_س$ + ٥جتا٢ $\theta_ص$ + ٥جتا٢ $\theta_ع$

الحـــل

(١) المقدار ٣جا٢ $\theta_س$ + ٣جا٢ $\theta_ص$ + ٣ جا٢ $\theta_ع$

= ٣ [جا٢ $\theta_س$ + جا٢ $\theta_ص$ + جا٢ $\theta_ع$]

= ٣ [١ - جتا٢ $\theta_س$ + ١ − جتا٢ $\theta_ص$ + ١ - جتا٢ $\theta_ع$]

= ٣ [٣ - (جتا٢ $\theta_س$ + جتا٢ $\theta_ص$ +جتا٢ $\theta_ع$)]

= ٣ [٣ - ١] = ٦ .

(٢) المقدار ٥جتا٢ $\theta_س$ + ٥جتا٢ $\theta_ص$ + ٥جتا٢ $\theta_ع$

= ٥ [جتا٢ $\theta_س$ + جتا٢ $\theta_ص$ + جتا٢ $\theta_ع$]

= ٥ [٢جتا٢ $\theta_س$ − ١ + ٢جتا٢ $\theta_ص$ − ١ + ٢ جتا٢ $\theta_ع$ − ١]

= ٥ [٢ (جتا٢ $\theta_س$ + جتا٢ $\theta_ص$ + جتا٢ $\theta_ع$) − ٣]

= ٥ [٢ × ١ − ٣] = -٥

تمارين عامة على الدرس الثاني

① متجه الوحدة في اتجاه المحور ص ....

(أ) (١، ٠، ٠) (ب) (٠، ٠، ١) (جـ) (١، ٠، ١) (د) (٠، ١، ٠)

---

② إذا كان $\overleftarrow{أ}$ = (ل، −٧، −١) ، $\overleftarrow{ب}$ = (٤، م، −٩) وكان $\overleftarrow{أب}$ = (٧، ١١، ن) فإن
ل + م + ن = ...

(أ) ١٥ (ب) −٧ (جـ) ٩ (د) −١

---

③ إذا كان $\overleftarrow{أ}$ = (٠، ١، −٢) ، $\overleftarrow{ب}$ = (١، ١، ٢) فإن متجه الوحدة $\overleftarrow{أب}$ هو ....

(أ) $\left(\frac{\sqrt{١٧}}{٧}، ٠، \frac{٤\sqrt{١٧}}{٧}\right)$ (ب) $\left(\frac{١}{\sqrt{٥}}، ٠، \frac{-٢}{\sqrt{٥}}\right)$

(جـ) $\left(\frac{١}{\sqrt{٦}}، \frac{١}{\sqrt{٦}}، \frac{٢}{\sqrt{٦}}\right)$ (د) $\left(\sqrt{١٧}، ٠، ٤\sqrt{١٧}\right)$

---

④ إذا كان ‖٤ $\overleftarrow{أ}$‖ = ‖٣ ك $\overleftarrow{أ}$‖ فإن ك = ...

(أ) ±١ (ب) $\pm\frac{٣}{٤}$ (جـ) $\pm\frac{٤}{٣}$ (د) $\pm\frac{٢}{\sqrt{٣}}$

---

⑤ زوايا الاتجاه للمتجه (١، ١، $\sqrt{٢}$) ....

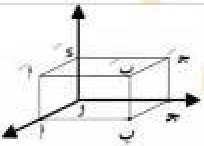
(أ) (٦٠°، ٦٠°، ٤٥°) (ب) (٢٧°، ٣٥°، ٢٧°)

(جـ) (٣٠°، ٣٠°، ٤٥°) (د) (٦٠°، ٦٠°، ١٢٠°)

---

⑥

في الشكل المقابل: أ ب جـ و أَ بَ جَ دَ متوازي مستطيلات وكان
أ(٤، ٠، ٠) ، جـ(٠، ٩، ٠) ، دَ(٠، ٠، ٧) فإن ‖أجَ‖ = ...



(أ) $\sqrt{١٣٧}$ (ب) $\sqrt{١٤١}$ (جـ) $\sqrt{١٤٦}$ (د) $\sqrt{١٤٧}$

---

⑦ إذا كان (٦٠°، ١٣٥°، ٦٠°) هي زوايا الاتجاه لمتجه $\overleftarrow{أ}$ فإن زوايا الاتجاه للمتجه −٢ $\overleftarrow{أ}$ ....

(أ) (٦٠°، ١٣٥°، ٦٠°) (ب) (١٢٠°، ٢٧٠°، ١٢٠°)

(جـ) (٣٠°، ٤٥°، ٣٠°) (د) (١٢٠°، ٤٥°، ١٢٠°)

⑧ إذا كان $\overline{أ}$ يصنع زوايا قياسها $(٦٠° ، ٩٠° ، \theta)$ مع محاور الاحداثيات س، ص، ع حيث θ زاوية حاده

وكان $\|\overline{أ}\| = ١٢$ فان $\overline{أ}$ = ...

(أ) $(٦ ، ٠ ، ٦\sqrt{٣})$ (ب) $(٦ ، ٦\sqrt{٣} ، ٦)$ (جـ) $(٦\sqrt{٣} ، ٦ ، ٠)$ (د) $(٦\sqrt{٣} ، ٦ ، ٦)$

---

⑨ إذا كان θ هي الزاوية التي يضعها المتجه $(٠ ، \sqrt{٣} ، ١)$ مع الاتجاه الموجب لمحور الصادات فان

جاθ = ...

(أ) $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ (ب) صفر (جـ) ١ (د) $\frac{١}{٢}$

---

⑩ إذا كان م، ل، ن هي جيوب زوايا الاتجاه للمتجه $\overline{أ}$ فان........

(أ) م + ل + ن = ١ (ب) م = ل = ن

(جـ) $م^٢ + ل^٢ + ن^٢ = ٢$ (د) م + ل + ن = $\|\overline{أ}\|$

أسئلة مقالية

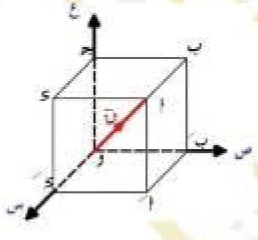
إذا كان $\overline{أ}$ ، $\overline{ب}$ متجهين اوجد قيمة $٣\left\|\frac{\overline{أ}}{\|\overline{أ}\|}\right\| + ١٨\left\|\frac{\overline{ب}}{\|\overline{ب}\|}\right\|$

[٢١]

② في الشكل المقابل

مكعب طول ضلعة ٥ وحدة طول ق قوة معيارها ٢٥ نيوتن

اوجد متجه القوة $\overline{ق}$ بدلالة متجه الوحدة الأساسية



$$\left[\left(\frac{٢٥}{\sqrt{٣}} ، \frac{٢٥}{\sqrt{٣}} ، \frac{٢٥}{\sqrt{٣}}\right)\right]$$

إجابات اختر

١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩	١٠
د	جـ	أ	جـ	أ	جـ	د	أ	د	جـ