المدة : ساعة و نصف

النهايات و الاستمرار و الاشتقاق

الدرجة العظمى :300

النموذج C

<u>توزيع الدرجات</u> (الأول 40 + الثاني 50 + الثالث 50 + الرابع 60 + الخامس 100)

<u>السؤال الأول</u> : نجد جانبا جدول تغيرات التابع f المعرف على $]5,+\infty[\cup]1,5[\cup[0,1[$ و المطلوب :

x	0		1		3		5		$+\infty$
$f'(x)$	$\|\|$	$-$	$\|\|$	$+$	$3\|\|-2$	$-$	$\|\|$	$+$	
$f(x)$	2	$\searrow$	$-\infty\ \|\|\ -\infty$	$\nearrow$	3	$\searrow$	$-\infty\ \|\|\ -\infty$	$\nearrow$	4

① اكتب معادلة كل مستقيم مقارب شاقولي أو أفقي للخط البياني C_f

② هل $f(0)$ قيمة حدية ؟ علل اجابتك

③ ما عدد حلول المعادلة $f(x)=3$ ؟

④ اكتب معادلة نصف مماس لمنحني التابع في نقطة منه فاصلتها $x=3$ من اليسار

<u>السؤال الثاني</u> : ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $\mathbb{R}$ وفق : $f(x)=\sqrt{x^2+4x+6}$ و المطلوب :

① أوجد نهاية التابع عند $+\infty$ و $-\infty$

② a) اكتب x^2+4x+6 بالصيغة القانونية

b) استنتج معادلة المقارب المائل Δ للخط C في جوار $+\infty$ ثم ادرس الوضع النسبي لـ C مع Δ

<u>السؤال الثالث</u> : ليكن التابع f المعرف $\mathbb{R}$ على وفق $f(x)=\sin x$

① أثبت أنه أيا كانت $n\in\mathbb{N}^*$ فإن : $f^{(n)}(x)=\sin\left(n.\frac{\pi}{2}+x\right)$

② قارن كلاً من $f(-x)$ و $f(x+2\pi)$ مع $f(x)$ ، استنتج أنه تكفي دراسة f على المجال $[0,\pi]$

③ ادرس تغيرات f على المجال $[0,\pi]$

<u>السؤال الرابع</u> : ليكن C الخط البياني للتابع f وفق : $f(x)=x\sqrt{2x-x^2}$

① تحقق أن مجموعة تعريف التابع هي : $[0,2]$

② هل f اشتقاقي عند (2) ؟ ولماذا ؟

③ احسب $f'(x)$ على المجال $]0,2[$

<u>السؤال الخامس</u> : ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ وفق : $f(x)=a\ x+b+\dfrac{1}{x^2}$

أولاً : عين قيمة كل من العددين الحقيقيين a , b ليكون للتابع f قيمة حدية هي (2) عند x=1

ثانياً : من أجل : $(a=2\ ,\ b=-1)$ التابع يكتب : $f(x)=2x-1+\dfrac{1}{x^2}$

1) أثبت أن المستقيم Δ الذي معادلته : $y = 2x - 1$ مقارب مائل للخط C عند $+\infty$ وعند $-\infty$

2) ادرس تغيرات التابع f و دل على القيمة الصغرى محلياً للتابع f واستنتج كل مقارب // yy' .

3) استنتج أن للمعادلة : $f(x)=0$ جذر وحيد احصره بين عددين صحيحين متتاليين

4) اوجد معادلة المماس للخط C في نقطة منه فاصلتها (-1)

5) ارسم كل مقارب وجدته ثم ارسم C

سلم تصحيح: (النهايات والاستمرار والاشتقاق) نموذج (C) الصفحة (1)

* السؤال الأول *

5 $\boxed{1}$ $x = 1$
5 $x = 5$
5 $y = 4$

2 $\boxed{2}$ نعم $0 \in D_1 =]-1,1[$
2 $\forall x \in D_1 \cap D = [0,1[$
2
$f(x) \leq 2$
2 $f(x) \leq f(0)$
2
قيمة حدية كبرى $f(0) = 2$

5 $\boxed{3}$ ملاحظة

3 $\boxed{4}$ $x = 3 \to f(3) = 3$
3 $f'(3) = 3$

2 $y = f'(3)(x-3) + f(3)$
$y = 3(x-3) + 3$

"انتهى السؤال الأول"

$y = 3x - 6$

"السؤال الثاني" $f(x) = \sqrt{x^2+4x+6}$ $(\mathbb{R})$

5 ① $\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

5 ② $x^2+4x+6 = x^2+4x-4-4+6$

5 $= (x+2)^2+2$

5 ⓑ $f(x) = \sqrt{(x+2)^2+2}$

5 $\Delta : y = x+2$ ($\Delta : y = |x+2|$ في جوار $(+\infty)$)

3 $f(x) - y_\Delta = \sqrt{(x+2)^2+2} - (x+2)$

3 $\lim_{x \to +\infty} f(x) - y_\Delta = \lim \dfrac{\cancel{(x+2)^2}+2-\cancel{(x+2)^2}}{\sqrt{(x+2)^2+2}+(x+2)}$

$= \lim_{x \to +\infty} \dfrac{2}{\sqrt{(x+2)^2+2}+(x+2)} = 0$

$\Delta : y = x+2$ مقارب مائل عند $(+\infty)$

(الوضع النسبي حسب إشارة الفرق)

$f(x) - y_\Delta = \sqrt{(x+2)^2+2} - (x+2) \neq 0$

$= \dfrac{2}{\sqrt{(x+2)^2+2}+(x+2)} \neq 0$ >0

* انتهى السؤال الثاني *

(C فوق Δ عند $+\infty$)

سلم تصحيح (الاستمرار والاشتقاق) نموذج (C)

* السؤال الثالث *

$f(x) = \sin x$

$E(n): f^{(n)}(x) = \sin(n\frac{\pi}{2} + x)$

١. نثبت صحة الخاصة من أجل $n=1$

$f_1 = f^{(1)}(x) = f'(x) = \cos x$

$f_2 = \sin(\frac{\pi}{2} + x) = \cos x$] $f_1 = f$ (5)

٢. نفرض أن الخاصة محققة من أجل n

$$\boxed{f^{(n)}(x) = \sin(n\frac{\pi}{2} + x)}$$

٣. نثبت صحة الخاصة من أجل $n+1$

$f^{(n+1)}(x) = \sin((n+1)\frac{\pi}{2} + x)$

$f_1 = f^{(n+1)}(x) = [f^{(n)}(x)]' = [\sin(n\frac{\pi}{2} + x$ (3)

(3) $= \cos(n\frac{\pi}{2} + x) = \sin(\frac{\pi}{2} + n\frac{\pi}{2}$ (2)

(2) $= \cos((1+n)\frac{\pi}{2} + x) = f$

القضية صحيحة بالتدريج

$\forall x \in N^*$

(2) $x \in R \Rightarrow -x \in R$

(5) $f(-x) = \sin(-x) = -\sin x = -f(x)$

f تابع فردي

$x \in R \Rightarrow x + 2\pi \in R$

(5) $f(x+2\pi) = \sin(x+2\pi) = \sin x = f(x)$

f تابع دوري $(T = 2\pi)$

(5) بما أن f دوري وفردي يكفي دراسة f على المجال طوله نصف دور ضمن D

$[0, \frac{T}{2}] \cap D = [0, \frac{2\pi}{2}] \cap R = [0, \pi]$

(3) f معرف على R فهو مستمر واشتقاقي على $[0, \pi]$

(5) $f(0) = \sin(0) = 0$

$f(\pi) = \sin\pi = 0$

(3) $f'(x) = \cos x$

(5) $f'(x) = 0 \Rightarrow \cos x = 0$

$x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow f(\frac{\pi}{2}) = \sin\frac{\pi}{2} = 1$

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π
$f'(x)$		+	0	−	
$f(x)$	0	↗	1	↘	0

"انتهى السؤال الثالث"

* السؤال الرابع *

1

$f(x) = x\sqrt{2x - x^2}$

(3) معرف بشرط f $\quad 2x - x^2 \geq 0$

$x(2-x) \geq 0$

(2) $\underset{0 \quad\quad 2}{- \;\; + \;\; -}$ $\quad D = [0,2]$

2

(3) $f(2) = 0 \quad , \quad g(x) = \frac{f(x) - f(2)}{x-2} = \frac{x\sqrt{2x-x^2}}{x-2}$

(5)+(3) $\quad x-2 \quad - \; < \; 2 \; > \; +$

(3) $\lim_{x \overset{<}{\to} 2} g(x) = \lim_{x \overset{<}{\to} 2} \frac{x\sqrt{2x-x^2}}{-\sqrt{(x-2)^2}}$

(3)+(3) $\lim_{x \overset{<}{\to} 2} -\sqrt{\frac{-x\cancel{(x-2)}}{(x-2)^{\cancel{2}}}} = \lim_{x \overset{<}{\to} 2} \left[-\sqrt{\frac{-x}{x-2}}\right]$

(3) $= -\sqrt{\frac{-2}{0^-}} = -\sqrt{+\infty} = -\infty$

(5) f غير قابل للاشتقاق عند $(x=2)$

3

(3) f اشتقاقي على $]0,2[$

(5)+(5) $f'(x) = 1 \cdot \sqrt{2x-x^2} + \frac{2-2x}{2\sqrt{2x-x^2}} \cdot x$

(5) $= \sqrt{2x-x^2} + \frac{(1-x)x}{\sqrt{2x-x^2}} = \frac{2x - x^2 + x - x^2}{\sqrt{2x-x^2}}$

(5) $= \frac{3x - 2x^2}{\sqrt{2x-x^2}}$

"انتهى السؤال الرابع"

* السؤال الخامس *

أولاً: $f(x) = ax + b + \frac{1}{x^2}$ $R[1]$

$f(1) = 2 \Rightarrow a + b + 1 = 2$

$a + b = +1$ ①

$f'(x) = a + 0 + \frac{-2x}{x^4} = a - \frac{2}{x^3}$

$f'(1) = 0 \Rightarrow a - \frac{2}{1} = 0 \Rightarrow \boxed{a = 2}$

$2 + b = 1 \Rightarrow \boxed{b = -1}$

ثانياً: $f(x) = 2x - 1 + \frac{1}{x^2}$

$\Delta : y = 2x - 1$

$f(x) - y_\Delta = \frac{1}{x^2} > 0$

$\lim_{x \to -\infty} (f(x) - y_\Delta) = 0$ و $\lim_{x \to +\infty} (f(x) - y_\Delta) = 0$ ⟹ $\Delta : y = 2x - 1$ مقارب مائل لـ C عند $(\mp\infty)$

$\frac{1}{x^2} > 0$

(C فوق Δ)

---

f مستمر واشتقاقي على $]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

$\lim_{x \overset{<}{\to} 0} f(x) = +\infty$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

$\lim_{x \overset{>}{\to} 0} f(x) = +\infty$

$x = 0$ مقارب شاقولي

خ صواب $(+\infty)$

$f'(x) = 2 + \frac{-2x}{x^4} = \frac{2x^4 - 2x}{x^4}$

$f'(x) = 0 \Rightarrow 2x^4 - 2x = 0$

$2x(x^3 - 1) = 0$

إما $x = 0 \notin D$

أو $x^3 - 1 \Rightarrow f(1) = 2$

$\boxed{x = 1}$

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$ ↗		$+\infty$ ‖ $+\infty$	↘	2	↗	$+\infty$

قيمة صغرى محلية $f(1) = 2$

سلم تصحيح: (النهايات والاستمرار والاشتقاق) نموذج (ج)

"تتمة السؤال الخامس"

(3) f مستمر ومتزايد تماما على المجال $]-\infty,0[$

$0 \in f(]-\infty,0[) =]-\infty,+\infty[$

للمعادلة $f(x)=0$ حل وحيد $\alpha \in]-\infty,0[$

$f(-1) = -2 \cancel{-1} \cancel{+1} = -2 < 0$

$0 \in f(]-1,0[) =]-2,+\infty[$

$-1 < \alpha < 0$

من الجدول $0 \notin f(]0,+\infty[) = [2,+\infty[$

ليس للمعادلة $f(x)=0$ اي حل في $]0,+\infty[$

اذن للمعادلة $f(x)=0$ حل وحيد $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

يحقق $1 < \alpha < 0$

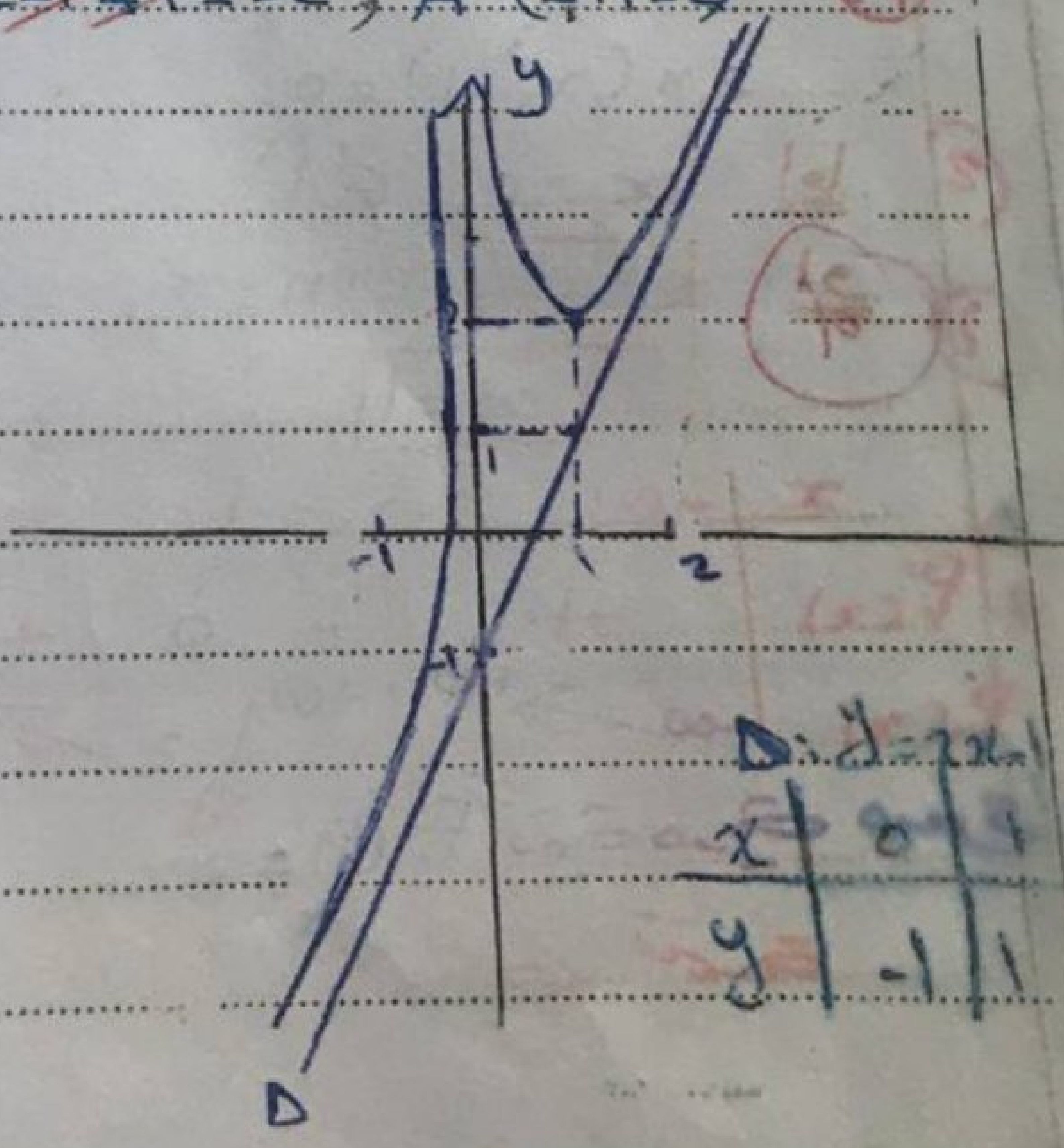
(4) $x = -1 \Rightarrow f(-1) = -2 \cancel{-1} \cancel{+1} = -2$, $A(-1,-2)$

$m = f'(-1) = 4$

$y = f'(-1)(x+1) + f(-1)$

$y = 4(x+1) - 2 \Rightarrow$

$\boxed{y = 4x+2}$



"انتهى السؤال الخامس"