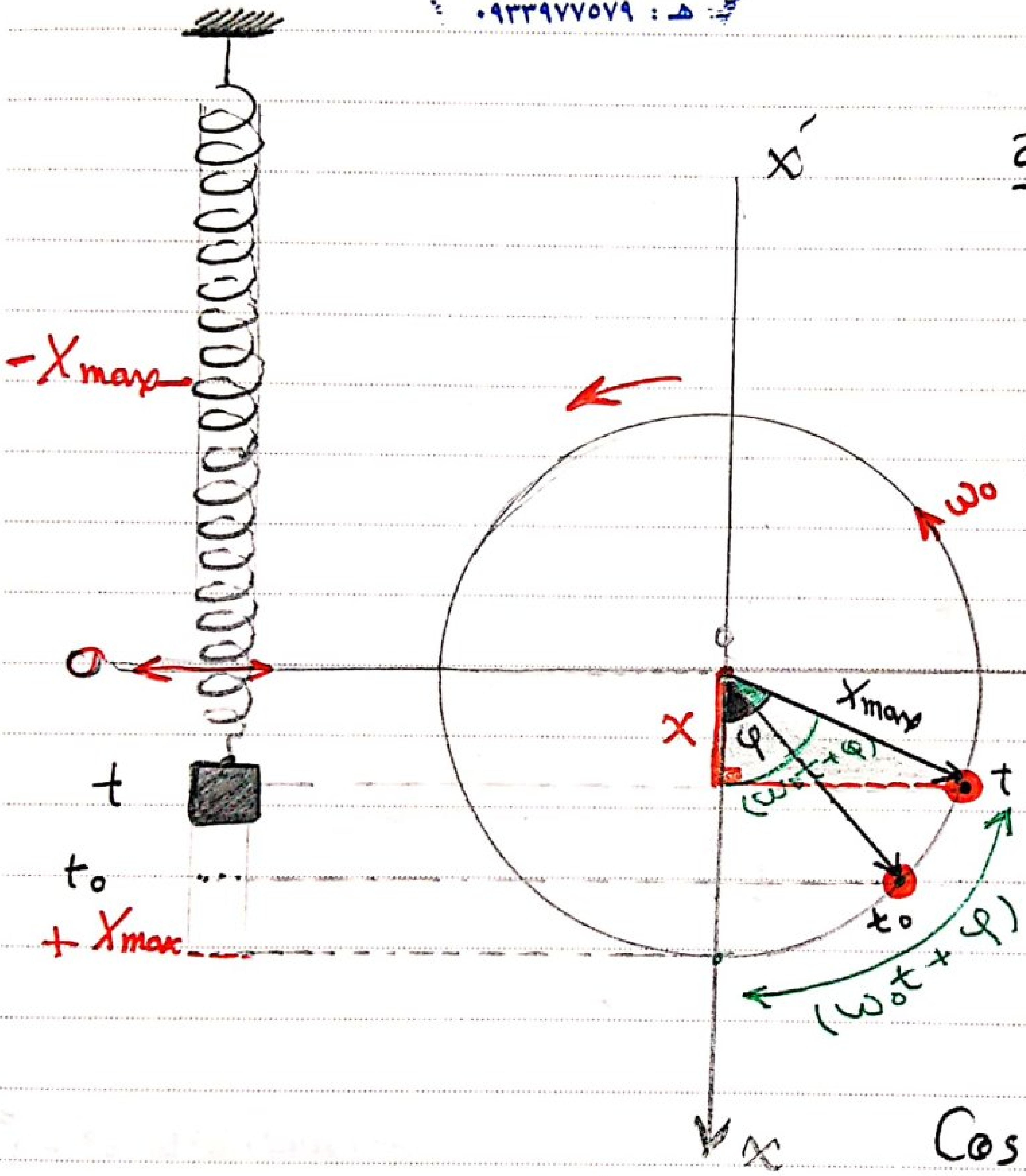
العلاقة بين الحركة الدائرية المنتظمة والحركة التوافقية البسيطة

«تمثيل فرينل»

الأستاذ محمد شتيوي
فيزياء - كيمياء
هـ : ٠٩٣٣٩٧٧٥٧٩

يمثل شعاع فرينل $\overrightarrow{OM}$.



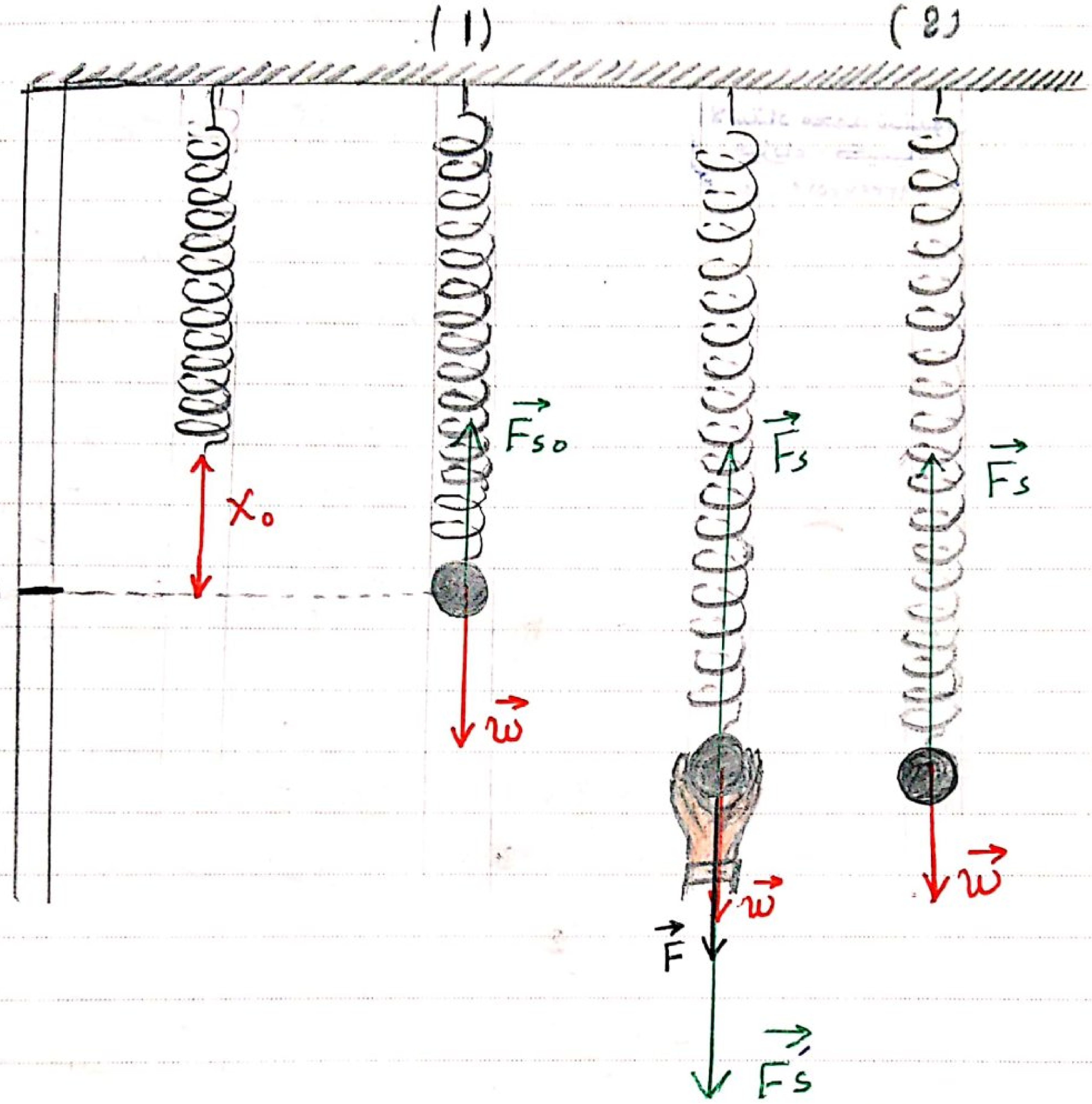
- طويلته X_{max}
- φ: الطور الابتدائي هو الزاوية بين الشعاع $\overrightarrow{OM}$ والمحور $\overrightarrow{x'x}$ في اللحظة $t=0$
- طور الحركة $(\omega_0 t+\varphi)$ هو الزاوية الكائنة بين الشعاع $\overrightarrow{OM}$ و $\overrightarrow{x'x}$ في اللحظة t
- ω_0 النبض الخاص للحركة يقابل السرعة الزاوية الثابتة الذي يدور بها الشعاع
- x هو مسقط الشعاع على المحور $\overrightarrow{x'x}$

$$\cos(\omega_0 t+\varphi) = \frac{x}{X_{max}}$$

$$x = X_{max}\cdot\cos(\omega_0 t+\varphi)$$

التابع الزمني للحركة هو تابع جيبي لذلك تسمى الحركة جيبية انسحابية توافقية بسيطة

س: برهن أن محصلة القوى المؤثرة على الجسم المهتز في النواس المرن هي قوة إرجاع من الشكل $F = -KX$



أ- في حالة السكون:

القوى المؤثرة في الجسم:

$\vec{w}$: ثقل الجسم $\vec{F}_{s0}$ قوة توتر النابض.

$$\sum \vec{F} = \vec{0} \Rightarrow \vec{w} + \vec{F}_{s0} = \vec{0}$$

بالإسقاط على محور شاقولي موجه للأسفل.

$$w - F_{s0} = 0 \Rightarrow w = F_{s0}$$

$$F_{s0} = F'_{s0} = KX_0 \Rightarrow \boxed{w = KX_0} \quad (1)$$

ج- حالة الحركة

نزيح الجسم شاقولياً نحو الأسفل مسافة x ونتركه دون سرعة البدائية.

القوى المؤثرة على الجسم: $\vec{w}$ قوة ثقل الجسم

$\vec{F_s}$ قوة توتر النابض

$$\sum \vec{F} = m \cdot \vec{a} \Rightarrow \vec{w} + \vec{F_s} = m \cdot \vec{a}$$

بالإسقاط على محور شاقولي موجه للأسفل:

$$w - F_s = m \cdot a \quad ----- \ (2)$$

ولكن:

$$F_s = F_s' = k(x + x_0) \quad ---- \ (3)$$

نعوض (1) و (3) في (2) نجد:

$$k x_0 - k(x + x_0) = m \cdot a$$

الأستاذ محمد شتيوي
فيزياء - كيمياء
هـ : ٠٩٣٣٩٧٧٥٧٩

$$k x_0 - kx - k x_0 = m \cdot a$$

$$m \cdot a = -kx$$

$$\Rightarrow F = -k x$$

الاستطالة (المطال) (m)

قوة الإرجاع

ثابت صلابة النابض $(N \cdot m^{-1})$

نستنتج أن قوة الإرجاع تتناسب طرداً مع المطال وتعاكسه بالإشارة

ومحصلة القوى الخارجية المؤثرة في مركز عطالة الجسم في كل لحظة هو قوة إرجاع لأنها تعيد الجسم إلى مركز الاهتزاز.

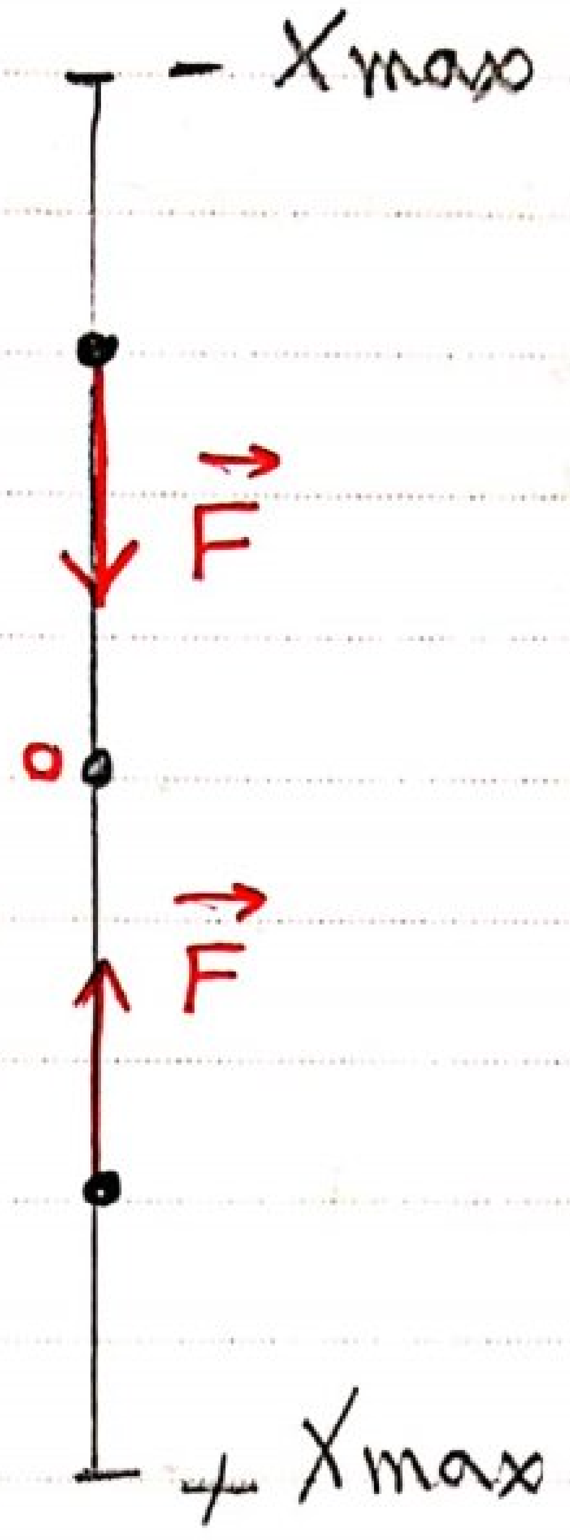
ملاحظة :

طلب بـ قوة الأرجاع نكتب .

$$F = -K x$$

أما إذا طلب منا حساب شدة قوة الارجاع نحسب $F = -K x$ ونجعل الجواب بالقيمة المطلقة .

ووحدتها (N) .



المعادلة التفاضلية

س: إن محصلة القوى الخارجية التي يخضع لها مركز عطالة الجسم هي $F = -kx$. برهن أن طبيعة حركة النواس المرن هي جيبية انسحابية توافقية بسيطة .

$$F = -K X$$

$$m \cdot a = -K x \Rightarrow m \cdot (x)''_t = -K x$$

$$(X)''_t = -\frac{k}{m} \cdot X \quad ---- \; (1)$$

هي معادلة تفاضلية من المرتبة الثانية تقبل حلاً جيبياً من الشكل

$$X = X_{max} \cdot \cos(\omega_0 t + \varphi)$$

$$(X)'_t = -\omega_0 \cdot X_{max} \cdot \sin(\omega_0 t + \varphi)$$

$$(x)''_t = -\omega_0^2 \cdot \underbrace{X_{max} \cdot \cos(\omega_0 t + \varphi)}_{x}$$

$$(X)''_t = -\omega_0^2 \cdot X \quad ----- \quad (2)$$

بمطابقة (1) مع (2) نجد

$$\omega_0^2 = \frac{K}{m} \Rightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{K}{m}} > 0$$

وهذا محقق لأن K و m موجبات ⇐

أن حركة النواس المرن هي جيبية انسحابية (توافقية بسيطة)

س1: استنتج علاقة الدور الخاص T_0 للنواس المرن

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{K}{m}} \quad ، \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$$

$$\frac{2\pi}{T_0} = \sqrt{\frac{K}{m}}$$

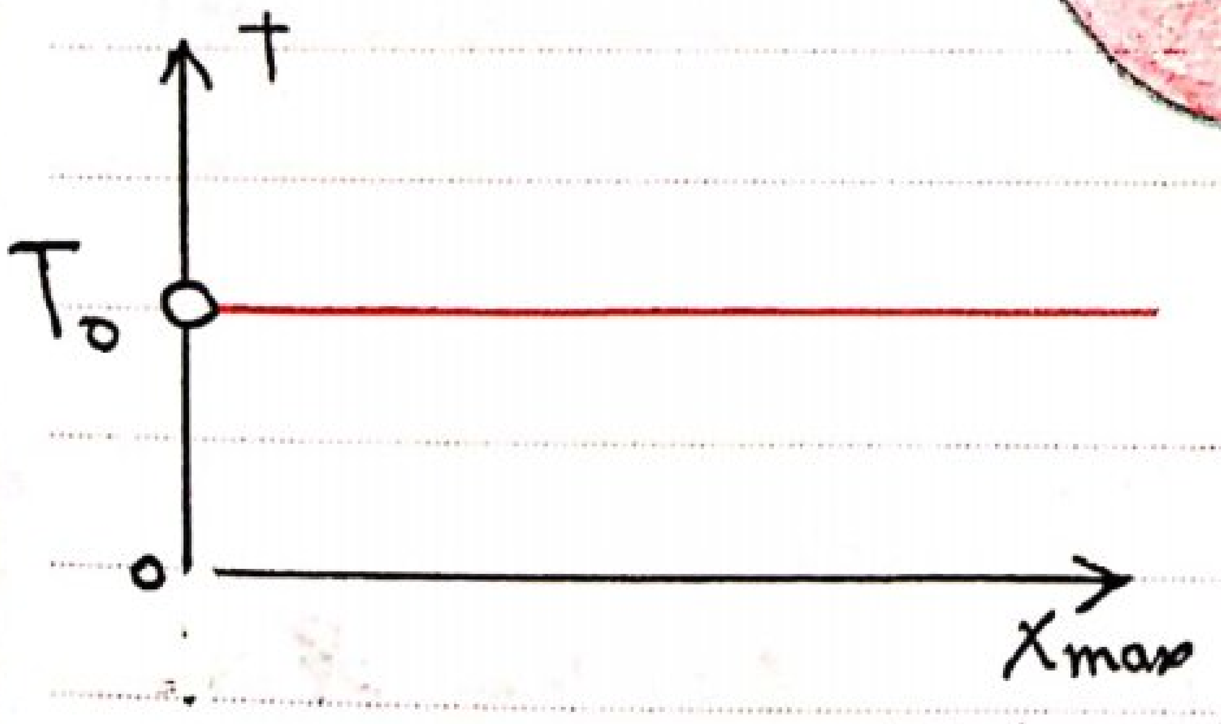
الأستاذ محمد شتيوي
فيزياء - كيمياء
هـ : ٠٩٣٣٩٧٧٥٧٩

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{K}}$$

الدور الخاص (s) ← T_0

m → كتلة الجسم المهتز (kg)

K → ثابت صلابة النابض $(N.m^{-1})$



نستنتج أن T_0

أ- لا تتعلق بسعة الاهتزاز X_{max}

ب- تتناسب طرداً مع الجذر التربيعي لكتلة الجسم المهتز m (kg)

ج- تتناسب عكساً مع الجذر التربيعي لثابت صلابة النابض K $(N.m^{-1})$

توابع حركة النواس المرن :

① : تابع المطال .

الشكل العام للتابع الزمني للمطال : $x = X_{max} \cos(\omega_0 t + \varphi)$

ما شكل هذا التابع بفرض $t = 0$ $x = +X_{max}$

نعوض في الشكل العام

$$X_{max} = X_{max} \cdot \cos(0 + \varphi) \Rightarrow X_{max} = X_{max} \cdot \cos\varphi$$

$$\cos\varphi = 1 \Rightarrow \varphi = 0\,rad.$$

ويكون شكل التابع مختزلاً .

$$x = X_{max} \cdot \cos\omega_0 t .$$

نعوض $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$

$$x = X_{max} \cdot \cos \frac{2\pi}{T_0} \cdot t .$$

املأ الجدول الآتي :

t	0	$\frac{T_0}{4}$	$\frac{T_0}{2}$	$\frac{3T_0}{4}$	T_0
x	$+X_{max}$	0	$-X_{max}$	0	$+X_{max}$

* عندما $t = 0$

$$x = X_{max} \cdot \cos \frac{2\pi}{T_0}(0) \Rightarrow x = X_{max} \cos(0)$$

$$x = +X_{max}$$

* $t = \frac{T_0}{4}$

$$x = X_{max} \cdot \cos \frac{2\pi}{T_0} \cdot \frac{T_0}{4} \Rightarrow x = X_{max} \cdot \cos \frac{\pi}{2}$$

$$x = X_{max}\,(0)$$

$$x = 0$$

* $t = \frac{T_0}{2}$ ⇐ $X = X_{max}\cdot\cos\frac{2\pi}{T_0}\cdot\frac{T_0}{2}$

$X = X_{max}\cdot\cos\pi \Rightarrow X = X_{max}(-1) \Rightarrow X = -X_{max}$

* $t = \frac{3T_0}{4}$ ⇐ $X = X_{max}\cdot\cos\frac{2\pi}{T_0}\cdot\frac{3T_0}{4}$

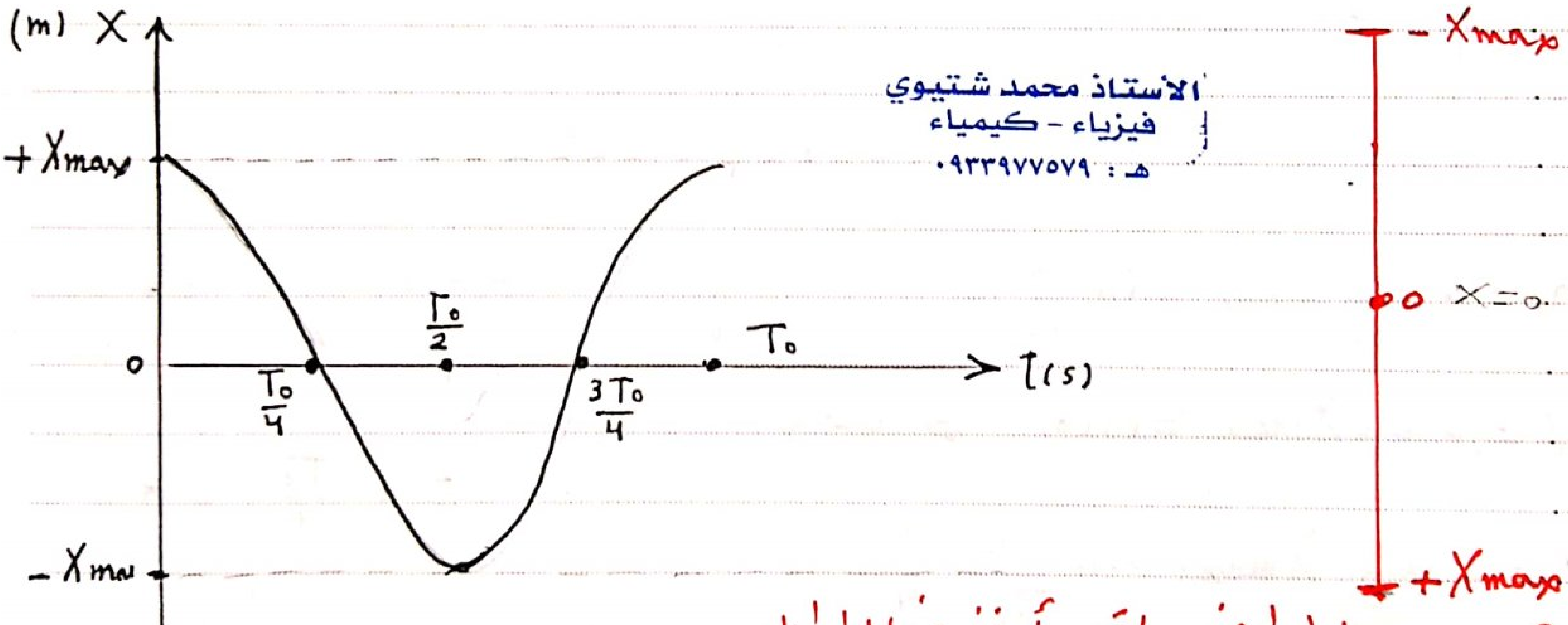
$X = X_{max}\cdot\cos\frac{3\pi}{2} \Rightarrow X = X_{max}(0) \Rightarrow X = 0$

* $t = T_0$

$X = X_{max}\cdot\cos\frac{2\pi}{T_0}\cdot T_0 \Rightarrow X = X_{max}\cdot\cos 2\pi$

$X = X_{max}(+1) \Rightarrow X = +X_{max}$

1- ارسم المنحني البياني لتغيرات المطال بدلالة الزمن خلال دور



2- حدد المواضع التي يأخذ فيها المطال

(a) - قيمة عظمى طويلة.

تكون المواضع التي يأخذ فيها المطال قيمة عظمى طويلة $X = |\pm X_{max}|$

(b) - قيمته معدومة.

تكون قيمة المطال معدومة $X = 0$ في مركز الاهتزاز.

2: تابع السرعة:

س: انطلاقاً من علاقة تابع المطال في النواس المرن.

$$x = X_{max} . \cos \omega_0 t$$

1- استنتج علاقة تابع السرعة:

$$\bar{v} = (\bar{x})'_t$$

$$v = -\omega_0 X_{max} . \sin \omega_0 t .$$

نعوض: $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$

$$v = -\omega_0 X_{max} . \sin \frac{2\pi}{T_0} . t .$$

2- اكمل الجدول الآتي:

t	0	$\frac{T_0}{4}$	$\frac{T_0}{2}$	$3\frac{T_0}{4}$	T_0
v	0	$-\omega_0 X_{max}$	0	$+\omega_0 X_{max}$	0

*: $t = 0$

$$v = -\omega_0 . X_{max} . \sin \frac{2\pi}{T_0} . (0)$$

$$v = -\omega_0 X_{max} \sin(0) \Rightarrow v = 0$$

*: $t = \frac{T_0}{4}$

$$v = -\omega_0 . X_{max} . \sin \frac{2\pi}{T_0} . \frac{T_0}{4}$$

$$v = -\omega_0 . X_{max} . \sin \frac{\pi}{2} \Rightarrow v = -\omega_0 X_{max} .$$

* $t = \frac{T_0}{2}$

$$v = -\omega_0 . X_{max} . \sin \frac{2\pi}{T_0} . \frac{T_0}{2} \Rightarrow v = -\omega_0 X_{max} (-1)$$

$$v = +\omega_0 X_{max} .$$

* $t = \frac{3T_0}{2}$

$$v = -\omega_0 . X_{max} . \sin \frac{2\pi}{T_0} . \frac{3T_0}{2}$$

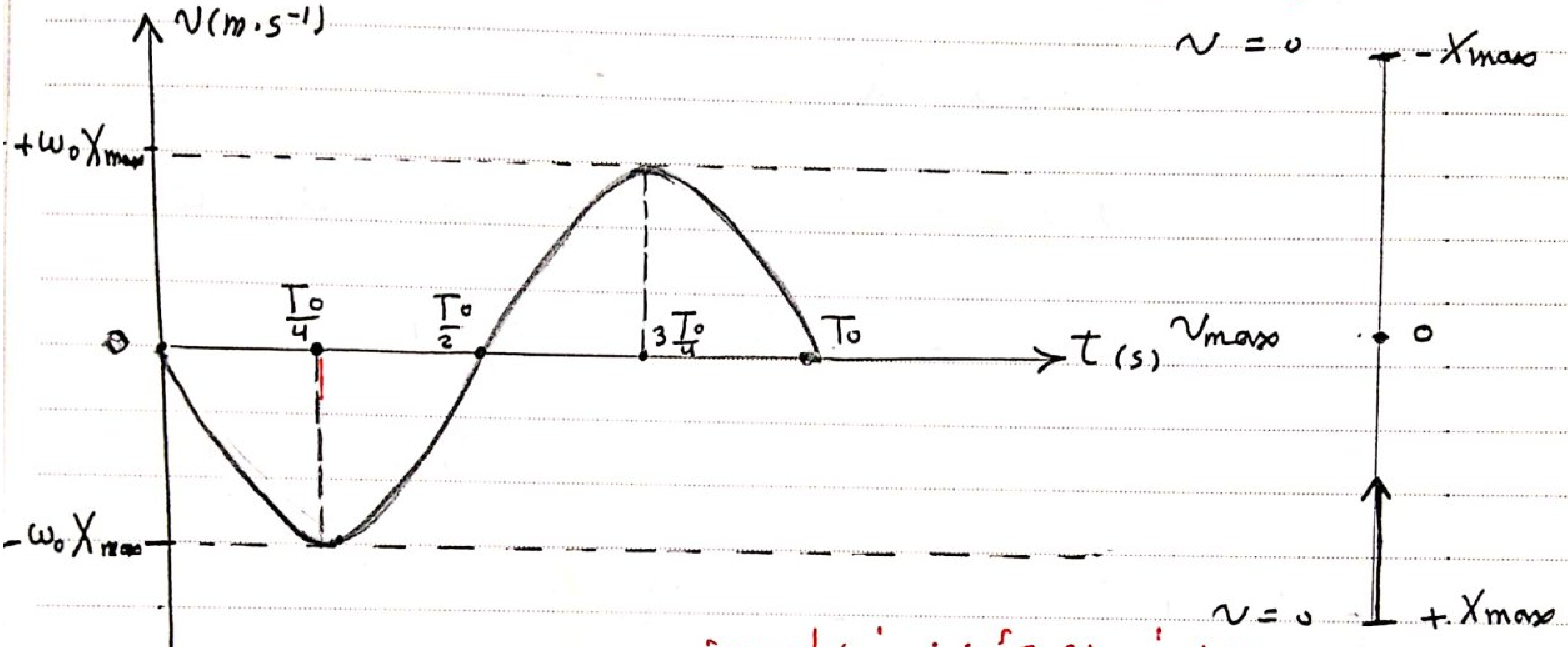
$$v = -\omega_0 X_{max} \sin \frac{3\pi}{2} = \cancel{+} \omega_0 X_{max}$$

$t = T_0$ *

$$v = -\omega_0 X_{max} \cdot \sin \frac{2\pi}{T_0} \cdot T_0$$

$$v = -\omega_0 X_{max} \cdot \sin(\pi) \Rightarrow v = 0$$

3- ارسم المنحني البياني لتغيرات السرعة بدلالة الزمن خلال دور.



4- حدد المواضع التي تأخذ فيها السرعة

a. قيمة عظمى (طويلة). لحظة المرور في مركز الاهتزاز: $X = 0$

$$v_{max} = |\pm \omega_0 X_{max}|$$

الأستاذ محمد شتيوي
فيزياء - كيمياء
هـ: ٠٩٣٣٩٧٧٥٧٩

b. قيمة السرعة معدومة. لحظة المرور في المطالين الأعظميين (الموضعين الطرفيين).

$$X = \pm X_{max}$$

3 : تابع التسارع .

س - انطلاقا من علاقة تابع السرعة في النواس المرن

$$v = -\omega_0 \cdot X_{max} \cdot \sin \omega_0 t$$

1 - 1 استنتج علاقة تابع التسارع :

$$(\bar{a}) = (\bar{v})'_t = (\bar{x})''_t$$

$$\bar{a} = -\omega_0^2 \cdot \underbrace{X_{max} \cdot \cos \omega_0 t}$$

$a = -\omega_0^2 \cdot x$. تابع التسارع بدلالة المطال .

$$a = -\omega_0^2 \cdot X_{max} \cdot \cos \frac{2\pi}{T_0} \cdot t$$

2 - أكمل الجدول الآتي -

t	0	$\frac{T_0}{4}$	$\frac{T_0}{2}$	$\frac{3T_0}{4}$	T_0
a	$-\omega_0^2 X_{max}$	0	$+\omega_0^2 \cdot X_{max}$	0	$-\omega_0^2 X_{max}$

• $t = 0$

$$a = -\omega_0^2 \cdot X_{max} \cdot \cos(0) \Rightarrow a = -\omega_0^2 \cdot X_{max}$$

• $t = \frac{T_0}{4}$

$$a = -\omega_0^2 \cdot X_{max} \cos \frac{2\pi}{T_0} \cdot \frac{T_0}{4} = -\omega_0^2 \cdot X_{max} \cdot \cos \frac{\pi}{2} = 0$$

• $t = \frac{T_0}{2}$.

$$a = -\omega_0^2 \cdot X_{max} \cdot \cos \frac{2\pi}{T_0} \cdot \frac{T_0}{2} = -\omega_0^2 \cdot X_{max} \cdot \cos \pi$$

$$\Rightarrow a = +\omega_0^2 \cdot X_{max} .$$

• $t = \frac{3T_0}{4}$.

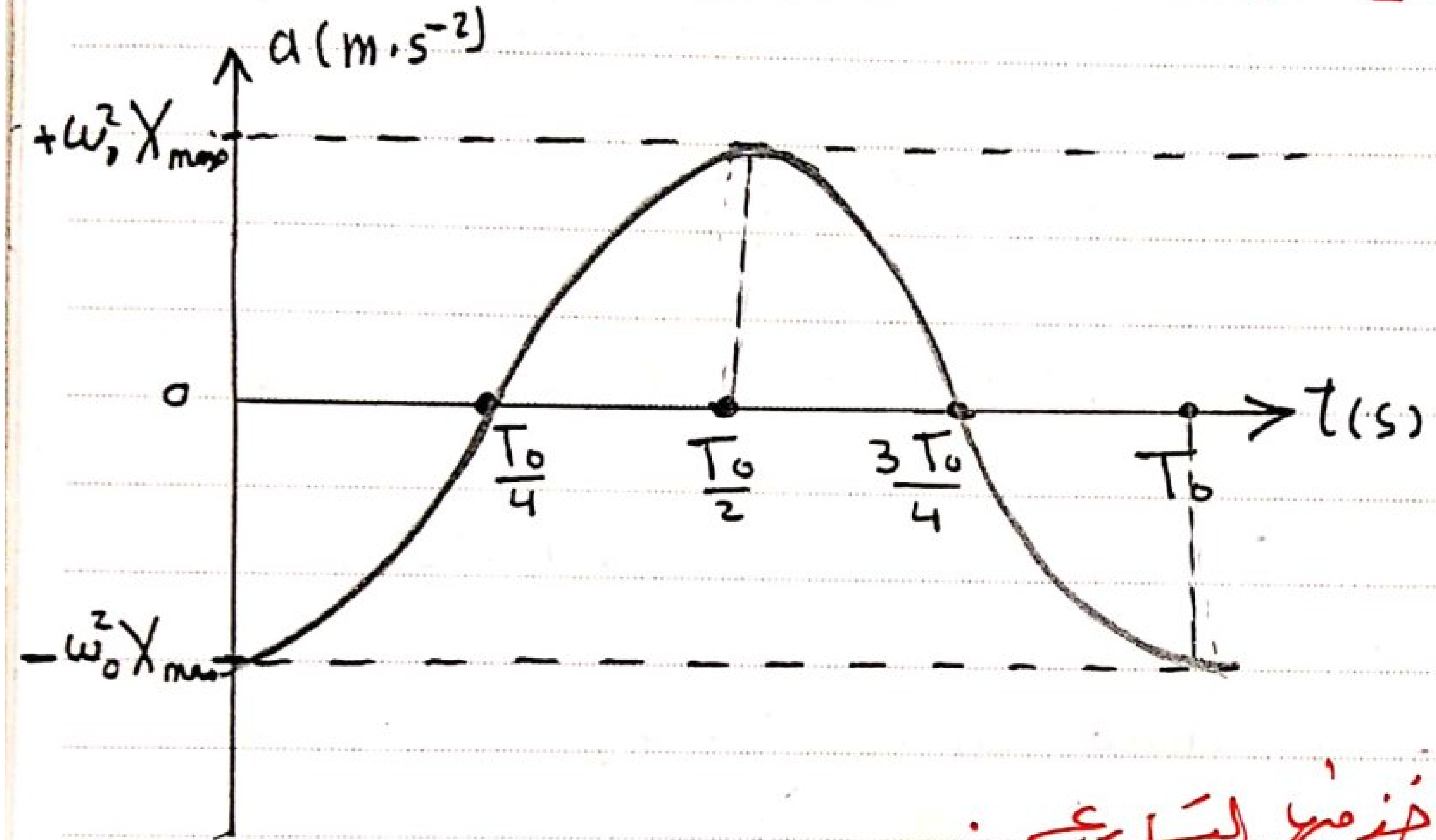
$$a = -\omega_0^2 \cdot X_{max} \cdot \cos \frac{2\pi}{T_0} \cdot \frac{3T_0}{4} = -\omega_0^2 \cdot X_{max} \cdot \cos \frac{3\pi}{2} = 0$$

$\bullet \; t = T_0$

$$a = -\omega_0^2 . X_{max} . \cos \frac{2\pi}{T_0} . T_0 = -\omega_0^2 . X_{max} . \cos 2\pi$$

$$a = -\omega_0^2 . X_{max}$$

3 - أرسم المخطط البياني لتغيرات التسارع بدلالة الزمن خلال دور.



الأستاذ محمد شتيوي
فيزياء - كيمياء
هـ : ٠٩٣٣٩٧٧٥٧٩

4 - حدد المواضع التي يأخذ فيها التسارع.

ⓐ. قيمة عظمى طويلة:

عندما يكون الجسم في الوضعين الطرفيين $X = \pm X_{max}$

$$a_{max} = |\pm \omega_0^2 X_{max}|$$

ⓑ. قيمة معدومة.

عندما يكون الجسم في مركز الاهتزاز $X = 0$

$a = 0$

ملاحظة:

التسارع غير ثابت تتغير قيمته بتغير المطال

* الطاقة في الحركة التوافقية البسيطة :

ا ستنتج علاقة الطاقة في الحركة التوافقية البسيطة .

$$E_{tot} = E_p + E_k \quad ---- (1)$$

$$E_p = \frac{1}{2} K x^2$$ طاقة كامنة مرونية .

$$x = X_{max} . \cos(\omega_0 t + \varphi)$$

$$E_p = \frac{1}{2} K . X_{max}^2 . \cos^2(\omega_0 t + \varphi) \quad ---- (2)$$

$$E_k = \frac{1}{2} m v^2$$ الطاقة الحركية

$$v = -\omega_0 . X_{max} . \sin(\omega_0 t + \varphi)$$

$$E_k = \frac{1}{2} m \omega_0^2 . X_{max}^2 . \sin^2(\omega_0 t + \varphi)$$

$$\omega_0^2 = \frac{K}{m} \Rightarrow K = \omega_0^2 . m$$

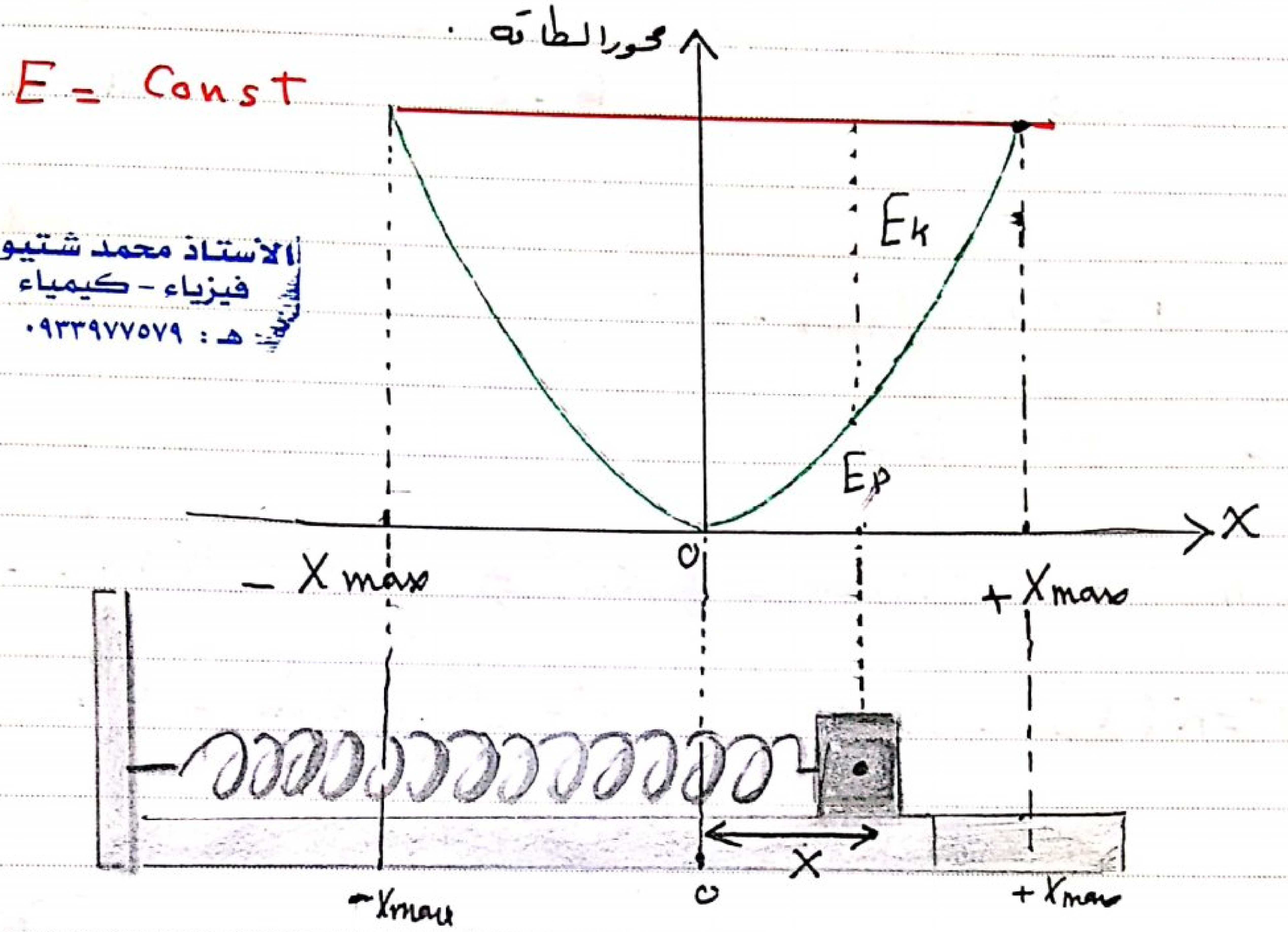
$$E_k = \frac{1}{2} K X_{max}^2 . \sin^2(\omega_0 t + \varphi) \quad ---- (3)$$

نعوض (2) و (3) في (1)

$$E_{tot} = \frac{1}{2} K X_{max}^2 . \cos^2(\omega_0 t + \varphi) + \frac{1}{2} K X_{max}^2 \sin^2(\omega_0 t + \varphi)$$

$$E_{tot} = \frac{1}{2} K X_{max}^2 \left[\cos^2(\omega_0 t + \varphi) + \sin^2(\omega_0 t + \varphi)\right]$$

$$\boxed{E_{tot} = \frac{1}{2} K X_{max}^2 = Const}$$



• في الوضعين الطرفيين تكون الطاقة على شكل الطاقة الكامنة المرونية

$E = E_p$

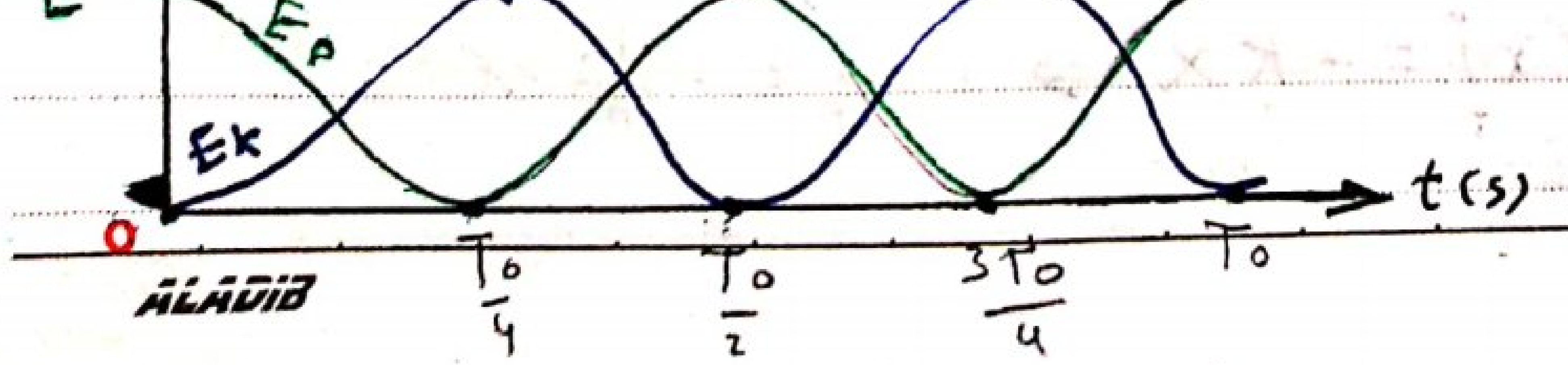
وتنعدم الطاقة الحركية لأن $v = 0$

• في المركز للاهتزاز تكون الطاقة الكلية على شكل طاقة حركية

$E = E_k$

وتنعدم الطاقة الكامنة المرونية $E_p = 0 \Leftarrow x = 0$

• ارسم الخط البياني لتغيرات الطاقة الكامنة والحركية خلال دور لجسم يهتز ومعادلة المطال $x = X_{max} \cos \omega t$ خلال دور



$\overline{X} = X_{max} \cdot \cos(\omega_0 t + \overline{\varphi})$ ، $\overline{v} = -\omega_0 X_{max} \sin(\omega_0 t + \overline{\varphi})$

$\overline{a} = -\omega_0^2 \overline{X}$

$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$ ، $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$ ، $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$

$\overline{F} = -k \overline{X}$

$E_p = \frac{1}{2} k X^2$ ، $E = \frac{1}{2} k X_{max}^2$

$E_k = E - E_p$

الأسئلة والتدريبات:

أولاً.

1- a 2- c 3- d.

ثانياً.

(1)

$$v = \omega_0 \sqrt{X_{max}^2 - X^2}$$

$$E_k = E - E_p$$

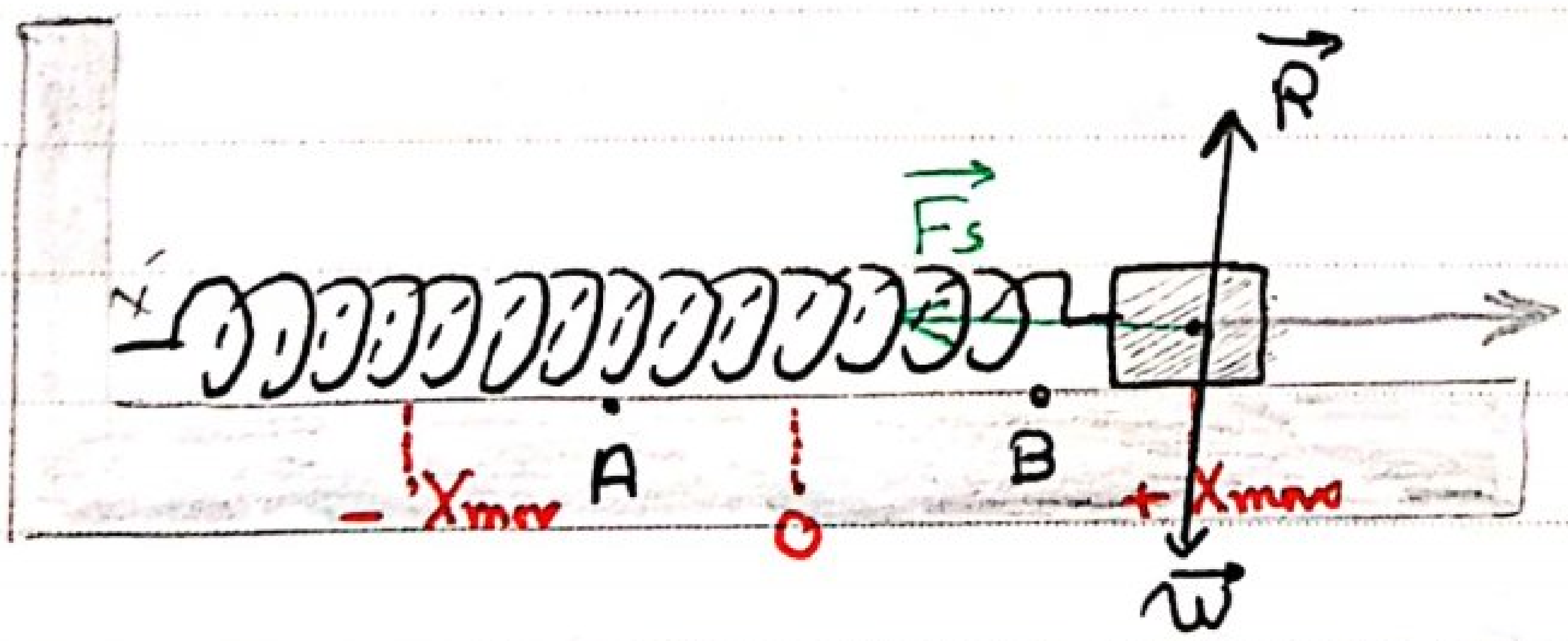
$$\frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} k X_{max}^2 - \frac{1}{2} k X^2 \Rightarrow m v^2 = k X_{max}^2 - k X^2$$

$$m v^2 = k (X_{max}^2 - X^2) \Rightarrow v^2 = \frac{k}{m} . (X_{max}^2 - X^2)$$

$$\frac{k}{m} = \omega_0^2$$

$$v^2 = \omega_0^2 (X_{max}^2 - X^2) \Rightarrow \boxed{v = \omega_0 \sqrt{X_{max}^2 - X^2}}$$

(2)



(a). القوى المؤثرة

$\vec{W}$ ثقل الجسم

$\vec{R}$ رد الفعل

$\vec{F_s}$ قوة توتر النابض

$$\sum \vec{F} = m . \vec{a} \Rightarrow \vec{W} + \vec{R} + \vec{F_s} = m \vec{a}$$

بالإسقاط على محور $\overrightarrow{x'x}$

$$0 + 0 - F_s = m . a$$

ولكن $F_s = F'_s = k X$ ، F'_s : هي القوة التي سببت الاستطالة x

$$-kX = m . a \Rightarrow m (x)''_t = -kx \Rightarrow (x)''_t = -\frac{k}{m} . X$$

$$(x)''_t = -\frac{K}{m} \cdot x \quad ---- ①$$

هي معادلة تفاضلية من المرتبة الثانية تقبل حلاً جيبياً من الشكل

$$\bar{x} = X_{max} \cdot \cos(\omega_0 t + \bar{\varphi})$$

للتحقق من صحة الحل:

$$(\bar{x})'_t = -\omega_0 \cdot X_{max} \cdot \sin(\omega_0 t + \bar{\varphi})$$

$$(\bar{x})''_t = -\omega_0^2 \cdot X_{max} \cdot \cos(\omega_0 t + \bar{\varphi})$$

الأستاذ محمد شتيوي
فيزياء - كيمياء
هـ : ٠٩٣٣٩٧٧٥٧٩

$$(\bar{x})''_t = -\omega_0^2 \cdot \bar{x} \quad ---- ②$$

بمقارنة ① و ②

$$\omega_0^2 = \frac{K}{m} \Rightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{K}{m}} > 0$$ محقق لأن K ، m موجبان .

حركة الجسم جيبية انسحابية وتابع مطالها: $x = X_{max} \cdot \cos(\omega_0 t + \varphi)$

ط) استنتاج علاقة الطاقة الحركية بدلالة X_{max} .

$$E_k = E_{tot} - E_p$$

$$E_k = \frac{1}{2} K X_{max}^2 - \frac{1}{2} K x^2 \Rightarrow E_k = \frac{1}{2} K (X_{max}^2 - x^2)$$

$$\bar{x}_A = -\frac{X_{max}}{2}$$

$$E_{k_A} = \frac{1}{2} K \left(X_{max}^2 - \frac{X_{max}^2}{4}\right) = \frac{3}{4}\left[\frac{1}{2} K X_{max}^2\right] = \frac{3}{4} E_{tot}.$$

$$\bar{x}_B = \frac{X_{max}}{\sqrt{2}}$$

$$E_{k_B} = \frac{1}{2} K \left(X_{max}^2 - \frac{X_{max}^2}{2}\right) = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2} K X_{max}^2\right] = \frac{1}{2} E_{tot}$$

النتيجة . تنقص الطاقة الحركية للجسم بازدياد مطاله وبالتالي تزداد الطاقة الكامنة .

3 - لحظة الانفصال يخضع الجسم لقوة ثقله :

$\vec{W} = m \cdot \vec{g}$ $\sum \vec{F} = m \cdot \vec{a}$

$\Rightarrow m\vec{g} = m \cdot \vec{a}$

$\vec{a} = \vec{g} = ConsT$.

a - قذف شاقولي للأعلى لأن الجسم يمتلك سرعة ابتدائية تكون حركته مستقيمة متغيرة بانتظام متباطئة في الطور الأول، وفي الطور الثاني . سقوط حر : متسارعة بانتظام

b - سقوط حر : لأن الجسم حركته محدودة في $+X_{max}$ والحركة مستقيمة متسارعة .

ثالثاً : حل المسائل .

المسألة الأولى :

$K = 10 \ N \cdot m^{-1}$, $\bar{x} = 0.1 \ Cos\left(\pi t + \frac{\pi}{2}\right)$

$\bar{x} = X_{max} \ Cos\left(\omega_0 t + \bar{\varphi}\right)$

1 - بالمقارنة نجد :

$X_{max} = 0.1 \ m$, $\omega_0 = \pi \ rad \cdot s^{-1}$, $\varphi = \frac{\pi}{2} rad$.

$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{2\pi}{\pi} = 2s$,

2 - حساب الكتلة :

$\omega_0^2 = \frac{K}{m} \Rightarrow m = \frac{K}{\omega_0^2} = \frac{10}{\pi^2} = \frac{10}{10} = 1 Kg$

3 -

$v = \omega_0 \sqrt{X_{max}^2 - x^2} \Rightarrow v = \pi \sqrt{10^{-2} - 25 \times 10^{-4}}$

$v = \pi \sqrt{100 \times 10^{-4} - 25 \times 10^{-4}} = \pi \sqrt{(100 - 25) \times 10^{-4}} = \pi \sqrt{75 \times 10^{-4}}$

$$v = \pi\sqrt{25\times3\times10^{-2}} = \pm5\pi\sqrt{3}\times10^{-2}\,m.s^{-1}$$

$$v = 5\pi\sqrt{3}\times10^{-2}\,m.s^{-1}$$ بالاتجاه الموجب

④ $t = 0$

$$\Rightarrow x = 0.1\cos(\pi(0)+\frac{\pi}{2}) = 0.1\cos\frac{\pi}{2} = 0.1\times0 = 0$$

في مركز الاهتزاز.

الأستاذ محمد شتيوي
فيزياء - كيمياء
هـ: ٠٩٣٣٩٧٧٥٧٩

المسألة الثانية:

$m = 0.4\,kg$ ، $E_{tot} = 5\times10^{-2}\,(J)$ ، $X_{max} = 10\times10^{-2} = 10^{-1}\,m.$

① حساب K:

$$E_{tot} = \frac{1}{2}K X_{max}^2 \Rightarrow K = \frac{2E_{tot}}{X_{max}^2} = \frac{2\times5\times10^{-2}}{(10^{-1})^2} = 10\,N.m^{-1}$$

②.

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{K}} = 2\pi\sqrt{\frac{4\times10^{-1}}{10}} = 2\pi\sqrt{4\times10^{-2}} = 4\pi.10^{-1}\,s$$
$$= 0.4\pi\,s$$

③ـ عند المرور في مركز الاهتزاز تكون $v = v_{max}$

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = \frac{2\pi}{0.4\pi} = 5\,rad.s^{-1}$$

$$v = \pm\omega_0 X_{max} = \pm 5.10^{-1} = \pm 0.5\,m.s^{-1}.$$

أو: عند مركز الاهتزاز $x = 0 \Rightarrow E_p = 0$

$$E_{tot} = E_k \Rightarrow E_{tot} = \frac{1}{2}mv^2$$

$$v = \sqrt{\frac{2E_{tot}}{m}} = \sqrt{\frac{2\times0.05}{0.4}} = \sqrt{\frac{0.1}{0.4}} = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2} = 0.5\,m.s^{-1}.$$

المسألة الثالثة

$m = 1\,kg$ ، $\left(n = 10 \quad t = 8s \quad T_0 = \frac{t}{n} = \frac{8}{10} = 0.8\,s. \right)$ $T_0 = \frac{4}{5}\,s$

$2X_{max} = 24 \times 10^{-2}\,m \Rightarrow X_{max} = 12 \times 10^{-2}\,m.$

1 في حالة السكون :

القوى المؤثرة على الجسم $\vec{w}$ ثقل الجسم

$\vec{F}_{s_0}$: قوة توتر النابض

$$\Sigma \vec{F} = \vec{0}$$

$$\vec{w} + \vec{F}_{s_0} = \vec{0}$$

بالإسقاط على محور شاقولي نحو الأسفل.

$w - F_{s_0} = 0 \Rightarrow w = F_{s_0}$

ولكن $F_{s_0} = F'_{s_0} = K X_0$

$$\Rightarrow w = K X_0 \Rightarrow m.g = K X_0$$

$$\Rightarrow X_0 = \frac{m.g}{K} = \frac{1 \times 10}{K}$$

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = \frac{2\pi}{\frac{4}{5}} = \frac{10\pi}{4} = \frac{5\pi}{2}\,rad.s^{-1}$$ ط ب : K

$$\omega_0^2 = \frac{K}{m} \Rightarrow K = \omega_0^2 . m = \left(\frac{5\pi}{2}\right)^2 . 1 = \frac{25\pi^2}{4} = \frac{250}{4}$$

$$K = 62.5\,N.m^{-1}$$

$$X_0 = \frac{1 \times 10}{62.5} = \frac{10}{62.5} = 0.16\,m.$$

② حساب قيمة السرعة العظمى طويلة

$$v_{max} = \left| \pm \omega_0 X_{max} \right| = \left| \pm 5\frac{\pi}{2} \times 12 \times 10^{-2} \right| = 3\pi \times 10^{-1} = 0.3\pi m.s^{-1}$$

③ $x = 10 \times 10^{-2} = 10^{-1} m$

$$a = -\omega_0^2 . X = -\left(\frac{5\pi}{2}\right)^2 \times 10^{-1} = -\frac{250}{4} \times 10^{-1} = -6.25 m.s^{-2}$$

④ $x = -4 \times 10^{-2} m$

$$E_p = \frac{1}{2} K X^2 = \frac{1}{2} 62.5 (-4 \times 10^{-2})^2 = 5 \times 10^{-2} J.$$

$$E_{tot} = \frac{1}{2} K X_{max}^2 = \frac{1}{2} 62.5 (12 \times 10^{-2})^2 = 45 \times 10^{-2} J.$$

$$E_k = E_{tot} - E_p = 45 \times 10^{-2} - 5 \times 10^{-2} = 40 \times 10^{-2} J.$$

المسألة الرابعة

$K = 16 N.m^{-1}$ ، $T_0 = 1 m$ ، $X_{max} = 0.1 m$.

$t = 0 ; X = \frac{X_{max}}{2}$ ، $v < 0$

① $\bar{X} = X_{max} . \cos(\omega_0 t + \bar{\varphi})$

$X_{max} = 0.1 m$ ، $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = \frac{2\pi}{1} = 2\pi rad.s^{-1}$

• $t = 0$ $X = \frac{X_{max}}{2}$ ، $v < 0$

$$\frac{X_{max}}{2} = X_{max} . \cos\varphi \Rightarrow \cos\varphi = \frac{1}{2}$$

$$\varphi \begin{cases} \frac{\pi}{3}\ rad \\ \frac{5\pi}{3}\ rad. \end{cases}$$

نقبل φ التي تجعل $v < 0$ في $t=0$

$$v = -\omega_0 . X_{max} \sin(\omega_0 t + \varphi)$$

في اللحظة $t=0$

$$v = -\omega_0 . X_{max} . \sin\varphi$$

إما $\varphi = \frac{\pi}{3}\ rad$

$$v = -\omega_0 . X_{max} . \sin\frac{\pi}{3} \quad , \quad \sin\frac{\pi}{3} > 0$$

$\Rightarrow v < 0$ مقبول.

أو: $\varphi = \frac{5\pi}{3}\ rad$

$$v = -\omega_0 . X_{max} . \sin\frac{5\pi}{3}$$

$\sin\frac{5\pi}{3} < 0$

$\Rightarrow v > 0$ مرفوض

$$\Rightarrow X = 0.1 \cos(2\pi t + \frac{\pi}{3})$$

2 - عند المرور في وضع التوازن $X = 0$

$$0.1 \cos(2\pi t + \frac{\pi}{3}) = 0$$

$$\Rightarrow \cos(2\pi t + \frac{\pi}{3}) = 0 \Rightarrow (2\pi t + \frac{\pi}{3}) = \frac{\pi}{2} + k\pi$$

$$2t + \frac{1}{3} = \frac{1}{2} + k \Rightarrow 2t = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + k \Rightarrow 2t = \frac{3-2+6k}{6}$$

$$2t = \frac{1+6k}{6} \Rightarrow t = \frac{1+6K}{12}$$

المرور الثاني

$K = 0 \ , \ 1 \ , \ 2 \ ,$

المرور الأول

المرور الثالث

الأستاذ محمد شتيوي
فيزياء - كيمياء
هـ : ٠٩٣٣٩٧٧٥٧٩

$t_1 = \frac{1+6(0)}{12} = \frac{1}{12}\ s$ $\quad$ لحظة المرور الأول: $K = 0$

$t_3 = \frac{1+6(2)}{12} = \frac{13}{12}\ s.$ $\quad$ لحظة المرور الثالث $K = 2$

• حساب شدة قوة الإرجاع ، في $X = 0.1\,m$

$$F = -KX = -16 \times 0.1 = -1.6\ N$$

تكون شدة قوة الإرجاع

$$F = 1.6\ N.$$

3- حساب كتلة الكرة :

$$\omega_0^2 = \frac{K}{m} \Rightarrow m = \frac{K}{\omega_0^2} = \frac{16}{(2\pi)^2} = \frac{16}{40} = 0.4\,kg$$

" مسائل عامة "

المسألة الأولى :

$K = 10\ N.m^{-1}$ ، $m = 0.1\ kg$

$t = 0 \quad x = 0 \quad v = -3\ m.s^{-1}$

1. $\omega_0 = \sqrt{\frac{K}{m}} = \sqrt{\frac{10}{0.1}} = 10\ rad.s^{-1}.$

2. الشكل العام للتابع الزمني :

$$\bar{x} = X_{max} . \cos(\omega_0 t + \bar{\varphi}).$$

طلب X_{max}، عند مرور الجسم في مركز الاهتزاز تكون السرعة عظمى.

$$v_{max} = -\omega_0 X_{max} \Rightarrow -3 = -\omega_0 X_{max}$$

- $X_{max} = \frac{3}{10} = 0.3\ m.$

- $\omega_0 = 10\ rad.s^{-1}$

- $t = 0 \quad x = 0 \quad v < 0$

$0 = X_{max} \cos\bar{\varphi} \Rightarrow \cos\varphi = 0 \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{2} rad$

أو $\varphi = \frac{3}{2}\pi\ rad.$

نختار φ التي تجعل $v < 0$ في اللحظة $t = 0$

$v = -\omega_0 X_{max} . \sin\varphi$

عندما $\varphi = \frac{\pi}{2} rad$

$v = -\omega_0 X_{max} \sin\frac{\pi}{2}$

$\sin\frac{\pi}{2} > 0 \Rightarrow v < 0$ مقبول

$\varphi = \frac{3\pi}{2} rad. \Rightarrow v = -\omega_0 X_{max} . \sin\frac{3\pi}{2}$

$\sin\frac{3\pi}{2} < 0 \Rightarrow v > 0$ مرفوض

يكون التابع الزمني للمطال :

$$\bar{X} = 0.3 \cos(10t + \frac{\pi}{2})$$

3- $X = 3\times10^{-2} m$ حسب شدة قوة الإرجاع

$$F = -KX$$

$$F = -10 \times 3\times10^{-2} = -3\times10^{-1} N$$

تكون شدة قوة الإرجاع $F = 0.3 N$.

المسألة الثانية :

$m = 0.5 kg$ ، $T_0 = 4 s$ ، $X_{max} = 8\times10^{-2} m$.

$t = 0 \quad X = \frac{X_{max}}{2} \quad v < 0$

1 التابع الزمني :

$$\bar{X} = X_{max} . \cos(\omega_0 t + \bar{\varphi})$$

. $X_{max} = 8\times10^{-2} m$

. $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2} rad.s^{-1}$

طلب φ :

$t = 0 \quad X = \frac{X_{max}}{2} \quad , \quad v < 0$

$\frac{X_{max}}{2} = X_{max} \cdot \cos(\bar{\varphi}) \Rightarrow \cos\bar{\varphi} = \frac{1}{2}$

$\varphi < \begin{matrix} \frac{\pi}{3}\ rad \\ \frac{5\pi}{3}\ rad. \end{matrix}$

، $\varphi = \frac{\pi}{3}\ rad.$

$v = -\omega_0 \cdot X_{max} \cdot \sin\frac{\pi}{3} \quad , \sin\frac{\pi}{3} > 0$

$\Rightarrow v < 0$

مقبول: لأن السرعة سالبة .

$\varphi = \frac{5\pi}{3}\ rad$

$v = -\omega_0 \cdot X_{max} \cdot \sin\frac{5\pi}{3}$

$\sin\frac{5\pi}{3} < 0 \Rightarrow v > 0$ مرفوض

$$\bar{X} = 8\times10^{-2} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2}t + \frac{\pi}{3}\right).$$

2 - لحظة المرور الأول والثالث في وضع التوازن .

عند المرور في وضع التوازن . $X = 0$

$0.018 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2}t + \frac{\pi}{3}\right) = 0 \Rightarrow \cos\left(\frac{\pi}{2}t + \frac{\pi}{3}\right) = 0$

$\frac{\pi}{2}t + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2} + K\pi \Rightarrow \frac{t}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + K \Rightarrow \frac{t}{2} = \frac{3-2+6K}{6}$

$\frac{t}{2} = \frac{1+6K}{6} \Rightarrow t = \frac{1+6K}{3}$

$$t = \frac{1+6K}{3}$$

المرور الثالث ↓ ↓ المرور الأول

$K = 0 , 1 , 2 , 3$

↓ المرور الثاني

لحظة المرور الأول $K = 0$

$$t = \frac{1+6(0)}{3} = \frac{1}{3}\,s$$

لحظة المرور الثالث $K = 2$

$$t = \frac{1+6(2)}{3} = \frac{13}{3}\,s.$$

③- تكون محصلة شدة القوى عظمى في الوضعين الطرفيين

$$X = \pm X_{max}.$$

$$F = |-K\,X| = |-\omega_0^2 \cdot m \cdot X| = |\pm\omega_0^2 \cdot m\, X_{max}|$$

$$F = \frac{\pi}{2} \times 0.5 \times 8 \times 10^{-2} = \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \times \frac{1}{2} \times 8 \times 10^{-2}$$

$$= \frac{10}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot 8 \times 10^{-2} = 0.1\,N.$$

تنعدم شدة محصلة القوى في مركز الاهتزاز $X = 0$

$$F = -K\,X = 0$$

④- $\omega_0^2 = \frac{K}{m} \Rightarrow K = \omega_0^2 \cdot m$

$$K = \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \times 0.5 = \frac{10}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{10}{8} = \frac{5}{4}\ N\,m^{-1}$$

لا تتغير قيمة ثابت صلابة النابض بتغيرا لكتلة؛ لأن قيمته تتعلق بطول النابض وعدد حلقاته ونوع المادة المصنوع منها؛

عند تغير m تتغير ω_0 ويبقى $K = \omega_0^2 \cdot m = Const = \omega_0^2 \cdot m$

ALADIB

5. $T_0 = 1s$

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{K}} \Rightarrow T_0^2 = 4\pi^2 \cdot \frac{m}{K}$$

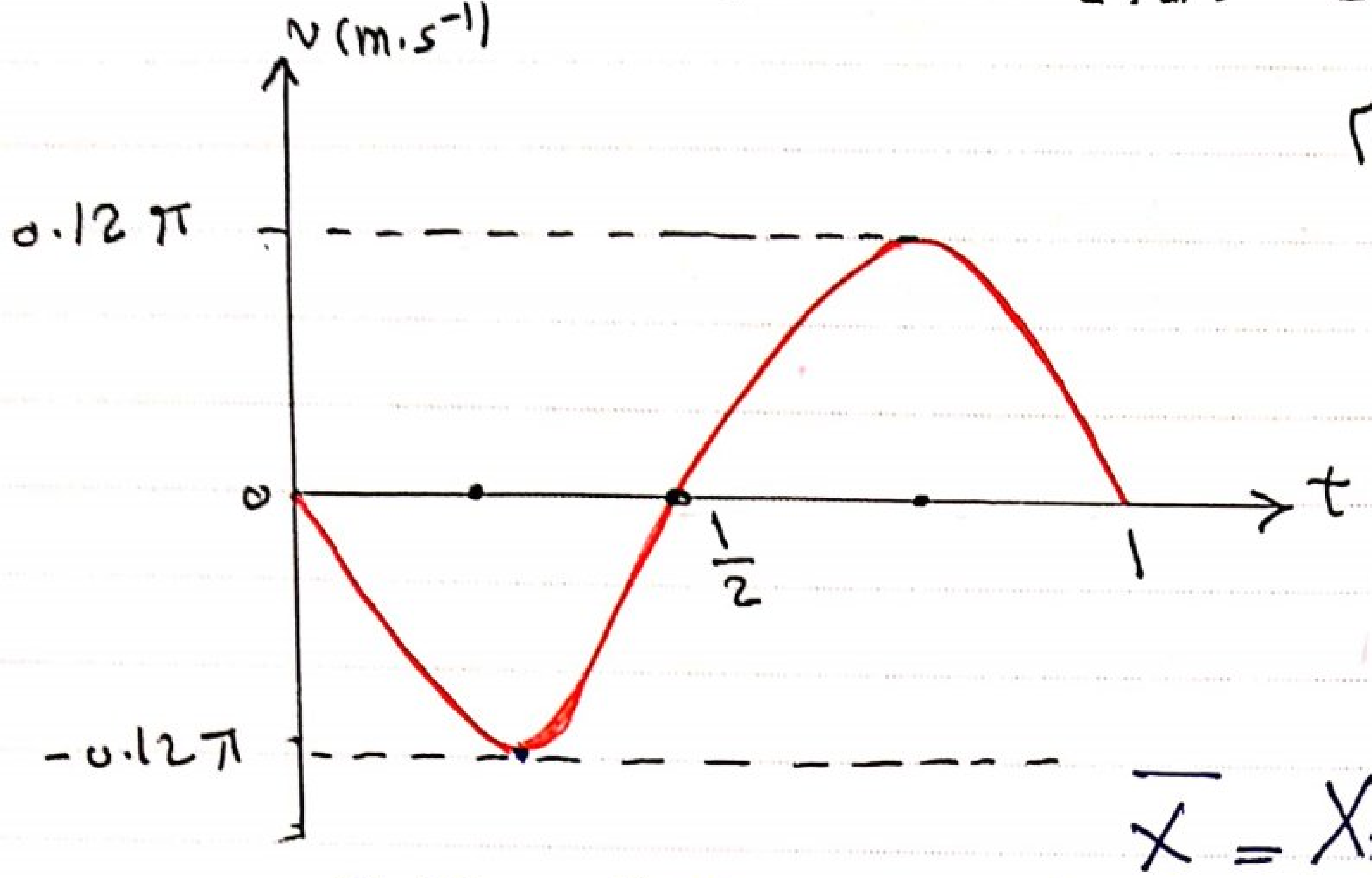
$$m = \frac{T_0^2 \cdot K}{4\pi^2} = \frac{1 \times \frac{5}{4}}{40} = \frac{5}{160} = \frac{1}{32}\ Kg.$$

⑤ في الرسم البياني جانباً يمثل تغيرات السرعة مع الزمن، لجسم مرتبط بنابض مرن يتحرك بحركة جيبية توافقية بسيطة

والمطلوب:

1- انطلاقاً من الشكل العام للتابع المطال

استنتج التابع الزمني للمطال.



الشكل العام:

$$\overline{x} = X_{max}\cdot\cos(\omega_0 t + \overline{\varphi})$$

تحديد الثوابت:

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = \frac{2\pi}{1} = 2\pi \, rad.s^{-1}$$

$$X_{max} = ? \quad . \quad \omega_0 \cdot X_{max} = 0.12\pi \Rightarrow X_{max} = \frac{0.12\pi}{\omega_0}$$

$$X_{max} = \frac{0.12\pi}{2\pi} = 0.06 \, m.$$

φ: $\quad t = 0 \quad \Rightarrow v = 0 \quad \Rightarrow x = \pm X_{max}$

$x = +X_{max} \Leftarrow$ وبما أن الجسم يبدأ حركته بالاتجاه السالب

$$X_{max} = X_{max} \cos\overline{\varphi} \Rightarrow \cos\overline{\varphi} = 1 \Rightarrow \varphi = 0 \, rad.$$

$$\overline{x} = 0.06 \cos(2\pi t).$$

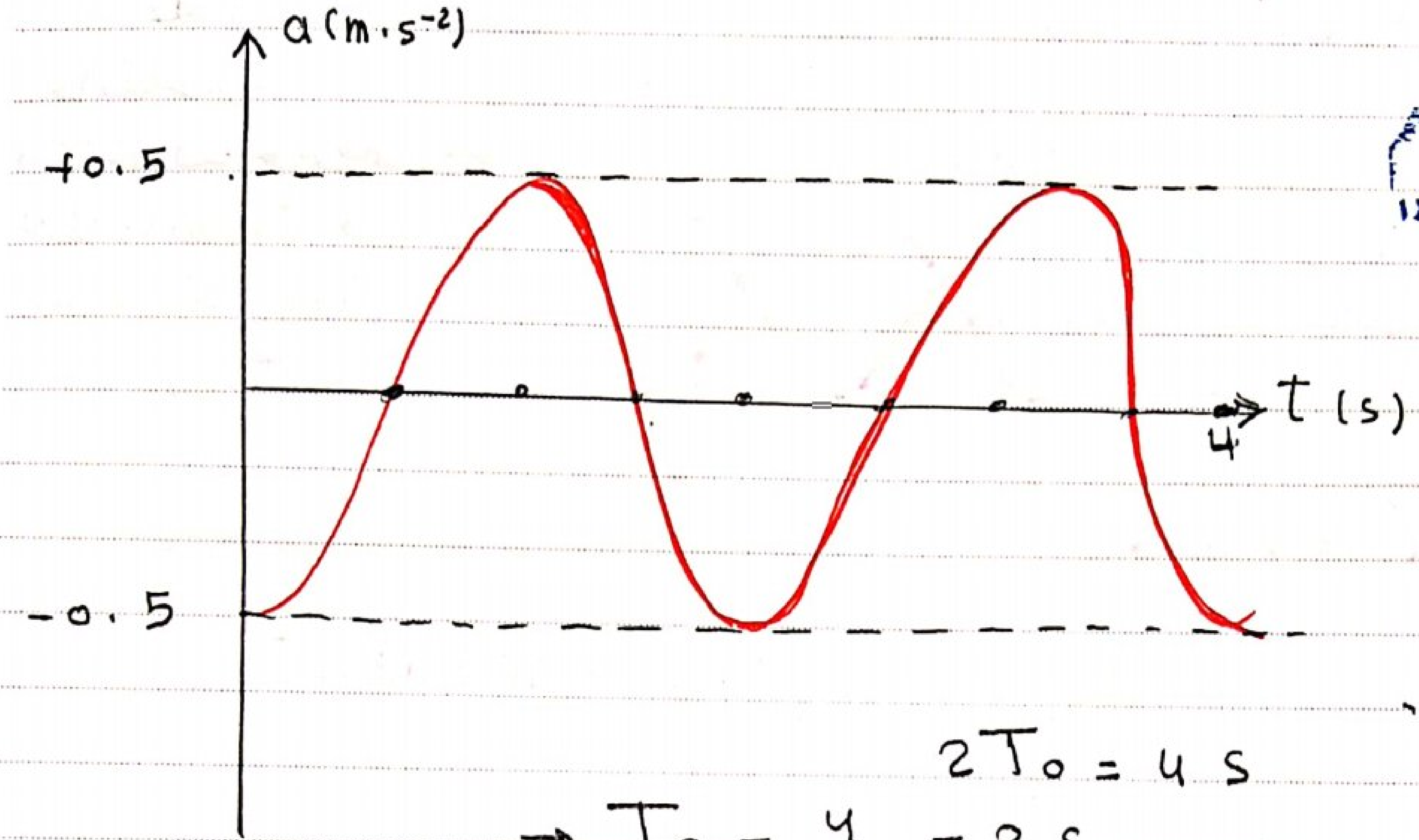
φ: $\quad t = 0 \quad v = 0$

$v = -\omega_0 X_{max} \cdot \sin(\omega_0 t + \overline{\varphi}) \qquad t = 0$

$0 = -\omega_0 X_m \sin\varphi \Rightarrow \sin\varphi = 0 \Rightarrow \varphi = 0 \, rad.$

س، من الرسم البياني الذي يمثل تغيرات التسارع بدلالة الزمن.

ا. استنتج تابع المطال انطلاقاً من شكله العام.



نلاحظ أن:

$$2T_0 = 4\ s$$

$$\Rightarrow T_0 = \frac{4}{2} = 2\ s$$

الشكل العام:

$$\overline{x} = X_{max} \cdot \cos(\omega_0 t + \overline{\varphi})$$

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = \frac{2\pi}{2} = \pi\ rad.s^{-1}$$

$$\omega_0^2 \cdot X_{max} = 0.5 \Rightarrow X_{max} = \frac{0.5}{\omega_0^2} = \frac{0.5}{\pi^2} = 5 \times 10^{-2}\ m.$$

$$a = -\omega_0^2 . X_{max} \cos(\omega_0 t + \varphi)$$

$$a = -a_{max} \cdot \cos(\omega_0 t + \varphi)$$

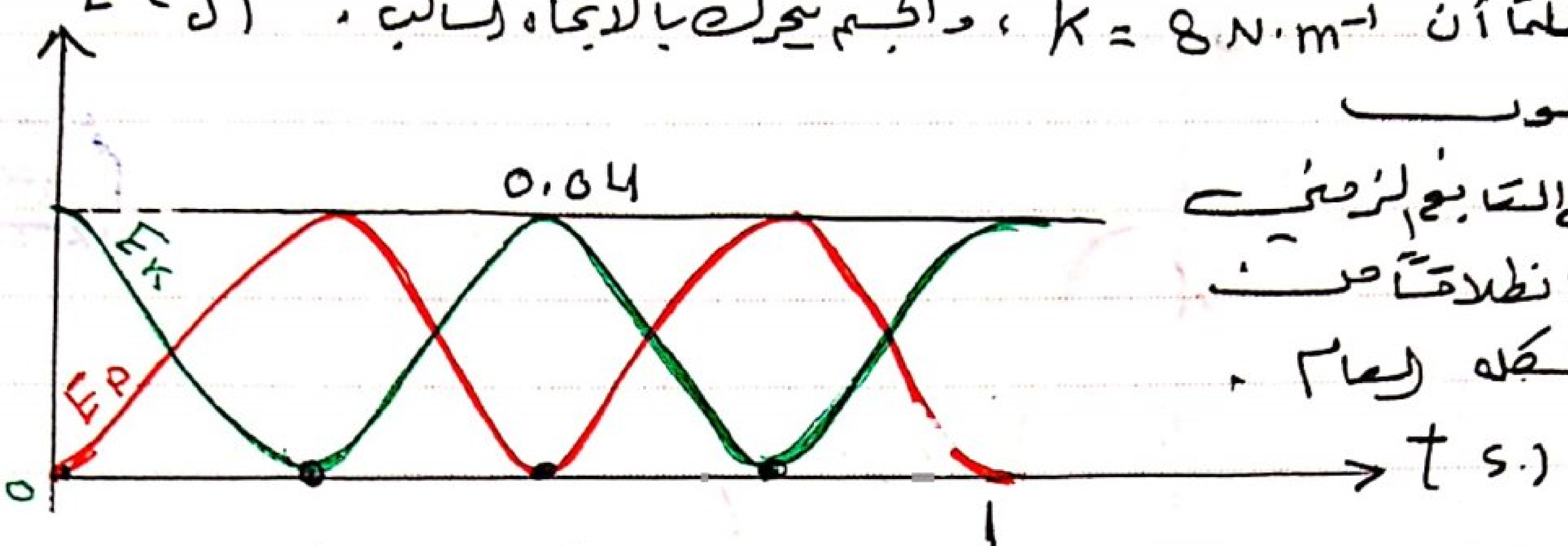
في $t = 0$ $\quad a = -a_{max}$

$$-a_{max} = -a_{max} \cdot \cos\varphi$$

$$\cos\varphi = 1 \Rightarrow \varphi = 0\ rad.$$

$$\overline{x} = 0.05 \cos(\pi t).$$

س: الرسم البياني جانباً يمثل تغيرات الطاقة الكامنة المرونية والطاقة الحركية في النواس المرن بدلالة الزمن.
علماً أن $K = 8\,N.m^{-1}$، والجسم يتحرك بالاتجاه السالب.
والمطلوب:
استنتج التابع الزمني للمطال انطلاقاً من شكله العام.



$$\bar{X} = X_{max} \cdot \cos(\omega_0 t + \bar{\varphi})$$

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = \frac{2\pi}{1} = 2\pi\ rad.s^{-1}$$

$$E = \frac{1}{2} K X_{max}^2 \Rightarrow X_{max}^2 = \frac{2E}{K}$$

$$X_{max}^2 = \frac{2 \times 4 \times 10^{-2}}{8} = 10^{-2} \Rightarrow X_{max} = 0.1\,m$$

طلب φ: من شروط البدء.

$t = 0 \quad E_p = 0 \Rightarrow E_p = \frac{1}{2} K x^2 \Rightarrow X = 0$

$t = 0 \quad x = 0$

$0 = X_{max} \cdot \cos\varphi \Rightarrow \cos\varphi = 0$

$$\varphi < \begin{matrix} \frac{\pi}{2}\ rad \\ \frac{3\pi}{2}\ rad \end{matrix}$$

$v = -\omega_0 \cdot X_{max} \cdot \sin(\omega_0 t + \bar{\varphi})$

$v = -\omega_0 X_{max} \sin\varphi \qquad t = 0$

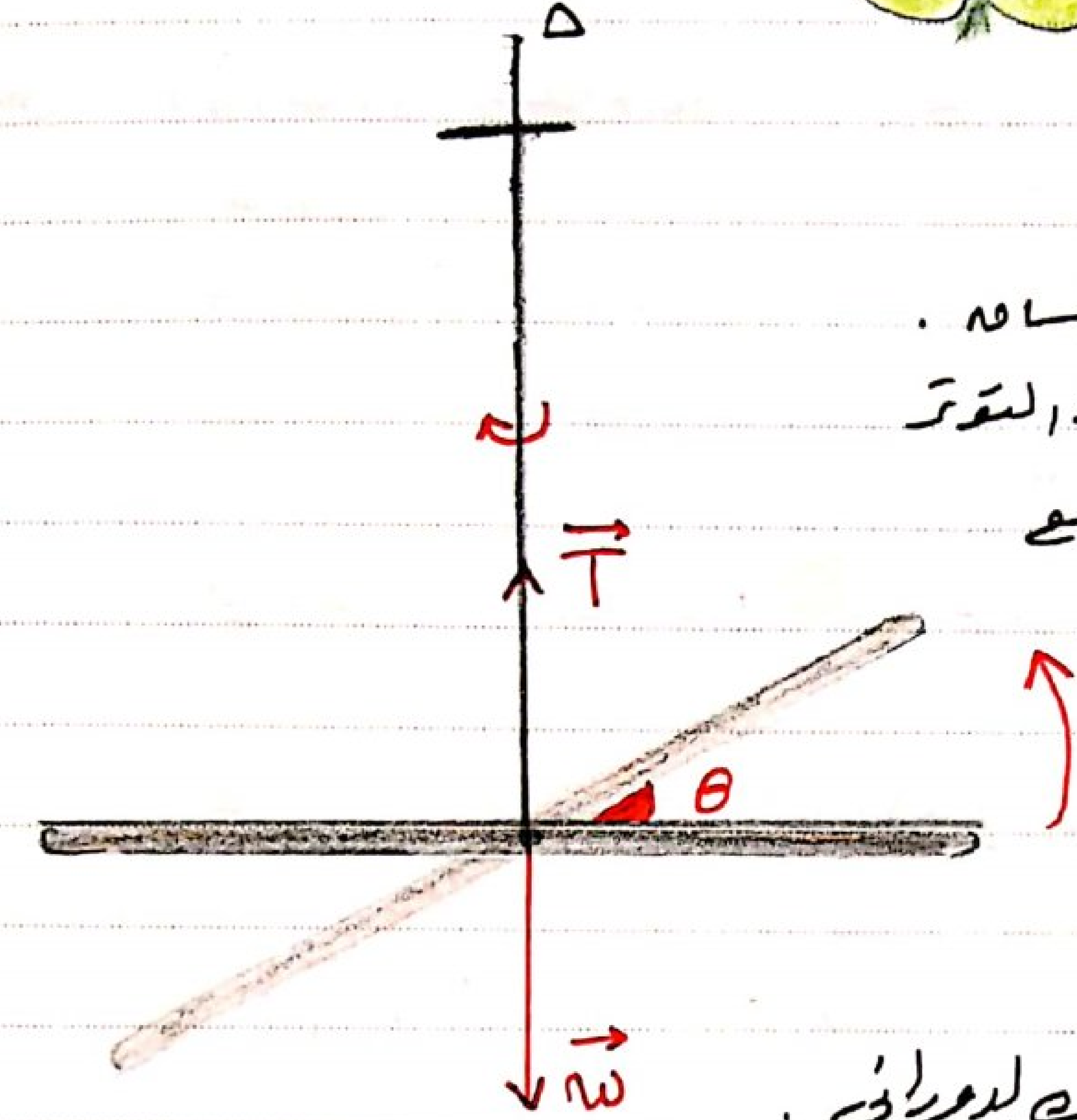
عندما $\varphi = \frac{\pi}{2}\ rad$ $\sin\frac{\pi}{2} = 1 > 0 \Leftarrow v < 0$ مقبول

$\varphi = \frac{3\pi}{2}\ rad$ $\sin\frac{3\pi}{2} = -1 < 0 \Leftarrow v > 0$ مرفوض

$$X = 0.1 \cos\left(2\pi t + \frac{\pi}{2}\right)$$

صنو الحضارة

نواس الفتل



القوى المؤثرة في الساق: $\vec{w}$ ثقل الساق.

$\vec{T}$ قوة التوتر

. عندما ندير الساق بزاوية θ عن وضع توازنها في مستوى أفقي.

تنشأ مزدوجة الفتل $\vec{\eta}$ عزمها هو عزم الإرجاع

$$\overline{\Gamma_{\vec{\eta}/\Delta}} = -K\overline{\theta}$$

بتطبيق العلاقة الأساسية في التحريك الدوراني حول محور Δ

$$\boxed{\sum \overline{\Gamma_{\Delta}} = I_\Delta . \overline{\alpha}}$$

التسارع الزاوي $rad.s^{-2}$

عزم عطالة الساق حول محور الدوران $Kg.m^2$

$$\overline{\Gamma_{\vec{w}/\Delta}} + \overline{\Gamma_{\vec{T}/\Delta}} + \overline{\Gamma_{\vec{\eta}/\Delta}} = I_\Delta . \overline{\alpha} \quad \text{....} (1)$$

$$\overline{\Gamma_{\vec{w}/\Delta}} = \overline{\Gamma_{\vec{T}/\Delta}} = 0 \quad \text{...} (2)$$

لأن حامل كل منهما منطبق على محور الدوران Δ.

$$\overline{\Gamma_{\vec{\eta}/\Delta}} = -K\overline{\theta} \quad \text{....} (3)$$

نعوض (2) و (3) في (1).

$$0 + 0 - K\overline{\theta} = I_\Delta . \overline{\alpha}$$

$$I_\Delta . \overline{\alpha} = -K\overline{\theta} \Rightarrow I_\Delta . (\overline{\theta})''_t = -K\overline{\theta}$$

$$(\bar{\theta})''_t = -\frac{K}{I_\Delta}\cdot\bar{\theta}$$

س: انطلاقاً من العلاقة: $(\bar{\theta})''_t = -\frac{K}{I_\Delta}\cdot\bar{\theta}$. برهن أن حركة نواس الفتل هي حركة جيبية دورانية ... ثم استنتج علاقة دوره الخاص T_0.

$$(\bar{\theta})''_t = -\frac{K}{I_\Delta}\cdot\bar{\theta} \quad ----- (1)$$

هي معادلة تفاضلية من المرتبة الثانية تقبل حلاً جيبياً من الشكل.

$$\bar{\theta} = \theta_{max}\cdot\cos(\omega_0 t + \bar{\varphi})$$

$$\bar{\omega} = (\bar{\theta})'_t = -\omega_0\cdot\theta_{max}\cdot\sin(\omega_0 t + \bar{\varphi})$$ تابع السرعة الزاوية

$$\bar{\alpha} = (\bar{\theta})''_t = -\omega_0^2\cdot\theta_{max}\cdot\cos(\omega_0 t + \bar{\varphi})$$ تابع التسارع الزاوي

$$(\bar{\theta})''_t = -\omega_0^2\cdot\bar{\theta} \quad ---- (2)$$

بموازنة العلاقتين (1) و (2) نجد:

$$\omega_0^2 = \frac{K}{I_\Delta} \Rightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{K}{I_\Delta}} > 0$$

وهنا محققة لأن K ، I_Δ موجبان.

أي أن حركة نواس الفتل هي جيبية دورانية تابعها الزمني

$$\bar{\theta} = \theta_{max}\cdot\cos(\omega_0 t + \bar{\varphi})$$

$\bar{\theta}$: المطال الزاوي في لحظة t . واحدته rad

θ_{max} المطال الزاوي الأعظمي (السعة الزاوية) واحدته (rad)

ω_0: النبض الخاص . $rad.s^{-1}$ ، $\bar{\varphi}$ الطور الابتدائي واحدته rad

1 استنتاج علاقة دور الخاص.

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{K}{I_\Delta}} \quad , \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$$

$$\frac{2\pi}{T_0} = \sqrt{\frac{K}{I_\Delta}} \Rightarrow \frac{T_0}{2\pi} = \sqrt{\frac{I_\Delta}{K}}$$

الأستاذ محمد شتيوي
فيزياء - كيمياء
هـ : ٠٩٣٣٩٧٧٥٧٩

$$\boxed{T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{I_\Delta}{K}}}$$

نستنتج أن: T_0 :

1- لا علاقة له بـ θ_{max}

2- يتناسب طرداً مع I_Δ عزم عطالة النواس $(kg.m^2)$

3- يتناسب عكساً مع الجذر التربيعي لثابت فتل السلك

ثابت يتعلق بمادة السلك المصنوع منها

ثابت فتل السلك $(m.N.rad^{-1})$

$$\boxed{K = k'\frac{(2r)^4}{\ell}}$$

قطر السلك

طول السلك

نلاحظ أن K يتناسب عكساً مع طول السلك.

أن T_0 يتناسب عكساً مع الجذر التربيعي لـ K

← أن T_0 يتناسب طرداً مع الجذر التربيعي ℓ طول السلك.

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{I_\Delta}{K}} \Rightarrow T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{I_\Delta}{\frac{k'(2r)^4}{\ell}}} \Rightarrow T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{I_\Delta \cdot \ell}{k'(2r)^4}}$$

$$T_0 = Const.\sqrt{\ell}$$

	المطال	السرعة	التسارع	العطالة	الثابت	الإرجاع	طبيعة الحركة .
النواس المرن	$\bar{x}$ m	$\bar{v} = (\bar{x})'_t$ $m \cdot s^{-1}$	$\bar{a} = (\bar{v})'_t = (\bar{x})''_t$ $m \cdot s^{-2}$	m الكتلة kg	K ثابت صلابة النابض $N \cdot m^{-1}$	$F = -kx$ قوة الإرجاع N	جيبية انسحابية $\bar{x} = X_{max} \cdot \cos(\omega_0 t + \bar{\varphi})$
نواس الفتل	$\bar{\theta}$ مطال زاوي rad	$\bar{\omega} = (\bar{\theta})'_t$ سرعة زاوية $rad \cdot s^{-1}$	$\bar{\alpha} = (\bar{\omega})'_t = (\bar{\theta})''_t$ التسارع الزاوي $rad \cdot s^{-2}$	I_Δ عزم العطالة $kg \cdot m^2$	K ثابت فتل السلك $m \cdot N \cdot rad^{-1}$	$\Gamma_\Delta = -k\theta$ عزم الإرجاع N.m	جيبية دورانية $\bar{\theta} = \theta_{max} \cdot \cos(\omega_0 t + \bar{\varphi})$

	النواس المرن	نواس الفتل .
الطاقة الكلية .	$E_{tot} = \frac{1}{2} k X_{max}^2$	$E_{tot} = \frac{1}{2} k \theta_{max}^2$
الطاقة الكامنة	$E_p = \frac{1}{2} k x^2$	$E_p = \frac{1}{2} k \theta^2$
الطاقة الحركية	$E_k = \frac{1}{2} m v^2$	$E_k = \frac{1}{2} I_\Delta \omega^2$

الأستاذ محمد شتيوي
فيزياء - كيمياء
هـ : ٠٩٣٣٩٧٧٥٧٩

الأستاذ محمد شتيوي
فيزياء - كيمياء
هـ : ٠٩٣٣٩٧٧٥٧٩

الأسئلة .

أولاً : اختر الإجابة الصحيحة .

1. c 2. c 3. d

ثانياً . اجب عن الأسئلة الآتية .

1.

$$E_k = E - E_p$$

$$\frac{1}{2} I_\Delta \omega^2 = \frac{1}{2} k \theta_{max}^2 - \frac{1}{2} k \theta^2$$

$$I_\Delta \omega^2 = k(\theta_{max}^2 - \theta^2)$$

نستنتج علاقة السرعة الزاوية .

$$I_\Delta \omega^2 = I_\Delta \cdot \omega_0^2 (\theta_{max}^2 - \theta^2)$$

$$\omega^2 = \omega_0^2 (\theta_{max}^2 - \theta^2) \Rightarrow \omega = \omega_0 \sqrt{\theta_{max}^2 - \theta^2}$$

- لإثبات أن حركة نواس الفتل جيبية دورانية :

$$E = E_p + E_k$$

نزل ← خفض ← اشتق

$$(\theta^2)' = 2\theta^{2-1} \cdot \omega$$

$$\frac{1}{2} k \theta_{max}^2 = \frac{1}{2} k \theta^2 + \frac{1}{2} I_\Delta \omega^2$$

$$(\omega^2)' = 2 \cdot \omega^{2-1} \cdot \alpha$$

باشتقاق الطرفين بالنسبة للزمن .

$$0 = \frac{1}{2} k (2\theta\omega) + \frac{1}{2} I_\Delta (2\alpha \cdot \omega)$$

$$I_\Delta \cdot \alpha \omega = -k\theta\omega \Rightarrow I_\Delta \cdot \alpha = -k\theta$$

$$I_\Delta (\theta)''_t = -k\theta$$

$$\Rightarrow (\theta)''_t = -\frac{K}{I_\Delta}\cdot\theta \quad ---- \quad (1)$$

هي معادلة تفاضلية من المرتبة الثانية تقبل حلاً جيبياً من الشكل

$$\bar{\theta} = \theta_{max}\cdot\cos(\omega_0 t+\bar{\varphi})$$

$$\bar{\omega} = (\theta)'_t = -\omega_0\cdot\theta_{max}\cdot\sin(\omega_0 t+\bar{\varphi})$$

$$(\theta)''_t = -\omega_0^2\cdot\theta_{max}\cdot\cos(\omega_0 t+\bar{\varphi})$$

$$(\theta)''_t = -\omega_0^2\cdot\bar{\theta} \quad ---- \quad (2)$$

بمقارنة (1) مع (2) نجد :

$$\omega_0^2 = \frac{K}{I_\Delta} \Rightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{K}{I_\Delta}} > 0$$

وهنا تحقق لأن I_Δ, K موجبان ⇐ حركة نواس الفتل جيبية دورانية

2 :

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{I_\Delta}{K}} \Rightarrow T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{I_\Delta}{\frac{K'(2r)^4}{\ell}}}$$

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{I_\Delta\cdot\ell}{K'(2r)^4}} \Rightarrow T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{I_\Delta}{K'(2r)^4}}\cdot\sqrt{\ell}$$

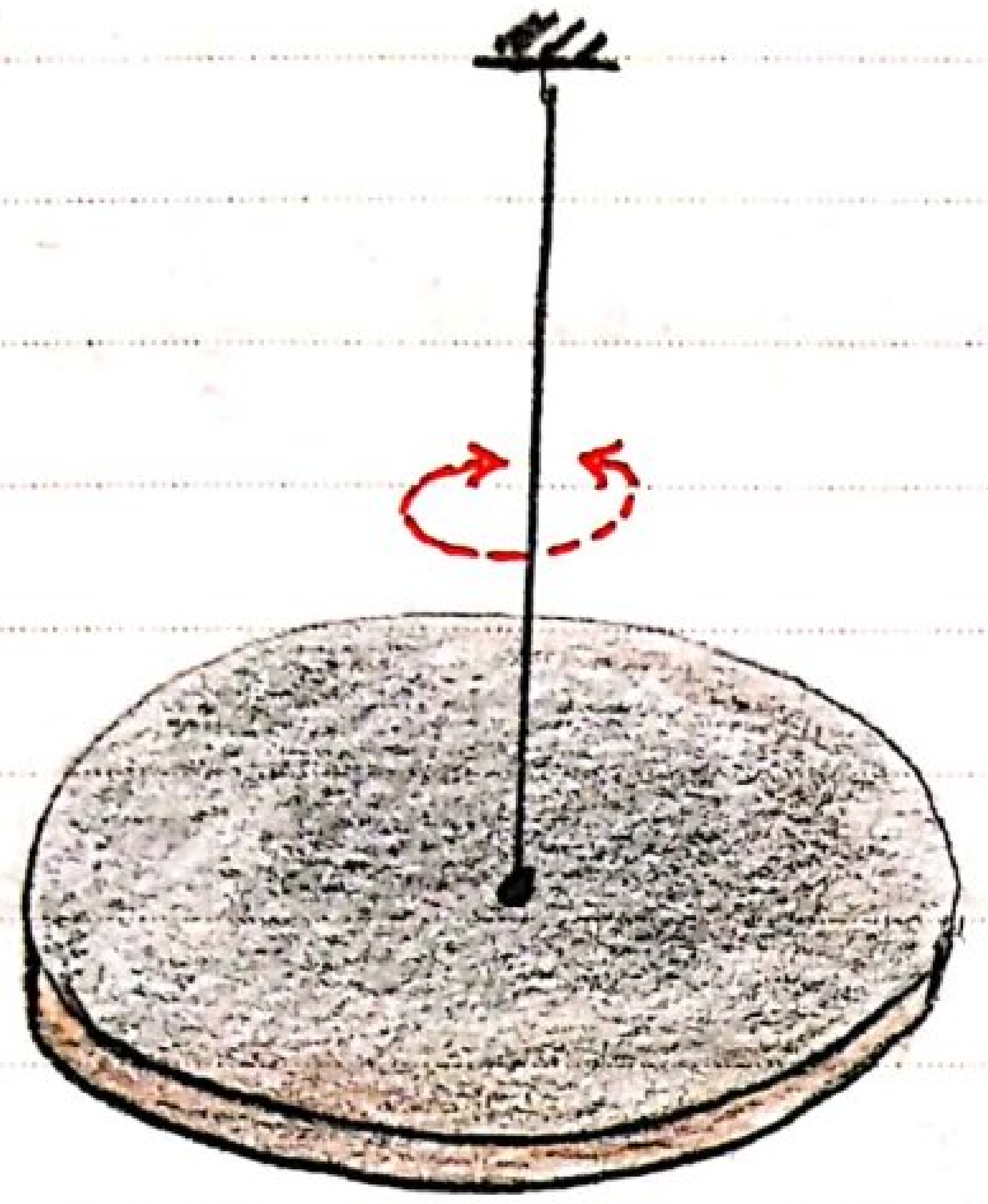
$$T_0 = Const.\sqrt{\ell}.$$

$$\frac{T_{0_1}}{T_{0_2}} = \frac{Const.\sqrt{\ell_1}}{Const.\sqrt{\ell_2}} \Rightarrow \frac{2T_{0_2}}{T_{0_2}} = \sqrt{\frac{\ell_1}{\ell_2}} \Rightarrow 2 = \sqrt{\frac{\ell_1}{\ell_2}}$$

$$4 = \frac{\ell_1}{\ell_2} \Rightarrow \ell_1 = 4\ell_2.$$

ثالثاً: حل المسائل.

المسألة الأولى:



$m = 2\,kg$. $r = 4\times10^{-2}\,m$.

$K = 16\times10^{-3}\,m.N.rad^{-1}$

$t=0 \quad \theta = +\frac{\pi}{4}\,rad$. دون سرعة

المطلوب.

الأستاذ محمد شتيوي
فيزياء - كيمياء
هـ : ٠٩٣٣٩٧٧٥٧٩

(1):

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{I_\Delta}{K}}$$

حساب I_Δ :

$$I_\Delta = I_{\Delta/c} = \frac{1}{2}mr^2 = \frac{1}{2}\,2\,(4\times10^{-2})^2 = 16\times10^{-4}\,kg.m^2$$

نعوض،

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{16\times10^{-4}}{16\times10^{-3}}} = 2\pi\sqrt{\frac{1}{10}} = 2\,s$$

(2):

$$\bar{\theta} = \theta_{max}\cos(\omega_0 t + \bar{\varphi}).$$

تحديد الثوابت:

- $t=0$ ترك دون سرعة ابتدائية $\Rightarrow \theta = \theta_{max} = \frac{\pi}{4}\,rad$.

- $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = \frac{2\pi}{2} = \pi\,rad.s^{-1}$

- تحديد φ من شروط البدء:

$t=0 \Rightarrow \theta = \theta_{max}$

$$\theta_{max} = \theta_{max}.\cos\bar{\varphi} \Rightarrow \cos\bar{\varphi} = 1 \Rightarrow \varphi = 0\,rad.$$

$$\bar{\theta} = \frac{\pi}{4}\cos(\pi t)\ (rad)$$

③ $\theta = \frac{\pi}{8}$ rad.

الطاقة الكامنة $E_p = \frac{1}{2} K \theta^2 \Rightarrow E_p = \frac{1}{2} \cdot 16 \times 10^{-3} \left(\frac{\pi}{8}\right)^2$

$$E_p = 8 \cdot 10^{-3} \frac{10}{64} = \frac{1}{8} \times 10^{-2} \text{ J}.$$

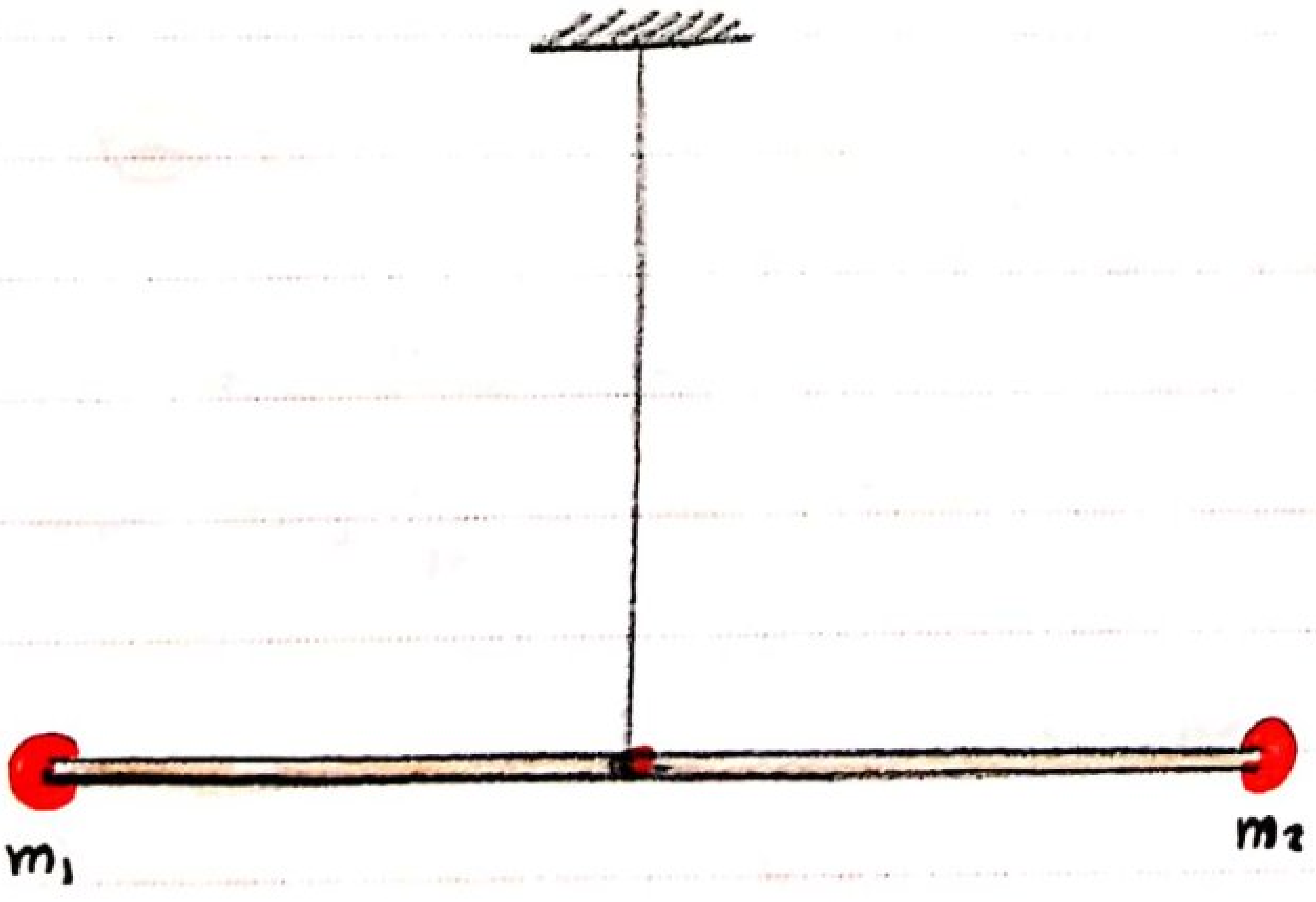
حساب الطاقة الحركية : حسب مصونية الطاقة :

$$E_k = E_{tot} - E_p.$$

$$E_{tot} = \frac{1}{2} K \theta_{max}^2 = \frac{1}{2} \cdot 16 \times 10^{-3} \left(\frac{\pi}{4}\right)^2 = 8 \cdot 10^{-3} \cdot \frac{10}{16}$$

$$E_{tot} = \frac{1}{2} \times 10^{-2} \text{ J} \Rightarrow E_k = \frac{1}{2} \cdot 10^{-2} - \frac{1}{8} \cdot 10^{-2} = \frac{3}{8} \cdot 10^{-2} \text{ J}.$$

المسألة الثانية :



$m_1 = m_2 = 125 \times 10^{-3}$ kg.

$K = 16 \times 10^{-3}$ m.N.rad^{-1}

$t = 0 \quad \theta = \frac{\pi}{3}$ rad.

$T_0 = 2.5 = \frac{5}{2}$ s.

① $\bar{\theta} = \theta_{max} \cdot \cos(\omega_0 t + \bar{\varphi})$

$t = 0$ تترك دون سرعة ابتدائية $\theta = \theta_{max} = \frac{\pi}{3}$ rad.

ومنه

- $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = \frac{2\pi}{\frac{5}{2}} = \frac{4\pi}{5}\ rad.s^{-1}$

- $t = 0 \quad \theta = \theta_{max}$.

$\theta_{max} = \theta_{max} . \cos\bar{\varphi} \Rightarrow \cos\bar{\varphi} = \frac{\theta_{max}}{\theta_{max}} = 1 \Rightarrow \varphi = 0\ rad$.

$$\bar{\theta} = \frac{\pi}{3} . \cos\left(\frac{4\pi}{5} t\right)$$

2

$\bar{\omega} = (\bar{\theta})'_t = -\frac{4\pi}{5} . \frac{\pi}{3} . \sin\frac{4\pi}{5} t$

$\bar{\omega} = -\frac{8}{3} . \sin\frac{4\pi}{5} t$

وكذلك عند المرور الأول .

$t = \frac{T_0}{4} = \frac{\frac{5}{2}}{4} = \frac{5}{8}\ s$.

$\bar{\omega} = -\frac{8}{3} . \sin\frac{4\pi}{5} . \frac{5}{8} \Rightarrow \bar{\omega} = -\frac{8}{3} . \sin\frac{\pi}{2}$

$\bar{\omega} = -\frac{8}{3}(1) = -\frac{8}{3}\ rad.s^{-1}$

الأستاذ محمد شتيوي
فيزياء - كيمياء
هـ : ٠٩٣٣٩٧٧٥٧٩

تدل على أن الجسم يتحرك بالاتجاه السالب

3 . حساب طول الساق l نحسب I_Δ .

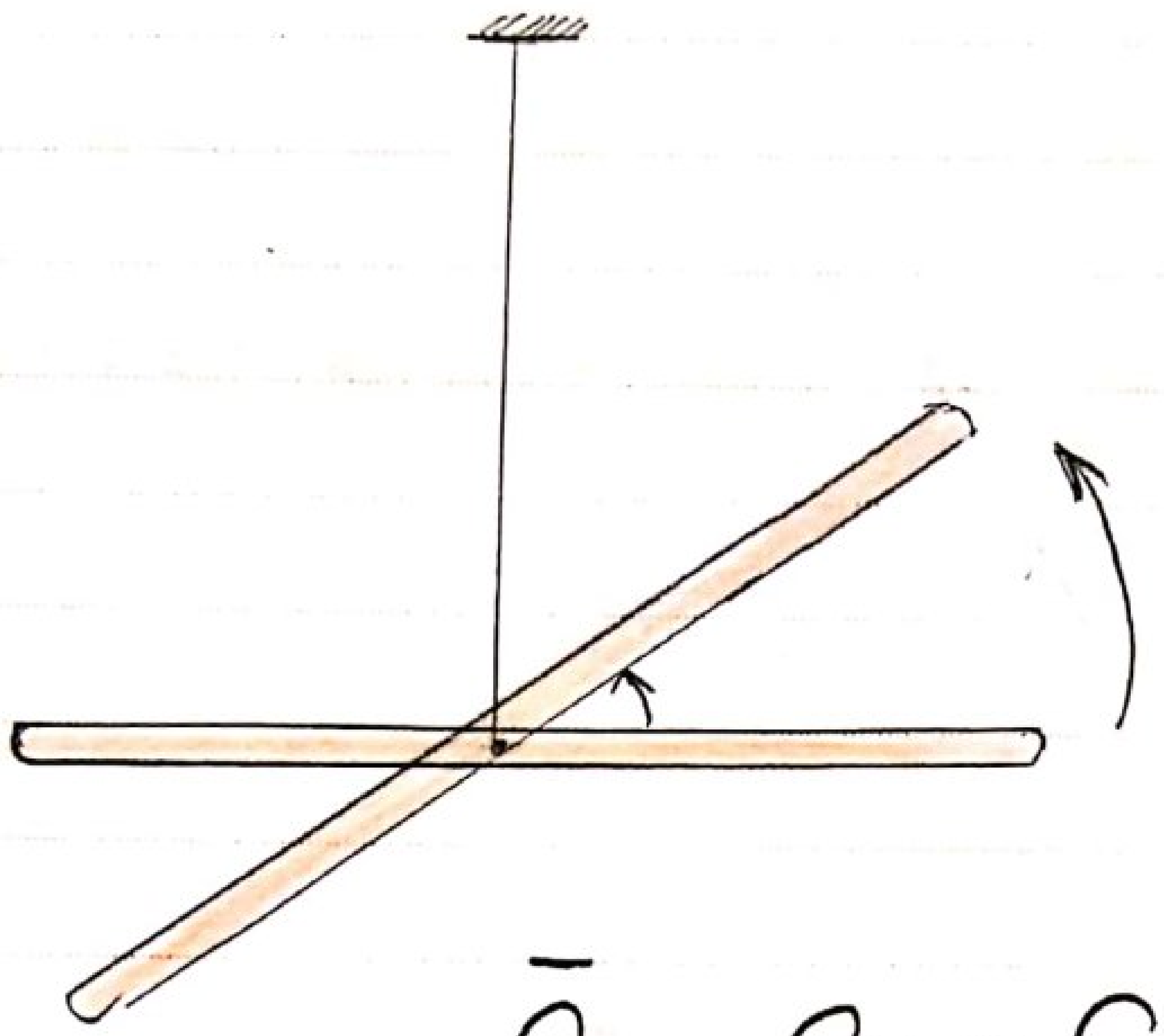
$\omega_0^2 = \frac{K}{I_\Delta} \Rightarrow I_\Delta = \frac{K}{\omega_0^2}$

$I_\Delta = \frac{16 \times 10^{-3}}{\left(\frac{4\pi}{5}\right)^2} = \frac{16 \times 10^{-3}}{\frac{160}{25}} = \frac{16 \times 25 \times 10^{-3}}{160} = 25 \times 10^{-4}\ kg.m^2$

$I_\Delta = I_{\Delta/c} + 2 I_{\Delta/m_1} \Rightarrow I_\Delta = 0 + 2 m_1 \left(\frac{l}{2}\right)^2 \Rightarrow 25 \times 10^{-4} = 2 \times 125 \times 10^{-3} \frac{l^2}{4}$

$l^2 = \frac{50 \times 10^{-4}}{125 \times 10^{-3}} = \frac{1}{25} \Rightarrow l = \frac{1}{5} = 0.2\ m$.

المسألة الثالثة :



$\ell = 40 \times 10^{-2} m$. ساق.

ⓐ . $\theta = \frac{\pi}{3} rad$

$t = 0$ دون سرعة ابتدائية.

$T_0 = 1 s$ $\quad I_{\Delta/c} = 2 \times 10^{-3} kg.m^2$

والمطلوب :

①.

$$\bar{\theta} = \theta_{max} . \cos(\omega_0 t + \bar{\varphi})$$

• $t = 0$ تركه دون سرعة $\quad \theta = \theta_{max} = \frac{\pi}{3} rad.$

• $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = \frac{2\pi}{1} = 2\pi \, rad.s^{-1}$

• $t = 0 \quad \theta = \theta_{max} \Rightarrow \theta_{max} = \theta_{max} . \cos\varphi \Rightarrow \cos\varphi = 1$

$\varphi = 0 \, rad.$

$$\bar{\theta} = \frac{\pi}{3} . \cos 2\pi t$$

②.

$$\bar{\omega} = (\bar{\theta})'_t = -2\pi . \frac{\pi}{3} . \sin 2\pi t .$$

$$\bar{\omega} = -\frac{20}{3} . \sin 2\pi t$$

عند المرور الثاني في وضع التوازن :

$$t = \frac{3T_0}{4} = \frac{3 \times 1}{4} = \frac{3}{4} s$$

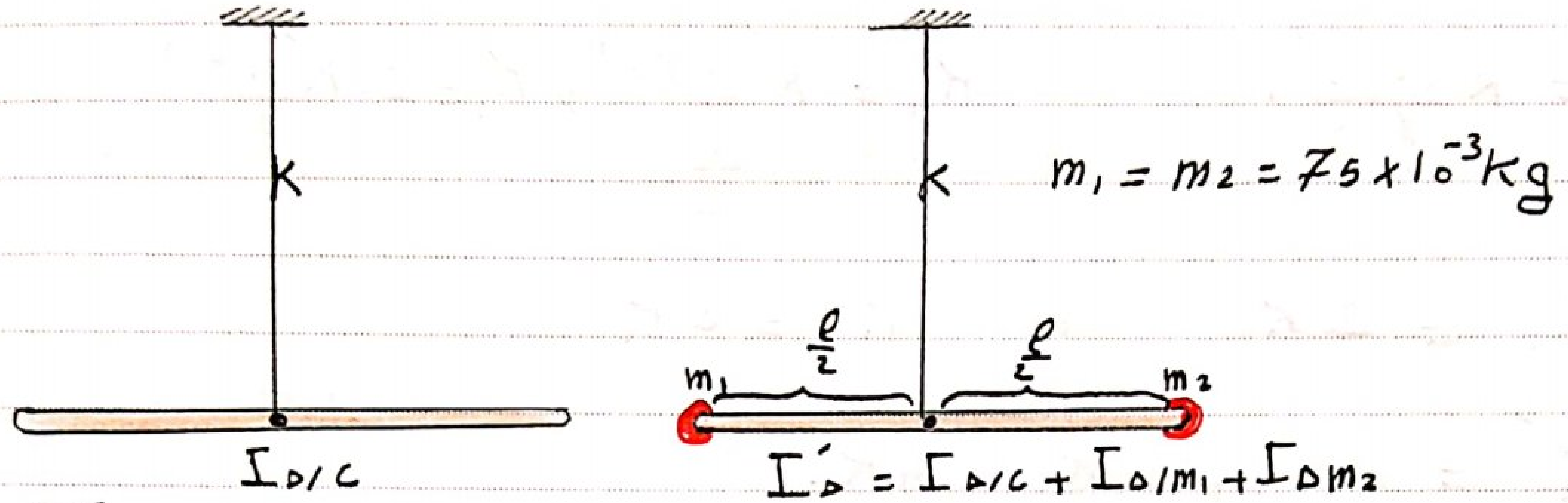
$$\Rightarrow \bar{\omega} = -\frac{20}{3} . \sin 2\pi . \frac{3}{4} \Rightarrow \bar{\omega} = -\frac{20}{3} \sin \frac{3\pi}{2} \Rightarrow \bar{\omega} = -\frac{20}{3}(-1)$$

$$\bar{\omega} = \frac{20}{3} rad.s^{-1}$$

$\theta = -\frac{\pi}{6}\ rad.$ -3

$$\bar{\alpha} = -\omega_0^2 \cdot \bar{\theta} \Rightarrow \bar{\alpha} = -(2\pi)^2\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \frac{40\pi}{6} = \frac{20\pi}{3}\ rad.s^{-2}$$

b



$I'_\Delta = I_{\Delta/C} + I_{\Delta/m_1} + I_{\Delta m_2}$

$T_0 = 1\,s$

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{I_{\Delta/C}}{K}} \quad , \quad T'_0 = \sqrt{\frac{I'_\Delta}{K}}$$

الأستاذ محمد شتيوي
فيزياء - كيمياء
هـ : ٠٩٣٣٩٧٧٥٧٩

$$\frac{T'_0}{T_0} = \frac{2\pi\sqrt{\frac{I'_\Delta}{K}}}{2\pi\sqrt{\frac{I_{\Delta/C}}{K}}} \Rightarrow \frac{T'_0}{T_0} = \sqrt{\frac{I'_\Delta}{I_{\Delta/C}}} \quad *$$

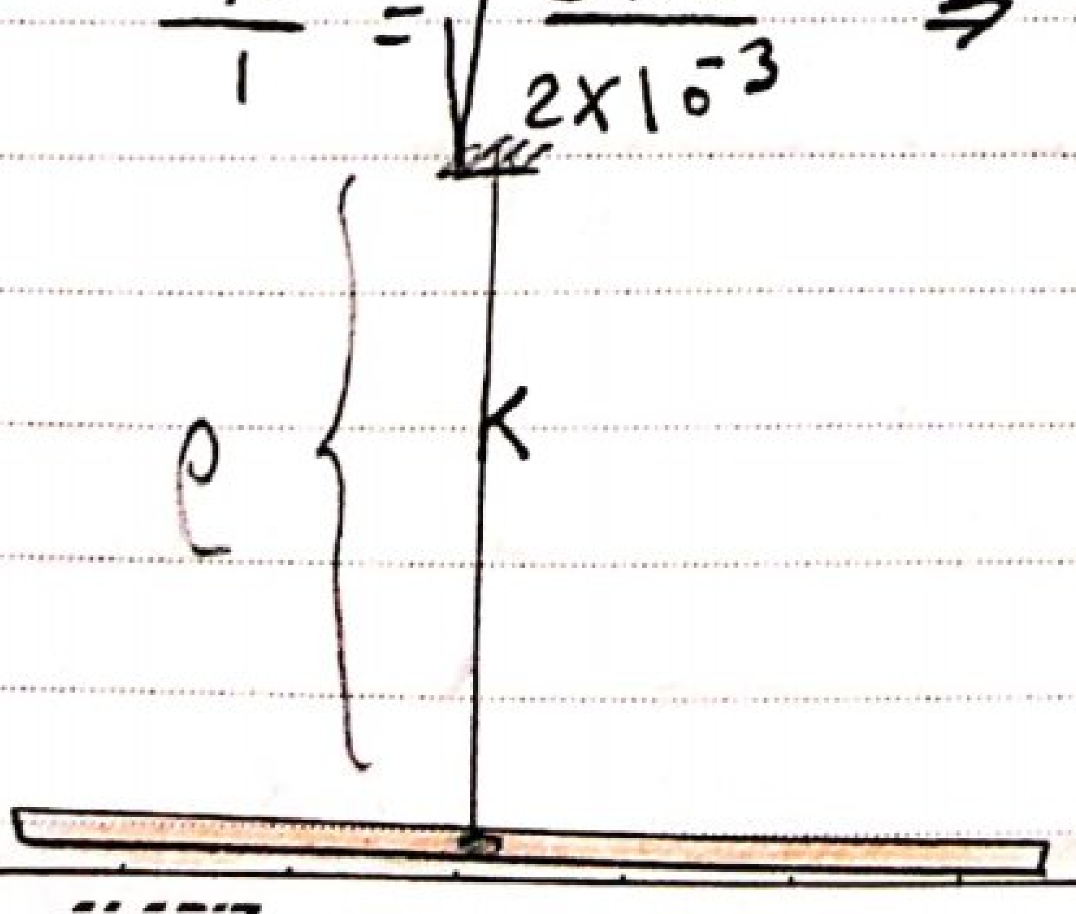
طلب I'_Δ :

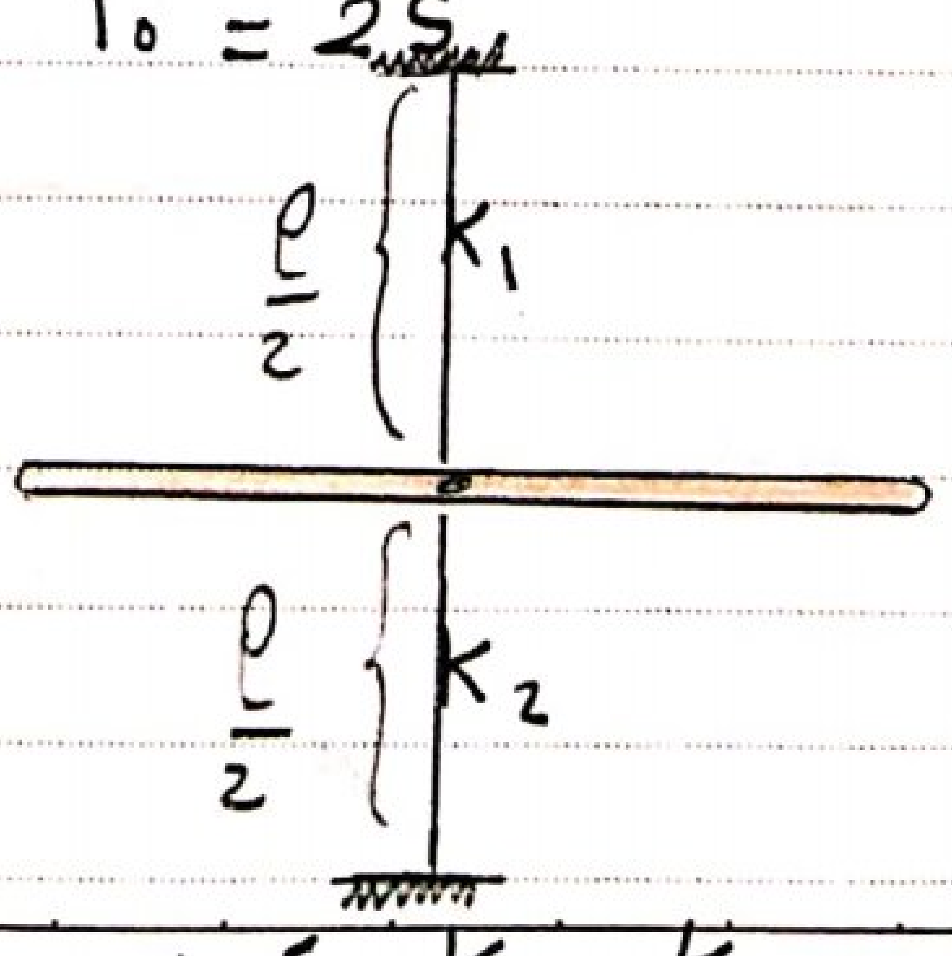
$$I'_\Delta = 2\times10^{-3} + 2\,m_1 \cdot \left(\frac{\ell}{2}\right)^2 = 2\times10^{-3} + 2\times75\times10^{-3}\cdot(20\times10^{-2})^2$$

* بالتعويض ب $\quad I'_\Delta = 8\times10^{-3}\,kg.m^2.$

$$\frac{T'_0}{1} = \sqrt{\frac{8\times10^{-3}}{2\times10^{-3}}} \Rightarrow \frac{T'_0}{1} = 2 \Rightarrow T'_0 = 2\,s$$

c





$T_0 = 1\,s$ $\qquad K' = K_1 + K_2$

$$T_0' = 2\pi\sqrt{\frac{I_\Delta}{K'}}$$

طـب K' بحسب K_1 و K_2 .

$$K = k'\frac{(2r)^4}{\ell} \quad ، \quad K_1 = k'\frac{(2r)^4}{\frac{\ell}{2}} \Rightarrow K_1 = 2\cdot k'\frac{(2r)^4}{\ell}$$

$$K_1 = 2K \quad ، \quad K_2 = 2K$$

$$K' = 2K + 2K = 4K.$$

نعوض في علاقة T_0' .

$$T_0' = 2\pi\sqrt{\frac{I_\Delta}{4K}} = \frac{1}{2}\cdot 2\pi\sqrt{\frac{I_\Delta}{K}} = \frac{1}{2}T_0 = \frac{1}{2}\cdot 1 = \frac{1}{2}\,s.$$

طـب K ثابت الفتل .

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{I_\Delta}{K}} \Rightarrow T_0^2 = 4\pi^2\frac{I_\Delta}{K}$$

$$\Rightarrow K = \frac{4\pi^2 I_\Delta}{T_0^2} = \frac{40\times 2\times 10^{-3}}{1} = 8\times 10^{-2}\,mN\,rad^{-1}$$

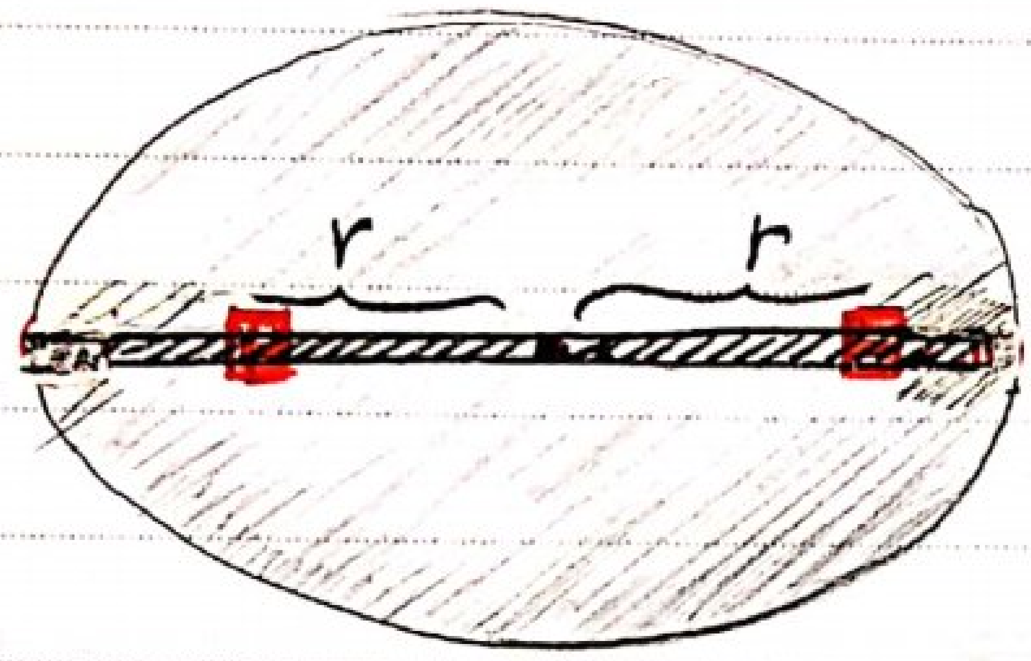
المسألة الثالثة :

قرص $M_1 = 0.12\,kg$ ، $R = 0.05\,m$.

ساق $M_2 = 0.012\,kg$ $L = 0.1\,m$

الكتل . $m_1 = m_2 = 0.05\,kg$ ، $(2r = 0.04\,m)$

$K = 8\times10^{-4}\,m.N.rad^{-1}$



1 -

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{I_\Delta}{k}}$$

$$I_\Delta = \underbrace{I_{\Delta/c}}_{\text{قرص}} + \underbrace{I_{\Delta/c}}_{\text{ساق}} + \underbrace{2I_{\Delta/m_1}}_{\text{كتل .}}$$

الأستاذ محمد شتيوي
فيزياء - كيمياء
هـ : ٠٩٣٣٩٧٧٥٧٩

$$I_\Delta = \frac{1}{2}M_1.R^2 + \frac{1}{12}M_2.L^2 + 2m_1(r)^2$$

$$I_\Delta = \frac{1}{2}.0.12(0.05)^2 + \frac{1}{12}.0.012(0.1)^2 + 2(0.05)(0.02)^2$$

$$I_\Delta = \frac{1}{2}\times12\times10^{-2}\times25\times10^{-4} + \frac{1}{12}\times12\times10^{-3}\times10^{-2} + 2\times5\times10^{-2}\times4\times10^{-4}$$

$$I_\Delta = 15\times10^{-5} + 1\times10^{-5} + 4\times10^{-5} = 2\times10^{-4}\,kg.m^2$$

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{2\times10^{-4}}{8\times10^{-4}}} = 2\pi\sqrt{\frac{1}{4}} = 2\pi.\frac{1}{2} = \pi\,s.$$

2 . الدور الجديد :

$$T_0' = (T_0 + 0.86) = (\pi + 0.86)s$$

نحسب I_Δ' :

$$T_0' = 2\pi\sqrt{\frac{I_\Delta'}{K}}$$

$$T_o'^2 = 4\pi^2 \cdot \frac{I'_\Delta}{K} \Rightarrow I'_\Delta = \frac{T_o'^2 \cdot K}{4\pi^2} \Rightarrow$$

$$I'_\Delta = \frac{(\pi + 0.86)^2 \times 8 \times 10^{-4}}{40} = \frac{(3.14 + 0.86)^2 \times 8 \times 10^{-4}}{40}$$

$$I'_\Delta = \frac{\cancel{16}^{4} \times 8 \times 10^{-4}}{\cancel{40}} = 32 \times 10^{-5}\ kg.m^2$$

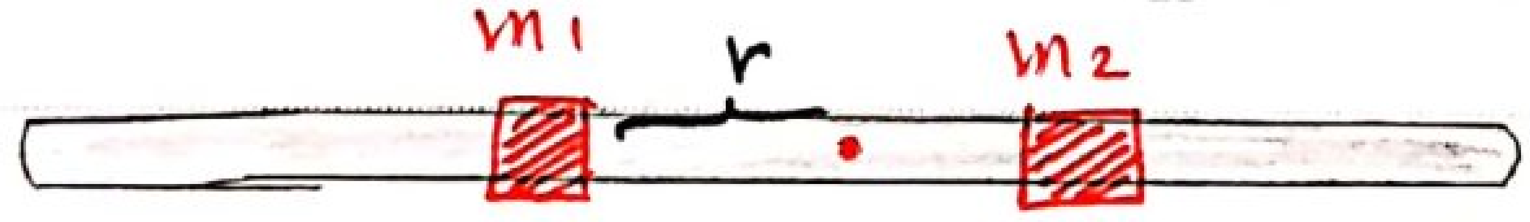
$$I'_\Delta = 2m_1 r'^2 + \underset{\text{ساق}}{I_{\Delta/c}} + \underset{\text{قرص}}{I_{\Delta/c}}$$

$$32 \times 10^{-5} = 2 \times 5 \times 10^{-2} \cdot r'^2 + 1 \times 10^{-5} + 15 \times 10^{-5}$$

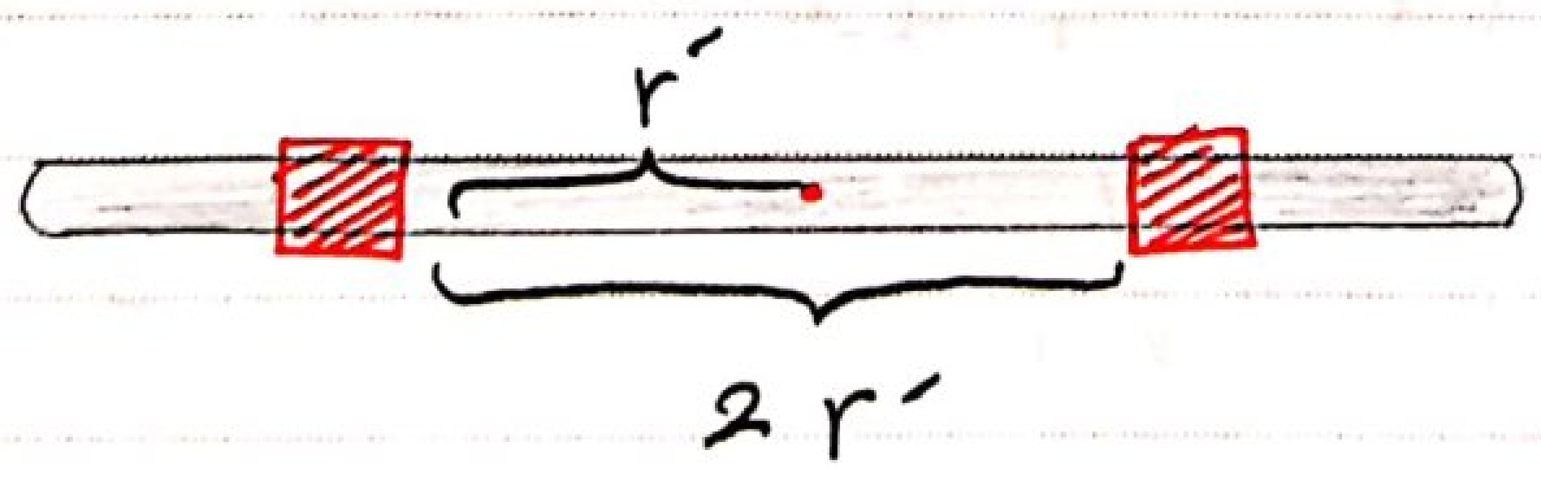
$$32 \times 10^{-5} = 10^{-1} \cdot r'^2 + 16 \times 10^{-5} \Rightarrow 10^{-1} \cdot r'^2 = 32 \times 10^{-5} - 16 \times 10^{-5}$$

$$10^{-1} \cdot r'^2 = 16 \times 10^{-5} \Rightarrow r'^2 = \frac{16 \times 10^{-5}}{10^{-1}} = 16 \times 10^{-4}$$

البعد بين الكتلة ومركز الدوران $r' = 4 \times 10^{-2}\ m$



البعد بين الكتلتين $2r' = 2 \times 4 \times 10^{-2}$
$= 8 \times 10^{-2} = 0.08\ m$

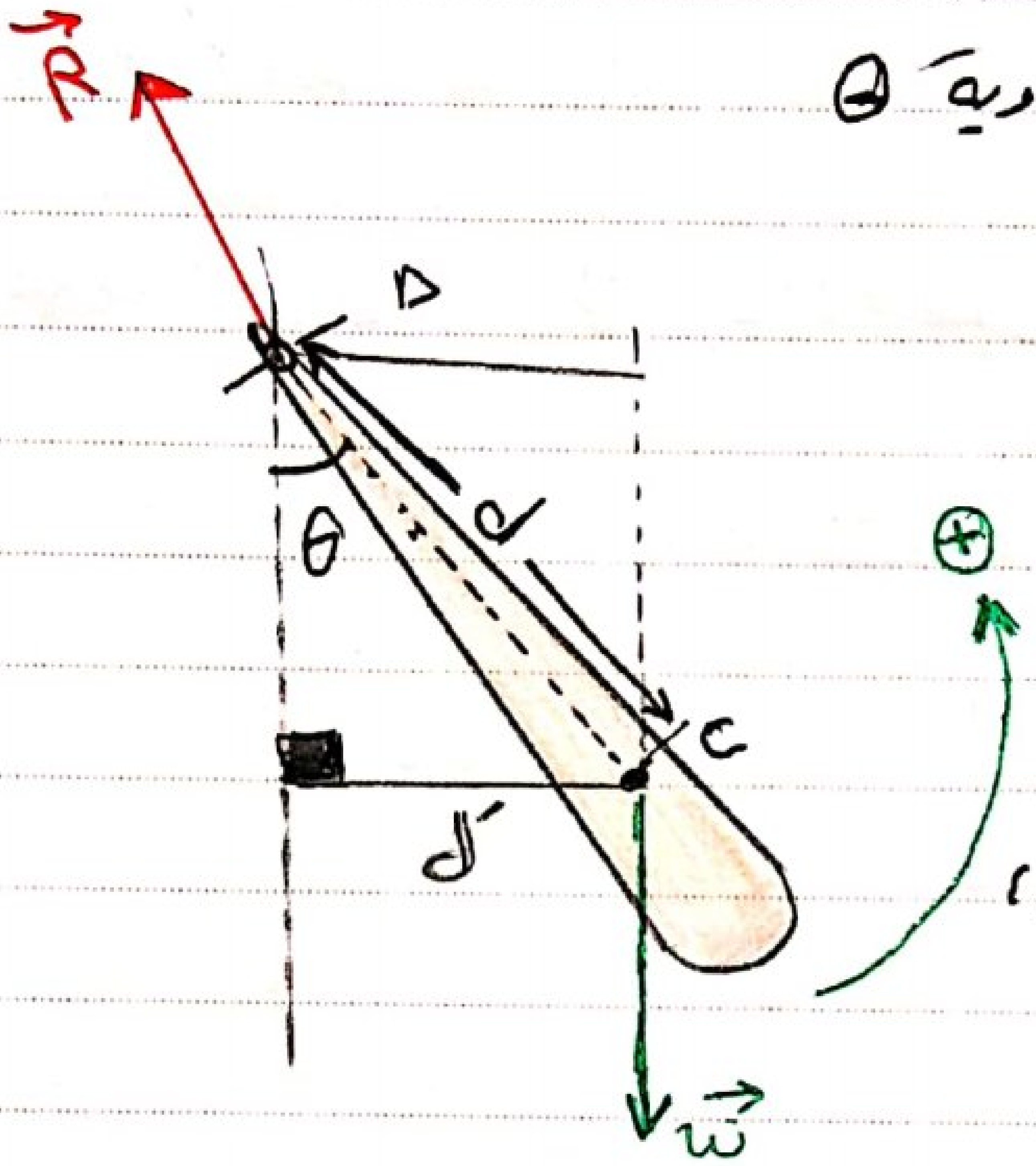


النواس الثقلي.

كل جسم صلب يهتز تحت تأثير ثقله حول محور أفقي عمودي على مستويه ولا يمر من مركز عطالته.

الأستاذ محمد شتيوي
فيزياء - كيمياء
هـ : ٠٩٣٣٩٧٧٥٧٩

- الدراسة الحركية للنواس الثقلي.



نزيح الجسم عن وضع توازنه بزاوية θ ونتركه دون سرعة ابتدائية.

تؤثر في الجسم قوتان هما:

- قوة ثقله $\vec{w}$
- قوة رد فعل محور الدوران $\vec{R}$

الحركة دورانية.

نطبق العلاقة الأساسية في التحريك (نظرية التسارع الزاوي)

$$\Sigma \overline{\Gamma}_{\Delta} = I_{\Delta} \cdot \overline{\alpha}$$

$$\overline{\Gamma}_{\vec{w}/\Delta} + \overline{\Gamma}_{\vec{R}/\Delta} = I_{\Delta} \cdot \overline{\alpha} \quad ...(1)$$

أختار الجهة الموجبة للحركة عكس دوران عقارب الساعة.

$$\overline{\Gamma}_{\vec{R}/\Delta} = 0 \quad ...(2)$$

لأن حامله يمر من محور الدوران.

$$\overline{\Gamma}_{\vec{w}/\Delta} = -d' \cdot w$$

ذراع قوة الثقل

$$d' = d \cdot \sin\theta$$

(البعد بين حامل القوة ومحور الدوران)

$$\overline{\Gamma}_{\vec{w}/\Delta} = -d \sin\theta \cdot w \quad ...(3)$$

نعوض (3) و (2) في (1) نجد

$$-w\, d \cdot \sin\theta + 0 = I_{\Delta} \cdot \overline{\alpha} \Rightarrow I_{\Delta} \cdot \overline{\alpha} = -w\, d \cdot \sin\theta$$

$$I_\Delta \cdot (\theta)''_t = -mg.d.\sin\theta$$

$$(\theta)''_t = -\frac{mgd}{I_\Delta} \cdot \sin\theta$$

هي معادلة تفاضلية من المرتبة الثانية لا تقبل حلاً جيبياً، لأنها تحوي $\sin\theta$ بدل θ.

كيف تكون العلاقة السابقة من أجل السعات الزاوية الصغيرة

من أجل السعات الزاوية الصغيرة $\theta < 0.24\,rad$ تصبح العلاقة

$$\sin\theta = \theta.$$

$$\Rightarrow (\bar{\theta})''_t = -\frac{mgd}{I_\Delta} \cdot \bar{\theta} \quad --- \quad (1)$$

برهن أن حركة النواس الثقلي من أجل السعات الزاوية الصغيرة هي جيبية دورانية.

$$(\bar{\theta})''_t = -\frac{mgd}{I_\Delta} \cdot \bar{\theta}$$

معادلة تفاضلية من المرتبة الثانية تقبل حلاً جيبياً من الشكل.

$$\bar{\theta} = \theta_{max} \cdot \cos(\omega_0 t + \bar{\varphi})$$

$$(\bar{\theta})'_t = -\omega_0 \cdot \theta_{max} \cdot \sin(\omega_0 t + \bar{\varphi})$$

$$(\bar{\theta})''_t = -\omega_0^2 \cdot \underbrace{\theta_{max} \cdot \cos(\omega_0 t + \bar{\varphi})}_{\theta}$$

$$(\bar{\theta})''_t = -\omega_0^2 \cdot \theta \quad --- \quad (2)$$

بمقارنة ① مع ② نجد :

$$\omega_0^2 = \frac{mgd}{I_\Delta} \Rightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{mgd}{I_\Delta}} > 0$$

وهذا محقق لأن جميع المقادير m ، g ، I_Δ ، d موجبة

⇐ حركة النواس الثقلي في السعات الزاوية الصغيرة هي حركة جيبية دورانية

١ - نستنتج علاقة دوره الخاص من أجل السعات الزاوية الصغيرة .

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{mgd}{I_\Delta}} \quad , \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$$

$$\frac{2\pi}{T_0} = \sqrt{\frac{mgd}{I_\Delta}} \quad , \quad \frac{T_0}{2\pi} = \sqrt{\frac{I_\Delta}{mgd}}$$

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{I_\Delta}{mgd}}$$

T_0 : دور النواس الثقلي (s)

I_Δ : عزم عطالة النواس الثقلي $(Kg.m^2)$

d : هي البعد بين مركز عطالة النواس الثقلي ومحور الدوران (m)

m : كتلة النواس الثقلي. (Kg)

أولاً :

إذا كان النواس الثقلي دون تثبيت كتل عليه .

(ساق فقط ، قرص فقط)

d : تستنتج من نص المسألة .

I_Δ : عزم العطالة تحسب حسب هايغنز

$$I_\Delta = I_{\Delta/c} + md^2$$

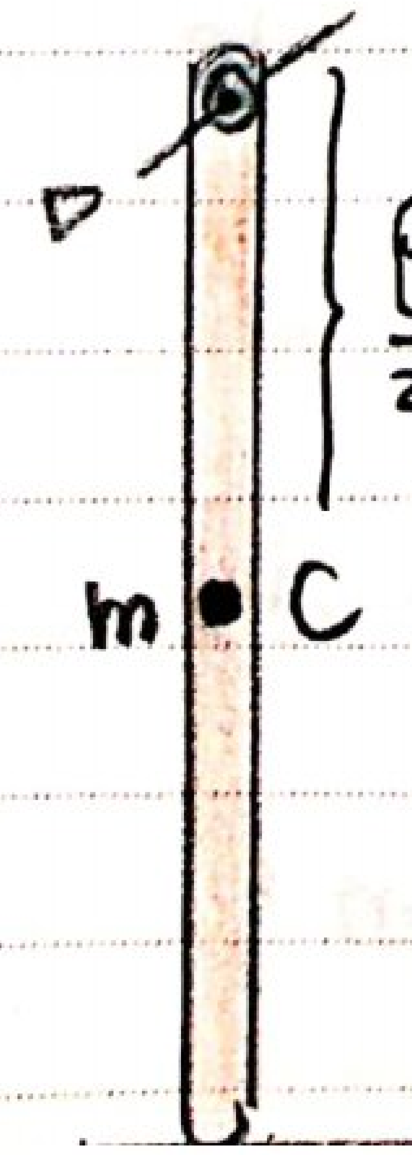
I_Δ : عزم عطالة الجسم حول محور لا يمر من مركز عطالته.

$I_{\Delta/c}$: عزم عطالة الجسم حول محور يمر من مركز عطالته (و نعطى بنص المسألة)

m : كتلة الجسم

d : بعد مركز العطالة عن محور الدوران

مثال : ساق متجانسة كتلتها m طولها ℓ تهتز حول محور أفقي يمر من طرفها العلوي استنتج علاقة دور النواس بدلالة ℓ . انطلاقاً من دور النواس الثقلي من أجل السعات الصغيرة



$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{I_\Delta}{mgd}}$$

من نص المسألة ، $\boxed{d = \frac{\ell}{2}}$

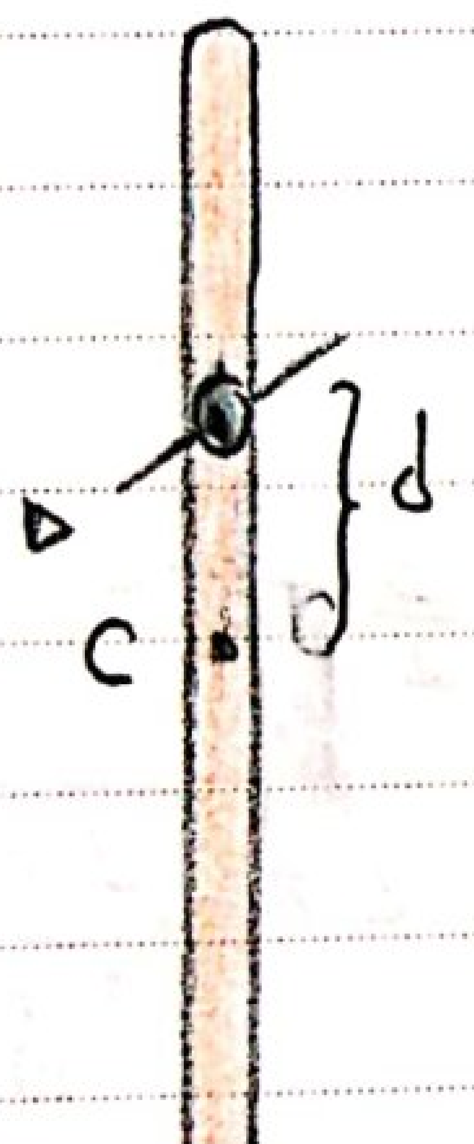
$$I_\Delta = I_{\Delta/C} + m d^2$$

$$I_\Delta = \frac{1}{12} m \ell^2 + m\left(\frac{\ell}{2}\right)^2 \Rightarrow I_\Delta = \frac{1}{12} m \ell^2 + \frac{1}{4} m \ell^2$$

$$I_\Delta = \left(\frac{1}{12} + \frac{1}{4}\right) m \ell^2 = \frac{4}{12} m \ell^2 \Rightarrow \boxed{I_\Delta = \frac{1}{3} m \ell^2}$$

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{\frac{1}{3} m \ell^2}{m g \frac{\ell}{2}}} \Rightarrow T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{2\ell}{3g}}$$

ملاحظة: إن دور النواس الثقلي في هذه الحالة لا يتعلق بكتلة الجسم.



مثال: ساق متجانسة كتلتها m طولها ℓ تهتز حول محور أفقي عمودي على مستويها مار بنقطة تبعد $\frac{\ell}{6}$ من مركز عطالتها. استنتج علاقة دور النواس بدلالة طوله انطلاقاً من علاقة دور النواس الثقلي من أجل السعات الزاوية الصغيرة

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{I_\Delta}{m g d}} \qquad d = \frac{\ell}{6}$$

$$I_\Delta = I_{\Delta/C} + m d^2$$

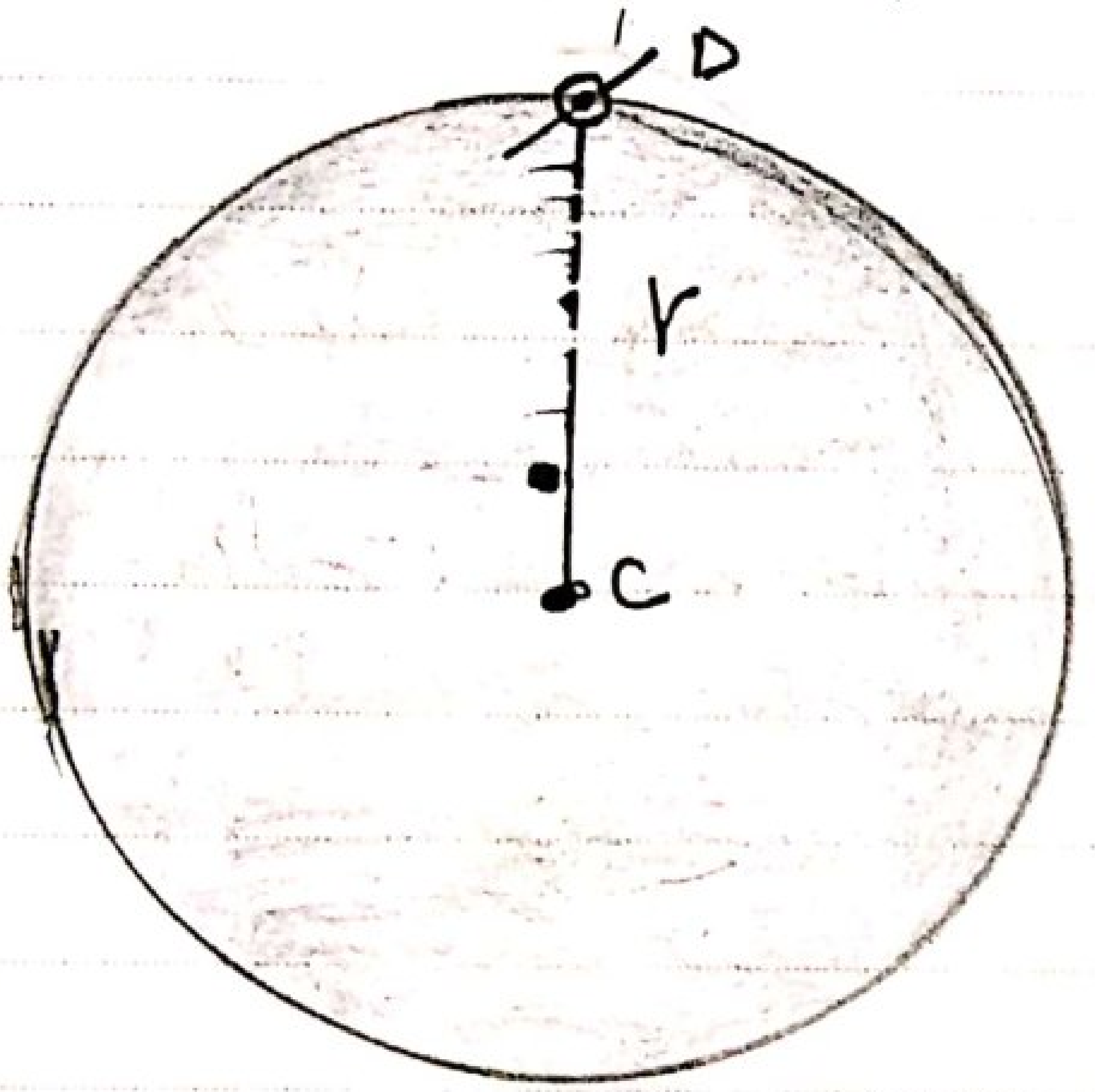
$$I_\Delta = \frac{1}{12} m \ell^2 + m\left(\frac{\ell}{6}\right)^2 \Rightarrow I_\Delta = \frac{1}{12} m \ell^2 + \frac{1}{36} m \ell^2$$

$$I_\Delta = \left(\frac{1}{12} + \frac{1}{36}\right) m \ell^2 = \frac{1}{9} m \ell^2$$

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{\frac{1}{9}ml^2}{mg\frac{l}{6}}} \Rightarrow T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{2l}{3g}}.$$

مثال: قرص متجانس كتلته m نصف قطره r نجعله شاقوليا ويهتز حول محور أفقي عمودي على مستويه ويمر في نقطة من محيطه.

انطلاقا من علاقة الدور الخاص للنواس الثقلي من أجل السعات الزاوية الصغيرة، استنتج علاقة دور النواس بدلالة r.



$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{I_\Delta}{mgd}}$$

$d = r$ ،

$$I_\Delta = I_{\Delta/c} + md^2$$

$$I_\Delta = \frac{1}{2}mr^2 + mr^2 = \frac{3}{2}mr^2$$

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{\frac{3}{2}\cdot mr^2}{mgr}} \Rightarrow T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{3r}{2g}}.$$

ملاحظة: لايجاد علاقة السرعة الزاوية للنواس لحظة المرور بالشاقول

الوضع (1) $\theta_1 = \theta_{max}$ سكون

الوضع (2) $\theta_2 = 0$ شاقول.

$$\Delta E_K = \sum W_{\vec{F}(1\to 2)}$$

$$E_{K_2} - E_{K_1} = W_{\vec{w}} + W_{\vec{R}}$$

$W_{\vec{R}} = 0$ نقطة تأثيره لاتنتقل

$E_{K_1} = 0$ دون سرعة ابتدائية

$$E_{K_2} = W_{\vec{\omega}}$$

$$\frac{1}{2} I_{\Delta} \omega^2 = mgh \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{2mgh}{I_{\Delta}}}$$

الأنتقال الشاقولي : $h = d(\cos\theta_2 - \cos\theta_1)$

$$h = d(1 - \cos\theta_{max})$$

الأستاذ محمد شتيوي
فيزياء - كيمياء
هـ : ٠٩٣٣٩٧٧٥٧٩

$$\omega = \sqrt{\frac{2mgd(1-\cos\theta_{max})}{I_{\Delta}}}.$$

إيجاد السرعة الخطية لنقطة من النواس.

$$v = \omega . r$$

ω : السرعة الزاوية للنواس $rad.s^{-1}$

r : بعد النقطة عن محور الدوران.

ثانياً: في حالة تثبيت كتل على النواس.

نحسب d: من القانون $d = \frac{\sum m_i r_i}{\sum m_i}$

$$d = \frac{m_1 \overline{r_1} + m_2 \overline{r_2} + \cdots m_i \overline{r_i}}{m_1 + m_2 + \cdots m_i}$$

تكون r موجبة إذا كانت الكتلة تحت محور الدوران
تكون r سالبة إذا كانت الكتلة فوق محور الدوران

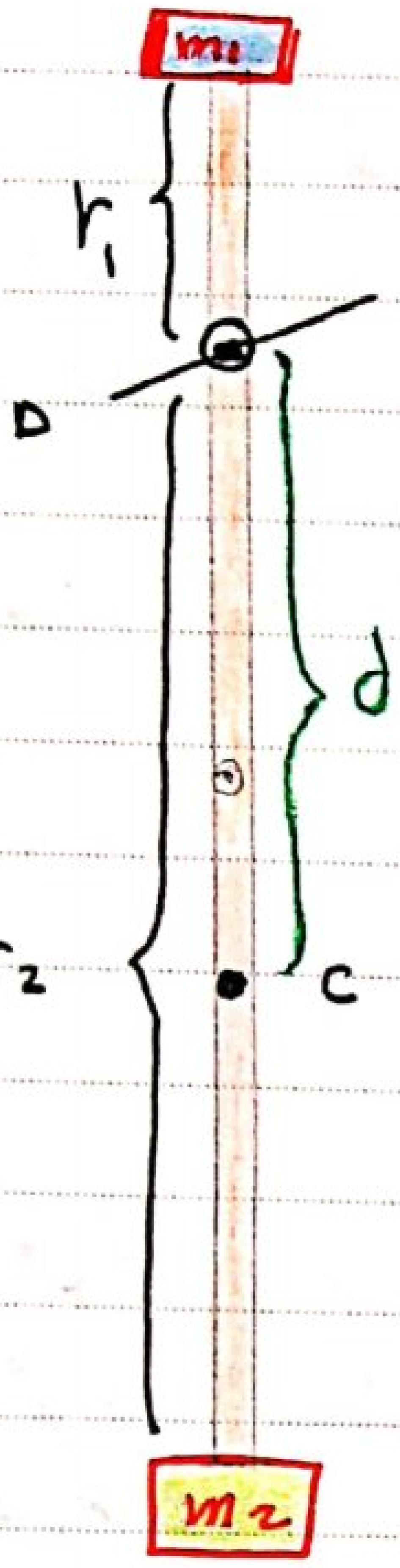
نحسب I_Δ: مجموع عزوم عطالة مكونات النواس.

مسألة إضافية:
نواس ثقلي يتكون من ساق مهملة الكتلة طولها $\ell = 1m$ نجعلها شاقولية ونثبت على طرفيها كتلتين: $m_1 = 0.4\,kg$ (الطرف العلوي) وعلى الطرف السفلي $m_2 = 0.6\,kg$، ونجعله يهتز حول محور أفقي عمودي على مستويه مار بنقطة تبعد $20\,cm$ عن الطرف العلوي
والمطلوب:

A
أ - احسب دور النواس الثقلي من أجل السعات الزاوية الصغيرة
ب - احسب دوره من أجل $\theta_{max} = 0.4\,rad$

B
. نزيح النواس عن وضع توازنه الشاقولي بزاوية $\theta_{max} = 60°$ ونتركه دون سرعة ابتدائية والمطلوب:
أ - استنتج بالرموز العلاقة المحددة لسرعته الزاوية لحظة مروره بالشاقول
ب - احسب قيمة السرعة الخطية لمركز عطالته. والسرعة الخطية للكتلة m_2 عند المرور بالشاقول.

نعطي: $g = 10\,m.s^{-2}$
$\pi^2 = 10$.



$\boxed{A}$ أ -

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{I_\Delta}{mgd}}$$

طلب d :

$$d = \frac{m_2 \cdot r_2 - m_1 r_1}{m_2 + m_1} = \frac{0.6(0.8) - 0.4(0.2)}{0.6 + 0.4}$$

$$d = \frac{48\times10^{-2} - 8\times10^{-2}}{1} = 0.4\,m$$

$$r_1 = 20\times10^{-2} = 0.2\,m$$

$$r_2 = 1 - 0.2 = 0.8\,m$$

طلب I_Δ :

$$I_\Delta = I_{\Delta/c} + I_{\Delta/m_1} + I_{\Delta/m_2}$$

$I_{\Delta/c} = 0$ لأن الساق مهملة الكتلة.

$$I_\Delta = 0 + m_1 \cdot r_1^2 + m_2 \cdot r_2^2$$

$$I_\Delta = 0.4(0.2)^2 + 0.6(0.8)^2$$

$$I_\Delta = 16\times10^{-3} + 384\times10^{-3} = 400\times10^{-3} = 0.4\,kg.m^2$$

$$m = m_1 + m_2 = 0.4 + 0.6 = 1\,kg$$

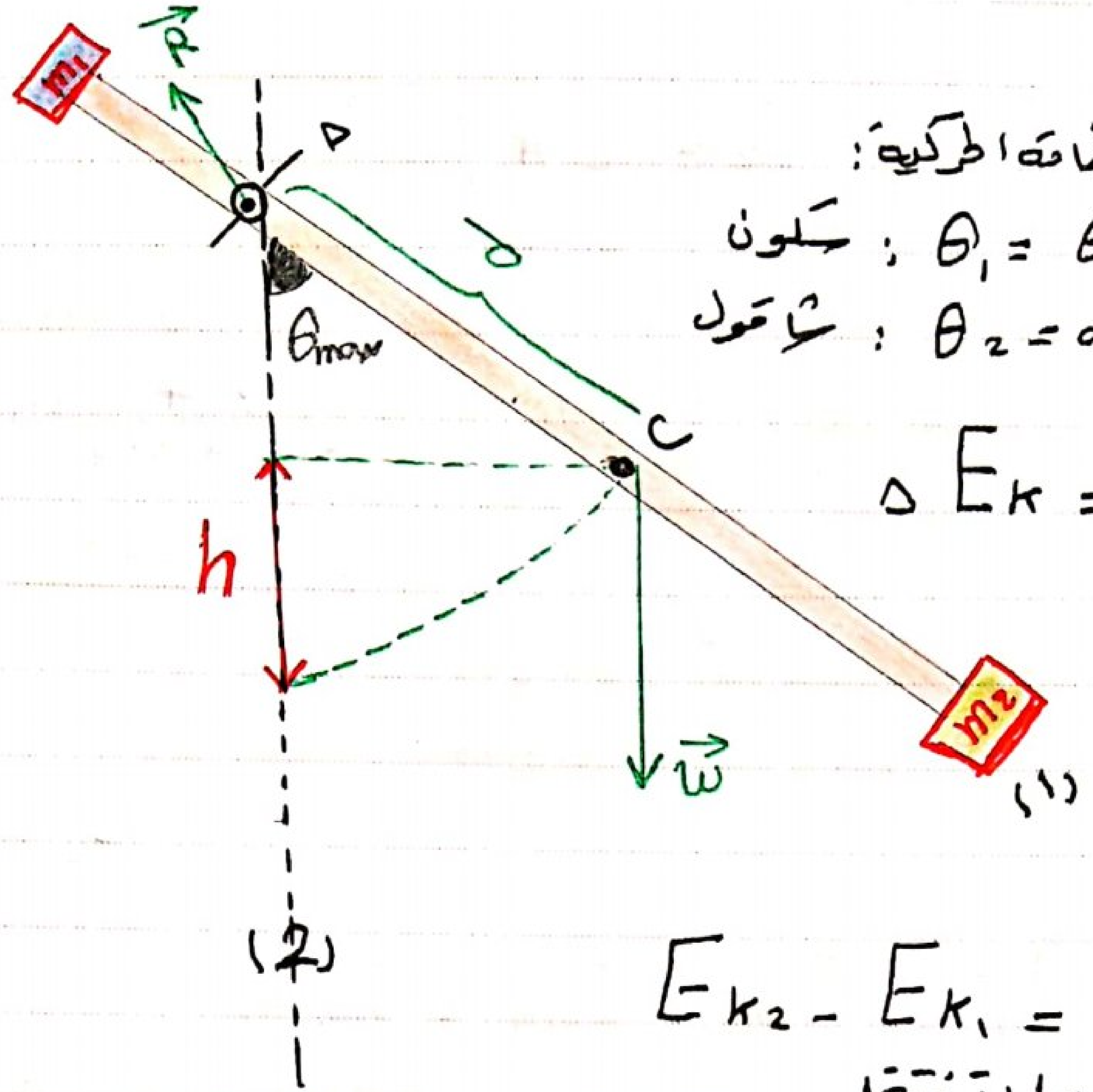
$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{0.4}{1\times10\times0.4}} = 2\,s$$

الأستاذ محمد شتيوي
فيزياء - كيمياء
هـ : ٠٩٣٣٩٧٧٠٧٩

$\theta_{max} = 0.4\,rad$. ٢ -

$$T_0' = T_0\left[1 + \frac{\theta_{max}^2}{16}\right]$$

$$T_0' = 2\left(1 + \frac{0.16}{16}\right) = 2(1 + 0.01) = 2(1,01) = 2.02\,s$$



B نطبق نظرية الطاقة الحركية:

1- الوضع (1) : $\theta_1 = \theta_{max}$; سكون

الوضع (2) : $\theta_2 = 0$; شاقول

$$\Delta E_k = \sum W_{\vec F (1 \to 2)}$$

$$E_{k_2} - E_{k_1} = W_{\vec w} + W_{\vec R}$$

$W_{\vec R} = 0$ نقطة تأثيره لا تنتقل.

$E_{k_1} = 0$ دون سرعة ابتدائية.

$$E_{k_2} = W_{\vec w} \Rightarrow \frac{1}{2} I_\Delta \omega^2 = mgh.$$

$$\omega = \sqrt{\frac{2mgh}{I_\Delta}} \quad . \quad h = d(\cos(0) - \cos\theta_{max})$$

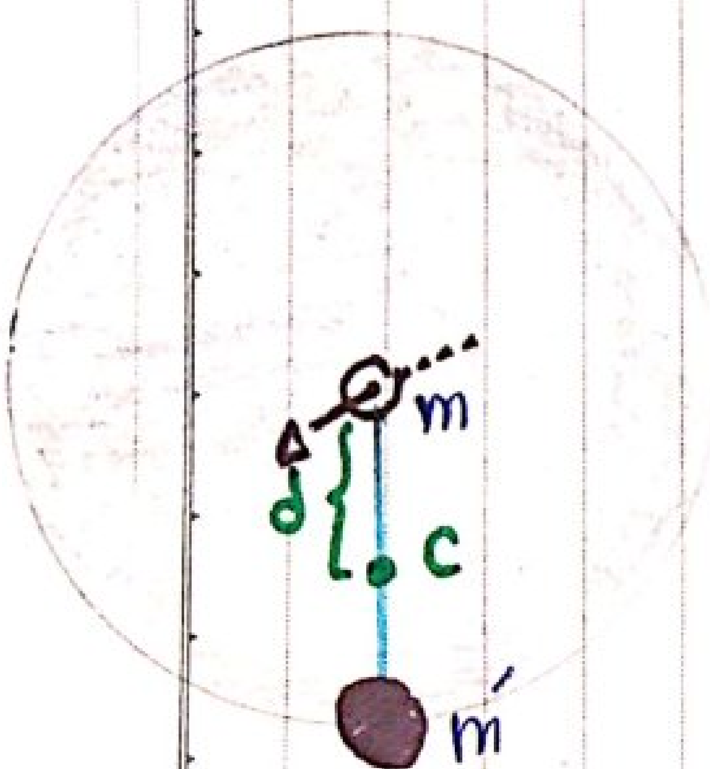
$$h = d(1 - \cos\theta_{max})$$

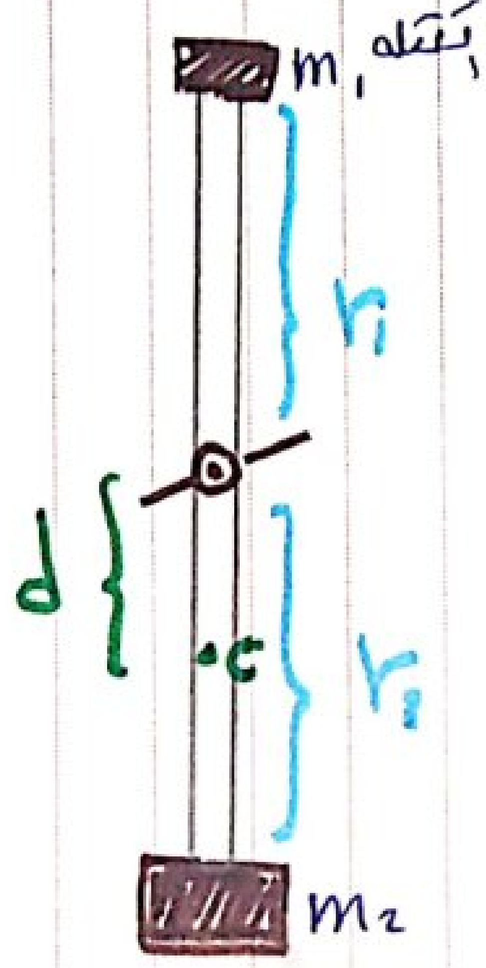
$$\omega = \sqrt{\frac{2\,m\,g\,d(1-\cos\theta_{max})}{I_\Delta}} = \sqrt{\frac{2\times1\times10\times0.4(1-\frac{1}{2})}{0.4}}$$

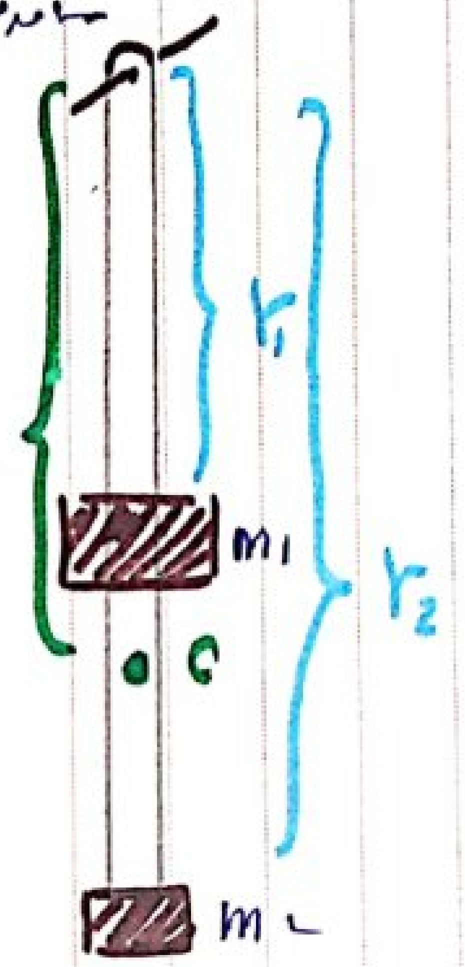
$$\omega = \sqrt{10} = \pi \ rad\cdot s^{-1}.$$

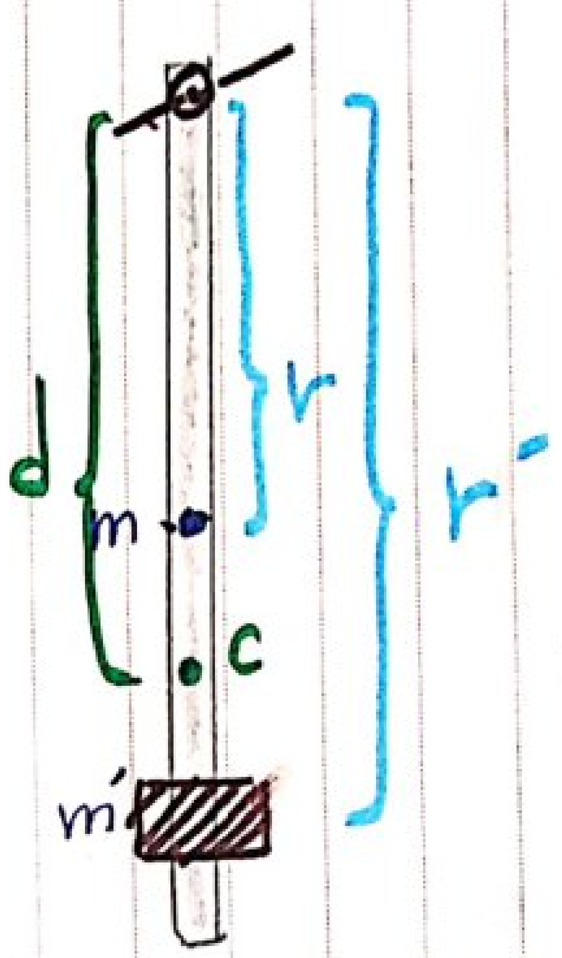
$$v_c = \omega \cdot d = \pi \times 0.4 = 4\pi\times10^{-1} = 1.25\ m\cdot s^{-1} - 2$$

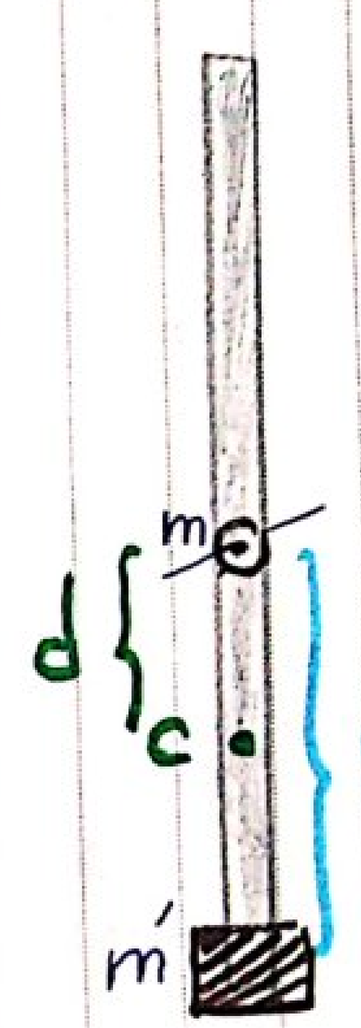
$$v_2 = \omega \cdot r_2 = \pi\times0.8 = 8\pi\times10^{-1} = 2.5\ m\cdot s^{-1}.$$











$$d = \frac{m' r' + m(0)}{m + m'}$$

$$d = \frac{m_2 r_2 - m_1 r_1}{m_1 + m_2}$$

$$d = \frac{m_2 r_2 + m_1 r_1}{m_1 + m_2}$$

$$d = \frac{m' r' + m r}{m + m'}$$

$$d = \frac{m' r' + m(0)}{m + m'}$$

$$I_\Delta = I_{\Delta/C} + I_{\Delta/m'}$$

$$I_\Delta = \frac{1}{2} m r^2 + m' r^2$$

$$I_\Delta = I_{\Delta/C} + I_{\Delta/m_1} + I_{\Delta/m_2}$$

$$I_\Delta = 0 + m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2$$

$$I_\Delta = I_{\Delta/\text{ساق}} + I_{\Delta/m_1} + I_{\Delta/m_2}$$

$$I_\Delta = 0 + m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2$$

$$I_\Delta = I_{\Delta/\text{ساق}} + I_{\Delta/m'}$$

$$I_\Delta = (I_{\Delta/C} + m r^2) + m' r'^2$$

$$I_\Delta = \frac{1}{12} m L^2 + m r^2 + m' r'^2$$

$$I_\Delta = I_{\Delta/C} + I_{\Delta/m'}$$

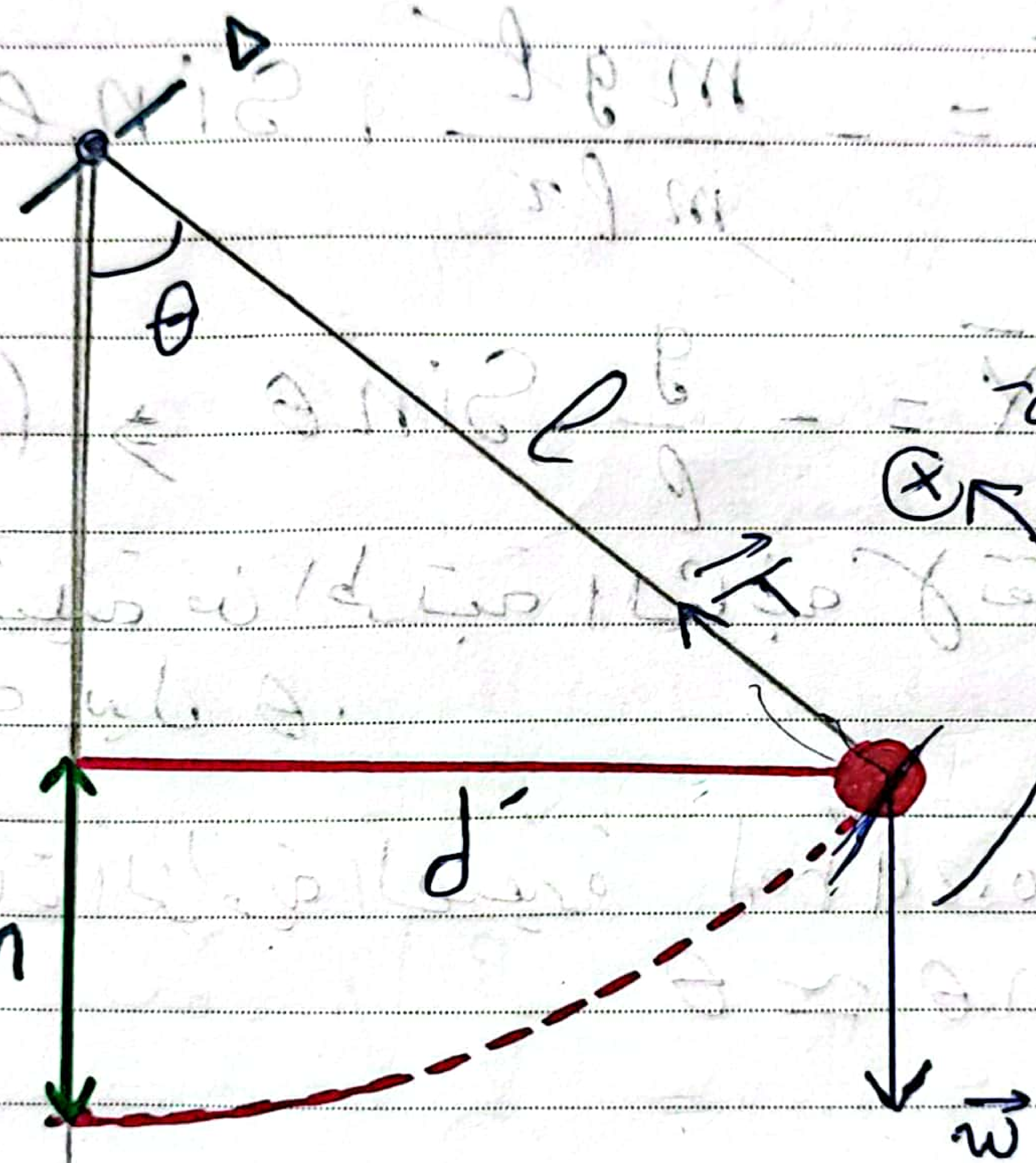
$$I_\Delta = \frac{1}{12} m L^2 + m' r'^2$$

النواس الثقلي البسيط

نظرياً: نقطة مادية تهتز تحت تأثير ثقلها على بعد ثابت l من محور أفقي ثابت.

عملياً: كرة صغيرة كتلتها m كثافتها النسبية كبيرة معلقة بخيط خفيف لا يمتط طوله l كبير بالنسبة لنصف قطر الكرة.

الأستاذ محمد شتيوي
فيزياء - كيمياء
هـ: ٠٩٣٣٩٧٧٥٧٩



الدراسة التحركية:

القوى الخارجية المؤثرة:

$\vec{w}$: ثقل الكرة.

$\vec{T}$: توتر الخيط.

$$\sum \Gamma_{\Delta} = I_{\Delta} \cdot \alpha \Rightarrow \Gamma_{\vec{w}/\Delta} + \Gamma_{\vec{T}/\Delta} = I_{\Delta} \alpha$$

$\Gamma_{\vec{T}/\Delta} = 0$ لأن حامله يلاقي محور الدوران.

الاتجاه الموجب للدوران عكس دوران عقارب الساعة.

$$\Gamma_{\vec{w}/\Delta} = -d \cdot w$$

$$\Gamma_{\vec{w}/\Delta} = -l \cdot \sin\theta \cdot w$$

$$\Gamma_{\vec{w}/\Delta} = -mg \cdot l \cdot \sin\theta$$

$$-mgl\sin\theta + 0 = I_\Delta . \bar{\alpha}$$

$$\bar{\alpha} = -\frac{mgl}{I_\Delta} . \sin\theta$$

$$I_\Delta = m . l^2$$

$$\bar{\alpha} = -\frac{\cancel{m} g \cancel{l}}{\cancel{m} l^{\cancel{2}}} . \sin\theta$$

$$\bar{\alpha} = -\frac{g}{l} . \sin\theta \Rightarrow (\bar{\theta})''_t = -\frac{g}{l} \sin\theta$$

هي معادلة تفاضلية من المرتبة الثانية لا تقبل حلاً جيبياً لوجود $\sin\theta$ بدل θ.

من أجل السعات الزاوية الصغيرة $\theta < 0.24\ rad$

$\sin\theta \simeq \theta$

تصبح المعادلة :

$$(\bar{\theta})''_t = -\frac{g}{l} . \bar{\theta} \quad \text{---} (1)$$

هي معادلة تفاضلية من المرتبة الثانية تقبل حلاً جيبياً

$$\bar{\theta} = \theta_{max} . \cos(\omega_0 t + \bar{\varphi})$$

للتأكد من صحة الحل : باشتقاق مرتين بالنسبة للزمن

$$(\bar{\theta})'_t = -\omega_0\, \theta_{max} . \sin(\omega_0 t + \bar{\varphi})$$

Nehad S A B B A G H

$$(\bar{\theta})''_t = -\omega_0^2 \cdot \theta_{max} \cdot \cos(\omega_0 t + \bar{\varphi})$$

$$(\bar{\theta})''_t = -\omega_0^2 \cdot \bar{\theta} \quad \text{---} \quad (2)$$

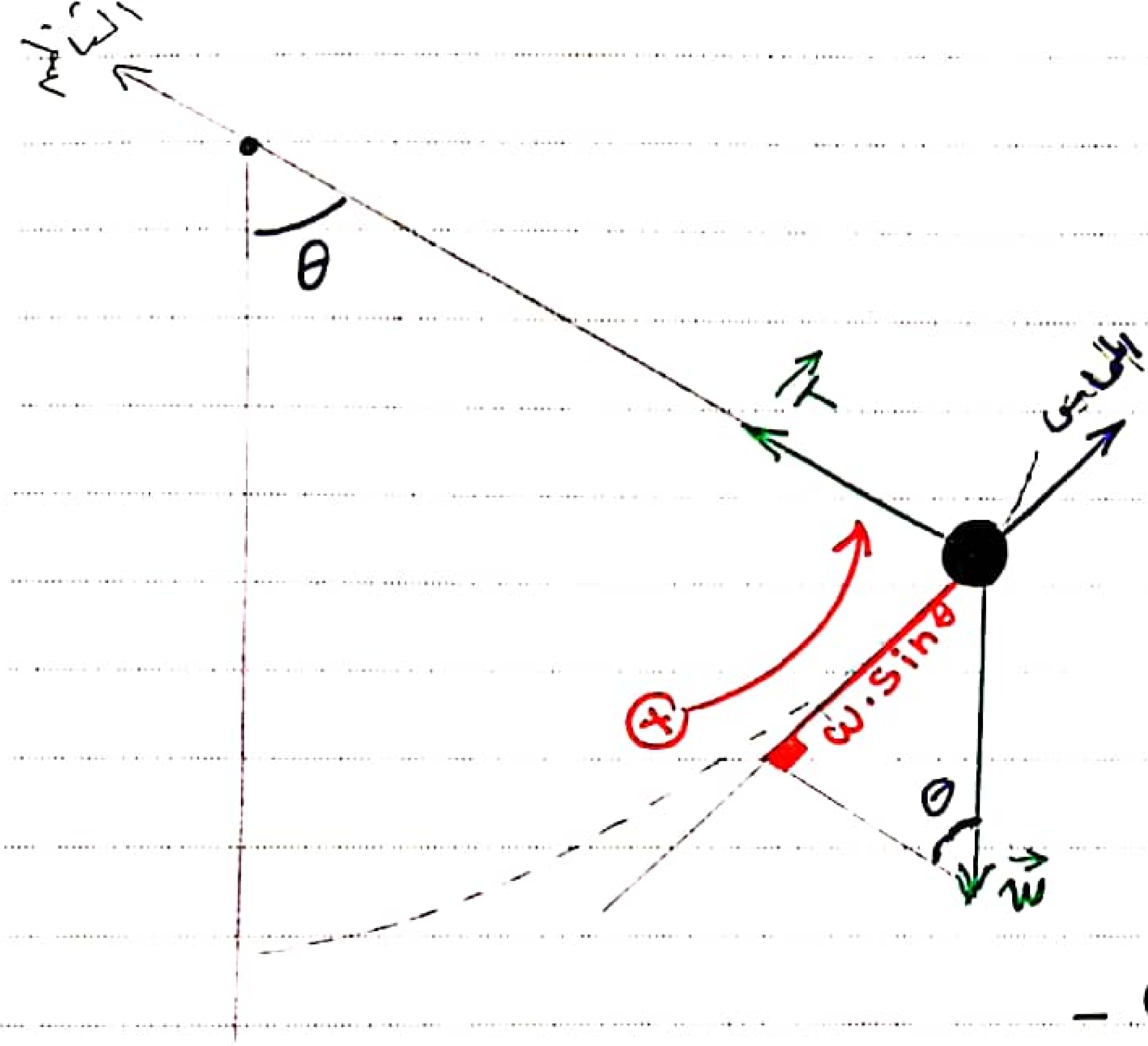
الأستاذ محمد شتيوي
فيزياء - كيمياء
هـ: ٠٩٣٣٩٧٧٥٧٩

بمقارنة (1) مع (2) نجد :

$$\omega_0^2 = \frac{g}{\ell} \Rightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{g}{\ell}} > 0$$

وهذا محقق لأن g ، ℓ موجبان

حركة النواس الثقلي البسيط هي جيبية دورانية من أجل السعات الزاوية الصغيرة ،



* الدراسة التحريكية.

القوى الخارجية المؤثرة في الكرة :

$\vec{w}$: ثقل الكرة.

$\vec{T}$: قوة توتر الخيط.

$$\sum \vec{F} = m.\vec{a}$$

$$\vec{w} + \vec{T} = m.\vec{a}$$

بالإسقاط على المماس الموجه بجهة إزاحة الكرة.

$$-w.\sin\theta + 0 = m.a_T$$

$$-mg\sin\theta = m.a_T$$

$$\bar{a}_T = L.\bar{\alpha} = L(\bar{\theta})''_t$$

$$a_T = -g.\sin\theta \Rightarrow L(\bar{\theta})''_t = -g.\sin\theta$$

$$(\bar{\theta})''_t = -\frac{g}{L}.\sin\theta$$

من أجل السعات الزاوية الصغيرة

$\theta < 0.24\,rad$. $\sin\theta = \theta$.

$$(\bar{\theta})''_t = -\frac{g}{L}.\theta$$

س. انطلاقا من العلاقة: $(\bar{\theta})''_t = -\frac{g}{L}\cdot\theta$ ..① ، برهن ان حركة النواس الثقلي البسيط من أجل السعات الزاوية الصغيرة هي جيبية دورانية ثم استنتج علاقة دوره الخاص T_0.

هي معادلة تفاضلية من المرتبة الثانية تقبل حلاً جيبياً من الشكل

$$\bar{\theta} = \theta_{max}\cdot\cos(\omega_0 t + \bar{\varphi})$$

$$(\bar{\theta})'_t = -\omega_0\cdot\theta_{max}\cdot\sin(\omega_0 t + \bar{\varphi})$$

$$(\bar{\theta})''_t = -\omega_0^2\cdot\underbrace{\theta_{max}\cdot\cos(\omega_0 t + \varphi)}_{\theta}$$

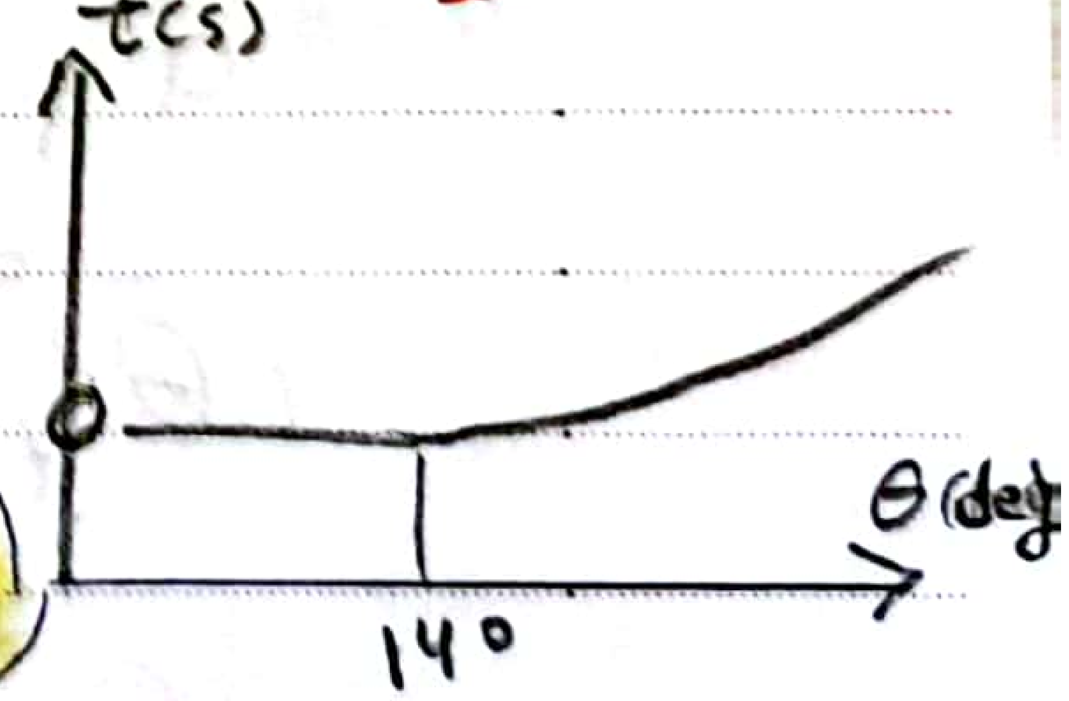
$$(\bar{\theta})''_t = -\omega_0^2\cdot\theta \quad ...②$$

بالمطابقة بين ① و ② نجد:

$$\omega_0^2 = \frac{g}{L} \Rightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{g}{L}} > 0$$

وهذا محقق لأن g ، L موجبان ⇐ حركة النواس الثقلي البسيط من أجل السعات الزاوية الصغيرة هي جيبية دورانية

* استنتاج علاقة دوره الخاص T_0

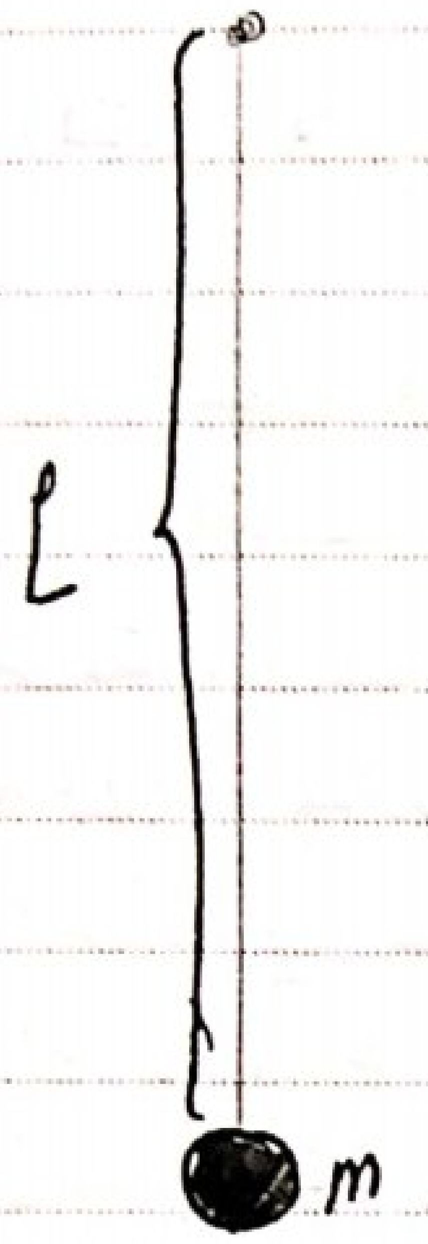


$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{L}} \quad , \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$$

$$\frac{2\pi}{T_0} = \sqrt{\frac{g}{L}} \Rightarrow \boxed{T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}}$$

وهي علاقة الدور الخاص للنواس الثقلي البسيط من أجل السعات الزاوية الصغيرة ، ونلاحظ أن الدور يتناسب طرداً مع الجذر التربيعي لطول النواس
" " " عكساً " " " لتسارع الجاذبية

س: استنتج علاقة الدور الخاص للنواس الثقلي البسيط من أجل النوسات صغيرة السعة انطلاقاً من دور النواس الثقلي من أجل السعات الزاوية الصغيرة



$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{I_\Delta}{m g d}}$$

$$d = l \quad , \quad I_\Delta = m l^2$$

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{m l^2}{m g l}}$$

$$\boxed{T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}}$$

* علاقة دور النواس الثقلي من أجل السعات الزاوية الكبيرة،

$$\boxed{T'_0 = T_0\left[1 + \frac{\theta_{max}^2}{16}\right]}$$

T'_0: الدور من أجل السعات الكبيرة

T_0: الدور من أجل السعات الصغيرة.

θ_{max}: السعة الزاوية الكبيرة (rad).

الأستاذ محمد شتيوي
فيزياء - كيمياء
هـ : ٠٩٣٣٩٧٧٥٧٩

نستنتج أن دور النواس الثقلي البسيط:

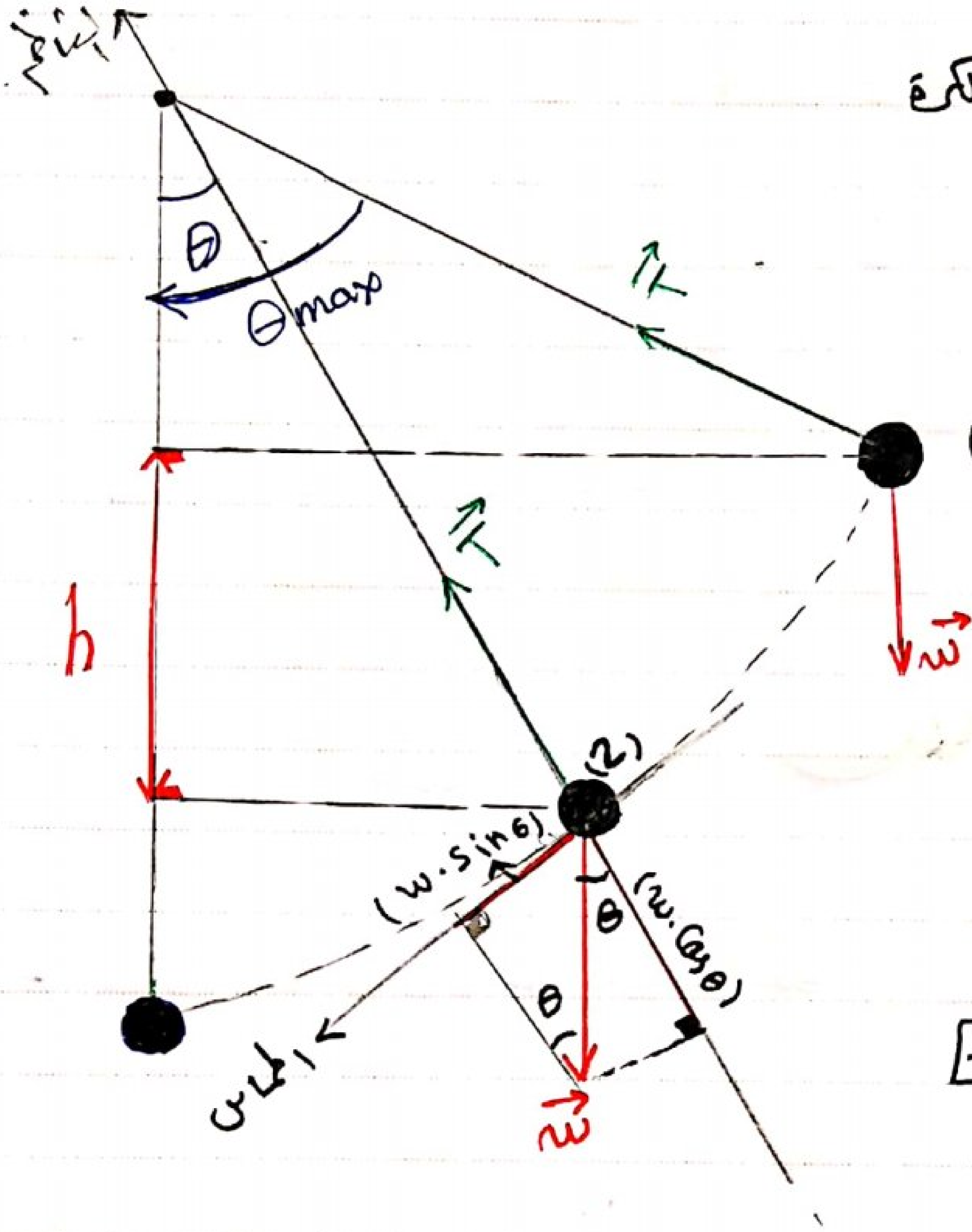
١- لا يتعلق بكتلته ولا بنوع مادة كرته.

٢- النوسات صغيرة السعة لها الدور نفسه. $\theta \leq 0.24\ rad$ ، $\theta \leq 14^\circ$

ويتناسب: طرداً مع الجذر التربيعي لطول خيطه l ،

عكساً مع الجذر التربيعي لتسارع الجاذبية الأرضية g .

استنتاج العلاقة المحددة لسرعة كرة النواس في نقطة من مسارها:



القوى الخارجية المؤثرة في الكرة

$\vec{w}$ ثقل الكرة،

$\vec{T}$ توتر الخيط.

لحساب السرعة الخطية لكرة النواس (1) في الوضع (2) نطبق نظرية الطاقة الحركية في الوضعين

الوضع الأول: $\theta_1 = \theta_{max}$ سكون.

الوضع الثاني: $\theta_2 = \theta$

$$\Delta E_K = \sum \overline{W}_{\vec{F}(1\to2)}$$

$$E_{k_2} - E_{k_1} = \overline{W}_{\vec{w}} + \overline{W}_{\vec{T}}$$

$\overline{W}_{\vec{T}} = 0$: لأن حامله عمودي على الانتقال في كل لحظة.

$E_{k_1} = 0$ دون سرعة البدائية.

$$E_{k_2} = W_{\vec{w}} \Rightarrow \frac{1}{2} m v^2 = m g h$$

$$v^2 = 2gh \quad , \quad h = \ell(\cos\theta - \cos\theta_{max})$$

$$v^2 = 2g\ell(\cos\theta - \cos\theta_{max})$$

$$v = \sqrt{2g\ell(\cos\theta - \cos\theta_{max})}$$

حالة خاصة . عند المرور بالشاقول $\theta = 0 \Rightarrow \cos 0 = 1$

$$v = \sqrt{2gl(1 - \cos\theta_{max})}$$

١- استنتاج علاقة توتر خيط التعليق في نقطة من مسار الكرة .

القوى الخارجية المؤثرة في كرة النواس : $\vec{w}$: ثقل الكرة
$\vec{T}$: توتر الخيط .

$$\sum \vec{F} = m.\vec{a} \Rightarrow \vec{w} + \vec{T} = m.\vec{a}$$

بالاسقاط على محور محمول على $\vec{T}$ وبجهته (الناظم) .

$$-w.\cos\theta + T = m.a_c$$

$$T = mg.\cos\theta + m\frac{v^2}{l}$$

$$T = mg\cos\theta + m.\frac{2gl}{l}(\cos\theta - \cos\theta_{max})$$

$$T = mg.\cos\theta + 2mg(\cos\theta - \cos\theta_{max})$$

$$T = mg(\cos\theta + 2\cos\theta - 2\cos\theta_{max})$$

$$T = mg(3\cos\theta - 2\cos\theta_{max})$$

حالة خاصة : عند المرور بالشاقول . $\theta = 0$

$$T = mg(3\times 1 - 2\cos\theta_{max})$$

$$T = m.g(3 - 2\cos\theta_{max})$$

* استنتج علاقة التسارع المماسي ، في نقطة من مسار الكرة .

القوى المؤثرة على الكرة : $\vec{w}$: ثقل الكرة .

$\vec{T}$: توتر الخيط .

$$\sum \vec{F} = m \cdot \vec{a} \Rightarrow \vec{w} + \vec{T} = m \cdot \vec{a}$$

بالاسقاط على المماس .

$$+w \cdot \sin\theta + 0 = m \cdot a_T$$

$$mg \cdot \sin\theta = m \cdot a_T \Rightarrow a_T = g \cdot \sin\theta$$

* الطاقة الميكانيكية للنواس الثقلي البسيط

$$E = E_k + E_p = ConsT.$$

وهي مقدار ثابت

الأسئلة:

أولاً: اختر الإجابة الصحيحة:

1 -

الطيقاتية نواس ثقلي، فهي تقدم أي تنقص دورها.

ولتصحيح الطيقاتية يجب زيادة دورها.

الأستاذ محمد شتيوي
فيزياء - كيمياء
هـ: ٠٩٣٣٩٧٧٥٧٩

$$T_o = 2\pi\sqrt{\frac{I_\Delta}{mgd}}$$

نلاحظ أن الدور يتناسب طرداً مع الجذر التربيعي لعزم العطالة، ولزيادة الدور نعمل على زيادة عزم العطالة أي خفض القرص بمقدار ضئيل.

الخيار a.

2- الدور يتناسب عكساً في الجذر التربيعي لتسارع الجاذبية الأرضية

$$T_o = 2\pi\sqrt{\frac{I_\Delta}{mgd}}$$

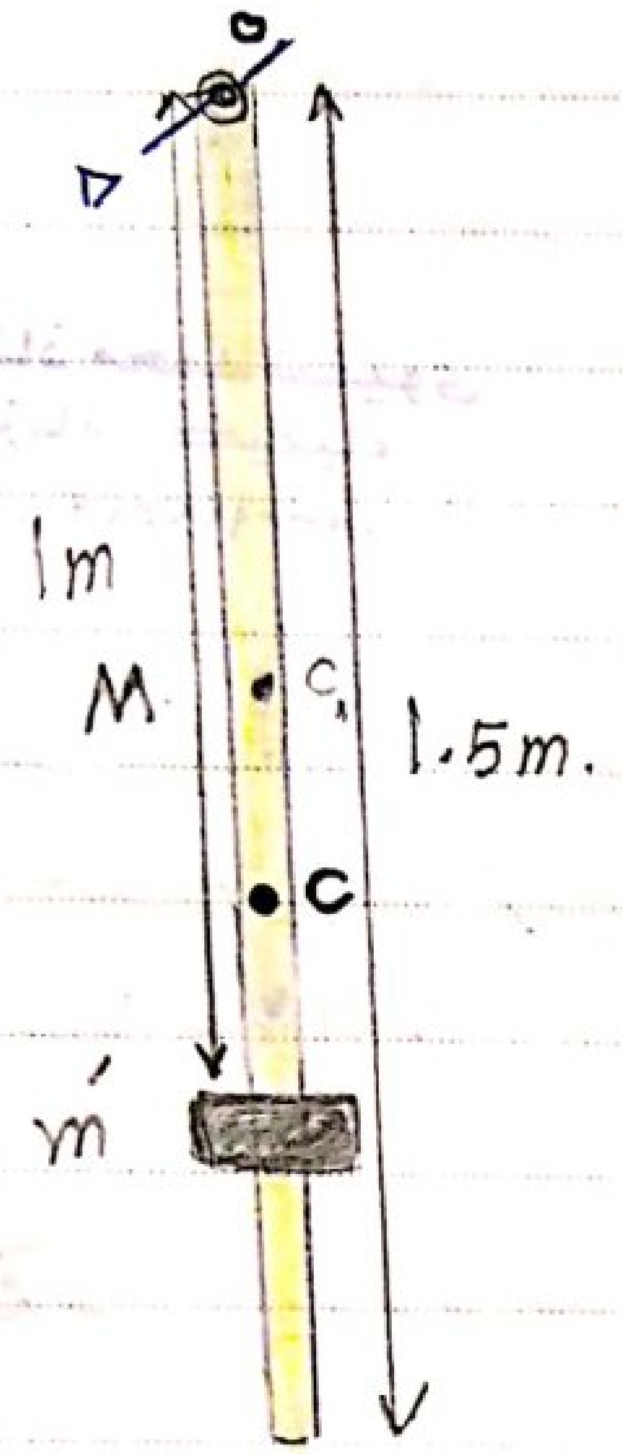
وعند الارتفاع تنقص قيمة g فيزداد الدور وتؤخر الطيقاتية.

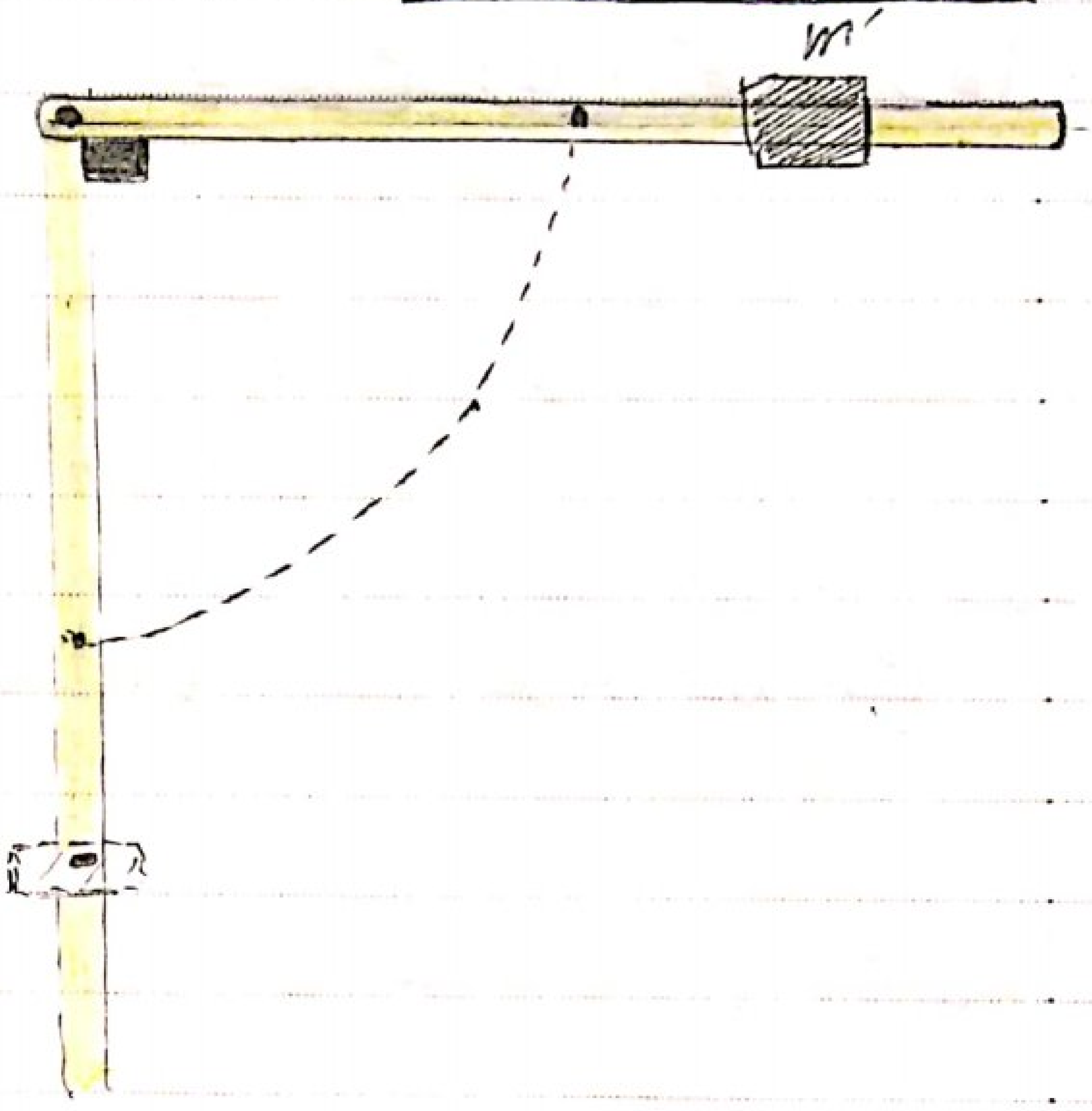
c.

ثانياً: حل المسائل.

المسألة الأولى:

$\ell = 1.5m$ ، $M = 0.5kg$.





1) حساب: الدور T_0:

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{I_\Delta}{mgd}}.$$

$$d = \frac{m'(r') + M(r)}{m' + M} = \frac{0.5 \times 1 + 0.5(0.75)}{0.5 + 0.5} = \frac{0.5(1.75)}{1}$$

$$d = 0,875 \text{ m}$$

$$I_\Delta = \underbrace{I_\Delta}_{\text{ساق}} + I_{\Delta/m'}$$

$$I_\Delta = \left(I_{\Delta/c} + M\left(\frac{\ell}{2}\right)^2\right) + m' \cdot r'^2 = \frac{1}{12}M\ell^2 + \frac{1}{4}M\ell^2 + m' \cdot r'^2$$

$$I_\Delta = \frac{1}{3}Ml^2 + m'.r^2 = \frac{1}{3}\times 0.5(1.5)^2 + 0.5(1)^2$$

$$I_\Delta = \frac{1}{3}\times 0.5 \times 2.25 + 0.5 = (0.75 + 1)\,0.5$$

$$I_\Delta = 0.5(1.75) = 0.875\ Kg.m^2.$$

$$m = m' + M = 0.5 + 0.5 = 1\,kg$$

بالتعويض :

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{0.875}{1\times 10\times 0.875}} = 2\,S$$

الأستاذ محمد شتيوي
فيزياء - كيمياء
هـ : ٠٩٣٣٩٧٧٥٧٩

2. القوى المؤثرة: $\vec{w}$: ثقل الجملة ، $\vec{R}$ رد فعل محور الدوران ،

بتطبيق نظرية الطاقة الحركية :

الوضع الأول : $\theta_1 = \theta_{max}$ ، حالة سكون .

$\theta_2 = 0$ الشاقول .

$$\Delta E_k = \sum W\vec{F}_{(1\to 2)} \Rightarrow E_{k_2} - E_{k_1} = W_{\vec{w}} + W_{\vec{R}}$$

$W_{\vec{R}} = 0$: نقطة تأثيره لا تنتقل .

$E_{k_1} = 0$ دون سرعة ابتدائية .

$$E_{k_2} - 0 = W_{\vec{w}} + 0$$

$$\Rightarrow E_{k_2} = W_{\vec{w}}$$

$E_{k_2} = mgh.$ ، $h = d(1 - \cos\theta_{max})$

$$h = 0.875\,(1 - \cos\tfrac{\pi}{2}) = 0.875\,m.$$

$$E_k = 1\times 10\times 0.875 = 8.75\,J.$$

لحساب السرعة الخطية v يلزمنا حساب ω .

$$E_k = \frac{1}{2} I_\Delta . \omega^2 \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{2E_k}{I_\Delta}}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{2 \times 8.75}{0.875}} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5} \,(rad.s^{-1})$$

حساب السرعة الخطية للكتلة m' .

$$v = \underbrace{\omega}_{\text{السرعة الزاوية للنواس}} . r \longrightarrow \text{بعد الكتلة } m' \text{ عن محور الدوران}$$

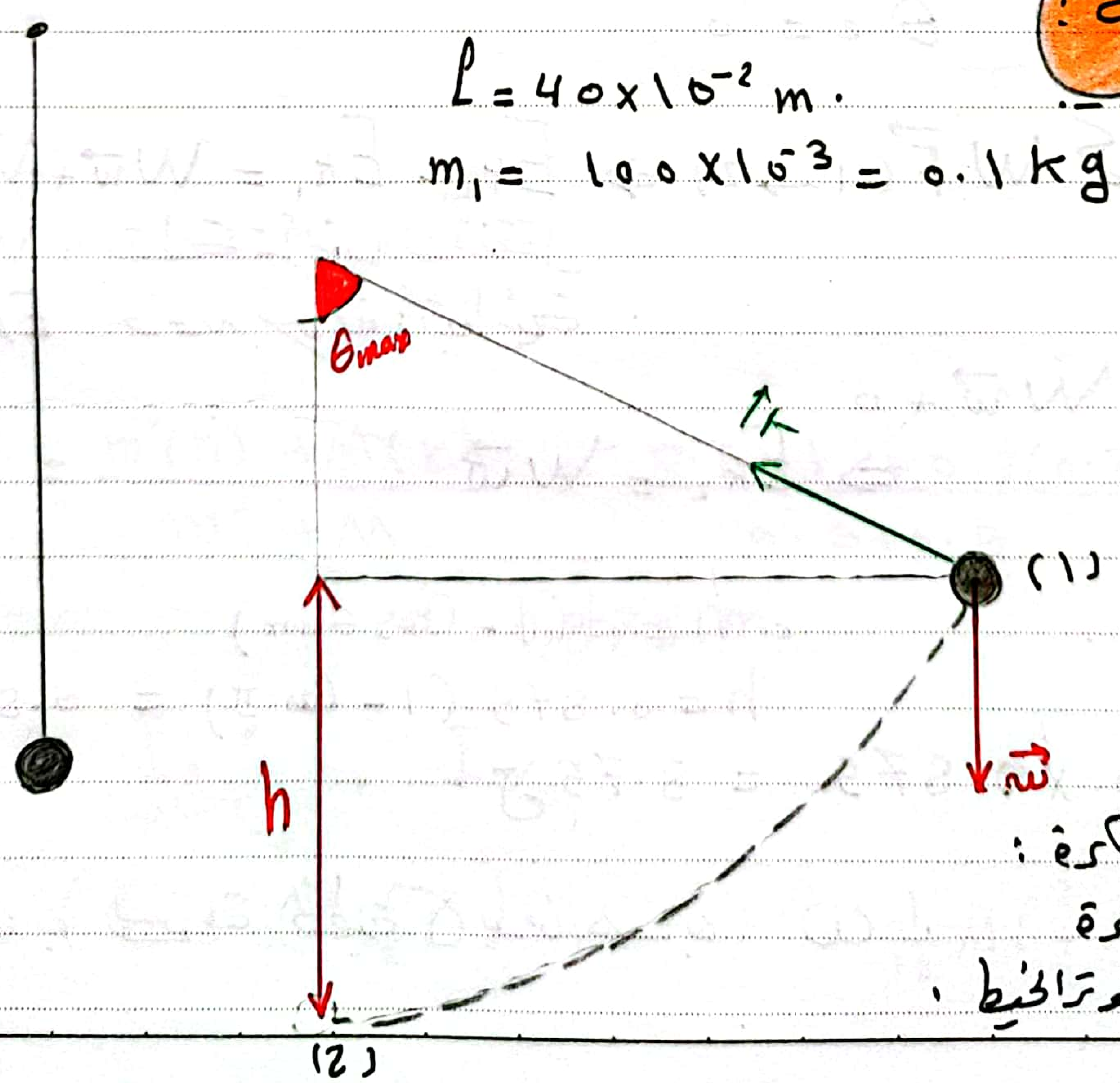
$$. v = 2\sqrt{5} \times 1 = 2\sqrt{5} \; m.s^{-1}$$

المسألة الثانية :

$\ell = 40 \times 10^{-2} \, m .$

$m_1 = 100 \times 10^{-3} = 0.1 \, kg .$

-١



$v = 2m.s^{-1} .$

القوى المؤثرة في الكرة :

$\vec{W}$: ثقل الكرة

$\vec{T}$: قوة توتر الخيط .

تطبيق نظرية الطاقة الحركية :

الوضع الأول : $\theta_1 = \theta_{max}$ سكون .

الوضع الثاني : $\theta_2 = 0$ شاقول

$$\Delta E_k = \sum \overline{W}_{\vec{F}(1\to 2)}$$

$$E_{k_2} - E_{k_1} = \overline{W}_{\vec{w}} + \overline{W}_{\vec{T}}$$

$\overline{W}_{\vec{T}} = 0$ لأن حامله عمود على الانتقال في كل لحظة .

$E_{k_1} = 0$ دون سرعة ابتدائية .

$$E_{k_2} - 0 = \overline{W}_{\vec{w}} + 0$$

$$E_{k_2} = \overline{W}_{\vec{w}} \Rightarrow \frac{1}{2} m v^2 = m g h.$$

$$h = \ell(1 - \cos\theta_{max})$$

$$v^2 = 2 g \ell (1 - \cos\theta_{max})$$

$$(2)^2 = 2 \times 10 \times 4 \times 10^{-1} (1 - \cos\theta_{max})$$

$$4 = 2 \times 4 (1 - \cos\theta_{max}) \Rightarrow 1 = 2(1 - \cos\theta_{max})$$

$$1 - \cos\theta_{max} = \frac{1}{2} \Rightarrow \cos\theta_{max} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \theta_{max} = \frac{\pi}{3} \text{ rad.}$$

2) القوى المؤثرة في الكرة : $\vec{w}$ ثقل الكرة ، $\vec{T}$: توتر الخيط .

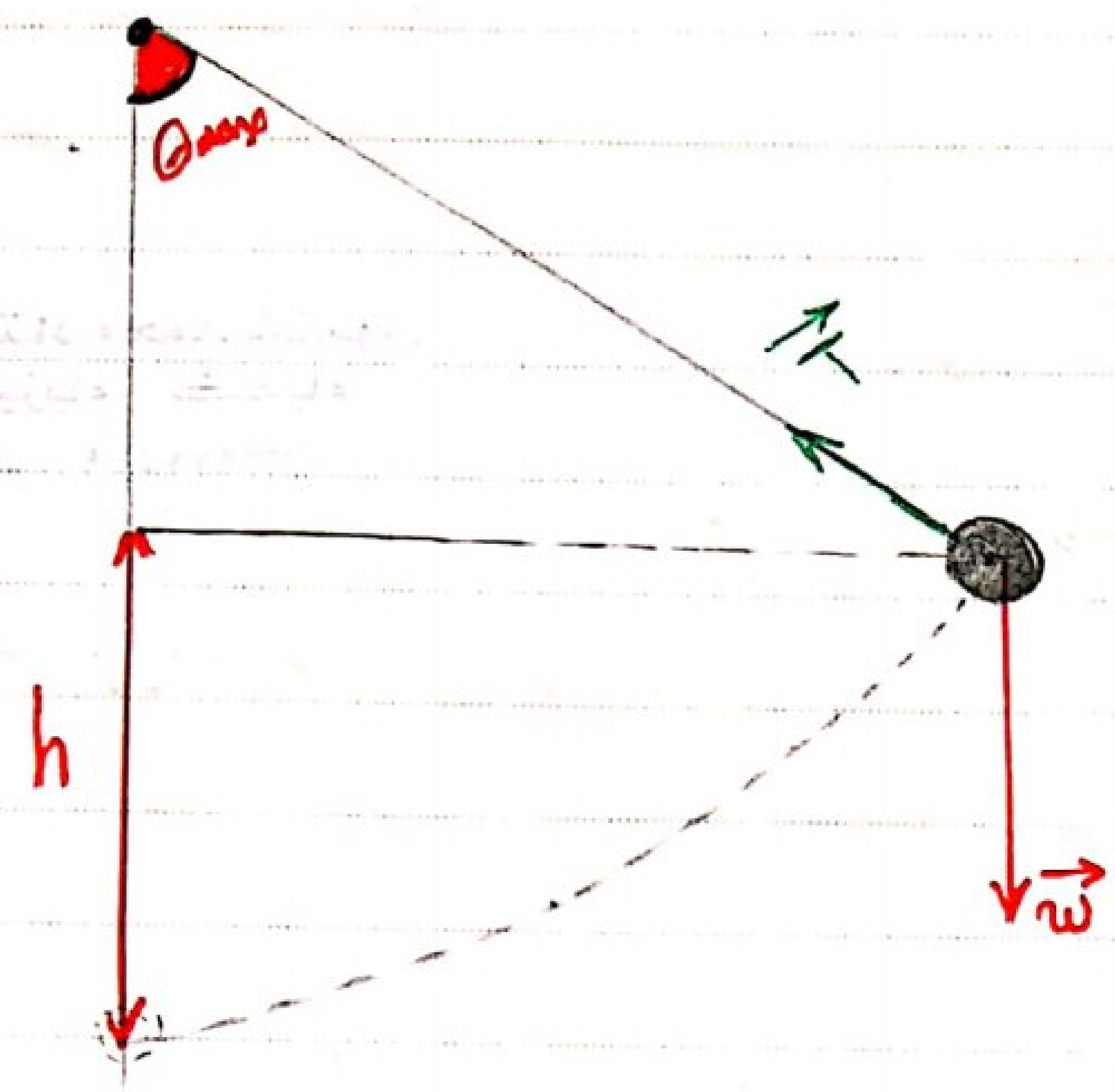
$$\sum \vec{F} = m \cdot \vec{a} \Rightarrow \vec{w} + \vec{T} = m \cdot \vec{a}$$

بالإسقاط على محور محمول على $\vec{T}$ وجهته الناظم :

$$-w + T = m \cdot a_c \Rightarrow T = mg + m\frac{v^2}{\ell}$$

$$T = m\left(g + \frac{v^2}{\ell}\right) = 0.1\left(10 + \frac{4}{4\times10^{-1}}\right) = 2N.$$

المسألة الثالثة :



$m = 0.5\ kg$

$l = 1.6\ m.$

$h = 0.8\ m.$

① 1. استنتاج العلاقة المحددة لسرعة الكرة عند المرور بالشاقول.

القوى الخارجية المؤثرة في الكرة :

$\vec{w}$: ثقل الكرة .

$\vec{T}$: قوة توتر الخيط

نطبق نظرية الطاقة الحركية .

الوضع الأول : $\theta_1 = \theta_{max}$. السكون .

الوضع الثاني : $\theta_2 = 0$ الشاقول .

$$\Delta E_k = \sum W_{\vec{F}}\,(1 \to 2)$$

$$E_{k_2} - E_{k_1} = W_{\vec{w}} + W_{\vec{T}}$$

$W_{\vec{T}} = 0$: حامله يعامد الانتقال في كل لحظة .

$E_{k_1} = 0$: دون حركة ابتدائية

$$E_{k_2} - 0 = W_{\vec{w}} + 0 \Rightarrow E_{k_2} = W_{\vec{w}}$$

$$\frac{1}{2} m v^2 = m g h \Rightarrow v = \sqrt{2gh} = \sqrt{2 \times 10 \times 0.8}$$

$$\Rightarrow v = 4\ (m.s^{-1})$$

② .

$$h = l(1 - \cos\theta_{max}) \Rightarrow 0.8 = 1.6(1 - \cos\theta_{max})$$

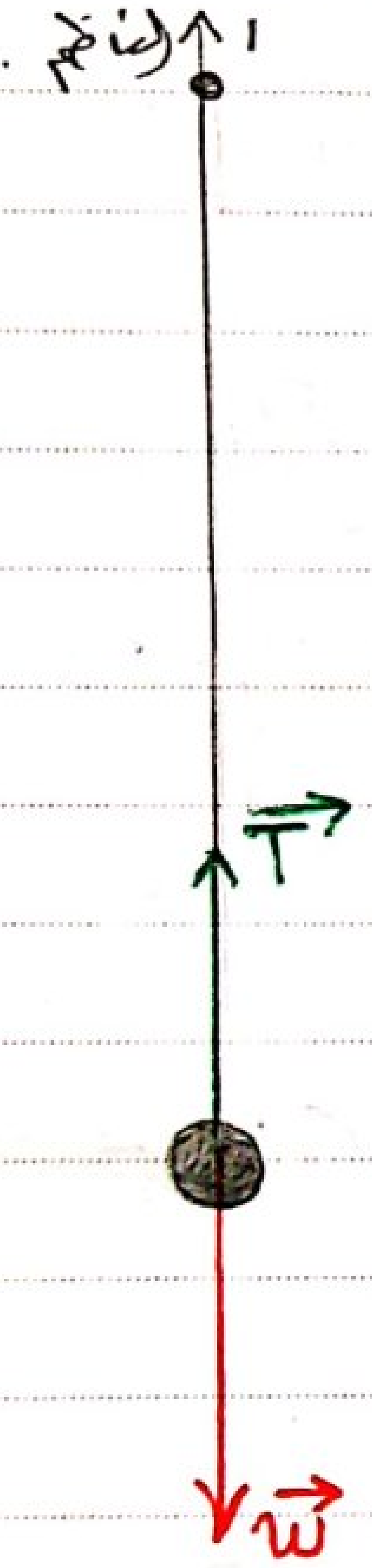
$$\frac{1}{2} = 1 - \cos\theta_{max} \Rightarrow \cos\theta_{max} = \frac{1}{2} \Rightarrow \theta_{max} = \frac{\pi}{3}\ rad.$$

③ . $$T_0' = T_0\left[1 + \frac{\theta_{max}^2}{16}\right]$$

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \Rightarrow T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{1.6}{10}} = 0.8\pi\ s$$

$$T_0' = 0.8\pi\left(1 + \frac{\frac{\pi^2}{9}}{16}\right) = 0.8\pi\left(1 + \frac{10}{144}\right)$$

$$T_0' = 2.68\ (s)$$



④ . القوى الخارجية المؤثرة في الكرة :

$\vec{w}$: ثقل الكرة .

$\vec{T}$: قوة توتر الخيط .

$$\Sigma \vec{F} = m.\vec{a} \Rightarrow \vec{w} + \vec{T} = m.\vec{a}$$

بالإسقاط على محور محمول على $\vec{T}$ وجهته (الناظم)

$$-w + T = m.a_c$$

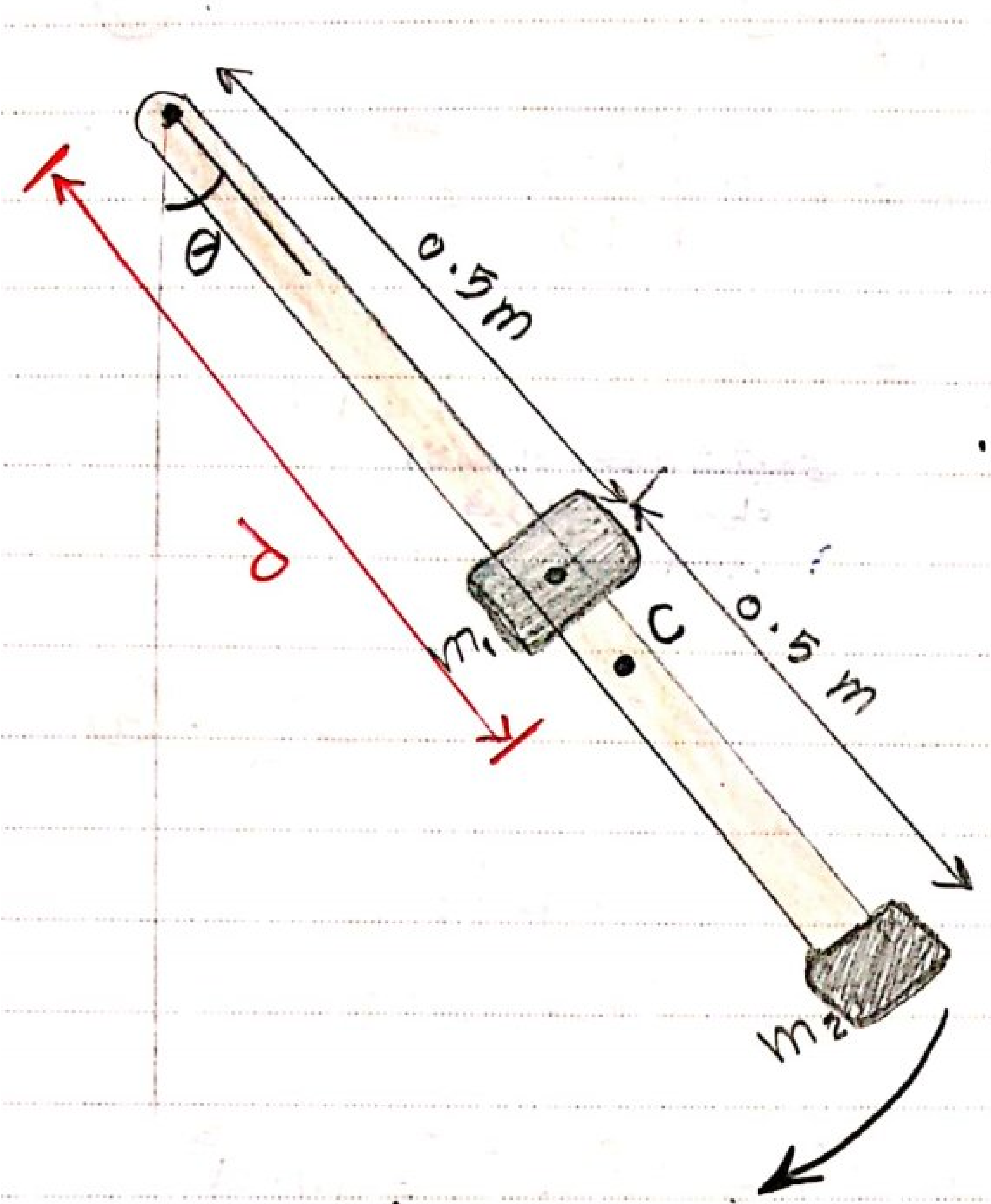
$$T = mg + m.\frac{v^2}{l}$$

$$T = m\left(g + \frac{v^2}{l}\right)$$

حساب قيمة التوتر :

$$T = 0.5\left(10 + \frac{16}{1.6}\right) = 0.5(10 + 10) = 10N$$

المسألة الرابعة :



$L = 1\,m$, $m_1 = 0.4\,kg$, $m_2 = 0.2\,kg$.

① : حساب T_0 للتحركات صغيرة السعة .

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{I_\Delta}{mgd}}$$

$$d = \frac{m_1 r_1 + m_2 r_2}{m_1 + m_2}$$

$$d = \frac{0.4 \times 0.5 + 0.2 \times 1}{0.4 + 0.2}$$

$$d = \frac{0.2 + 0.2}{0.6} = \frac{0.4}{0.6} = \frac{2}{3}\,m .$$

$$m = m_1 + m_2 = 0.4 + 0.2 = 0.6\,kg .$$

$$I_\Delta = \underset{\text{ساق}}{I_\Delta} + I_{\Delta/m_1} + I_{\Delta/m_2}$$

$I_{\Delta\,\text{ساق}} = 0$ لأنها مهملة الكتلة .

$$I_\Delta = 0 + m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 = 0.4(0.5)^2 + 0.2(1)^2$$

$$I_\Delta = 4 \times 25 \times 10^{-3} + 0.2 = 1 \times 10^{-1} + 2 \times 10^{-1} = 0.3\,kg.m^2$$

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{0.3}{0.6 \times 10 \times \frac{2}{3}}} = \sqrt{3}\,s$$

الاستاذ محمد شتيوي
فيزياء - كيمياء
هـ : ٠٩٣٣٩٧٧٥٧٩

② . $v = \frac{4\pi}{3\sqrt{3}}\ m \cdot s^{-1}$: طرف العطالة

. حساب السرعة الزاوية طرف العطالة

$$\omega = \frac{v}{r} = \frac{\frac{4\pi}{3\sqrt{3}}}{\frac{2}{3}} = \frac{3 \times 4\pi}{2 \times 3\sqrt{3}} \quad (r = d)$$

. السرعة الزاوية للنواس هي $\Leftarrow$: $\omega = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}\ rad \cdot s^{-1}$

ⓐ . حساب السرعة الخطية للكتلة m_2

$$v_2 = \omega \cdot r_2 = \frac{2\pi}{\sqrt{3}} \times 1 = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}\ m \cdot s^{-1}$$

ⓑ . تطبيق نظرية الطاقة الحركية :

الوضع الأول : $\theta_1 = \theta_{max}$ سكون :

الوضع الثاني : $\theta_2 = 0$ شاقول

$$\Delta E_k = \sum \overline{W} \vec{F}_{(1 \to 2)} \Rightarrow E_{k_2} - E_{k_1} = \overline{W}_{\vec{w}} + \overline{W}_{\vec{R}}$$

$\overline{W}_{\vec{R}} = 0$: نقطة تأثيره لا تنتقل .

$E_{k_1} = 0$: دون سرعة ابتدائية .

$$E_{k_2} - 0 = \overline{W}_{\vec{w}} + 0 \Rightarrow E_{k_2} = \overline{W}_{\vec{w}}$$

$$\frac{1}{2} I_{\Delta} \omega^2 = mgh \Rightarrow \quad h = d(1 - \cos\theta_{max})$$

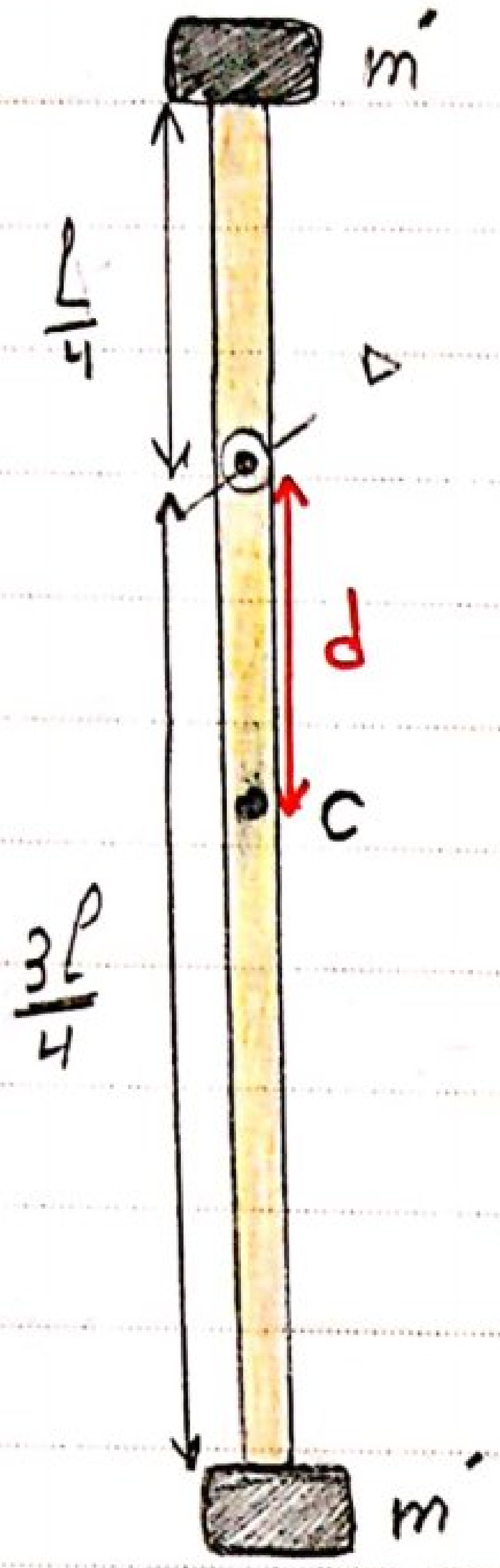
$$\frac{1}{2} I_{\Delta} \cdot \omega^2 = mgd(1 - \cos\theta_{max})$$

$$\frac{1}{2} \cdot 0.3 \times \frac{4\pi^2}{3} = 0.6 \times 10 \times \frac{2}{3}(1 - \cos\theta_{max})$$

$$2 = 4(1 - \cos\theta_{max}) \Rightarrow 1 - \cos\theta_{max} = \frac{1}{2} \Rightarrow \cos\theta_{max} = \frac{1}{2}$$

$$\theta_{max} = \frac{\pi}{3}\ rad.$$

المسألة الخامسة :



$$\theta = \frac{1}{2\pi} \text{ rad.} < 0.24 \text{ rad.}$$

$$T_0 = 2.5 \text{ s} = \frac{5}{2} \text{ s}$$

. ①

$$\bar{\theta} = \theta_{max} \cdot \cos(\omega_0 t + \bar{\varphi})$$

• $t = 0$ تركت دون سرعة ابتدائية $\theta = \theta_{max} = \frac{1}{2\pi}$ rad

• $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = \frac{2\pi}{\frac{5}{2}} = \frac{4\pi}{5} \text{ rad.s}^{-1}$.

• $t = 0 \quad \theta = \theta_{max}$: بالتعويض في الشكل العام

$$\theta_{max} = \theta_{max} \cos(\omega_0 (0) + \bar{\varphi})$$

$$\theta_{max} = \theta_{max} \cdot \cos\varphi \Rightarrow \cos\varphi = \frac{\theta_{max}}{\theta_{max}} = 1 \Rightarrow \varphi = 0 \text{ rad.}$$

$$\theta = \frac{1}{2\pi} \cdot \cos \frac{4\pi}{5} t.$$

② : طول النواس . توجد طول النواس في علاقة I_Δ ، ومن علاقة الدور الخاص .

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{I_\Delta}{mgd}}.$$

⊙ $d = \frac{m' \frac{3L}{4} - m' \frac{L}{4}}{m' + m'} = \frac{m'(\frac{3L}{4} - \frac{L}{4})}{2m'} = \frac{\frac{2L}{4}}{2} = \frac{L}{4}.$

⊙ $I_\Delta = m'(\frac{L}{4})^2 + m' \cdot (\frac{3L}{4})^2 = m'(\frac{L^2}{16} + \frac{9L^2}{16}) = \frac{10 m' L^2}{16}$

$m = m' + m' = 2m'$.

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{\frac{10}{16}m' \cdot L^2}{2m' \cdot \frac{L}{4} \cdot g}} \Rightarrow T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{5L}{4g}}$$

بتربيع الطرفين:

$$T_0^2 = 4\pi^2 \frac{5L}{4g} \Rightarrow L = \frac{T_0^2 \cdot 4g}{4\pi^2 \cdot 5}$$

$$L = \frac{T_0^2 \cdot g}{\pi^2 \cdot 5} = \frac{\frac{25}{4} \cdot 10}{10 \times 5} = 1.25\,m.$$

③.

$$\omega_{max} = \omega_0 \cdot \theta_{max}$$

$$\omega_{max} = \frac{4\pi}{5} \cdot \frac{1}{2\pi} = 0.4\ rad.s^{-1}$$

الأستاذ محمد شتيوي
فيزياء - كيمياء
هـ : ٠٩٣٣٩٧٧٥٧٩

④. بعد انفصال الكتلة السفلية تبقى:

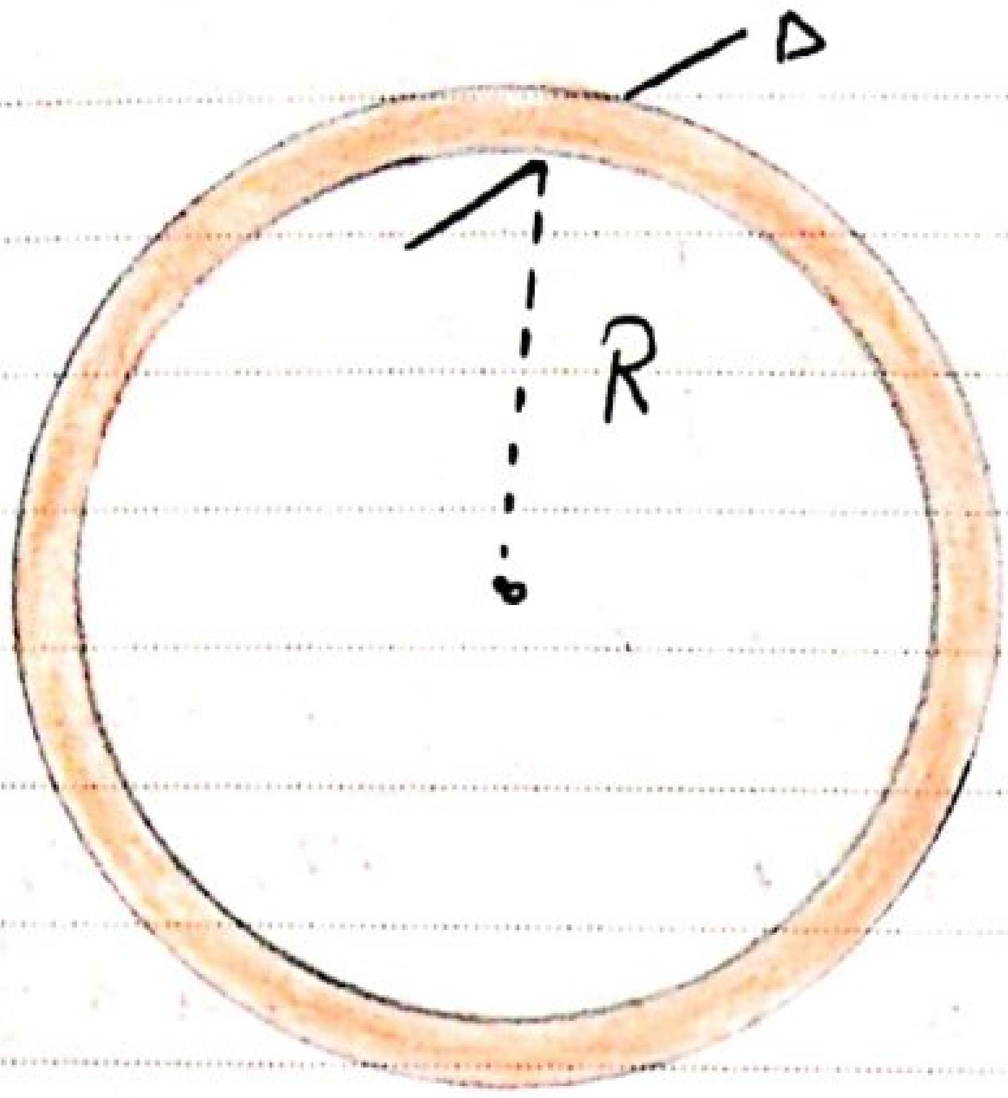
$m = m'$

$$I_\Delta = m' \frac{L^2}{16} \quad , \quad d = \frac{L}{4}.$$

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{I_\Delta}{m \cdot g \cdot d}} \Rightarrow T_0 = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{m' \cdot \frac{L^2}{16}}{m' \cdot g \cdot \frac{L}{4}}}$$

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{L}{4g}} \Rightarrow T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{1.25}{4 \times 10}} = \frac{\sqrt{5}}{2}\ s$$

„ مسائل عامة „



المسألة الرابعة:

$R = 12.5 \times 10^{-2} m.$

$M = 0.05 kg. \quad I_{\Delta/c} = MR^2.$

-1 $T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{I_\Delta}{mgd}}.$

$d = r \quad , \quad I_\Delta = I_{\Delta/c} + MR^2 = MR^2 + MR^2 = 2MR^2$

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{2MR^2}{MgR}} \Rightarrow T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{2R}{g}}$$

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{2 \times 12.5 \times 10^{-2}}{10}} \Rightarrow T_0 = 1 s$$

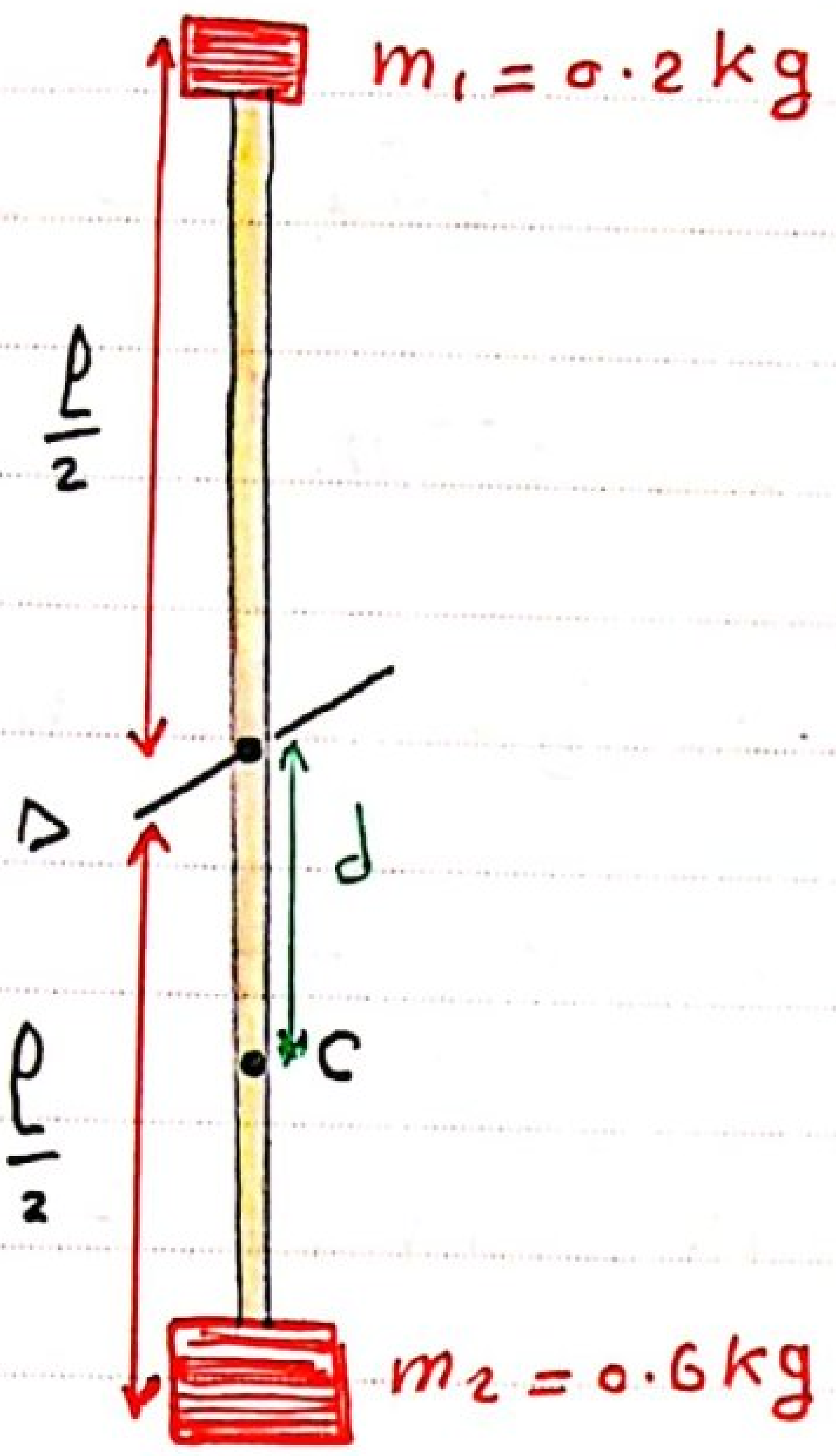
-2 $T_{0\,\text{بسيط}} = T_{0\,\text{مركب}} = 1 s$

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \Rightarrow 1 = 2\pi \sqrt{\frac{l}{10}}$$

$$1 = 4l \Rightarrow l = \frac{1}{4} m$$

طول النواس البسيط المواقت للنواس الموقت.

المسألة الخامسة:



1) $$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{I_\Delta}{mgd}}$$

- $$d = \frac{m_2\frac{\ell}{2} - m_1\cdot\frac{\ell}{2}}{m_2 + m_1} = \frac{(m_2 - m_1)\frac{\ell}{2}}{m_2 + m_1}$$

$$d = \frac{(0.6 - 0.2)\cdot\frac{1}{2}}{0.6 + 0.2} = \frac{0.4 \times \frac{1}{2}}{0.8}$$

$$d = \frac{1}{4}\,m.$$

- $$m = m_1 + m_2 = 0.6 + 0.2 = 0.8\,kg.$$

- $$I_\Delta = \underbrace{I_{\Delta/c}}_{\text{مهمل}} + I_{\Delta/m_1} + I_{\Delta/m_2}$$

$I_{\Delta/c} = 0$ لان الساق مهملة الكتلة

$$I_\Delta = 0 + m_1\left(\frac{\ell}{2}\right)^2 + m_2\left(\frac{\ell}{2}\right)^2 = (m_1 + m_2)\frac{\ell^2}{4}$$

$$I_\Delta = (0.2 + 0.6)\frac{1}{4} = 0.8 \times \frac{1}{4} = 0.2\,kg.m^2.$$

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{0.2}{0.8 \times 10 \times \frac{1}{4}}} = 2\,S.$$

2. طول النواس البسيط الموافق لهذا النواس.

$$T'_{0\,\text{بسيط}} = T_{0\,\text{مركب}} = 2S$$

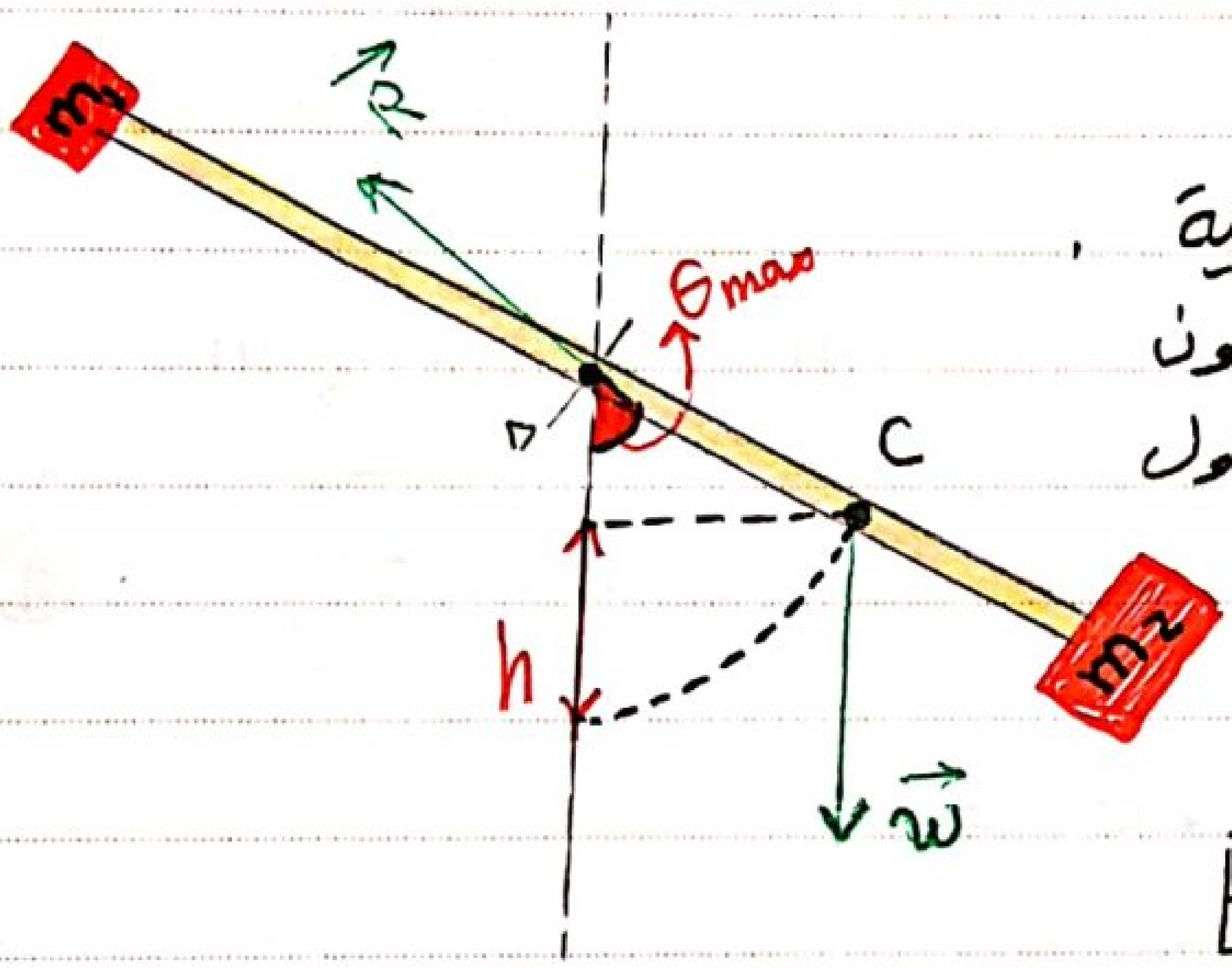
$$T'_0 = 2\pi\sqrt{\frac{\ell'}{g}} \Rightarrow 2 = 2\pi\sqrt{\frac{\ell'}{10}} \Rightarrow \ell' = 1m.$$

$\theta_{max} = 0.4\ rad > 0.24$ سعات كبيرة **3**

$$T_0' = T_0\left[1 + \frac{\theta_{max}^2}{16}\right]$$

$$T_0' = 2\left[1 + \frac{0.16}{16}\right] = 2(1+0.01) = 2,02\ s$$

4



a . تطبيق نظرية الطاقة الحركية ،

الوضع (1) : $\theta_1 = \theta_{max}$ ، سكون

الوضع (2) $\theta_2 = 0$ شاقول

$$\Delta E_k = \sum W_{\vec{F}}(1\to 2)$$

$$E_{k_2} - E_{k_1} = W_{\vec{w}} + W_{\vec{R}}$$

$W_{\vec{R}} = 0$: نقطة تأثيره لا تنتقل .

$E_{k_1} = 0$ دون سرعة البدائية .

$$E_{k_2} - 0 = W_{\vec{w}} + 0 \Rightarrow E_{k_2} = W_{\vec{w}}$$

$$\frac{1}{2} I_\Delta . \omega^2 = mgh \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{2mgh}{I_\Delta}}$$

$$h = d(1 - \cos\theta_{max})$$

$$\omega = \sqrt{\frac{2mgd(1-\cos\theta_{max})}{I_\Delta}} = \sqrt{\frac{2 \times 0.8 \times 10 \times \frac{1}{4}(1-\frac{1}{2})}{0.2}}$$

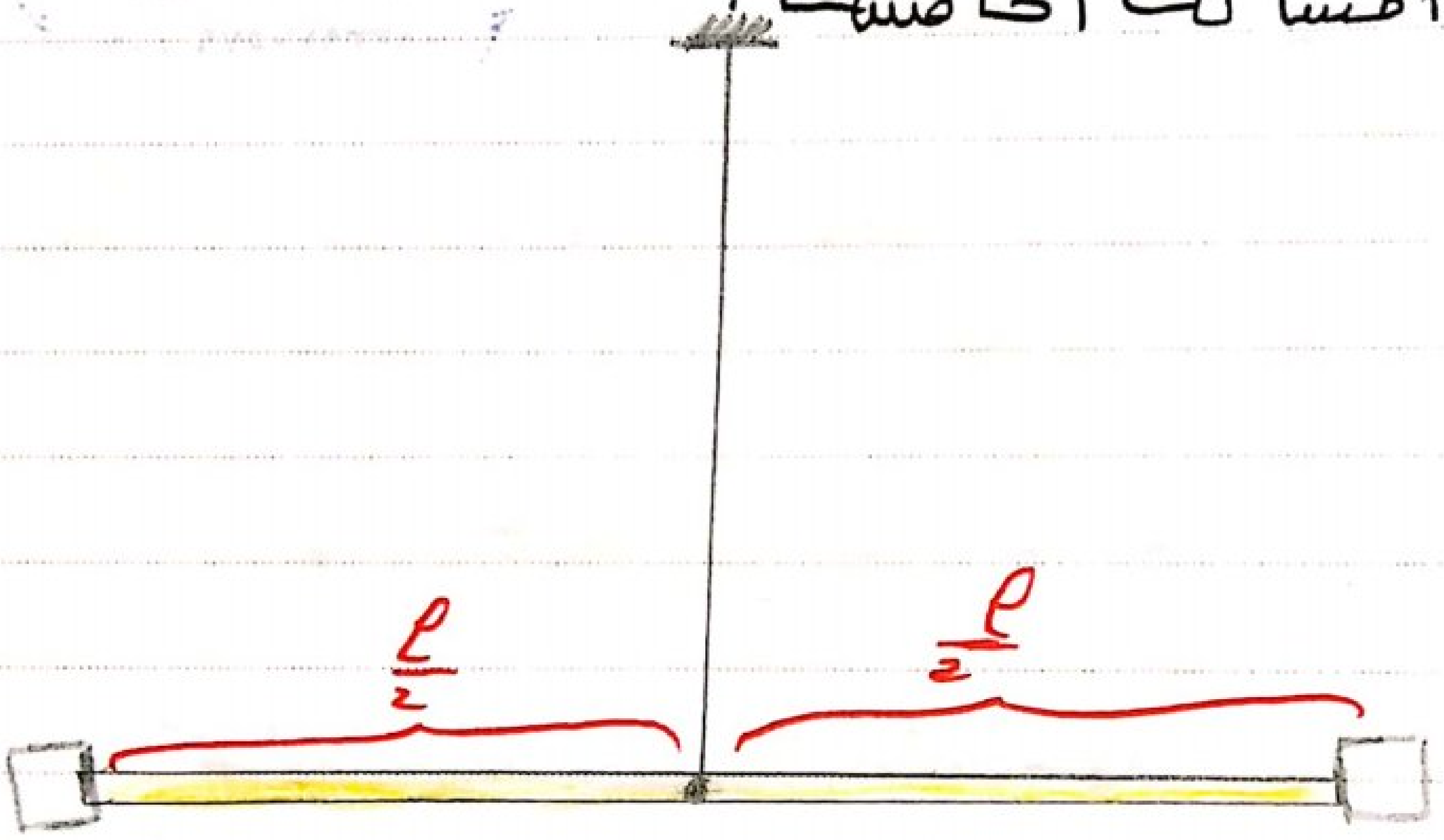
$$\omega = \sqrt{10} = \pi\ rad.s^{-1}$$

b. السرعة الخطية لمركز عطالة النواس.

$v = \omega . r$ ← بعد مركز العطالة عن محور الدوران

$v = \omega . d = \pi . \frac{1}{4} = \frac{\pi}{4} m.s^{-1}$

تتمة المسألة الخامسة .



5 . $m_1 = m_2 = 0.2\,kg$

$T_0 = 2\pi\ s$.

نواس فتل :

طلب ثابت الفتل K

إما عن طريق الدور T_0 .

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{I_\Delta}{K}}$$

أو :

$$\omega_0^2 = \frac{K}{I_\Delta} \Rightarrow K = \omega_0^2 \cdot I_\Delta$$

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = \frac{2\pi}{2\pi} = 1\ rad.s^{-1}.$$

طلب I_Δ.

$$I_\Delta = I_{\Delta/c} + 2\,I_{\Delta/m_1}$$

$I_{\Delta/c} = 0$ لأنها مهملة الكتلة

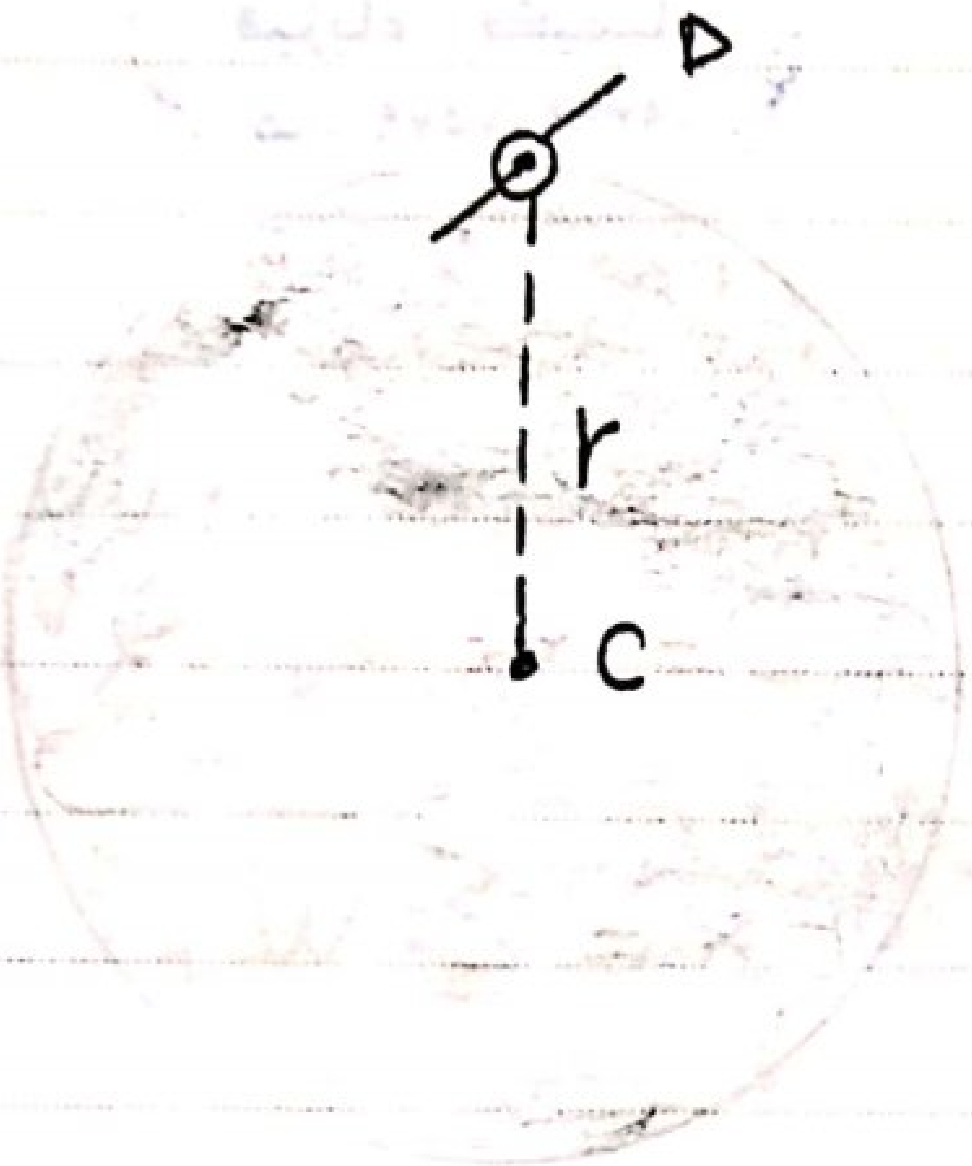
$$I_\Delta = 2 \cdot m_1 \left(\frac{\ell}{2}\right)^2 = 2 \times 0.2 \times \frac{1}{4} = \frac{0.4}{4} = 0.1\ kg.m^2$$

$$K = (1)^2 \cdot (0.1) = 0.1\ m.N.rad^{-1}.$$

6. $\theta = 0.5\ rad.$

$$\alpha = -\omega_0^2 \cdot \theta = -(1)^2 (0.5) = -0.5\ rad.s^{-2}$$

— . — . — . — . —



المسألة السادسة :

$m \;,\; r = \frac{2}{3}\,m$.

$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{I_\Delta}{mgd}}$. (1)

$d = r$

$I_\Delta = I_{\Delta/c} + md^2 = \frac{1}{2}mr^2 + mr^2 = \frac{3}{2}mr^2$

$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{\frac{3}{2}mr^2}{mg\cdot r}} \Rightarrow T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{3r}{2g}}$.

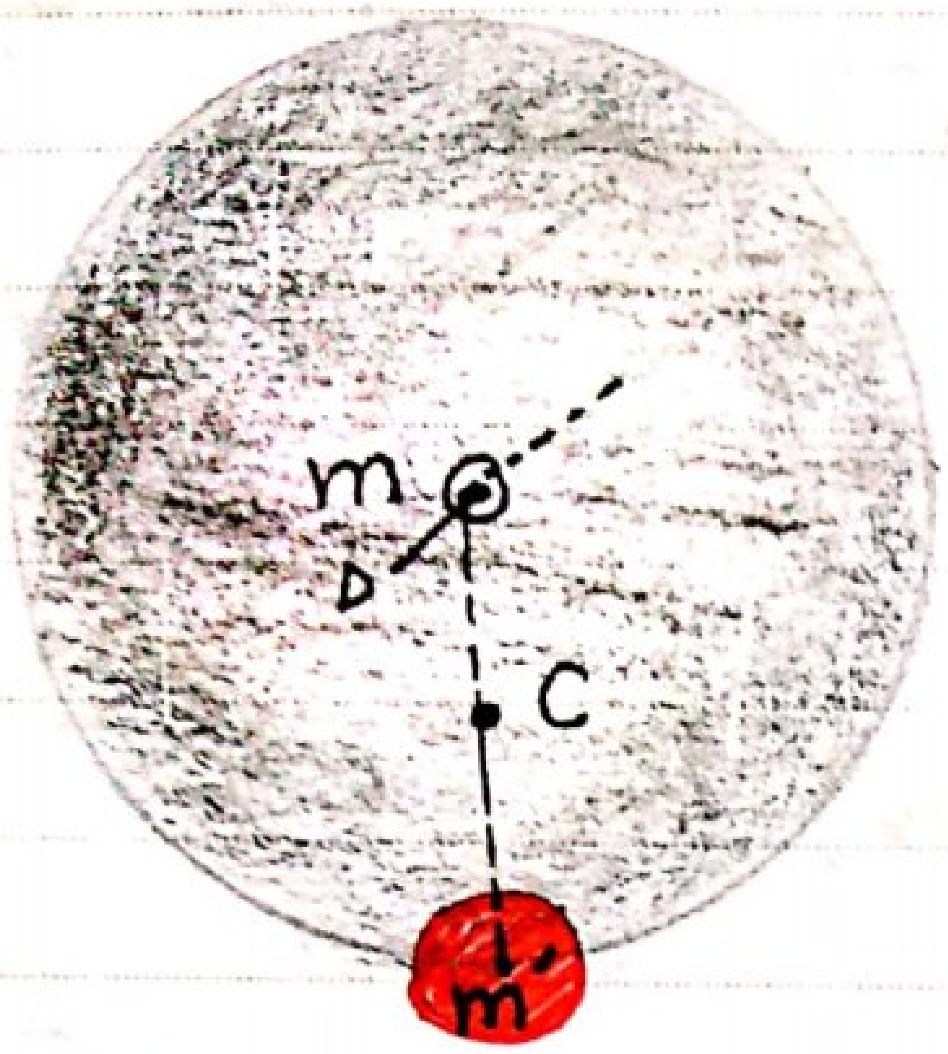
$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{3\times\frac{2}{3}}{2\times 10}} = 2\ s$.

(2)

T_0 بسيط $= T_0$ مركب $= 2s$

T_0 بسيط $= 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}} \Rightarrow 2 = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{10}} \Rightarrow 1 = \sqrt{\ell}$

$\ell = 1m$.



3. $m' = m$.

$$d = \frac{m'r - m(0)}{m' + m} = \frac{m' \cdot r}{2m'}$$

$$d = \frac{r}{2}$$

$$I_\Delta = I_{\Delta/C} + I_{\Delta/m'}$$

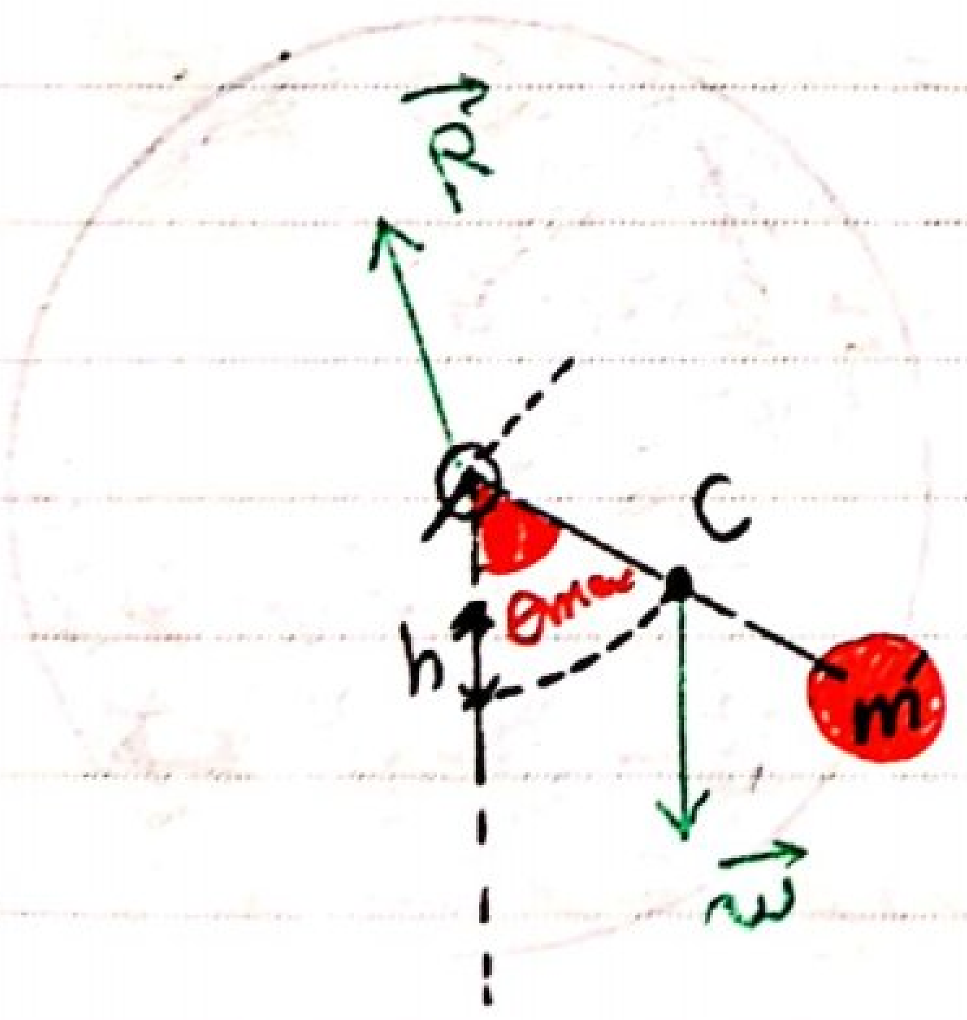
$$I_\Delta = \frac{1}{2}mr^2 + m' \cdot r^2 = \frac{1}{2}mr^2 + mr^2 = \frac{3}{2}mr^2.$$

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{\frac{3}{2}m \cdot r^2}{2mg \cdot r}} \Rightarrow T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{3r}{2g}}.$$

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{3 \times \frac{2}{3}}{2 \times 10}} = 2\ s.$$

4. الوضع (1) $\theta_1 = \theta_{max}$

الوضع (2) $\theta_2 = 0$



$$\Delta E_K = \sum W_{\vec{F}(1 \to 2)}$$

$$E_{K_2} - E_{K_1} = W_{\vec{W}} + W_{\vec{R}}$$

$W_{\vec{R}} = 0$ نقطة تأثيره لا تنتقل.

$E_{K_1} = 0$ دون سرعة ابتدائية

$$E_{K_2} = W_{\vec{W}} \Rightarrow \frac{1}{2}I_\Delta \omega^2 = mg \cdot h$$

$$\frac{1}{2}I_\Delta \cdot \omega^2 = 2mg\frac{r}{3}(1 - \cos\theta_{max})$$

ف ب ω :

$$\omega = \frac{v}{r} = \frac{\frac{2\pi}{3}}{\frac{2}{3}} = \pi \ rad.s^{-1}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cancel{m} r^2 \cdot \pi^2 = 2 \cancel{m} \times g \cdot \frac{r}{2} (1 - \cos\theta_{max})$$

$$\frac{3}{4} \cdot r \cdot 10 = 10 (1 - \cos\theta_{max})$$

$$\frac{3}{4} \times \frac{2}{3} = (1 - \cos\theta_{max}) \Rightarrow \frac{1}{2} = 1 - \cos\theta_{ma}$$

$$\cos\theta_{max} = 1 - \frac{1}{2} \Rightarrow \cos\theta_{max} = \frac{1}{2}$$

$$\theta_{max} = \frac{\pi}{3} \ rad$$