المدة : ساعة و نصف

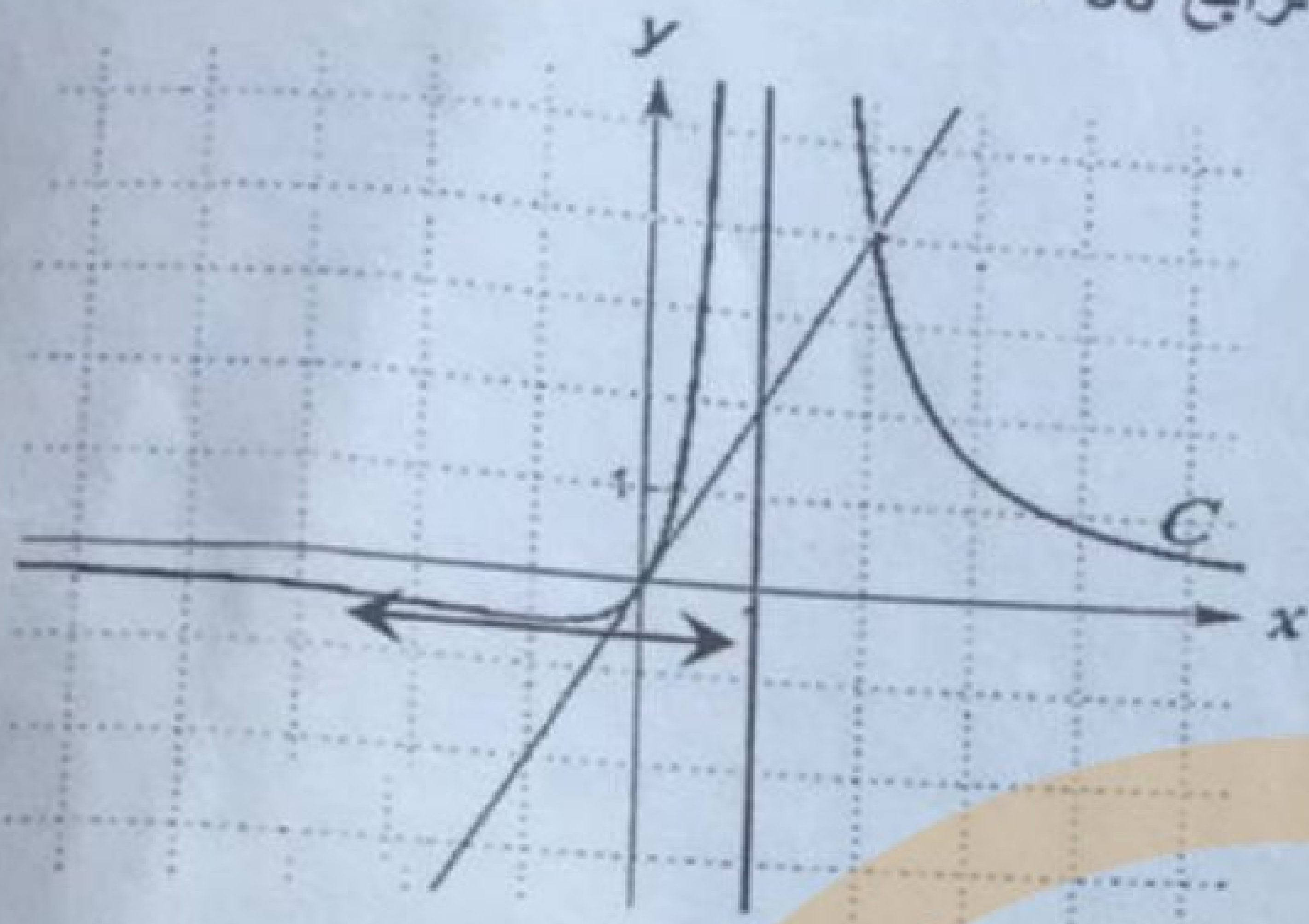
النهايات و الاستمرار و الاشتقاق

الاختبار الثاني

الدرجة العظمى :300

النموذج B

توزيع الدرجات (الأول 40 + الثاني 40 + الثالث 60 + الرابع 60 + الخامس 100)



السؤال الأول : نجد جانباً الخط البياني لتابع f المعرف على $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ و المطلوب :

1) ماعدد حلول المعادلة $f(x)=4$

2) ما قيمة المشتق في النقطة التي فاصلتها (-1)

3) اكتب معادلة المماس لمنحني التابع في نقطة منه فاصلتها الصفر

4) اكتب معادلة كل مقارب شاقولي أو أفقي للخط البياني

السؤال الثاني : ليكن $f(x)=\cos 2x$ و المطلوب :

احسب $f(\frac{\pi}{4})$, $f'(x)$, $f'(\frac{\pi}{4})$ ثم استنتج $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\left(\dfrac{\cos 2x}{2x-\frac{\pi}{2}}\right)$

السؤال الثالث : ① أوجد كلاً من النهايتين : $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\cos x-\cos 3x}{x.\sin x}\right)$ " $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{x^2}{3+\sin\frac{1}{x}}\right)$

② ليكن التابع f المعرف على $\mathbb{R}\setminus\{3\}$ وفق $f(x)=\dfrac{2x+1}{x-3}$ خطه البياني C

بعد حساب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ أعط عددا حقيقيا A يحقق الشرط :إذا كان $x<A$ كان $f(x)\in]1.9 , 2.1[$

السؤال الرابع : ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على R وفق : $f(x)=-x+\sqrt{x^2+8}$ والمطلوب :

1 - أوجد نهاية التابع f عند $+\infty$ وعند $-\infty$ ،واستنتج كل مقارب للخط C يوازي 'xx .

2 - أثبت أن المستقيم Δ الذي معادلته $y=-2x$ مقارب للخط C عند $-\infty$

3- ادرس تغيرات f ونظم جدولاً بها.

السؤال الخامس : ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على المجال $]0 , +\infty[$ وفق : $f(x)=x+\dfrac{2}{\sqrt{x}}-4$

1) ادرس تغيرات التابع f و دل على القيمة الصغرى محلياً للتابع f .

2) أثبت أن المستقيم Δ الذي معادلته : $y=x-4$ مقارب مائل للخط C ،ثم ادرس الوضع النسبي.

3) استنتج أن الخط C يقطع المحور 'xx في نقطتين فاصلة إحداهما x_1 تحقق : $0<x_1<1$ وفاصلة الأخرى x_2 تحقق : $2<x_2<3$

4) اكتب معادلة المماس للخط C في نقطة فاصلتها $x=1$

5) ارسم C ثم ناقش بيانياً و بحسب قيم الوسيط λ عدد حلول المعادلة : $f(x)=\lambda$

السؤال الأول:

الطلب الأول: حلين

الطلب الثاني: $f'(-1) = 0$

الطلب الثالث:

$x = 0 \rightarrow f(0) = 0$

$f'(0) = m$

$(0,0)$

$(2,4)$

$= \frac{4-0}{2-0} = \frac{4}{2} = 2$

$y = f'(0)(x-0) + f(0)$

$y = 2x$

الطلب الرابع:

$x = 1$ شاقولي

$y = 0$ أفقي

«مجموع السؤال الأول» 40

السؤال الثاني:

$f(x) = \cos 2x$

$f(\frac{\pi}{4}) = \cos \frac{\pi}{2} = 0$

f اشتقاقي على R

$f'(x) = -2\sin(2x)$

$f'(\frac{\pi}{4}) = -2\sin(\frac{\pi}{2})$

$= -2(1) = -2$

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \left[\frac{\cos(2x)}{2x - \frac{\pi}{2}}\right]$$

$= \frac{0}{0}$ حالة عدم تعيين

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{f(x) - f(\frac{\pi}{4})}{2(x - \frac{\pi}{4})}$$

حسب تعريف العدد المشتق

$= \frac{1}{2} f'(\frac{\pi}{4})$

$= \frac{1}{2}(-2)$

$= -1$

«مجموع السؤال الثاني» 40

السؤال الثالث: «طريقة أولى»

$$\lim_{x \to 0} \left(\frac{\cos x - \cos 3x}{x \cdot \sin x}\right)$$

$$\lim_{x \to 0} \left[\frac{\cos x - (4\cos^3 x - 3\cos x)}{x \cdot \sin x}\right]$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\cos x - 4\cos^3 x + 3\cos x}{x \sin x}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{4\cos x - 4\cos^3 x}{x \cdot \sin x}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{4\cos x(1 - \cos^2 x)}{x \cdot \sin x}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{4\cos x \cdot \sin^2 x}{x \cdot \sin x}$$

$$\lim_{x \to 0} 4\cos x \frac{\sin x}{x}$$

$= 4(1)(1)$

$= 4$

طريقة ثانية:

$\cos a - \cos b$

$= -2\sin\left(\frac{a+b}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{a-b}{2}\right)$

10 $= \lim\limits_{x\to 0} \frac{-2\sin(2x)\cdot\sin(-x)}{x \cdot \sin x}$

$= \lim\limits_{x\to 0} \frac{2\sin(2x)\cdot\sin(x)}{x\cdot\sin x}$

5 $= \lim\limits_{x\to 0} \left[2\left(2\,\frac{\sin(2x)}{2x}\right)\right]$

5 $= 4(1) = 4$

$\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{x^2}{3+\sin\frac{1}{x}}\right)$

$\frac{0}{3+\sin\infty}$

5 $-1 \leq \sin\frac{1}{x} \leq 1$

$2 \leq 3+\sin\frac{1}{x} \leq 4$

$\frac{1}{2} \geq \frac{1}{3+\sin\frac{1}{x}} \geq \frac{1}{4}$

5 $\frac{x^2}{2} \geq \frac{x^2}{3+\sin\frac{1}{x}} \geq \frac{x^2}{4}$

$\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{x^2}{2}\right) = 0$

5 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{x^2}{4}\right) = 0$

حسب مبرهنة الإحاطة

5 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{x^2}{3+\sin\frac{1}{x}}\right) = 0$

الطلب الثاني:

$f(x) = \frac{2x+1}{x-3}$

$\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = 2$

3 $c = 2$

$f(x) \in \left]\underset{c-r}{1.9}\,,\,\underset{c+r}{2.1}\right[$

3 $r = 0.1$

3 $|f(x) - c| < r$

$\left|\frac{2x+1}{x-3} - 2\right| < 0.1$

$\left|\frac{\cancel{2x}+1\cancel{-2x}+6}{x-3}\right| < 0.1$

3 $\left|\frac{7}{x-3}\right| < \frac{1}{10}$

$\frac{7}{|x-3|} < \frac{1}{10}$

3 $\frac{|x-3|}{7} > 10$

3 $|x-3| > 70$

بما أن x في غاية الصغر

3 $x-3 < -70$

$x < -67$

2 $A = -67$

6 مجموع الثالث

السؤال الرابع:

$f(x) = -x + \sqrt{x^2+8}$

الطلب الأول:

5 $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty + \infty = +\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty + \infty$

حالة عدم تعيين

5 $= \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{(\sqrt{x^2+8}-x)(\sqrt{x^2+8}+x)}{(\sqrt{x^2+8}+x)}$

5 $= \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{x^2+8-x^2}{\sqrt{x^2+8}+x}\right) = 0$

5 $y = 0$ مقارب أفقي عند $+\infty$

الطلب الثاني:

$\Delta : y = -2x$

5 $f(x) - y_\Delta = \sqrt{x^2+8} + x$

$\lim\limits_{x\to-\infty} (f(x) - y_\Delta) = +\infty - \infty$

حالة عدم تعيين

5 $= \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{(\sqrt{x^2+8}+x)(\sqrt{x^2+8}-x)}{(\sqrt{x^2+8}-x)}$

5 $= \lim\limits_{x\to-\infty} \left(\frac{x^2+8-x^2}{\sqrt{x^2+8}-x}\right) = 0$

5 $\Delta = y = -2x$

مقارب مائل في جوار $-\infty$

الطلب الثالث:

f مستمر واشتقاقي على R

5 $f'(x) = -1 + \frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{x^2+8}}$

5 $= \frac{-\sqrt{x^2+8}+x}{\sqrt{x^2+8}} \neq 0 < 0$

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	
$f(x)$	$+\infty$ ↘	0

5 + 0 + 5 =

1

السؤال الخامس:

الطلب الأول:

3 f مستمر واشتقاقي على $]0,+\infty[$

3 $\lim_{x \overset{>}{\to} 0} f(x) = 0+\infty-4 = +\infty$

3 $x=0$ مقارب شاقولي عند $+\infty$ من اليمين

3 $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty+0-4 = +\infty$

$\left(\frac{a}{g}\right)' = \frac{-ag'}{g^2}$

3 $f'(x) = 1 + \frac{0(\sqrt{x}) - \frac{1}{2\sqrt{x}}(2)}{(\sqrt{x})^2} - 0$

$= 1 + \frac{-\frac{1}{\sqrt{x}}}{x} = 1 - \frac{1}{x\sqrt{x}}$

3 $= \frac{x\sqrt{x}-1}{x\sqrt{x}}$

3 $f'(x) = 0 \Rightarrow x\sqrt{x} - 1 = 0$

$x\sqrt{x} = 1$

3 $x^3 = 1 \Rightarrow x = 1$

3 $f(1) = 1+2-4 = -1$

x	0		α		1		β		$+\infty$
3 $f'(x)$	||		$-$		0		$+$		
3 $f(x)$	||	$+\infty$	↘		-1		↗		$+\infty$

5 $f(1) = -1$ قيمة حدية صغرى

الطلب الثاني:

3 $f(x) - y_\Delta = \frac{2}{\sqrt{x}}$

3 $\lim_{x\to+\infty}(f(x) - y_\Delta) = 0$

3 Δ مقارب مائل عند $+\infty$

الوضع النسبي:

3 $\frac{2}{\sqrt{x}} > 0 \Leftarrow$ C فوق Δ

الطلب الثالث:

التقاطع مع ox عندما $f(x)=0$

من الجدول

3 f مستمر ومتناقص تماماً على $]0,1]$

3 $0 \in f(]0,1]) = [-1,+\infty[$

للمعادلة $f(x)=0$ حل وحيد

$x_1 \in]0,1[$ ... $0 < x_1 < 1$

f مستمر ومتزايد تماماً على $]1,+\infty[$

3 $0 \in f(]1,+\infty[) =]-1,+\infty[$

للمعادلة $f(x)=0$ حل وحيد

$x \in]1,+\infty[$

3 إذاً للمعادلة $f(x)=0$

3 حلان في $]0,+\infty[$

$f(2) = 2 + \frac{2}{\sqrt{2}} - 4 = \frac{2}{\sqrt{2}} - 2 = \sqrt{2} - 2 < 0$

5 $f(3) = 3 + \frac{2}{\sqrt{3}} - 4 = -1 + \frac{2}{\sqrt{3}} > 0$

$f(2) \cdot f(3) < 0 \Rightarrow 2 < x_2 < 3$

الطلب الرابع:

5 + 5 $x = 1 \rightarrow f(1) = -1$

$\rightarrow f'(1) = 0$

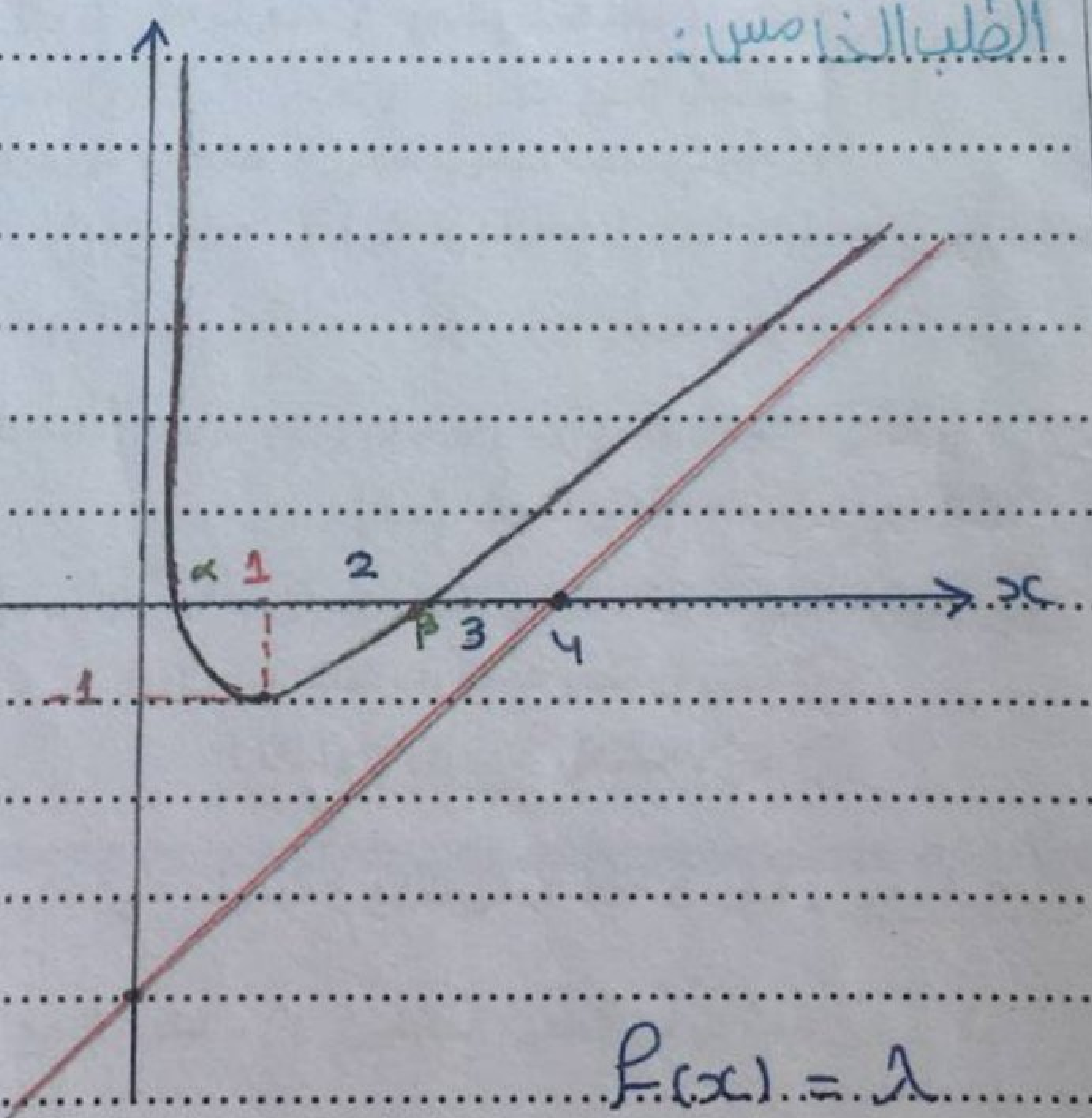
$y = -1$

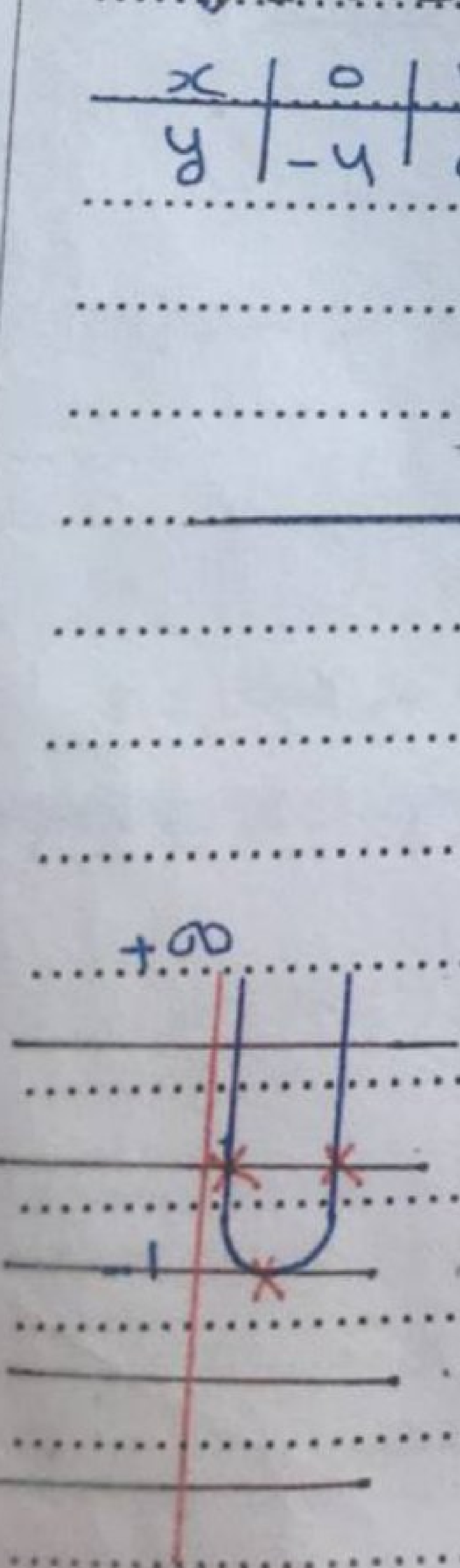
الطلب الخامس:

$y = x - 4$

ال 5 + 5

x	0	4
y	-4	0





$f(x) = \lambda$

$\lambda \in]-\infty, -1[$ ليس للمعادلة حلول

$\lambda = -1$ للمعادلة حل وحيد

$\lambda \in]-1, +\infty[$ للمعادلة حلان