



تم التحميل بواسطة:

بوت المكتبة التعليمية الشاملة

<https://t.me/NerdatBot>

كل ما نحتاجه سبحانه لنا يا ذوق الله

انضم لقناتنا على التلجرام:

نيردات البكالوريا

<https://t.me/Nerdatbac>

أولاً: أحب عن الأسئلة الآتية: (30° درجة لكل سؤال)

السؤال الأول: نفترض وجود عددين حقيقيين موجبين تماماً  $a$  و  $b$  يحققان  $2\ln a - \ln b = \ln(2a + 3b)$  ، احسب  $\frac{a}{b}$ .

السؤال الثاني: ليكن  $C$  الخط البياني للتابع  $f(x) = x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$  ، أوجد  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$  و  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  ثم استنتج معادلة المقارب الأفقي للخط البياني للتابع  $f$ .

السؤال الثالث: ليكن  $C$  الخط البياني للتابع  $f(x) = 1 - \ln x$  ، أثبت أن  $C$  يقع فوق أي مماس له.

السؤال الرابع: حل في  $\mathbb{R}^2$  جملة المعادلتين:  $\begin{cases} \ln xy = 2 \\ 2\ln x - 3\ln y = -1 \end{cases}$

ثانياً: حل المسألتين الآتيتين: (80° درجة للأولى و 100° درجة للثانية)

المسألة الأولى: ليكن  $C$  الخط البياني للتابع  $f$  المعرف على  $]0, +\infty[$  بالعلاقة  $f(x) = \frac{1 + \ln x}{x}$  والمطلوب:

- (1) أوجد  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$  و  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  ، ثم حدد مقاربات  $C$ .
- (2) احسب  $f'(x)$  ، ثم استنتج جدول تغيرات التابع  $f$  ، دل على القيمة الحدية مبيناً نوعها.
- (3) أثبت أن للمعادلة  $f(x) = 0$  حل وحيد في المجال  $]0, 1[$  ثم احسب القيمة الحقيقية لهذا الحل.
- (4) ارسم ما وجدته من مقاربات ثم ارسم  $C$ .
- (5) ناقش تبعاً لقيم الوسيط  $m$  عدد حلول المعادلة  $1 - mx + \ln x = 0$ .

المسألة الثانية: ليكن  $C$  الخط البياني للتابع  $f$  المعرف بالعلاقة  $f(x) = \ln\left(1 + \frac{2}{x}\right)$  والمطلوب:

- (1) عيّن  $D_f$  مجموعة تعريف التابع  $f$ .
- (2) ادرس تغيرات  $f$  ونظّم جدولاً لها ، حدد مقاربات  $C$ .
- (3) أثبت أن النقطة  $A(-1, 0)$  مركز تناظر للخط البياني  $C$ .
- (4) ارسم مقاربات  $C$  ، ثم ارسم  $C$ .
- (5) استنتج رسم الخط البياني للتابع  $g(x) = \ln\left(\frac{x}{x-2}\right)$ .
- (6) لتكن المتتالية  $(u_n)_{n \geq 1}$  المعرفة بالعلاقة  $u_n = f(n)$  ولنضع المتتالية  $S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$  أثبت أن:  $S_n = \ln \frac{(n+2)(n+1)}{2}$ .

انتهى الاختبار الأول  
التابع اللوغاريتمي

أولاً: أحب عن الأسئلة الآتية: (30° درجة لكل سؤال)

السؤال الأول: حل في  $\mathbb{R}$  المتراجحة الآتية  $(\ln x)^2 - 2\ln x - 3 \geq 0$ .

السؤال الثاني: ليكن التابع  $f(x) = ax + b + \frac{\ln x}{x}$  ، عيّن قيمة  $a, b$  كي يقبل التابع  $f$  مماس أفقي في النقطة  $A(1,0)$ .

السؤال الثالث: ليكن  $C$  الخط البياني للتابع  $f(x) = \frac{x}{x - \ln x}$  و  $f(0) = 0$  ، أثبت أن  $f$  مستمر عند الصفر ،

أثبت أن  $f$  اشتقائي عند الصفر ، ما طبيعة المماس في المبدأ ؟ اكتب معادلته.

السؤال الرابع: حل في  $\mathbb{R}^2$  جملة المعادلتين:  $\begin{cases} (\ln x) \cdot (\ln y) = -2 \\ \ln x - \ln y = 3 \end{cases}$

ثانياً: حل المسألتين الآتيتين: (80° درجة للأولى و 100° درجة للثانية)

المسألة الأولى: ليكن  $C$  الخط البياني للتابع  $f$  المعرف على  $\mathbb{R}^*$  بالعلاقة  $f(x) = \frac{\ln |x|}{x}$  والمطلوب:

(1) أثبت أن التابع  $f$  فردي ، ما الصفة الهندسية لخطه البياني.

(2) ادرس تغيرات  $f$  على المجال  $]0, +\infty[$  ، دل مقاربات  $C$  و القيمة الحدية

(3) اكتب معادلة المماس للخط  $C$  في نقطة منه فاصلتها 1.

(4) ارسم الخط البياني للتابع  $f$  على  $D_f$ .

(5) استنتج رسم الخط البياني للتابع  $g(x) = \frac{\ln |x| + x}{x}$ .

المسألة الثانية: ليكن  $C$  الخط البياني للتابع  $f$  المعرف على  $] -1, 3[$  بالعلاقة  $f(x) = \ln \left( \frac{1+x}{3-x} \right)$  والمطلوب:

(1) أوجد  $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$  و  $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$  ، ثم حدد مقاربات  $C$ .

(2) احسب  $f'(x)$  ، ثم استنتج أن التابع  $f$  متزايد تماماً ، نظم جدولاً بتغيرات التابع  $f$ .

(3) عين  $A$  نقطة تقاطع  $C$  مع محور الفواصل ثم أثبت أن  $A$  مركز تناظر للخط  $C$ .

(4) اكتب معادلة  $d$  المماس للخط  $C$  في النقطة  $A$ .

(5) ارسم ما وجدته من مقاربات ثم ارسم  $d$  و  $C$ .

(6) لتكن المتتالية  $(u_n)_{n \geq 0}$  المعرفة بالعلاقة  $u_{n+1} = e^{f(u_n)}$  و  $u_0 = 0$  ، والمطلوب:

أثبت بالتدرج صحة العلاقة  $u_n < u_{n+1} < 1$  ثم استنتج أن المتتالية متقاربة  $u_n$  واحسب نهايتها.

انتهى الاختبار الثاني

التابع اللوغاريتمي

أولاً: أحب عن الأسئلة الآتية: (30° درجة لكل سؤال)

السؤال الأول: حل في  $\mathbb{R}$  المتراجحة الآتية  $\ln(x^2 - 3x) \geq 2\ln(6 - x)$ .

السؤال الثاني: أثبت أن  $2 + \ln x \leq 2\sqrt{x}$  أيأ كان  $x > 0$ .

السؤال الثالث: أوجد مجموعة تعريف التابع  $f(x) = \frac{-1}{\ln x}$  ، ثم احسب النهايات عند أطراف مجموعة التعريف ، حدد مقاربات  $f$ .

السؤال الرابع: حل في  $\mathbb{R}^2$  جملة المعادلتين:  $\begin{cases} \ln(x + y) = 2\ln 2 \\ \ln x + \ln y = \ln 3 \end{cases}$ .

ثانياً: حل المسألتين الآتيتين: (80° درجة للأولى و 100° درجة للثانية)

المسألة الأولى: ليكن  $C$  الخط البياني للتابع  $f$  المعرف على  $]0, +\infty[$  بالعلاقة  $f(x) = \frac{\ln x}{x^2}$  والمطلوب:

(1) ادرس تغيرات  $f$  ونظم جدولاً بها ، حدد مقاربات  $C$  وقيمته الحدية.

(2) ادرس وضع  $C$  بالنسبة لمقاربه الأفقي.

(3) أثبت أن التابع  $f$  يقبل مماساً واحداً  $T$  يوازي المستقيم  $y = x$  اكتب معادلته.

(4) ارسم ما وجدته من مقاربات و ارسم  $T$  ثم ارسم  $C$ .

(5) استنتج رسم الخط البياني للتابع  $g(x) = |f(x)|$ .

المسألة الثانية: ليكن  $C$  الخط البياني للتابع  $f$  المعرف على  $\mathbb{R}^*$  بالعلاقة  $f(x) = x + 1 - \ln|x|$  والمطلوب:

(1) اكتب  $f$  بصيغة لا تحوي قيمة مطلقة.

(2) ادرس تغيرات  $f$  ونظم جدولاً بها ثم حدد مقاربات  $C$  وقيمته الحدية.

(3) عين نقاط تقاطع  $C$  مع المستقيم  $\Delta: y = x$ .

(4) ارسم ما وجدته من مقاربات ثم ارسم  $\Delta$  و  $C$ .

(5) ناقش تبعاً لقيم الوسيط  $\lambda$  عدد حلول المعادلة  $f(x) = \lambda$ .

(6) لتكن المتتالية  $(u_n)_{n \geq 0}$  المعرفة بالعلاقة  $u_{n+1} = f(u_n)$  و  $u_0 = 1$  ، والمطلوب:

(a) مثل هندسياً الحدود الأولى للمتتالية  $u_n$  ثم خمن جهة اطراد المتتالية  $u_n$  ونهايتها المحتملة.

(b) أثبت بالتدرج صحة العلاقة  $1 \leq u_n < e$  أيأ كان العدد الطبيعي  $n$ .

(c) أثبت أن المتتالية  $u_n$  متزايدة تماماً ثم استنتج أن المتتالية متقاربة  $u_n$  واحسب نهايتها.

انتهى الاختبار الثالث

التابع اللوغاريتمي

أولاً: أحب عن الأسئلة الآتية: (30° درجة لكل سؤال)

السؤال الأول: حل في  $\mathbb{R}$  المعادلة الآتية:  $\ln|x+1| + \ln(2-x) = 2\ln 2$ .

السؤال الثاني: ليكن لدينا التابعين  $f(x) = \ln x$  و  $g(x) = \frac{x-1}{x}$  ، أثبت أن  $f(x) \geq g(x)$  أيًا يكن  $x > 0$ .

السؤال الثالث: أوجد مجموعة تعريف التابع  $f(x) = \ln\sqrt{x+3} - \frac{1}{2}\ln x$  ، ثم احسب  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  و  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(f(x))$ .

السؤال الرابع: حل في  $\mathbb{R}^2$  جملة المعادلتين:  $\begin{cases} \ln(x-y) = 2\ln 2 \\ \ln x - \ln y = \ln 3 \end{cases}$ .

ثانياً: حل المسألتين الآتيتين: (80° درجة للأولى و 100° درجة للثانية)

المسألة الأولى: ليكن  $C$  الخط البياني للتابع  $f$  المعرف على  $]0, +\infty[$  بالعلاقة  $f(x) = \frac{1+2\ln x}{x^2}$  والمطلوب:

(1) ادرس تغيرات  $f$  وحدد قيمته الحدية.

(2) ما طبيعة المماس للخط  $C$  في النقطة التي فاصلتها 1.

(3) حل المعادلة  $f(x) = 0$  ثم ادرس إشارة  $f(x)$ .

(4) ارسم المماس ثم ارسم  $C$ .

(5) استنتج وجود عددين حقيقيين  $a$  و  $b$  بحيث  $\frac{1+2\ln a}{1+2\ln b} = \left(\frac{a}{b}\right)^2$ .

المسألة الثانية: ليكن  $C$  الخط البياني للتابع  $f$  المعرف بالعلاقة  $f(x) = x+1 - \ln\left(\frac{x}{x-2}\right)$  والمطلوب:

(1) عيّن  $D_f$  مجموعة تعريف التابع  $f$ .

(2) ادرس تغيرات  $f$  ونظّم جدولاً لها ، حدد مقاربات  $C$ .

(3) أثبت أن  $f(x) + f(2-x) = 4$  ثم استنتج أن النقطة  $A(1,2)$  مركز تناظر للخط البياني  $C$ .

(4) أثبت أن المستقيم  $\Delta$  الذي معادلته  $y = x+1$  مقارب مائل للخط  $C$ .

(5) ارسم مقاربات  $C$  ، ثم ارسم  $C$ .

(6) أثبت أن للمعادلة  $f(x) = m$  حلين مختلفين أيًا كان العدد الحقيقي  $m$ .

(7) استنتج رسم الخط البياني للتابع  $g(x) = x-1 - \ln\left(1 + \frac{2}{x}\right)$ .

انتهى الاختبار الرابع

التابع اللوغاريتمي

أولاً:

السؤال الأول:

المعادلة  $2\ln a - \ln b = \ln(2a + 3b)$  تكافئ

$$\ln a^2 - \ln b = \ln(2a + 3b)$$

$$\ln \frac{a^2}{b} = \ln(2a + 3b)$$

$$\frac{a^2}{b} = 2a + 3b$$

$$(1) \dots a^2 = 2ab + 3b^2$$

نفترض أن  $\frac{a}{b} = k$  ومنه يكون  $a = kb$  ، نعوض في (1) فنجد:

$$k^2 b^2 = 2kb^2 + 3b^2$$

بما أن  $b > 0$  فإن المعادلة تصبح  $k^2 = 2k + 3$  وهي تكافئ  $(k - 3)(k + 1) = 0$

إما  $k = -1$  مرفوض لأن  $b > 0$  و  $a > 0$

$$\frac{a}{b} = 3 \text{ وبالتالي } k = 3$$

السؤال الثاني:

نهاية التابع  $f(x) = x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$  عند  $+\infty$  هي حالة عدم تعيين من الشكل  $\infty \times 0$  يجب إزالتها:

$$x = \frac{1}{X} \text{ ومنه } X = \frac{1}{x} \text{ نفرض}$$

عندما  $x$  تسعى إلى  $+\infty$  فإن  $X$  تسعى إلى الصفر ومنه يكون:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{X \rightarrow 0} \frac{1}{X} \ln(1 + X) = \lim_{X \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + X)}{X} = 1$$

$y = 1$  مقارب أفقي للخط البياني للتابع  $f$  في جوار  $+\infty$

نهاية التابع  $f(x) = x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$  عند الصفر هي حالة عدم تعيين من الشكل  $0 \times \infty$  يجب إزالتها:

$$f(x) = x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) = x \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) = x(\ln(x+1) - \ln x) = x \ln(x+1) - x \ln x$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0 - 0 = 0$$

$$f'(x) = -\frac{1}{x} \text{ ومنه } f(x) = 1 - \ln x \text{ لدينا}$$

نوجد معادلة المماس للتابع  $f$  في نقطة منه فاصلتها  $a$  فتكون:

$$T: y = f'(a)(x-a) + f(a) = -\frac{1}{a}(x-a) + 1 - \ln a = -\frac{1}{a}x + 1 + 1 - \ln a = -\frac{1}{a}x + 2 - \ln a$$

$$f(x) - y_T = 1 - \ln x + \frac{1}{a}x - 2 + \ln a = -\ln x + \frac{1}{a}x - 1 + \ln a \text{ الوضع النسبي: ندرس إشارة الفرق}$$

نفرض التابع  $g(x) = -\ln x + \frac{1}{a}x - 1 + \ln a$  المعرف على المجال  $]0, +\infty[$

$$g'(x) = -\frac{1}{x} + \frac{1}{a} = \frac{x-a}{ax} \text{ لدينا}$$

عندما  $g'(x) = 0$  فإن  $x = a$  حيث  $g(a) = -\ln a + 1 - 1 + \ln a = 0$  وبالتالي:

$x$	0	$a$	$+\infty$
$g'(x)$	-	0	+
$g(x)$		0	

من جدول اطراد  $g$  نجد أن  $g(x) \geq 0$  وبالتالي  $f(x) - y_T \geq 0$  أي أن  $C$  يقع فوق أي مماس له.

$$\text{أي } \begin{pmatrix} \ln x + \ln y = 2 \\ 2\ln x - 3\ln y = -1 \end{pmatrix} \text{ تكافئ } \begin{pmatrix} \ln xy = 2 \\ 2\ln x - 3\ln y = -1 \end{pmatrix} \text{ جملة المعادلتين}$$

$$(1) \dots -2\ln x - 2\ln y = -4$$

$$(2) \dots 2\ln x - 3\ln y = -1$$

بجمع (1) و (2) نجد  $-5\ln y = -5$  أي  $\ln y = 1$  وبالتالي  $y = e$

نعوض في (1) فنجد  $\ln x = 1$  وبالتالي  $x = e$

وبالتالي حل الجملة هو  $(x, y) \in \{(e, e)\}$

$$f(x) = \frac{1 + \ln x}{x} \text{ و } D_f = \mathbb{R} = ]0, +\infty[$$

$$-\infty \text{ مقارب شاقولي عند } x = 0 \text{ وبالتالي } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + \ln x}{x} = \frac{-\infty}{0^+} = -\infty \quad (1)$$

$$+\infty \text{ مقارب أفقي في جوار } y = 0 \text{ وبالتالي } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + \ln x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{x} + \frac{\ln x}{x} \right) = 0 + 0 = 0$$

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \cdot x - (1 + \ln x)}{x^2} = \frac{1 - 1 - \ln x}{x^2} = -\frac{\ln x}{x^2} \quad (2)$$

عندما  $f'(x) = 0$  فإن  $\ln x = 0$  أي  $x = 1$  حيث  $f(1) = \frac{1 + \ln 1}{1} = 1$  وبالتالي:

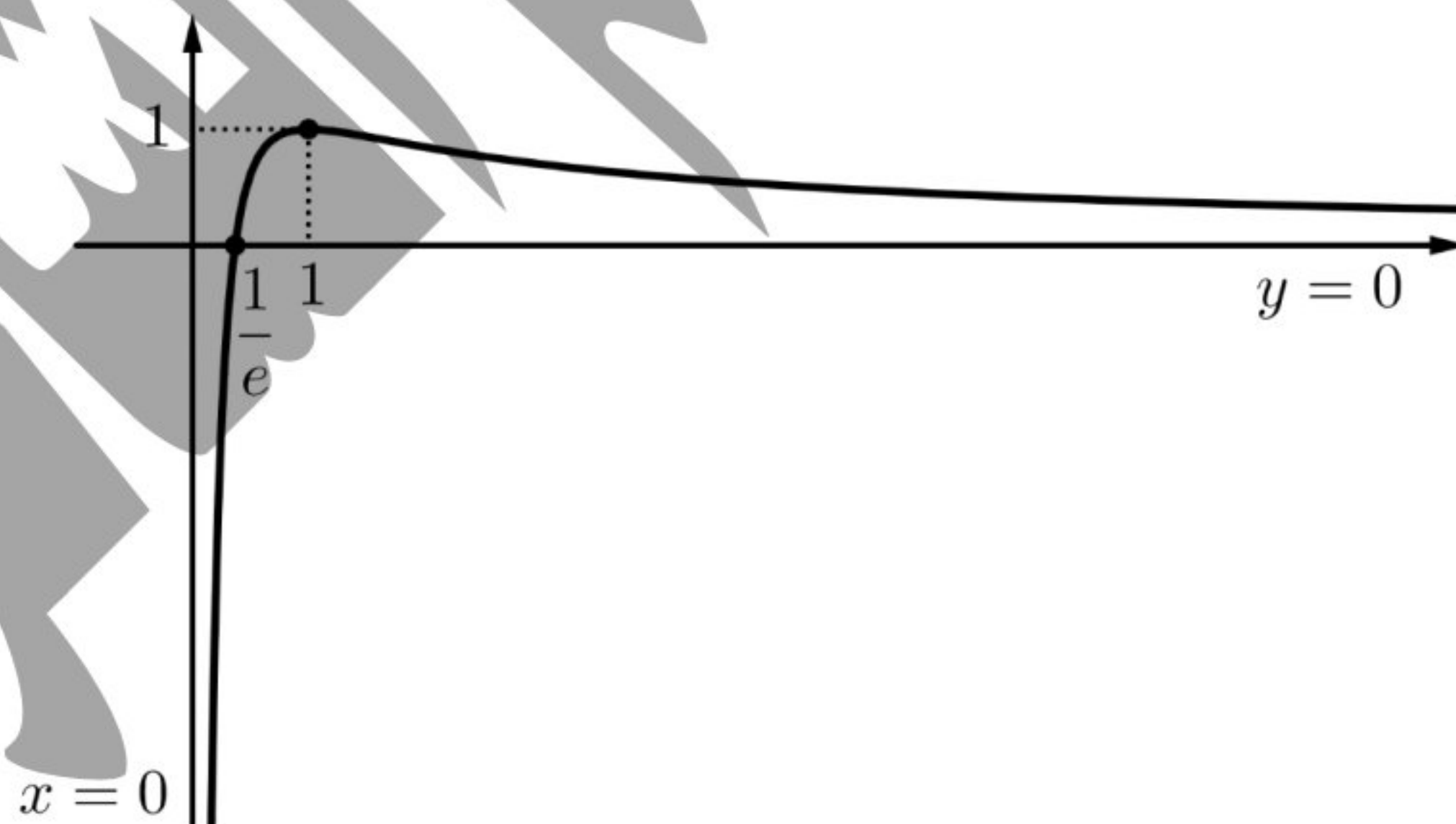
$x$	0	1	$+\infty$
$f'(x)$		+	0 -
$f(x)$	$-\infty$	1	0

$f(1) = 1$  قيمة حدية كبرى

على المجال  $]0, 1[$  التابع مستمر ومتزايد تماماً و  $0 \in f(]0, 1[) = ]-\infty, 1[$  (3)

وبالتالي للمعادلة  $f(x) = 0$  حل وحيد في المجال  $]0, 1[$  وقيمته الحقيقية هي:

$$\text{عندما } f(x) = 0 \text{ فإن } 1 + \ln x = 0 \text{ أي } \ln x = -1 \text{ وبالتالي } x = e^{-1} = \frac{1}{e} \quad (4)$$



$$1 - mx + \ln x = 0$$

$$1 + \ln x = mx$$

$$m = \frac{1 + \ln x}{x} = f(x)$$

عندما  $m \in ]-\infty, 0]$  للمعادلة حل وحيد

عندما  $m \in ]0, 1[$  للمعادلة حلين مختلفين

عندما  $m = 1$  للمعادلة حل وحيد

عندما  $m \in ]1, +\infty[$  ليس للمعادلة حل

$$f(x) = \ln\left(1 + \frac{2}{x}\right)$$

$$f \text{ معرف بشرط } 1 + \frac{2}{x} > 0 \text{ أي } \frac{x+2}{x} > 0 \quad (1)$$

$x$	$-\infty$	$-2$	$0$	$+\infty$
$x+2$	$-$	$0$	$+$	$+$
$x$	$-$	$-$	$0$	$+$
الكسر	$+$	$0$	$-$	$+$
المتراجحة	محققة	//////////		محققة

$$D_f = ]-\infty, -2[ \cup ]0, +\infty[ \text{ وبالتالي}$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \ln 1 = 0 \text{ وبالتالي } y = 0 \text{ مقارب أفقي في جوار } +\infty \quad (2)$$

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = -\infty \text{ وبالتالي } x = -2 \text{ مقارب شاقولي عند } -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty \text{ وبالتالي } x = 0 \text{ مقارب شاقولي عند } +\infty$$

$$\text{لدينا } f(x) = \ln\left(1 + \frac{2}{x}\right) = \ln\left(\frac{x+2}{x}\right) = \ln(x+2) - \ln x \text{ وبالتالي:}$$

$$f'(x) = \frac{1}{x+2} - \frac{1}{x} = \frac{x - x - 2}{x(x+2)} = \frac{-2}{x(x+2)} < 0$$

$x$	$-\infty$	$-2$	$0$	$+\infty$
$f'(x)$	$-$			$-$
$f(x)$	$0$	$-\infty$	$+\infty$	$0$

$$\text{الشرط: أيًا كان } -1+h \in ]-\infty, -2[ \cup ]0, +\infty[ = D_f \quad (3)$$

$$h \in ]-\infty, -1[ \cup ]1, +\infty[$$

$$-h \in ]-\infty, -1[ \cup ]1, +\infty[$$

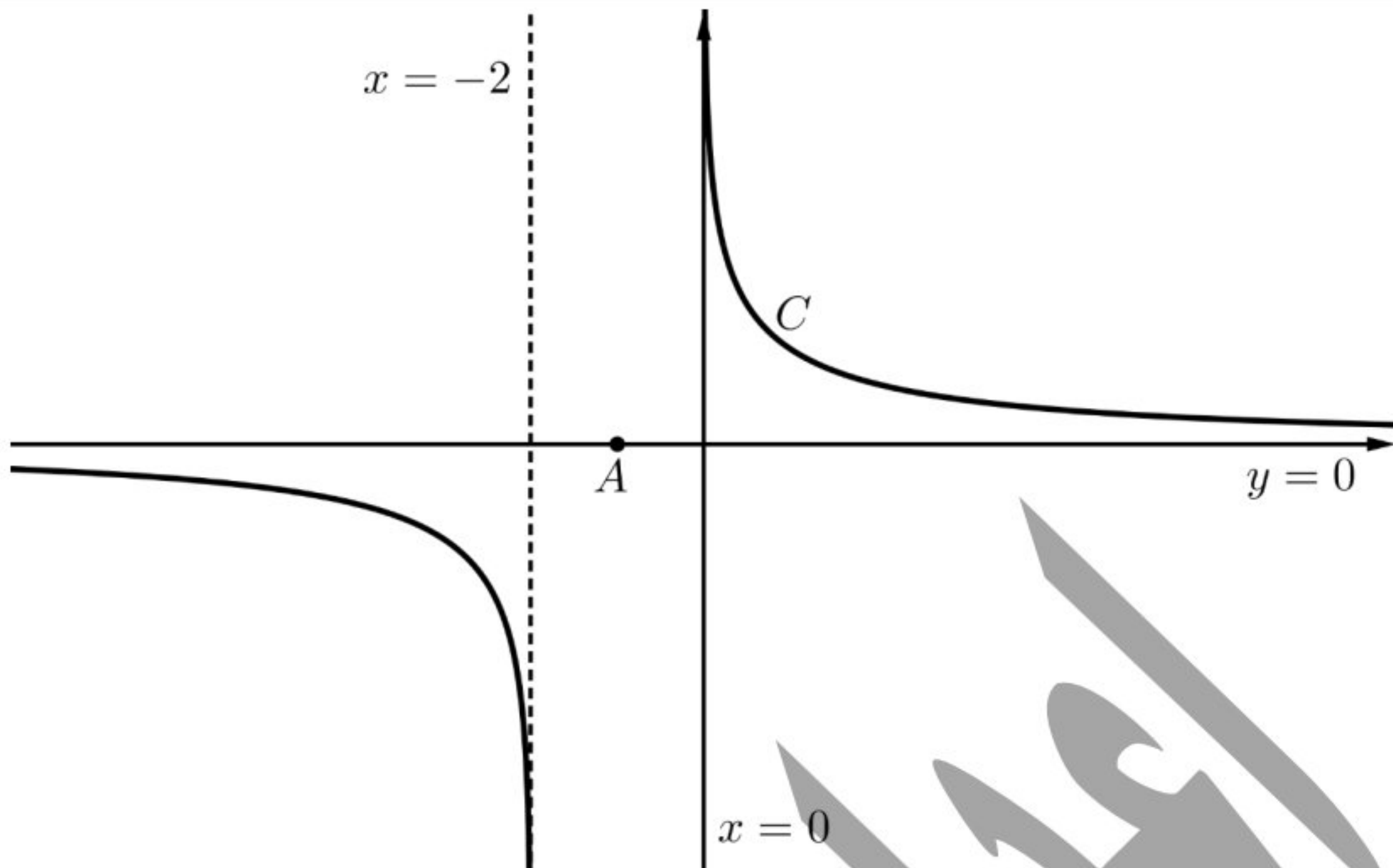
$$\text{الشرط محقق } -1-h \in ]-\infty, -2[ \cup ]0, +\infty[ = D_f$$

$$\frac{f(-1+h) + f(-1-h)}{2} = \frac{\ln\left(1 + \frac{2}{-1+h}\right) + \ln\left(1 + \frac{2}{-1-h}\right)}{2} = \frac{\ln\left(\frac{-1+h+2}{-1+h}\right) + \ln\left(\frac{-1-h+2}{-1-h}\right)}{2}$$

$$\frac{f(-1+h) + f(-1-h)}{2} = \frac{\ln\left(\frac{h+1}{h-1}\right) + \ln\left(\frac{h-1}{h+1}\right)}{2} = \frac{\ln\left(\frac{h+1}{h-1} \times \frac{h-1}{h+1}\right)}{2} = \frac{\ln 1}{2} = \frac{0}{2} = 0$$

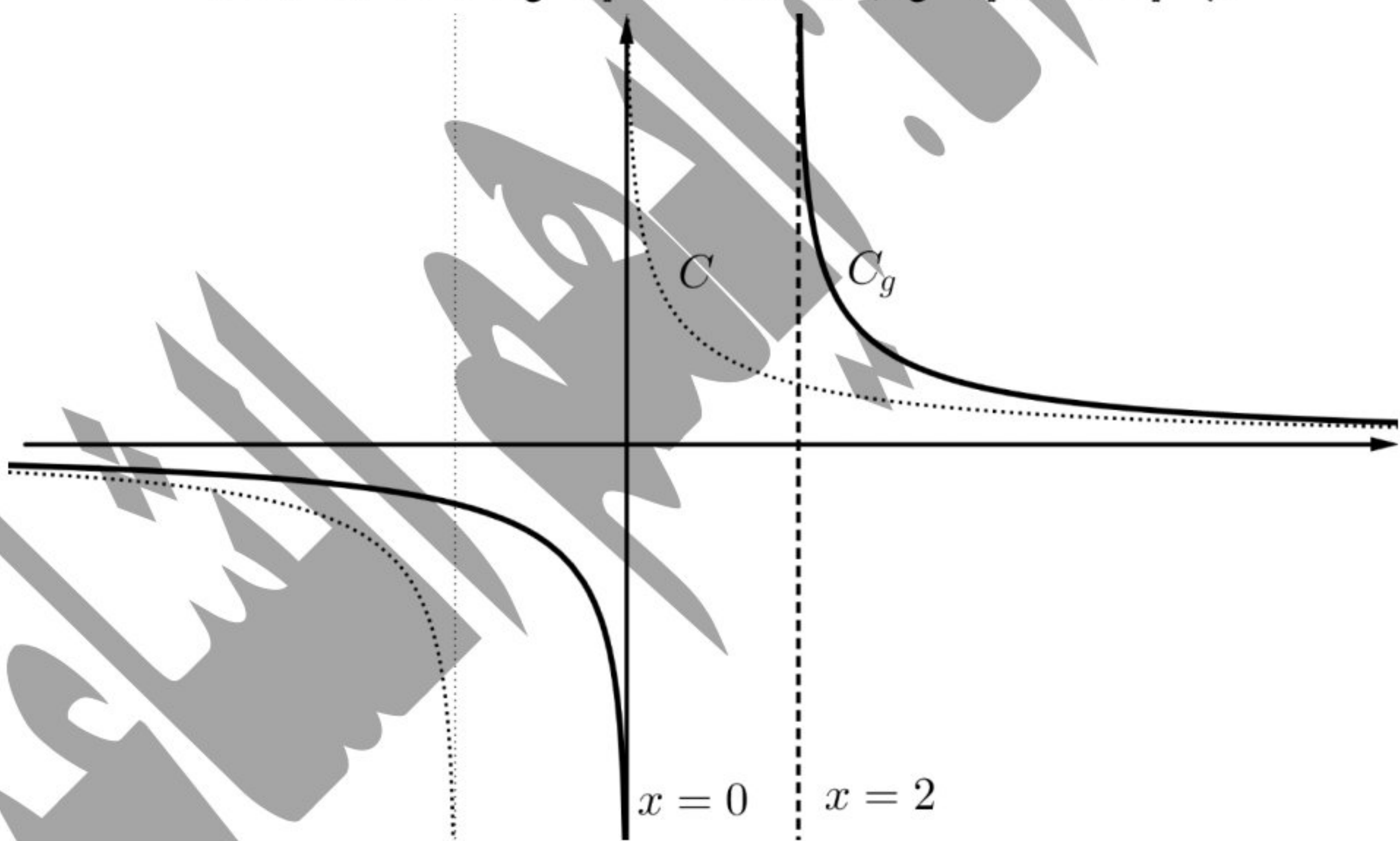
$$\text{وبالتالي النقطة } A(-1, 0) \text{ مركز تناظر للخط البياني } C.$$

(4)



$$f(-x) = \ln\left(1 - \frac{2}{x}\right) = \ln\left(\frac{x-2}{x}\right) = -\ln\left(\frac{x}{x-2}\right) = -g(x) \quad (5)$$

وبالتالي الخط البياني للتابع  $g$  هو نظير الخط البياني للتابع  $f$  بالنسبة لمبدأ الإحداثيات



$$u_n = f(n) = \ln\left(1 + \frac{2}{n}\right) = \ln\left(\frac{n+2}{n}\right) \quad (6)$$

$$S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n = \ln\frac{3}{1} + \ln\frac{4}{2} + \ln\frac{5}{3} + \ln\frac{6}{4} + \dots + \ln\left(\frac{n+1}{n-1}\right) + \ln\left(\frac{n+2}{n}\right)$$

$$S_n = \ln\left(\frac{3}{1} \times \frac{4}{2} \times \frac{5}{3} \times \frac{6}{4} \times \dots \times \frac{n+1}{n-1} \times \frac{n+2}{n}\right) = \ln\left(\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right)$$

ملاحظة: يمكن الاثبات بالتدرج ويمكن كتابة  $u_n$  بالشكل  $u_n = \ln(n+2) - \ln n$

انتهى حل النموذج الأول

التابع اللوغاريتمي

أولاً:

السؤال الأول:

$$x \in ]0, +\infty[ \text{ شرط الحل } (\ln x)^2 - 2\ln x - 3 \geq 0$$

$$X^2 - 2X - 3 \geq 0 \text{ نفرض } X = \ln x \text{ فتصبح المتراجحة}$$

$$(X-3)(X+1) \geq 0$$

$$(\ln x - 3)(\ln x + 1) \geq 0$$

$x$	$-\infty$	$e^{-1}$	$e^2$	$+\infty$	
$(\ln x - 3)(\ln x + 1)$	+	0	-	0	+
المتراجحة	محققة	///////	محققة		

$$x \in ]-\infty, \frac{1}{e}[ \cup ]e^2, +\infty[ \text{ ومنه}$$

$$x \in ]0, \frac{1}{e}[ \cup ]e^2, +\infty[ \text{ نقاط مع الشرط ومنه يكون حل المتراجحة}$$

السؤال الثاني:

$$f(x) = ax + b + \frac{\ln x}{x} \text{ للتابع } f(x) = ax + b + \frac{\ln x}{x} \text{ مماس أفقي في النقطة } A(1,0) \text{ فإن } f(1) = 0 \text{ و } f'(1) = 0$$

$$\text{بما أن } f(1) = 0 \text{ فإن } f(1) = a + b + \frac{\ln 1}{1} = 0 \text{ أي } a + b = 0 \text{ (1)...}$$

$$f'(x) = a + \frac{1}{x} \cdot \frac{x - \ln x}{x^2} = a + \frac{1 - \ln x}{x^2} \text{ لدينا}$$

$$f'(1) = a + \frac{1 - \ln 1}{(1)^2} = 0 \text{ فإن } f'(1) = 0 \text{ وبما أن}$$

$$(2)... a + 1 = 0 \text{ أي}$$

$$a = -1 \text{ وبالتالي يكون}$$

$$b = -a = 1 \text{ فنجد (2) نعوض في}$$

السؤال الثالث:

$$\text{بما أن } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x - \ln x} = \frac{0}{0 - (-\infty)} = \frac{0}{\infty} = 0 = f(0) \text{ فإن } f \text{ مستمر عند الصفر}$$

$$\text{و } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x}{x - \ln x} - 0}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x - \ln x} = \frac{1}{\infty} = 0 = f'(0) \text{ فإن } f \text{ اشتقاقي عند الصفر}$$

ويقبل مماساً أفقياً في المبدأ معادلته  $y = 0$

السؤال الرابع:

$$\text{نفرض } X = \ln x \text{ و } Y = \ln y \text{ فتصبح الجملة: } \begin{cases} (\ln x) \cdot (\ln y) = -2 \\ \ln x - \ln y = 3 \end{cases}$$

$$X \cdot Y = -2 \quad (1)$$

$$X - Y = 3 \quad (2)$$

من (2) نجد  $X = Y + 3$  ... (3)

نعوض في (1) فنجد  $(Y + 3) \cdot Y = -2$

$$Y^2 + 3Y + 2 = 0$$

$$(Y + 2)(Y + 1) = 0$$

إما  $Y = -2$  أي  $\ln y = -2$  ومنه  $y = e^{-2} = \frac{1}{e^2}$  ، نعوض في (3) فنجد  $X = 1$  أي  $\ln x = 1$  ومنه  $x = e$

إما  $Y = -1$  أي  $\ln y = -1$  ومنه  $y = e^{-1} = \frac{1}{e}$  ، نعوض في (3) فنجد  $X = 2$  أي  $\ln x = 2$  ومنه  $x = e^2$

$$(x, y) \in \left\{ \left( e, \frac{1}{e^2} \right), \left( e^2, \frac{1}{e} \right) \right\} \text{ وبالتالي حل الجملة}$$

$$f(x) = \frac{\ln|x|}{x} \text{ و } x \in ]-\infty, 0[ \cup ]0, +\infty[$$

$$-x \in ]-\infty, 0[ \cup ]0, +\infty[ = D_f \text{ و } x \in ]-\infty, 0[ \cup ]0, +\infty[ = D_f \text{ الشرط:} \quad (1)$$

$$f(x-) = \frac{\ln|-x|}{-x} = -\frac{\ln|x|}{x} = -f(x)$$

وبالتالي التابع  $f$  فردي خطه البياني متناظر بالنسبة لمبدأ الإحداثيات.

$$\text{على المجال } ]0, +\infty[ \text{ فإن } f(x) = \frac{\ln x}{x} \text{ وبالتالي:} \quad (2)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \frac{-\infty}{0^+} = -\infty \text{ وبالتالي } x = 0 \text{ مقارب شاقولي عند } -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0 \text{ وبالتالي } y = 0 \text{ مقارب أفقي في جوار } +\infty$$

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \cdot x - \ln x}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2}$$

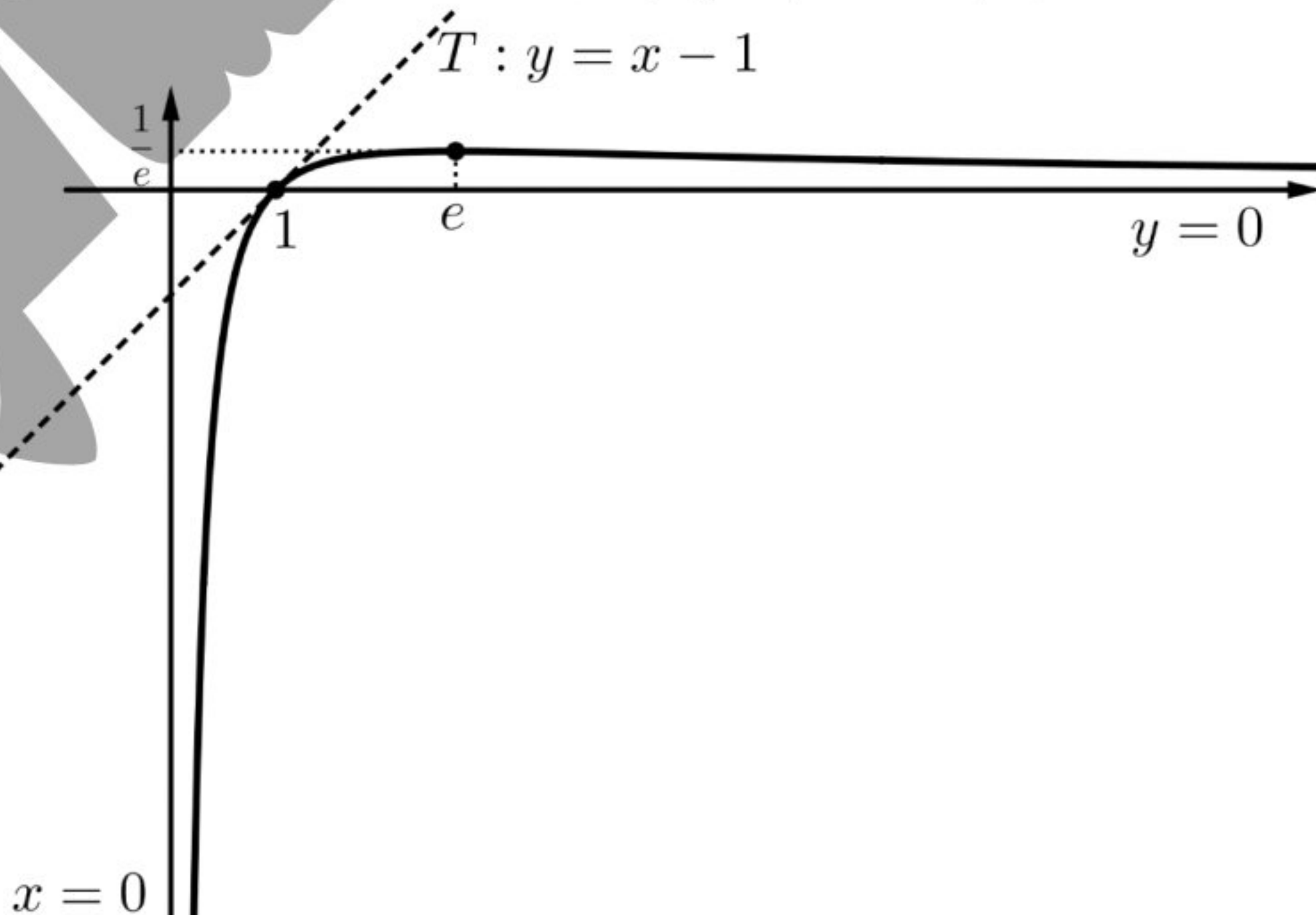
$$\text{عندما } f'(x) = 0 \text{ فإن } \ln x = 1 \text{ أي } x = e \text{ حيث } f(e) = \frac{\ln e}{e} = \frac{1}{e}$$

$x$	$0$	$e$	$+\infty$	
$f'(x)$		$+$	$0$	$-$
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow \frac{1}{e}$	$\searrow 0$	

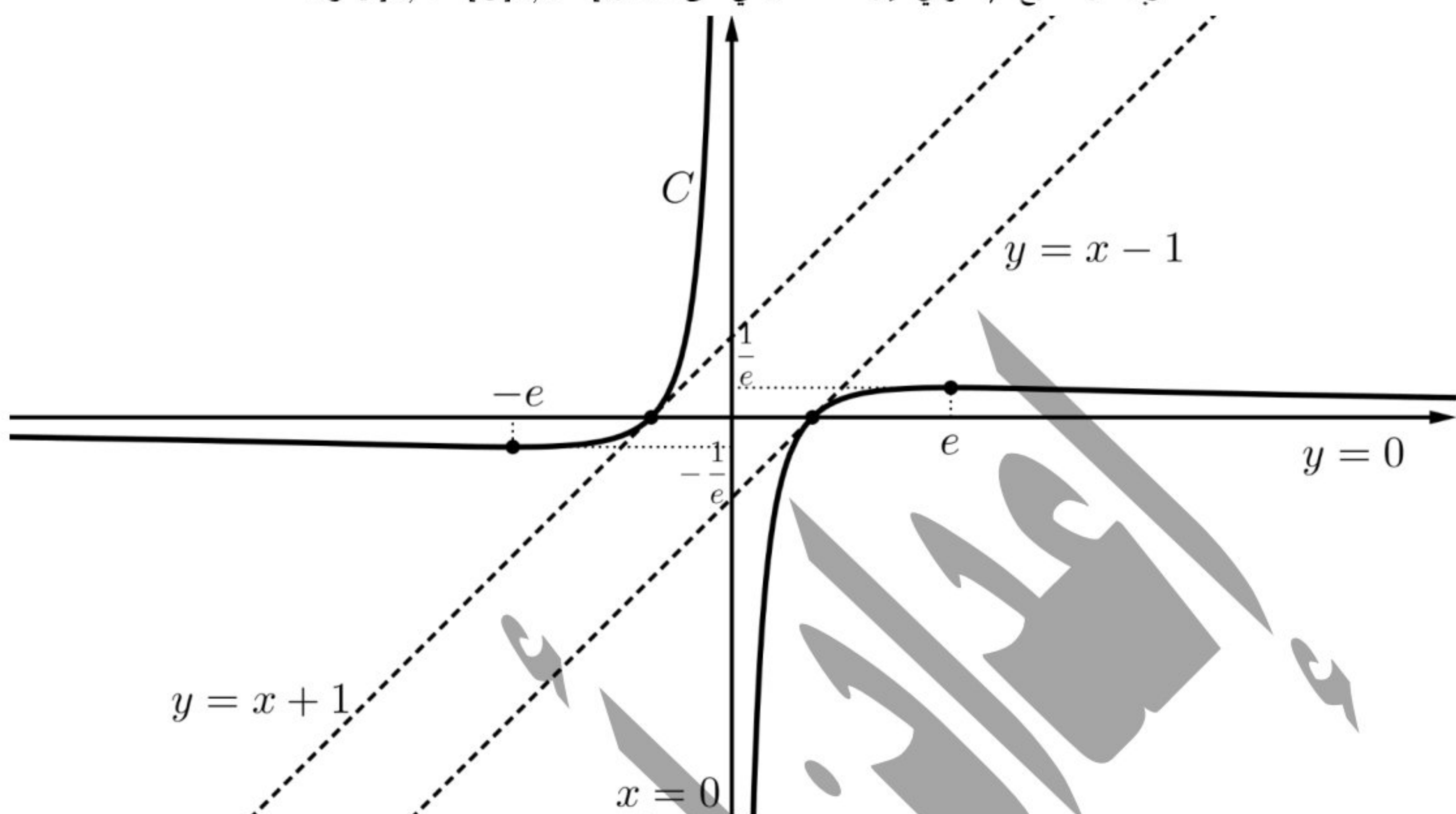
$$f(e) = \frac{1}{e} \text{ قيمة حدية كبرى}$$

$$T: y = f'(1)(x-1) + f(1) = x-1 \quad (3)$$

$$\text{رسم الخط البياني للتابع } f \text{ على المجال } ]0, +\infty[ \quad (4)$$

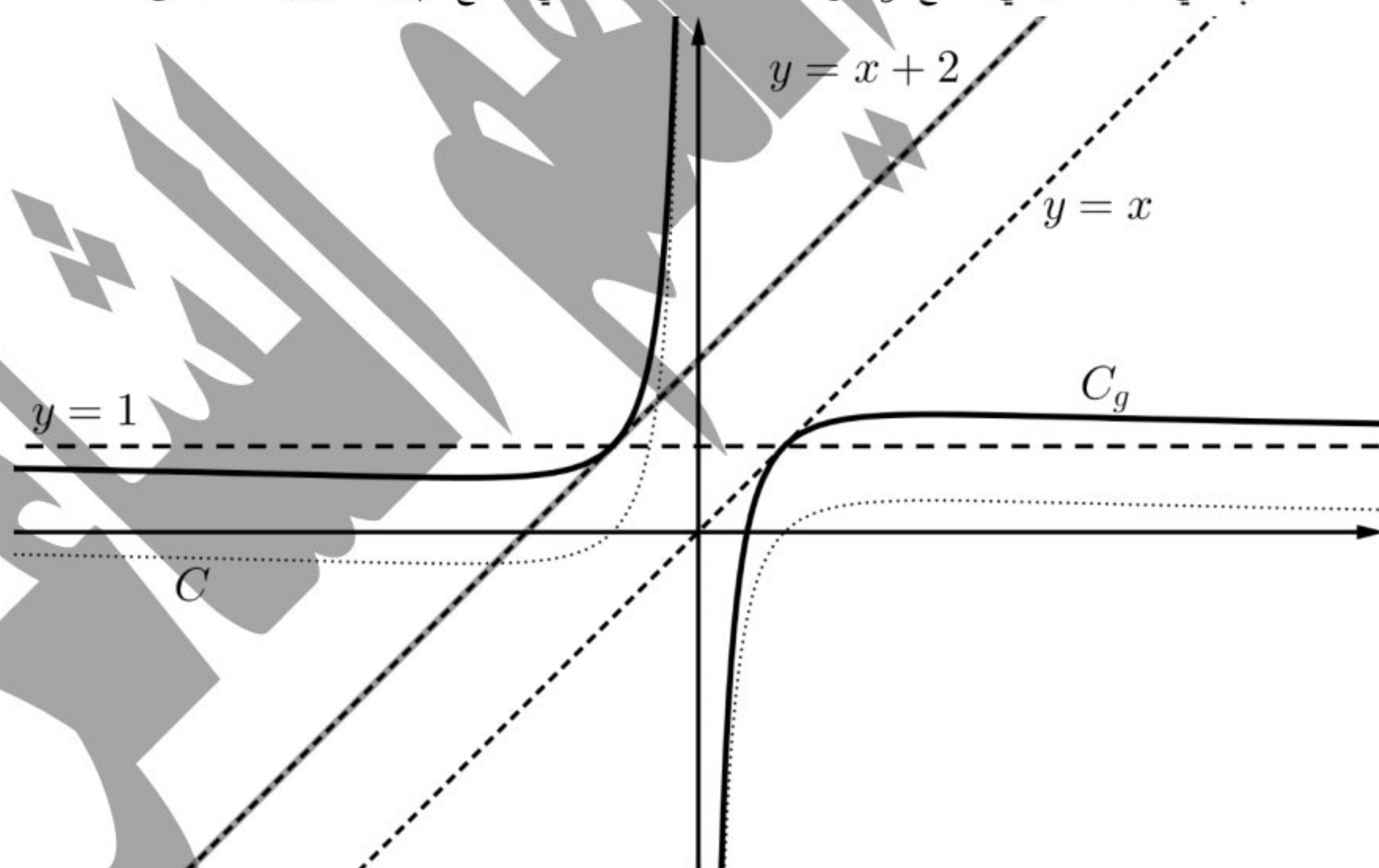


وبما أن التابع  $f$  فردي فإن خطه البياني على المجال  $]-\infty, 0[ \cup ]0, +\infty[$  يكون:



$$g(x) = \frac{\ln|x|+x}{x} = \frac{\ln|x|}{x} + 1 = f(x) + 1 \quad (5)$$

وبالتالي الخط البياني للتابع  $g$  هو انسحاب الخط البياني للتابع  $f$  بمقدار واحد للأعلى.



$$f(x) = \ln\left(\frac{1+x}{3-x}\right) \text{ و } D_f = ]-1,3[$$

$$-\infty \text{ مقارب شاقولي عند } x = -1 \text{ و } \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = -\infty \quad (1)$$

$$+\infty \text{ مقارب شاقولي عند } x = 3 \text{ و } \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = +\infty$$

$$f(x) = \ln\left(\frac{1+x}{3-x}\right) = \ln(1+x) - \ln(3-x) \quad (2)$$

$$f'(x) = \frac{1}{1+x} - \frac{-1}{3-x} = \frac{3-x+1+x}{(1+x)(3-x)} = \frac{4}{(1+x)(3-x)} > 0 \text{ التابع } f \text{ متزايد تماماً}$$

$x$	$-1$	$3$
$f'(x)$		$+$
$f(x)$	$-\infty$	$+\infty$

$$f(x) = 0 \text{ نقطة تقاطع } C \text{ مع محور الفواصل تحقق} \quad (3)$$

$$\ln\left(\frac{1+x}{3-x}\right) = 0 = \ln 1$$

$$\frac{1+x}{3-x} = 1$$

$A(1,0)$  أي أن نقطة تقاطع  $C$  مع محور الفواصل هي  $A(1,0)$  ومنه  $1+x = 3-x$

$$\text{الشرط: } 1+h \in D_f = ]-1,3[$$

$$h \in ]-2,2[$$

$$-h \in ]-2,2[$$

$$1-h \in D_f = ]-1,3[ \text{ الشرط محقق}$$

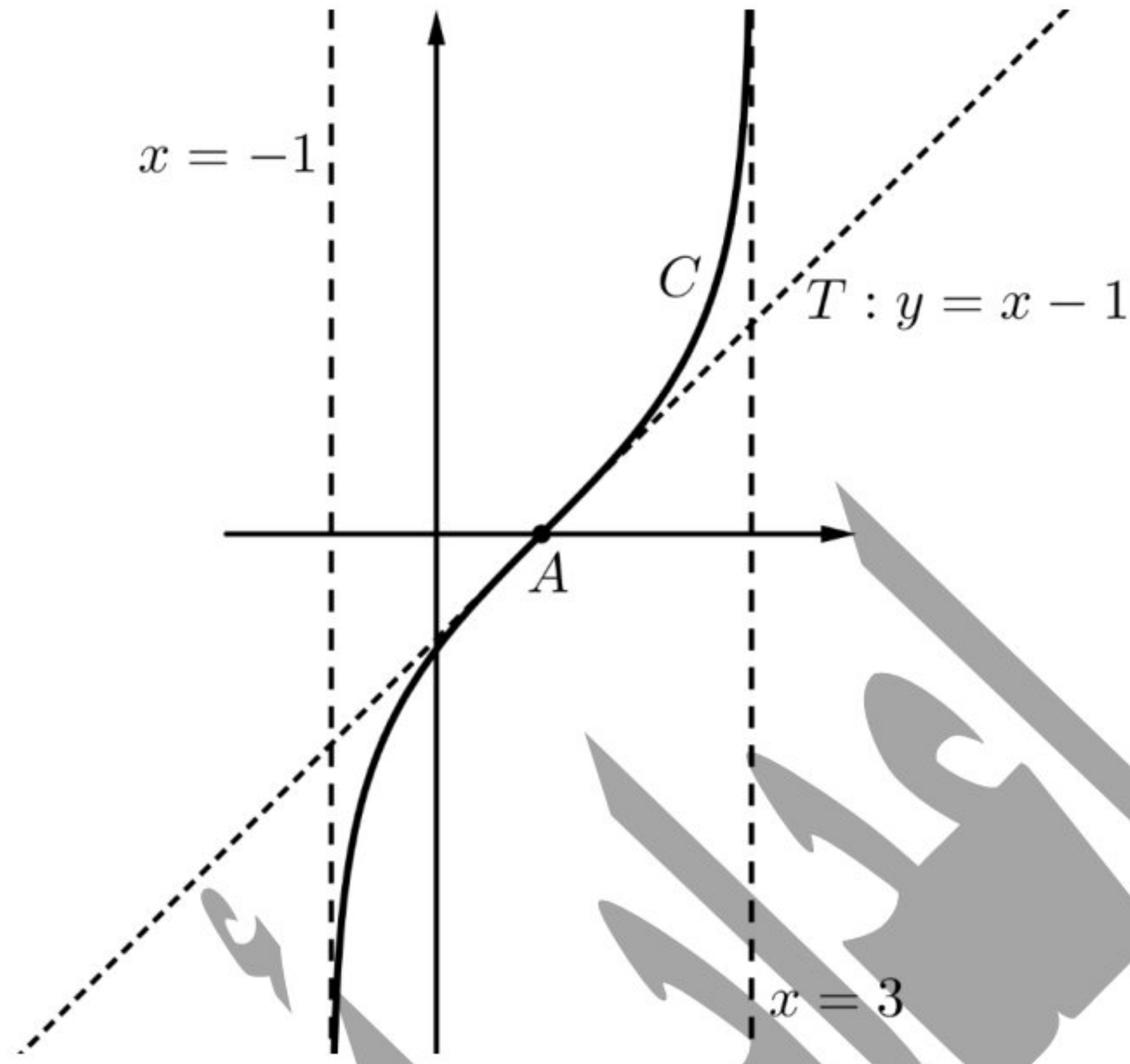
$$\frac{f(1+h) + f(1-h)}{2} = \frac{\ln\left(\frac{1+1+h}{3-1-h}\right) + \ln\left(\frac{1+1-h}{3-1+h}\right)}{2} = \frac{\ln\left(\frac{2+h}{2-h}\right) + \ln\left(\frac{2-h}{2+h}\right)}{2}$$

$$= \frac{\ln\left(\frac{2+h}{2-h} \times \frac{2-h}{2+h}\right)}{2} = \frac{\ln 1}{2} = \frac{\ln 0}{2} = 0$$

وبالتالي النقطة  $A(1,0)$  مركز تناظر للخط  $C$

$$T: y = f'(1)(x-1) + f(1) \quad (4)$$

$$T: y = x - 1$$



$$u_0 = 0 \text{ و } u_{n+1} = e^{f(u_n)} = e^{\ln\left(\frac{u_n+1}{3-u_n}\right)} = \frac{u_n+1}{3-u_n} \quad (6)$$

نفرض القضية  $E(n): u_n < u_{n+1} < 1$

- نثبت صحة القضية  $E(0)$  من أجل  $n = 0$ :  $u_0 = 0 < u_1 = \frac{1}{3} < 1$  محققة.

- نفرض صحة القضية  $E(n)$  من أجل  $n$ :  $u_n < u_{n+1} < 1$  محققة.

- نثبت صحة القضية  $E(n+1)$  من أجل  $n+1$ :  $u_{n+1} < u_{n+2} < 1$  ؟

التابع الممثل للمتتالية  $u_n$  هو  $f(x) = \frac{x+1}{3-x}$  ومتزايد تماماً لأن  $f'(x) = \frac{4}{(3-x)^2} > 0$

من الفرض  $u_n < u_{n+1} < 1$  وبما أن التابع  $f$  متزايد تماماً فإن:

$$f(u_n) < f(u_{n+1}) < f(1)$$

$$u_{n+1} < u_{n+2} < 1$$

والعلاقة محققة من أجل  $n+1$  فهي محققة أيأ كان العدد الطبيعي  $n$ .

•  $u_n < u_{n+1}$  وبالتالي المتتالية  $u_n$  متزايدة تماماً.

•  $u_n < 1$  وبالتالي المتتالية  $u_n$  محدودة من الأعلى.

وبالتالي المتتالية  $u_n$  متقاربة ونهايتها هي حل المعادلة  $f(x) = x$  أي  $\frac{x+1}{3-x} = x$  وتكافئ  $x^2 - 2x + 1 = 0$  أي  $(x-1)^2 = 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 1 \text{ أي } x = 1 \text{ وبالتالي}$$

انتهى حل النموذج الثاني

التابع اللوغاريتمي

أولاً:

السؤال الأول:

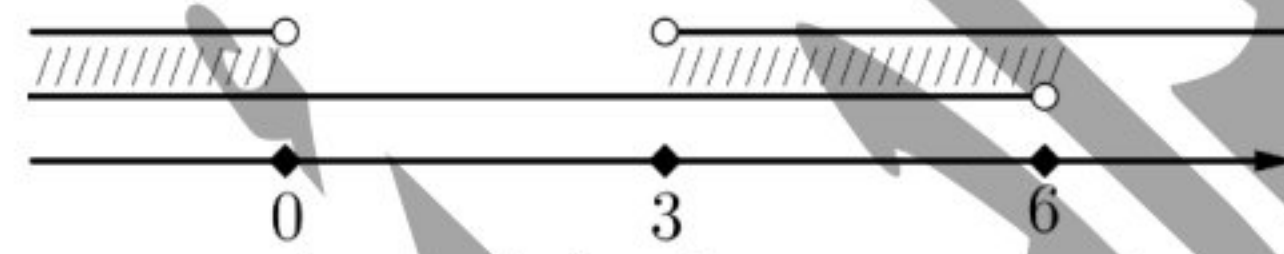
$$\ln(x^2 - 3x) \geq 2\ln(6 - x)$$

شرط الحل:  $6 - x > 0$  ومنه  $x < 6$  أي  $x \in ]-\infty, 6[$

و  $x^2 - 3x > 0$  أي  $x \in ]-\infty, 0[ \cup ]3, +\infty[$

$x$	$-\infty$	$0$	$3$	$+\infty$	
$x^2 - 3x$	$+$	$0$	$-$	$0$	$+$
المراجعة	محققة	////	////	محققة	

نقاط الشرطين



وبالتالي شرط الحل:  $x \in ]-\infty, 0[ \cup ]3, 6[$

$$\ln(x^2 - 3x) \geq 2\ln(6 - x)$$

$$\ln(x^2 - 3x) \geq \ln(6 - x)^2$$

$$x^2 - 3x \geq 36 - 12x + x^2$$

$$9x \geq 36 \text{ وبالتالي } x \geq 4$$

وبالتالي  $x \in [4, +\infty[$  نقاط مع الشرط فنجد



حل المراجعة  $x \in [4, 6[$

السؤال الثاني:

المراجعة  $2 + \ln x - 2\sqrt{x} \leq 0$  تكافئ  $2 + \ln x \leq 2\sqrt{x}$

نفرض التابع  $g(x) = 2 + \ln x - 2\sqrt{x}$  المعرف على المجال  $x \in ]0, +\infty[$

$$g'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1 - \sqrt{x}}{x}$$

عندما  $g'(x) = 0$  فإن  $x = 1$  حيث  $g(1) = 0$  وبالتالي

$x$	$0$	$1$	$+\infty$
$g'(x)$	$+$	$0$	$-$
$g(x)$		$0$	

من جدول اطراد التابع  $g$  نجد أن  $g(x) \leq 0$

$$2 + \ln x - 2\sqrt{x} \leq 0$$

وبالتالي العلاقة محققة  $2 + \ln x \leq 2\sqrt{x}$

السؤال الثالث:

التابع  $f(x) = \frac{-1}{\ln x}$  معرف بشرط  $(\ln x \neq 0, x > 0)$  أي  $(x \neq 1, x > 0)$  وبالتالي  $D_f = ]0,1[ \cup ]1, +\infty[$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \frac{-1}{-\infty} = 0 \text{ وبالتالي النقطة } (0,0) \text{ نقطة مقاربة}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \frac{-1}{0^+} = -\infty \text{ و } \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \frac{-1}{0^-} = +\infty$$

وبالتالي  $x = 1$  مقارب شاقولي عند  $\pm\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{-1}{+\infty} = 0 \text{ وبالتالي } y = 0 \text{ مقارب أفقي في جوار } +\infty$$

السؤال الرابع:

جملة المعادلتين  $\left( \begin{array}{l} \ln(x+y) = 2\ln 2 \\ \ln x + \ln y = \ln 3 \end{array} \right)$  تكافئ  $\left( \begin{array}{l} \ln(x+y) = \ln 4 \\ \ln x \cdot y = \ln 3 \end{array} \right)$  أي  $(1) \quad x + y = 4$   
 $(2) \quad xy = 3$

من (1) نجد  $x = 4 - y$  ... (3)

نعوض في (2) فنجد  $(4-y) \cdot y = 3$  و تكافئ  $y^2 - 4y + 3 = 0$

$$(y-3)(y-1) = 0$$

إما  $y = 3$  ومنه  $x = 1$

أو  $y = 1$  ومنه  $x = 3$

وبالتالي حل الجملة  $(x,y) \in \{(1,3), (3,1)\}$

$$f(x) = \frac{\ln x}{x^2} \text{ و } D_f = ]0, +\infty[$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \frac{-\infty}{0^+} = -\infty \text{ وبالتالي } x=0 \text{ مقارب شاقولي عند } -\infty \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} \cdot \frac{1}{x} = 0 \times 0 = 0 \text{ وبالتالي } y=0 \text{ مقارب أفقي في جوار } +\infty$$

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \cdot x^2 - 2x \ln x}{x^4} = \frac{x - 2x \ln x}{x^4} = \frac{1 - 2 \ln x}{x^3}$$

$$\text{عندما } f'(x) = 0 \text{ فإن } 1 - 2 \ln x = 0 \text{ أي } \ln x = \frac{1}{2} = \ln e^{\frac{1}{2}} = \ln \sqrt{e}$$

$$f(\sqrt{e}) = \frac{\ln \sqrt{e}}{(\sqrt{e})^2} = \frac{\frac{1}{2}}{e} = \frac{1}{2e} \text{ ومنه } x = \sqrt{e} \text{ حيث}$$

$x$	0	$\sqrt{e}$	$+\infty$
$f'(x)$		+	0 -
$f(x)$	$-\infty$	$\frac{1}{2e}$	0

$$f(\sqrt{e}) = \frac{1}{2e} \text{ قيمة حدية كبرى}$$

$$f(x) - y_{\Delta} = \frac{\ln x}{x^2} \text{ الوضع النسبي:} \quad (2)$$

$x$	0	1	$+\infty$
$\ln x$	-	0	+
$x^2$	+		+
$f(x) - y_{\Delta}$	-	0	+
الوضع النسبي		$C$ تحت المقارب	$C$ فوق المقارب

$$f \text{ يقبل مماساً } T \text{ يوازي المستقيم } y = x \text{ إذا كان } f'(x) = 1 \quad (3)$$

$$\frac{1 - 2 \ln x}{x^3} = 1 \text{ أي } 1 - 2 \ln x = x^3 \text{ وتكافئ } 1 - 2 \ln x - x^3 = 0$$

$$\text{نفرض التابع } h(x) = 1 - 2 \ln x - x^3 \text{ المعرف على المجال } ]0, +\infty[$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = -\infty \text{ و } \lim_{x \rightarrow 0} h(x) = +\infty$$

$$h'(x) = -\frac{2}{x} - 3x^2 < 0 \text{ التابع متناقص تماماً}$$

$x$	$0$	$+\infty$
$h'(x)$		$-$
$h(x)$	$+\infty$	$-\infty$

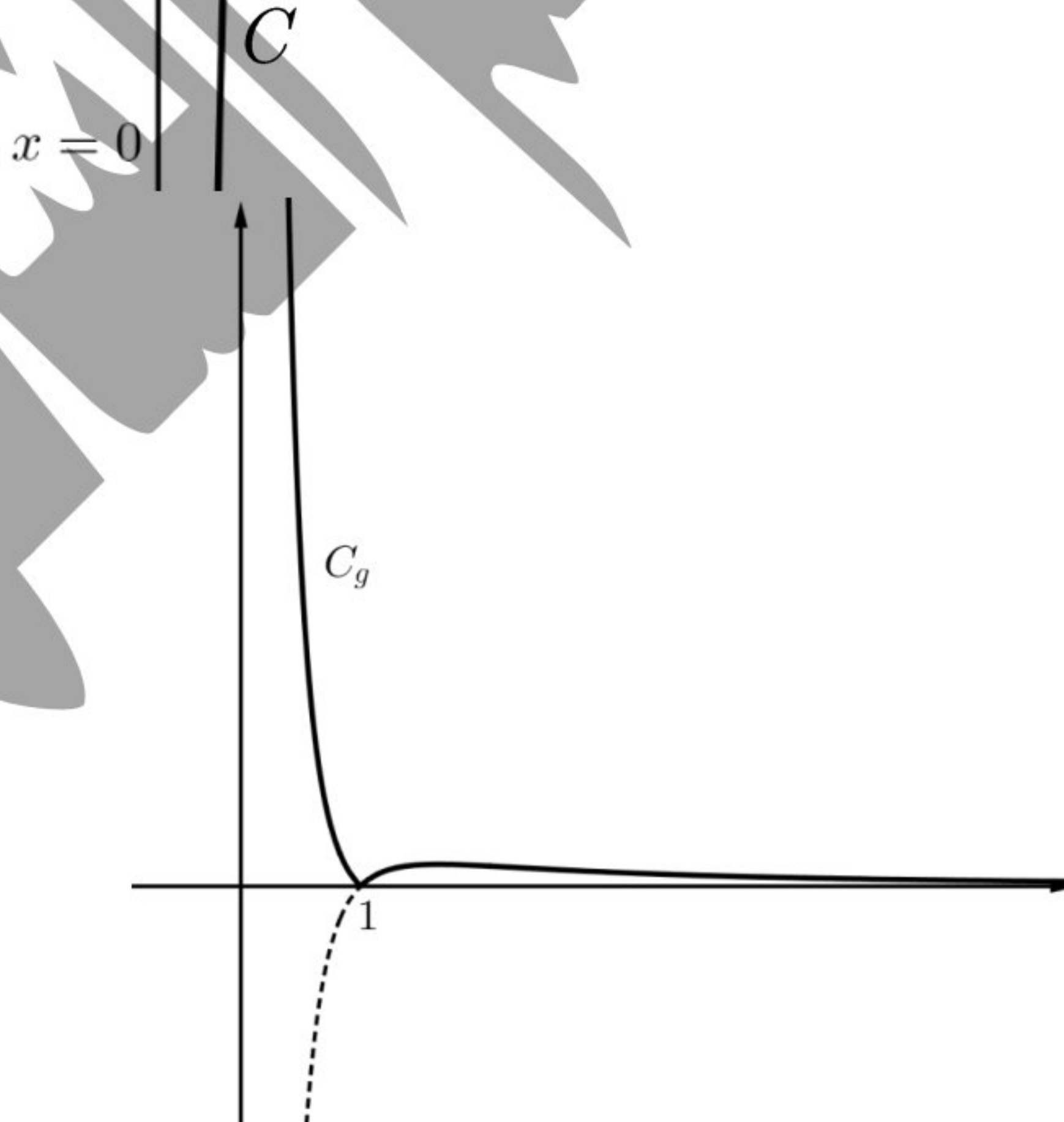
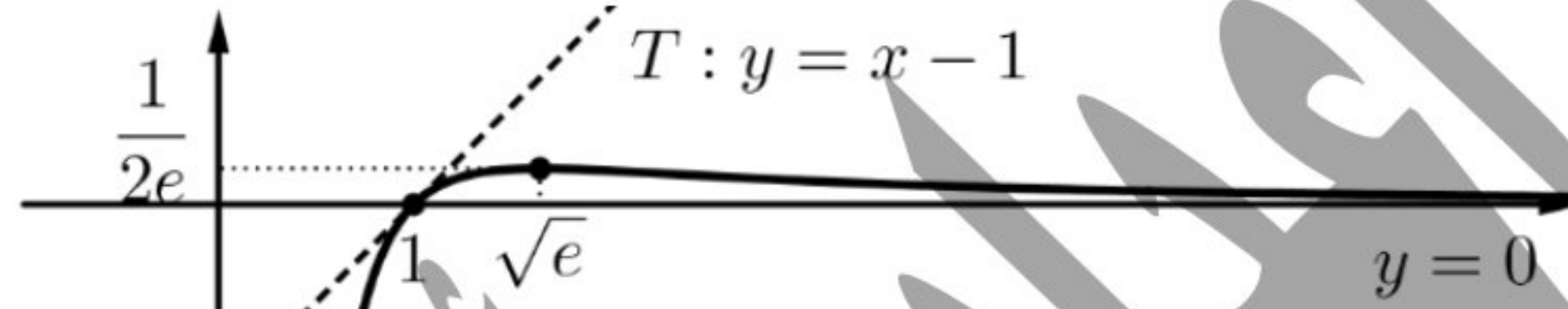
على المجال  $]0, +\infty[$  التابع مستمر ومتناقص تماماً و  $]-\infty, +\infty[$

وبالتالي للمعادلة  $h(x) = 0$  حل وحيد هو  $x = 1$  لأن  $h(1) = 1 - 2\ln 1 - (1)^3 = 1 - 1 = 0$

أي أن للمعادلة  $f'(x) = 1$  حل وحيد وبالتالي الخط  $C$  يقبل مماساً واحداً يوازي المستقيم  $y = x$  في النقطة التي فاصلتها 1

$$T: y = f'(1)(x-1) + f(1) = x - 1$$

(4)



(5)

$$f(x) = x + 1 - \ln|x| \text{ و } D_f = \mathbb{R}^* = ]-\infty, 0[ \cup ]0, +\infty[$$

$$f(x) = \begin{cases} x + 1 - \ln x & : x > 0 \\ x + 1 - \ln(-x) & : x < 0 \end{cases} \quad (1)$$

على المجال  $] -\infty, 0[$  فإن التابع يكتب بالشكل  $f(x) = x + 1 - \ln(-x)$  ومنه: (2)

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = +\infty \text{ و } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

وبالتالي  $x = 0$  مقارب شاقولي عند  $+\infty$

$$f'(x) = 1 - \frac{-1}{-x} = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x}$$

عندما  $f'(x) = 0$  فإن  $x = 1 \notin ] -\infty, 0[$  مرفوض

وبالتالي  $f'(x) > 0$  ومنه التابع  $f$  متزايد تماماً على المجال  $] -\infty, 0[$

$x$	$-\infty$	$0$
$f'(x)$		+
$f(x)$	$-\infty$	$+\infty$

على المجال  $] 0, +\infty[$  فإن التابع يكتب بالشكل  $f(x) = x + 1 - \ln x$  ومنه:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left( 1 + \frac{1}{x} - \frac{\ln x}{x} \right) = +\infty$$

و  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$  وبالتالي  $x = 0$  مقارب شاقولي عند  $+\infty$

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x}$$

عندما  $f'(x) = 0$  فإن  $x = 1 \in ] 0, +\infty[$  مقبول، حيث  $f(1) = 2$

$x$	$0$	$1$	$+\infty$
$f'(x)$		-	+
$f(x)$	$+\infty$	$2$	$+\infty$

ومنه يكون جدول تغيرات التابع  $f$  على  $\mathbb{R}^*$

$x$	$-\infty$	$0$	$1$	$+\infty$
$f'(x)$		+	-	+
$f(x)$	$-\infty$	$+\infty$	$2$	$+\infty$

$f(1) = 2$  قيمة حدية صغرى

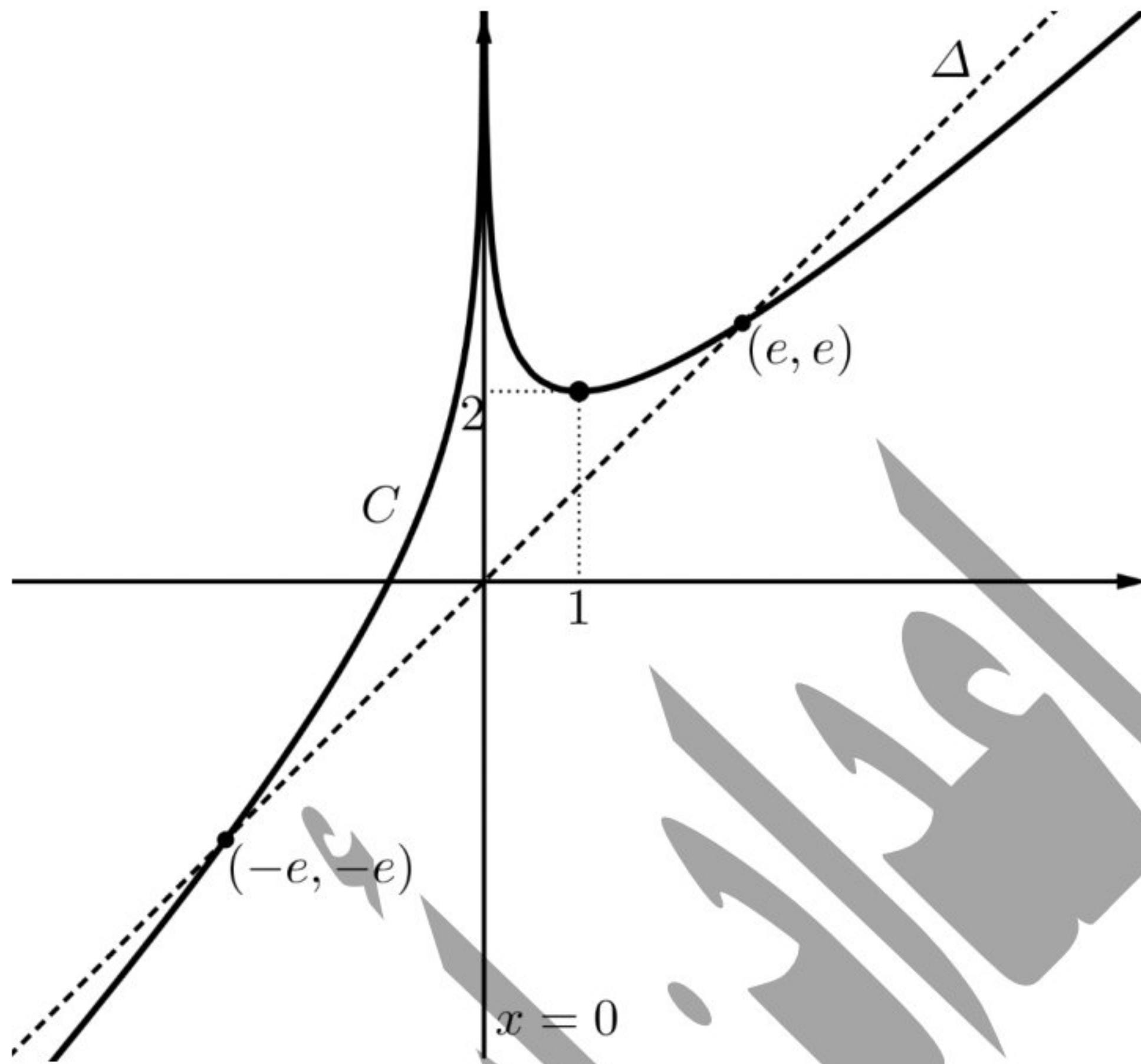
نقاط تقاطع  $C$  مع المستقيم  $\Delta: y = x$  تحقق  $f(x) = x$  (3)

$$|x| = e \text{ أي } \ln|x| = 1 = \ln e \text{ أي } x + 1 - \ln|x| = x$$

إما  $x = e$  ومنه  $y = e$  وبالتالي  $(e, e)$

إما  $x = -e$  ومنه  $y = -e$  وبالتالي  $(-e, -e)$

(4)



$$f(x) = \lambda$$

(5)

للمعادلة حل وحيد  $\lambda \in ]-\infty, 2[$

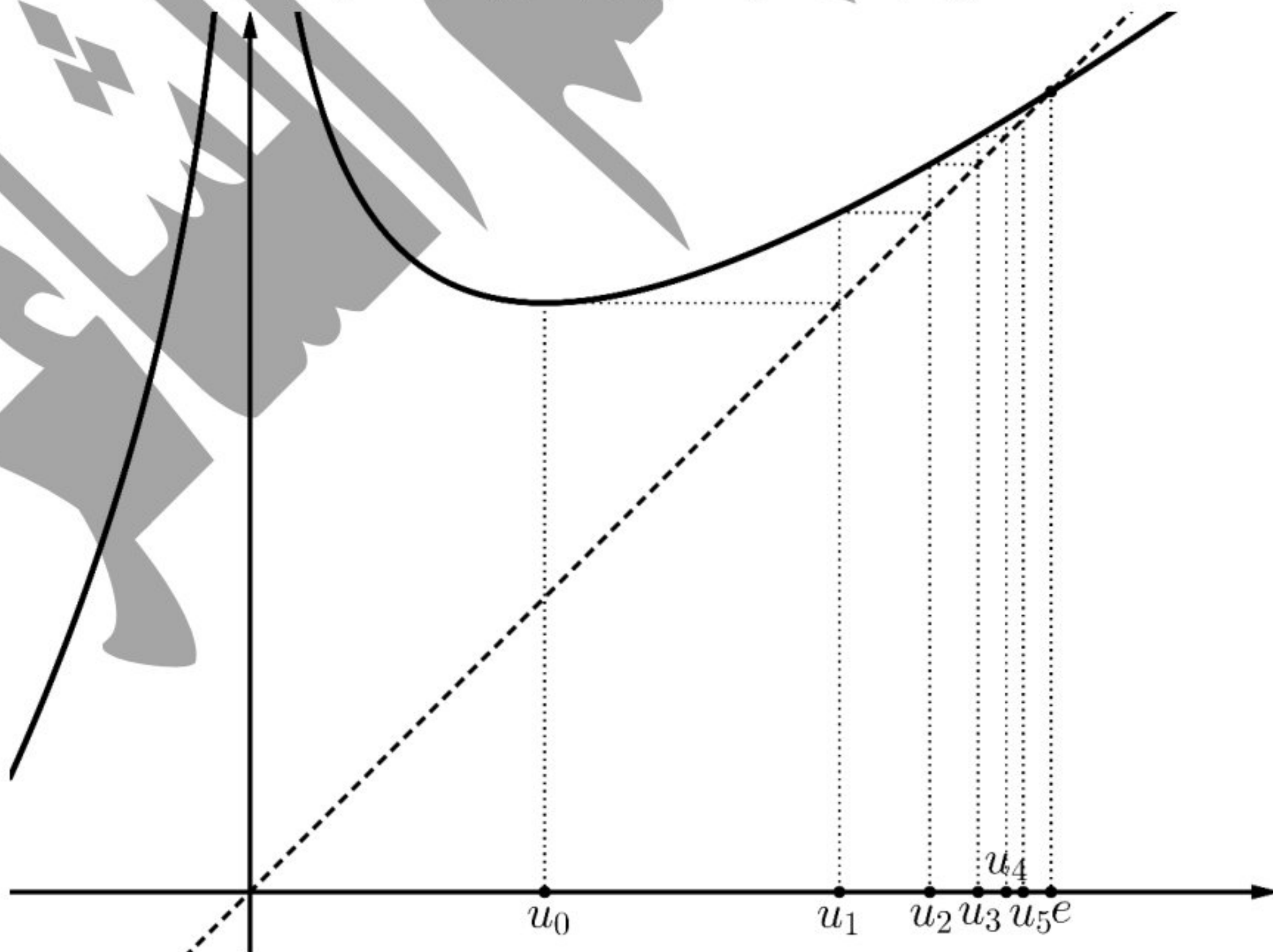
للمعادلة حلين مختلفين  $\lambda = 2$

للمعادلة ثلاث حلول مختلفة  $\lambda \in ]2, +\infty[$

$$u_0 = 1 \text{ و } u_{n+1} = f(u_n) = u_n + 1 - \ln |u_n|$$

(6)

(a)



نخمن أن المتتالية متزايدة ونهايتها المحتملة  $e$

(b) نفرض القضية  $E(n): 1 \leq u_n < e$

- ثبت صحة القضية  $E(0)$  من أجل  $n=0$  :  $1 \leq u_0 = 1 < e$  محققة

- نفرض صحة القضية  $E(n)$  من أجل  $n$  :  $1 \leq u_n < e$  محققة

- ثبت صحة القضية  $E(n+1)$  من أجل  $n+1$  :  $1 \leq u_{n+1} < e$  ؟

من الفرض  $1 \leq u_n < e$  وبما أن التابع  $f$  متزايد تماماً على المجال  $[1, e[$  فإن:

$$f(1) \leq f(u_n) < f(e)$$

$$1 \leq 2 \leq u_{n+1} < e$$

العلاقة محققة من أجل  $n+1$  فهي محققة أيضاً كان العدد الطبيعي  $n$ .

(c) نفرض القضية  $E(n): u_n < u_{n+1}$

- ثبت صحة القضية  $E(0)$  من أجل  $n=0$  :  $u_0 = 1 < u_1 = 2$  محققة

- نفرض صحة القضية  $E(n)$  من أجل  $n$  :  $u_n < u_{n+1}$  محققة

- ثبت صحة القضية  $E(n+1)$  من أجل  $n+1$  :  $u_{n+1} < u_{n+2}$  ؟

من الفرض  $u_n < u_{n+1}$  وبما أن التابع  $f$  متزايد تماماً على المجال  $[1, e[$  فإن:

$$f(u_n) < f(u_{n+1})$$

$$u_{n+1} < u_{n+2}$$

العلاقة محققة من أجل  $n+1$  فهي محققة أيضاً كان العدد الطبيعي  $n$ .

• بما أن المتتالية  $u_n$  متزايدة ومحدودة من الأعلى فهي متقاربة ونهايتها هي حل المعادلة  $f(x) = x$  أي  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = e$ .

انتهى حل النموذج الثالث

التابع اللوغاريتمي

أولاً:

السؤال الأول:

$$\ln|x+1| + \ln(2-x) = 2\ln 2$$

شرط الحل:  $(x+1 \neq 0, 2-x > 0)$  أي  $(x \neq -1, x < 2)$  وبالتالي  $x \in ]-\infty, -1[ \cup ]-1, 2[$

$$\ln|x+1|(2-x) = \ln 4$$

$$|x+1|(2-x) = 4$$

إما  $(x+1)(2-x) = 4$  أي  $-x^2 + 2x - x + 2 = 4$  وتكافئ  $x^2 - x + 2 = 0$

$$\Delta = 1 - 8 = -7 < 0$$

أو  $(x+1)(2-x) = -4$  أي  $-x^2 + 2x - x + 2 = -4$  وتكافئ  $x^2 - x - 6 = 0$

$$(x-3)(x+2) = 0$$

إما  $x = 3$  مرفوض

أو  $x = -2$  مقبول

السؤال الثاني:

$$f(x) \geq g(x)$$

$$\ln x - \frac{x-1}{x} \geq 0 \text{ وتكافئ } \ln x \geq \frac{x-1}{x}$$

نفرض التابع  $h(x) = \ln x - \frac{x-1}{x}$  المعرف على المجال  $]0, +\infty[$

$$h'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} = \frac{x-1}{x^2}$$

عندما  $h'(x) = 0$  يكون  $x = 1$  حيث  $h(1) = 0$

$x$	0	1	$+\infty$		
$h'(x)$		-	0	+	
$h(x)$			↘	0	↗

من جدول اطراد التابع  $h$  نجد أن  $h(x) \geq 0$

$$\ln x \geq \frac{x-1}{x} \text{ أي } \ln x - \frac{x-1}{x} \geq 0$$

وبالتالي  $f(x) \geq g(x)$  أيأ كان العدد الطبيعي  $n > 0$

$$f(x) = \ln \sqrt{x+3} - \frac{1}{2} \ln x$$

$f$  معرف بشرط  $(x+3 > 0, x > 0)$  أي  $(x > -3, x > 0)$

وبالتالي  $D_f = ]0, +\infty[$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \ln \sqrt{x+3} - \frac{1}{2} \ln x \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \ln \sqrt{x+3} - \ln \sqrt{x} \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \left( \frac{\sqrt{x+3}}{\sqrt{x}} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \sqrt{\frac{x+3}{x}} = \ln \sqrt{1} = \ln 1 = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(f(x)) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$$

$$\begin{array}{l} x - y = 4 \quad (1) \\ \frac{x}{y} = 3 \quad (2) \end{array} \quad \text{وبالتالي} \quad \left( \begin{array}{l} \ln(x-y) = \ln 4 \\ \ln \frac{x}{y} = \ln 3 \end{array} \right) \quad \text{تكافئ} \quad \left( \begin{array}{l} \ln(x-y) = 2 \ln 2 \\ \ln x - \ln y = \ln 3 \end{array} \right) \quad \text{الجملة}$$

من (2) نجد  $x = 3y$

نعوض في (1) فنجد  $3y - y = 4$  أي  $y = 2$

ومنه  $x = 3(2) = 6$

وبالتالي حل الجملة  $(x, y) = \{(6, 2)\}$

$$f(x) = \frac{1+2\ln x}{x^2} \text{ و } D_f = ]0, +\infty[$$

$$-\infty \text{ مقارب شاقولي عند } x=0 \text{ وبالتالي } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \frac{-\infty}{0^+} = -\infty \quad (1)$$

$$+\infty \text{ مقارب أفقي في جوار } +\infty \text{ وبالتالي } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{x^2} + \frac{2}{x} \cdot \frac{\ln x}{x} \right) = 0 \text{ و}$$

$$f'(x) = \frac{\frac{2}{x} \cdot x^2 - 2x(1+2\ln x)}{x^4} = \frac{2x - 2x(1+2\ln x)}{x^4} = \frac{2 - 2(1+2\ln x)}{x^3} = \frac{2 - 2 + 4\ln x}{x^3} = \frac{4\ln x}{x^3}$$

عندما  $f'(x) = 0$  فإن  $\ln x = 0$  أي  $x = 1$  حيث  $f(1) = 1$

$x$	0	1	$+\infty$
$f'(x)$		+	0
$f(x)$	$-\infty$	1	0

قيمة حدية كبرى  $f(1) = 1$

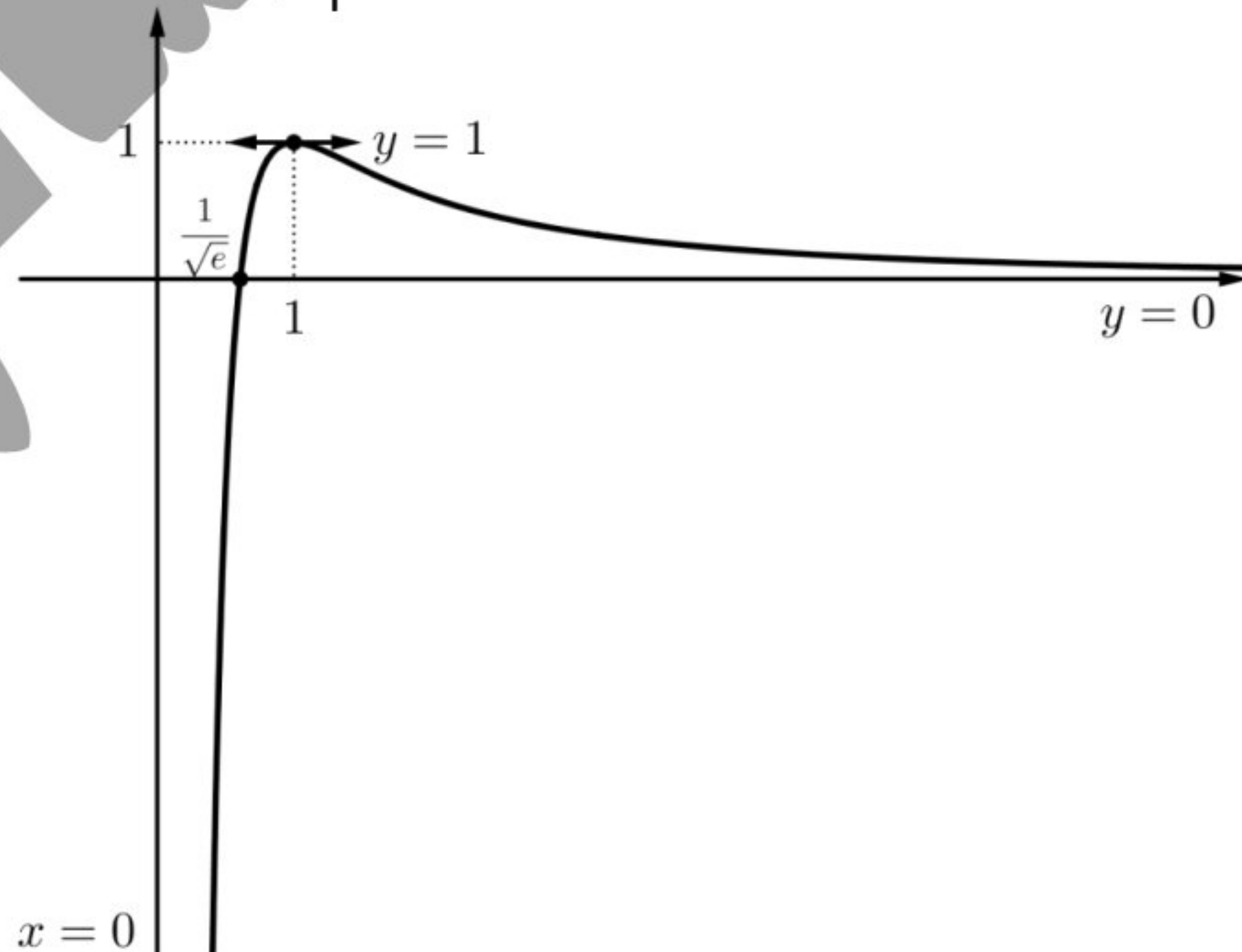
المماس للخط  $C$  في النقطة التي فاصلتها 1 أفقي معادلته  $y = 1$  (2)

$$f(x) = 0 \text{ أي } \frac{1+2\ln x}{x^2} = 0 \text{ أي } 1+2\ln x = 0 \quad (3)$$

$$\ln x = -\frac{1}{2} = \ln e^{-\frac{1}{2}} = \ln \frac{1}{\sqrt{e}}$$

أي أن  $x = \frac{1}{\sqrt{e}}$  ومنه إشارة  $f(x)$

$x$	0	$\frac{1}{\sqrt{e}}$	$+\infty$
$f(x)$		-	0
			+



(4)

$$\text{المعادلة تكافئ } \frac{1+2\ln a}{1+2\ln b} = \left(\frac{a}{b}\right)^2$$

$$\frac{1+2\ln a}{1+2\ln b} = \frac{a^2}{b^2}$$

$$\frac{1+2\ln a}{a^2} = \frac{1+2\ln b}{b^2}$$

$$f(a) = f(b)$$

على المجال  $m \in ]0,1[$  للمعادلة  $f(x) = m$  حلان مختلفان

وبالتالي يوجد عددين  $a$  و  $b$  بحيث  $f(a) = f(b)$

$$f(x) = x + 1 - \ln\left(\frac{x}{x-2}\right)$$

$$\frac{x}{x-2} > 0 \text{ معرف بشرط } f \quad (1)$$

$x$	$-\infty$	$0$	$2$	$+\infty$
$x$	-	0	+	+
$x-2$	-	-	0	+
الكسر	+	0	-	+
المراجعة	محقة			محقة

$$D_f = ]-\infty, 0[ \cup ]2, +\infty[ \text{ وبالتالي}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \text{ و } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty \quad (2)$$

$$+\infty \text{ مقارب شاقولي عند } x=0 \text{ وبالتالي } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$$

$$-\infty \text{ مقارب شاقولي عند } x=2 \text{ وبالتالي } \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = -\infty$$

$$f(x) = x + 1 - \ln x + \ln(x-2)$$

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x-2} = 1 - \frac{x-2}{x(x-2)} + \frac{x}{x(x-2)} = 1 + \frac{2}{x(x-2)} > 0 \text{ التابع متزايد تماماً}$$

$x$	$-\infty$	$0$	$2$	$+\infty$
$f'(x)$	+			+
$f(x)$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$

$$f(x) + f(2-x) = 4 \quad (3)$$

$$f(x) + f(2-x) = x + 1 - \ln\left(\frac{x}{x-2}\right) + 2 - x + 1 - \ln\left(\frac{2-x}{2-x-2}\right) = 4 - \ln\left(\frac{x}{x-2}\right) - \ln\left(\frac{2-x}{-x}\right)$$

$$f(x) + f(2-x) = 4 - \left(\ln\left(\frac{x}{x-2}\right) + \ln\left(\frac{x-2}{x}\right)\right) = 4 - \ln\left(\frac{x}{x-2} \times \frac{x-2}{x}\right) = 4 - \ln 1 = 4$$

قاعدة: تكون النقطة  $(a, b)$  مركز تناظر للخط البياني للتابع  $f$  إذا تحقق:

$$f(x) + f(2a-x) = 2b \text{ و } D_f \text{ من } 2a-x \text{ كان } D_f \text{ من } x$$

$$D_f = ]-\infty, 0[ \cup ]2, +\infty[ \text{ الشرط: أيًا كان } x \text{ من المجال}$$

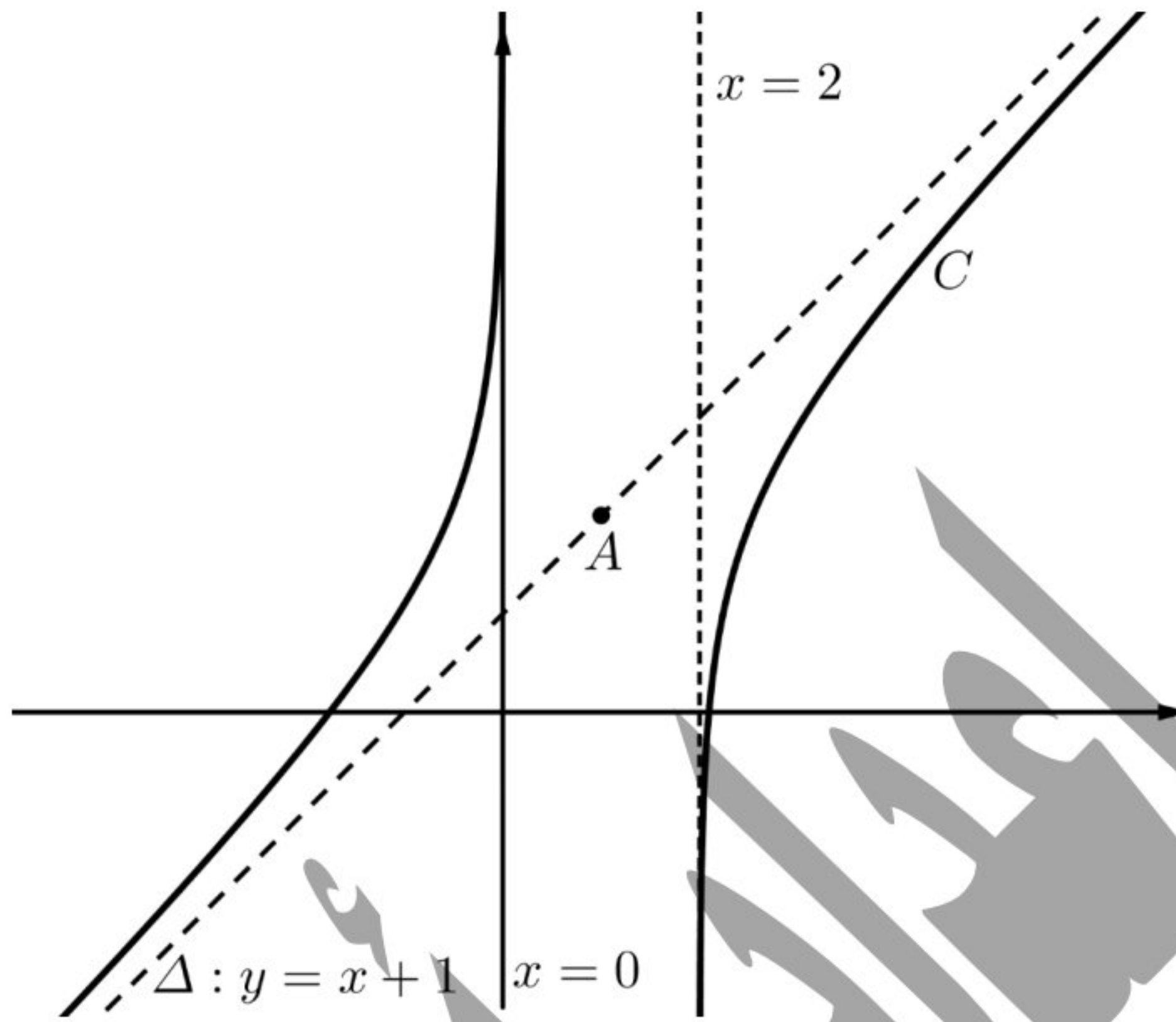
$$D_f = ]-\infty, 0[ \cup ]2, +\infty[ \text{ فإن } -x \text{ من المجال } ]-\infty, -2[ \cup ]0, +\infty[ \text{ وبالتالي } 2-x \text{ من المجال}$$

$$f(x) + f(2-x) = 4 = 2(2) \text{ ووجدنا سابقاً أن}$$

$$\text{أي أن النقطة } A(1, 2) \text{ مركز تناظر للخط البياني } C.$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - y_\Delta) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(-\ln\left(\frac{x}{x-2}\right)\right) = -\ln 1 = 0 \quad (4)$$

وبالتالي المستقيم  $\Delta$  الذي معادلته  $y = x + 1$  مقارب مائل للخط  $C$ .



على المجال  $]-\infty, 0[$  التابع مستمر ومتزايد تماماً و  $m \in f(]-\infty, 0[) = ]-\infty, +\infty[ = \mathbb{R}$  (6)

وبالتالي للمعادلة  $f(x) = m$  حل وحيد في المجال  $]-\infty, 0[$

على المجال  $]2, +\infty[$  التابع مستمر ومتزايد تماماً و  $m \in f(]2, +\infty[) = ]-\infty, +\infty[ = \mathbb{R}$

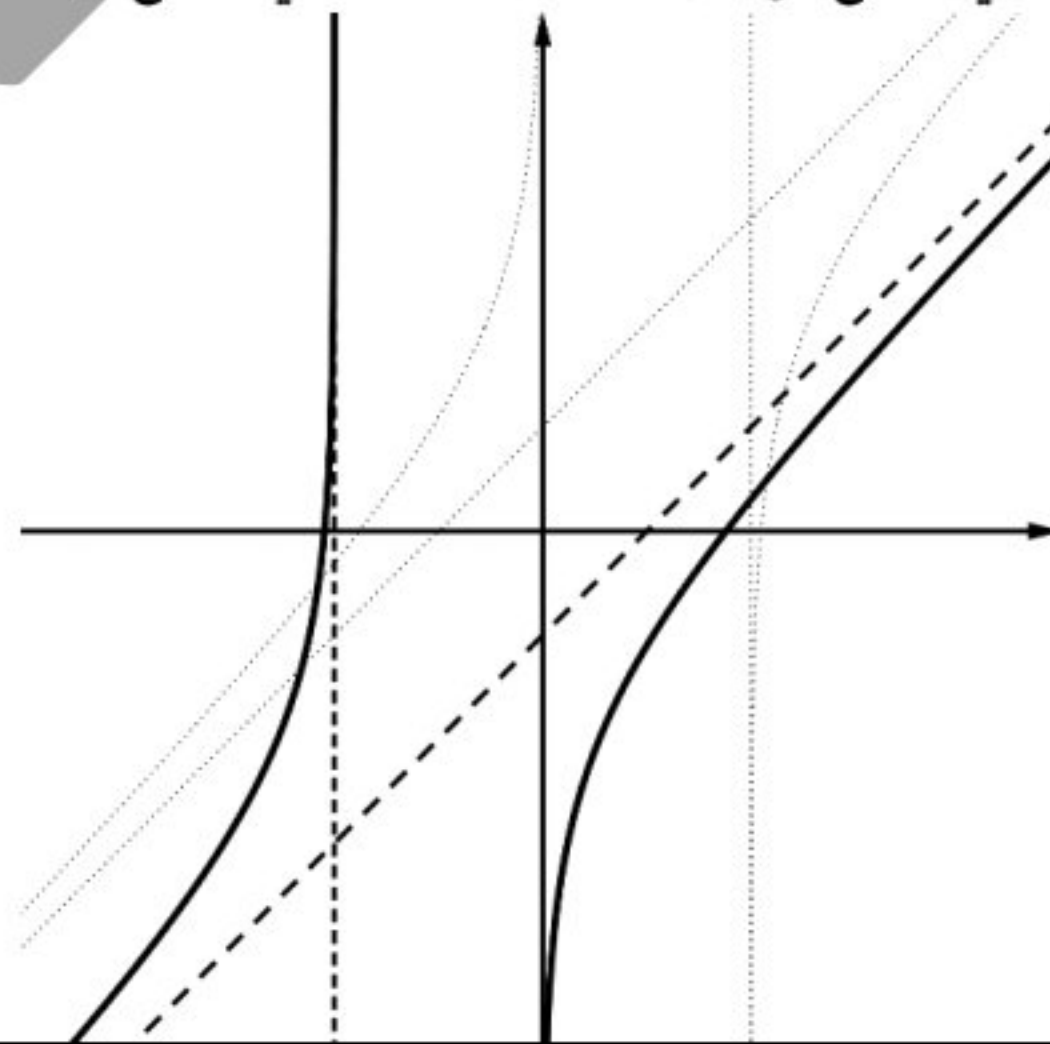
وبالتالي للمعادلة  $f(x) = m$  حل وحيد في المجال  $]2, +\infty[$

وبالتالي للمعادلة  $f(x) = m$  حلين مختلفين أي كان العدد الحقيقي  $m$ .

$$f(-x) = -x + 1 - \ln\left(\frac{-x}{-x-2}\right) = -x + 1 - \ln\left(\frac{x}{x+2}\right) = -x + 1 + \ln\left(\frac{x+2}{x}\right) \quad (7)$$

$$f(-x) = -x + 1 + \ln\left(1 + \frac{2}{x}\right) = -\left(x - 1 - \ln\left(1 + \frac{2}{x}\right)\right) = -g(x)$$

وبالتالي الخط البياني للتابع  $g$  هو نظير الخط البياني للتابع  $f$  بالنسبة للمبدأ



انتهى حل النموذج الرابع

التابع اللوغاريتمي