دورة 2017 الأولى:

السؤال الثاني:

حل المعادلة $9^x + 3^{x+1} - 4 = 0$ في $\mathbb{R}$

الحل:

$$(3^2)^x + 3^x . 3^1 - 4 = 0$$

نعلم أن $(a^n)^m = a^{n.m}$

$$3^{2x} + 3 . 3^x - 4 = 0$$
$$(3^x + 4)(3^x - 1) = 0$$

إما $3^x = -4 < 0$ مرفوض

أو $3^x = 1$

$$\Rightarrow e^{x.\ln 3} = e^0$$
$$x . \ln 3 = 0 \Rightarrow x = 0$$

المسألة الثانية:

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $]0, +\infty[$ وفق: $f(x) = \frac{\ln x}{x^2}$

① احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ واستنتج معادلة المقارب الافقي والشاقولي.

② ادرس تغيرات التابع f ، ونظم جدولاً بها، ثم دلّ على القيمة الحدية محلياً.

③ جد معادلة المماس Δ في النقطة A من الخط C التي فاصلتها $x = 1$.

④ ارسم كل مقارب وجدته، وارسم المماس Δ ثم ارسم C.

⑤ احسب S مساحة السطح المحصور بين C والمحور xx' والمستقيم $x = e$.

الحل:

❶

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \frac{\ln(0^+)}{0} = -\infty$$

$x = 0$ مقارب شاقولي للخط C، ويكون C على يمين المقارب.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\ln(x)}{x} . \frac{1}{x}\right)$$
$$= 0 \times 0 = 0$$

$y = 0$ مقارب أفقي للخط C في جوار $+\infty$

❷ f معرف ومستمر واشتقاقي على $]0, +\infty[$

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x} . x^2 - 2x . \ln(x)}{x^4}$$
$$f'(x) = \frac{x - 2x . \ln(x)}{x^4}$$
$$f'(x) = \frac{1 - 2\ln(x)}{x^3}$$
$$f'(x) = 0$$
$$1 - 2\ln(x) = 0 \Rightarrow 1 = 2\ln(x)$$
$$\Rightarrow \ln(x) = \frac{1}{2}$$

$\Rightarrow x = e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e} \in$ مجموعة التعريف

$$f\left(e^{\frac{1}{2}}\right) = \frac{\ln\left(e^{\frac{1}{2}}\right)}{\left(e^{\frac{1}{2}}\right)^2} = \frac{\frac{1}{2}\ln(e)}{e^{\frac{2}{2}}} = \frac{1}{2e}$$

x	0		$\sqrt{e}$		$+\infty$
f'	‖	$+$	0	$-$	
f	‖ $-\infty$	$\nearrow$	$\frac{1}{2e}$	$\searrow$	0

$f(\sqrt{e}) = \frac{1}{2e}$ قيمة كبرى محلياً

③ معادلة المماس تحتاج:

$$f'(1) = m$$
$$f(1) = y_0$$
$$f(1) = 0 = y_0$$
$$f'(1) = 1 = m$$
$$y - y_0 = m(x - x_0)$$
$$\Delta : y = x - 1$$

④ الرسم:

مقاربات + معادلة المماس

$x = 0$ مقارب شاقولي

$y = 0$ مقارب أفقي

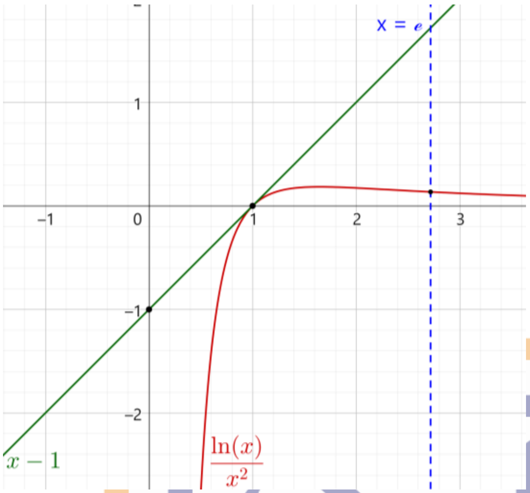
$$x = 0 \Rightarrow y = -1 \Rightarrow (0, -1)$$
$$y = 0 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow (1, 0)$$

نقاط الجدول:

$$(0, -\infty)\ ,\left(\sqrt{e}, \frac{1}{2e}\right)\ \ (+\infty, 0)$$

نقاط مساعدة:

$$y = 0 \Rightarrow f(x) = 0$$
$$\ln(x) = 0 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow (1, 0)$$



⑤ السطح ملزوق بـ xx' من فوق

$$S = \int_1^e f(x)\, dx$$
$$S = \int \frac{1}{x^2} . \ln x \ dx$$

<u>***تجزئة***</u>

$$u = \ln(x) \Rightarrow u' = \frac{1}{x}$$
$$v' = \frac{1}{x^2} \Rightarrow v = -\frac{1}{x}$$
$$S = \left[-\frac{1}{x} . \ln(x)\right]_1^e - \int_1^e \frac{-1}{x} . \frac{1}{x}\, dx$$
$$S = \left[-\frac{1}{x} . \ln(x)\right]_1^e + \int_1^e \frac{1}{x^2}\, dx$$
$$S = \left[-\frac{1}{x} . \ln(x)\right]_1^e + \left[-\frac{1}{x}\right]_1^e$$
$$= -\frac{1}{e} - 0 - \frac{1}{e} + 1$$
$$S = -\frac{2}{e} + 1 = \frac{-2 + e}{e} > 0$$

الرياضيات - الجزء الأول

دورة 2017 الثانية:

السؤال الثالث:

حل المعادلة التفاضلية الآتية:

$2y' + 3y = 0$ والخط البياني C للحل يمر بالنقطة $A(\ln(4)\,,1)$.

الحل:

$$2y' + 3y = 0$$

نعزل y'

$$y' = -\frac{3}{2}y$$

حلها من الشكل $f(x) = k.e^{ax}$

$$f(x) = k.e^{-\frac{3}{2}x}$$

نعوض إحداثيات $A(\ln(4)\,,1)$ في $f(x)$

$$1 = k.e^{-\frac{3}{2}\ln(4)}$$

$$1 = k.e^{-\frac{3}{2}.2\ln(2)}$$

$$1 = k.e^{-3\ln(2)}$$

$$1 = k.e^{3\ln\left(\frac{1}{2}\right)}$$

$$1 = k.e^{\ln\left(\frac{1}{8}\right)}$$

نعلم أن $e^{\ln(g(x))} = g(x)$

$$1 = \frac{1}{8}k \Rightarrow k = 8$$

$$f(x) = 8.e^{-\frac{3}{2}x}$$

المسألة الأولى:

ليكن C هو الخط البياني للتابع f المعرف على $I =]0,+\infty[$ وفق:

$f(x) = x + x(\ln x)^2$ وليكن $g(x) = (\ln(x)+1)^2$ والمطلوب:

① أوجد نهاية التابع f عند الصفر وعند $+\infty$

② أثبت أن $f'(x) = g(x)$

③ حل المعادلة $g(x) = 0$

④ نظم جدول بتغيرات f

⑤ اكتب معادلة المماس Δ للخط C في نقطة منه فاصلتها $x = \frac{1}{e}$ وارسم المماس Δ وارسم C.

الحل:

❶ $f(x) = x + x(\ln x)^2$

$$f(x) = x + \left(\sqrt{x}\right)^2\left[\ln\left(\sqrt{x}\right)^2\right]^2$$

$$f(x) = x + \left[\sqrt{x}.\ln\left(\sqrt{x}\right)^2\right]^2$$

$$f(x) = x + \left[2\sqrt{x}.\ln\left(\sqrt{x}\right)\right]^2$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0$$

لأن $\lim_{x\to 0}\sqrt{x}.\ln\sqrt{x} = 0$

❷ $f'(x) = 1 + (\ln(x))^2 + 2\ln(x).\frac{1}{x}.x$

$$f'(x) = 1 + (\ln(x))^2 + 2\ln(x)$$

$$f'(x) = \ln^2(x) + 2\ln(x) + 1$$

جذر إشارة جذر للتربيع

$$f'(x) = (\ln(x) + 1)^2 = g(x)$$

③ $g(x) = 0$

$$(\ln(x) + 1)^2 = 0$$
$$\ln(x) = -1 \Rightarrow x = e^{-1}$$
$$x = \frac{1}{e}$$

④ f معرف ومستمر واشتقاقي على المجال $]0, +\infty[$

$$f\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{2}{e}$$

x	0		$\frac{1}{e}$		$+\infty$
f'	‖	$+$	0	$+$	
f	‖ 0	$\nearrow$	$\frac{2}{e}$	$\nearrow$	$+\infty$

⑤ $f'\left(\frac{1}{e}\right) = 0 = m$

ومنه معادلة Δ: $y = \frac{2}{e}$

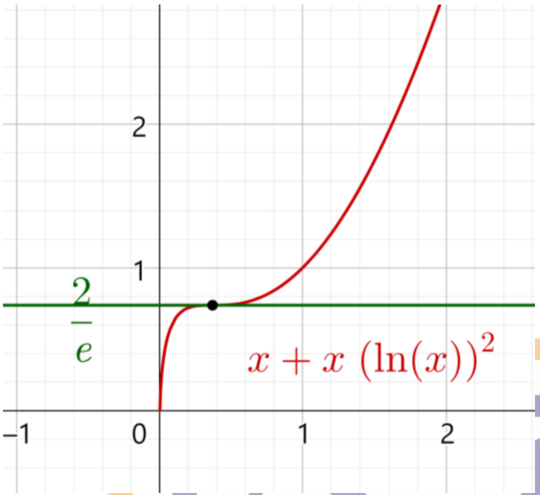
الرسم:

مقاربات + معادلات المماس

$y = \frac{2}{e}$ مماس أفقي

نقاط الجدول:

$$(0,0) \quad \left(\frac{1}{e}, \frac{2}{e}\right) \quad (+\infty\,, +\infty)$$



دورة 2018 الأولى:

المسألة الأولى:

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $\mathbb{R}$ وفق $f(x) = \ln(e^{-x} + 1)$

① جد نهاية f عند $-\infty$ وعند $+\infty$ ، هل يقبل الخط C مقاربات غير مائلة؟

② أثبت أن $f(x) = -x + \ln(e^x + 1)$

③ أثبت أن المستقيم $y = -x$ مقارب مائل للخط C في جوار $-\infty$.

④ ادرس تغيرات التابع f ونظم جدولاً بها.

⑤ ارسم المقاربات وارسم الخط البياني C.

الحل:

① $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$$

$y = 0$ مقارب أفقي للخط C في جوار $+\infty$

$$f(x) = \ln[e^{-x}(1 + e^x)]$$

نعلم أن $\ln(a.b) = \ln(a) + \ln(b)$

② $f(x) = \ln(e^{-x}) + \ln(1 + e^x)$

$$f(x) = -x + \ln(1 + e^x)$$

④ يجب أن نبرهن:

$$\lim_{x\to-\infty}(f(x)-y_{\Delta})=0$$
$$\lim_{x\to-\infty}(-x+\ln(1+e^{x})+x)$$
$$\lim_{x\to-\infty}(\ln(1+e^{x}))=\ln(1)=0$$

بما أن نهاية الفرق تساوي الصفر، فإن $y=-x$ مقارب مائل في جوار $-\infty$

④ f معرف ومستمر واشتقاقي على $]-\infty,+\infty[$

$$f'(x)=\frac{-e^{-x}}{e^{-x}+1}<0$$

f متناقص تماماً

x	0		$+\infty$
f'	$\Vert$	$-$	
f	$\Vert$ $+\infty$	$\searrow$	0

⑤ الرسم:

مقاربات + معادلات مماس

$y=0$ مقارب أفقي في جوار $+\infty$

$y=-x$ مقارب نائل في جوار $-\infty$

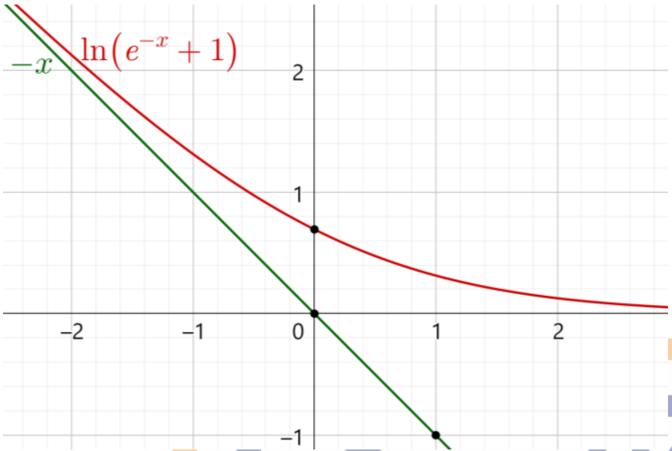
$$x=0\Rightarrow y=0\Rightarrow(0,0)$$
$$x=1\Rightarrow y=-1\Rightarrow(1,-1)$$

نقاط الجدول:

$(-\infty,+\infty)$ $(+\infty,0)$

نقاط مساعدة:

$$x=0\in\mathbb{R}\Rightarrow f(0)=\ln(2)$$
$$\Rightarrow(0,\ln(2))$$



دورة 2018 الثانية:

التمرين الثالث:

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $\mathbb{R}$ وفق: $f(x)=e^{x}-1$ والمطلوب:

① جد مجموعة حلول المتراجحة $f(x)\leq 0$.

② احسب $\int_0^{\ln 2} f(x)\,dx$

الحل:

❶ $e^{x}-1\leq 0$
$$e^{x}\leq 1\Rightarrow x\leq 0\Rightarrow x\in]-\infty,0]$$

❷ $$\int_0^{\ln(2)}(e^{x}-1)\,dx=[e^{x}-x]_0^{\ln(2)}$$
$$=2-\ln(2)-1=1-\ln(2)$$

المسألة الثانية:

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $I=]0,+\infty[$ وفق

$$f(x)=x^2-\ln x$$

والمطلوب:

① جد نهاية التابع f عند أطراف مجموعة تعريفه.

② ادرس تغيرات التابع f ونظم جدولاً بها.

③ اكتب معادلة المماس T للخط البياني C في نقطة منه فاصلتها $x=1$.

④ في معلم متجانس ، ارسم المماس T والخط البياني C.

⑤ احسب مساحة السطح المحصور بالخط البياني C ومحور الفواصل والمستقيمين $x=e\,,x=1$

⑥ نعرف المتتالية $(u_n)_{n\geq 1}$ حيث $u_n=n^2-\ln(n)$ أثبت أن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ متزايدة.

الحل:

❶ $D_f=]0,+\infty[$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=0-(-\infty)=+\infty$$

$x=0$ مقارب شاقولي للخط C و C يمين المقارب.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty-\infty$$ عدم تعيين

$$\lim_{x\to+\infty}\left[x^2\left(1-\frac{\ln(x)}{x^2}\right)\right]$$
$$=+\infty(1-0)=+\infty$$

❷ f معرف ومستمر واشتقاقي على $]0,+\infty[$

$$f'(x)=0$$

$$2x^2-1=0\Rightarrow x^2=\frac{1}{2}$$

إما $x=-\frac{1}{\sqrt2}$ مرفوض أو $x=\frac{1}{\sqrt2}$ مقبول

$$f\left(\frac{1}{\sqrt2}\right)=\frac12-\ln\left(\frac{1}{\sqrt2}\right)=\frac12+\ln\sqrt2$$
$$=\frac12+\frac12\ln 2$$

x	0		$\frac{1}{\sqrt2}$		$+\infty$
f'	‖	$-$	0	$+$	
f	‖ $+\infty$	↘	$\frac12+\frac12\ln 2$	↗	$+\infty$

❸ $f(1)=1\,,f'(1)=1$

$T: y-y_0=m(x-x_0)$

$T: y-1=1(x-1)$

$T: y=x$

❹ الرسم:

مقاربات:

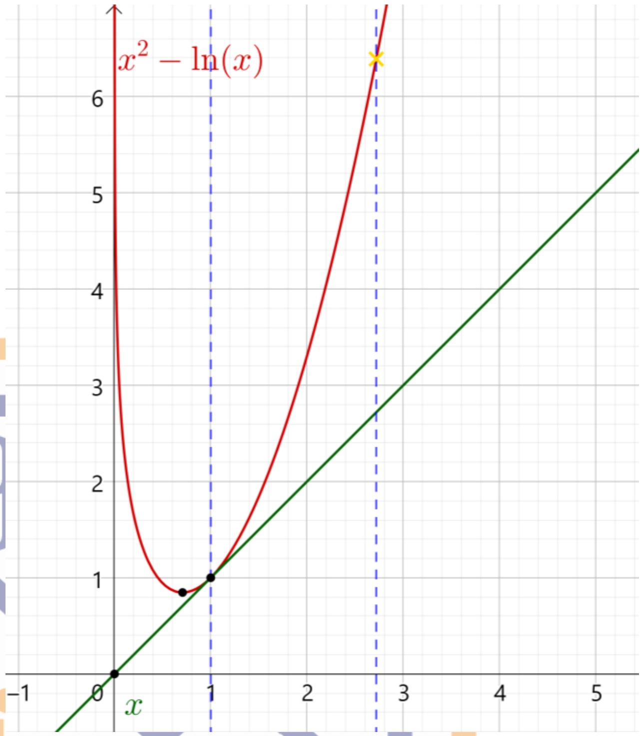
$T: y=x$

$x=0\Rightarrow y=0\Rightarrow (0,0)$

$x=1\Rightarrow y=1\Rightarrow (1,1)$

نقاط الجدول

$(0,+\infty)$ $\left(\frac12+\frac12\ln 2\right)$ $(+\infty,+\infty)$



⑤

$$S=\int_1^e f(x)\,dx$$

$$=\int_1^e \left(x^2-\ln(x)\right)dx$$

$$=\int_1^e x^2\,dx-\int_1^e \ln(x)\,dx$$

$$=I-J$$

$$I=\int_1^e x^2dx=\left[\frac{x^3}{3}\right]_1^e=\frac{e^3-1}{3}$$

$$J=\int_1^e \ln(x)\,dx$$

تجزئة

$$u=\ln x\Rightarrow u'=\frac{1}{x}$$

$$v'=1\Rightarrow v=x$$

$$J=[x\ln(x)]_1^e-\int_1^e dx=e-[x]_1^e x$$

$$J=e-e+1=1$$

$$S=I-J=\frac{e^3-1}{3}-\frac{3}{3}$$

$$S=\frac{e^3-4}{3}$$

⑥ من خلال جدول التغيرات نجد $f(x)$ متزايد تماماً على المجال $\left]\frac{1}{\sqrt{2}},+\infty\right[$ فالتابع $f(x)$ متزايد تماماً فالمتتالية u_n المعرفة بالعلاقة $n\geq 1$ متتالية متزايدة تماماً.

دورة 2019 الأولى:

التمرين الثالث:

ليكن التابع f المعرف على $I=]e^{-1},+\infty[$ وفق العلاقة $f(x)=\frac{2+\ln x}{1+\ln x}$ والمطلوب:

① جد $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ ثم أعطِ عدداً حقيقياً A يحقق الشرط: إذا كان $x>A$ كان $f(x)$ في المجال $]0.9\,,1.1[$.

② احسب $\lim_{x\to+\infty} f\left(f(x)\right)$

الحل:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\frac{\infty}{\infty}$$ عدم تعيين

$$f(x)=\frac{\ln(x)\left[\frac{2}{\ln(x)}+1\right]}{\ln(x)\left[\frac{1}{\ln(x)}+1\right]}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=1$$

تعيين A عدداً حقيقياً

$$c=\lim_{x\to+\infty} f(x)=1$$

$$r=\frac{b-a}{2}=\frac{1.1-0.9}{2}=0.1=\frac{1}{10}$$

$$|f(x)-1| < \frac{1}{10}$$

$$\left|\frac{2+\ln(x)}{1+\ln(x)} - 1\right| < \frac{1}{10}$$

$$\left|\frac{2+\ln(x)-1-\ln(x)}{1+\ln(x)}\right| < \frac{1}{10}$$

$$\left|\frac{1}{1+\ln(x)}\right| < \frac{1}{10}$$

$$1+\ln(x) > 10$$

$$\ln(x) > 9 \Rightarrow x > e^9$$

$$A = e^9$$

حساب $\lim\limits_{x\to+\infty} f\big(f(x)\big)$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1$$

نفرض $f(x) = X$

$$\lim_{x\to\infty} f\big(f(x)\big) = \lim_{x\to 1} f(x) = 2$$

المسألة الثانية:

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $\mathbb{R}$ وفق: $f(x) = \frac{4}{1+e^x}$ والمطلوب:

① جد نهاية التابع f عند أطراف مجموعة تعريفه واكتب معادلة كل مقارب وجدته.

② ادرس تغييرات التابع f ونظم جدولاً بها.

③ جد معادلة المماس T للخط البياني C عند النقطة $(0,2)$ وادرس الوضع النسبي لـ C, T.

④ في معلم متجانس، ارسم كل مقارب وجدته ثم ارسم المماس T والخط البياني C.

⑤ ليكن C' الخط البياني للتابع g المعرف على $\mathbb{R}$ وفق $g(x) = \frac{4e^x}{1+e^x}$، استنتج الخط البياني C' للتابع g.

الحل:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \frac{4}{1+e^{-x}} = 4$$

$y = 4$ مقارب أفقي للخط C في جوار $-\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \frac{4}{\infty} = 0$$

$y = 0$ مقارب أفقي للخط C في جوار $+\infty$

f معرف ومستمر واشتقاقي على $]-\infty,+\infty[$

$$f'(x) = \frac{-4e^x}{(1+e^x)^2} < 0$$

f متناقص تماماً

x	$-\infty$		$+\infty$
f'		$-$	
f	4	$\searrow$	0

$f(0) = 2 - y_0$
$f'(0) = -1$
$T: y - y_0 = m(x - x_0)$
$y - 2 = -1(x - 0)$
$T: y = -x + 2$

دراسة الوضع النسبي:

$$g(x) = f(x) - y_T = \frac{4}{1+e^x} + x - 2$$

$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = -\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$$

$$g'(x) = \frac{(e^x-1)^2}{(1+e^x)^2} \geq 0$$

$$g'(x) = 0 \Rightarrow e^x - 1 = 0 \Rightarrow e^x = 1$$
$$\Rightarrow x = 0$$

$$g(0) = 0$$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
g'		$+$	0	$+$	
g	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$
الوضع النسبي	C يقع تحت T			C يقع فوق T	

الرسم:

المقاربات:

$y = 4 , y = 0$ مقاربين أفقيين

$y = -x + 2$

$y = 0 \Rightarrow x = 2 \Rightarrow (2,0)$

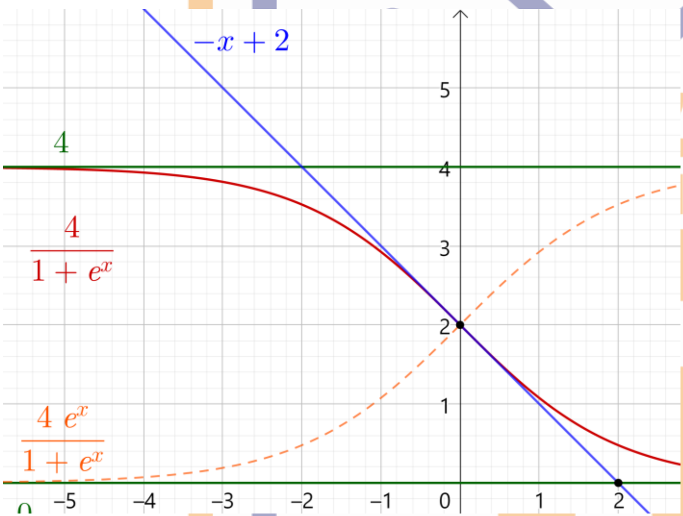
نقاط الجدول:

$(-\infty, 4)$, $(+\infty, 0)$

نقاط مساعدة:

$x = 0 \Rightarrow f(0) = 2$

نقطة المماس $(0,2)$



$$g(x) = \frac{4e^x}{1+e^x} = \frac{4e^x}{e^x(e^{-x}+1)}$$

$$g(x) = \frac{4}{1+e^{-x}} = f(-x)$$

C' نظير C بالنسبة لمحور التراتيب.

دورة 2019 الثانية:

التمرين الأول:

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $]0,+\infty[$ وفق $f(x)=ax+b-\frac{\ln x}{x}$

والمطلوب:

① عين العددين الحقيقيين b,a إذا علمت أن المماس للخط C في النقطة $A(1,0)$ يوازي المستقيم d الذي معادلته: $y=3x$.

② من أجل $a=4$, $b=-4$ أثبت أن المستقيم Δ الذي معادلته $y=4x-4$ مقارب مائل للخط C في جوار $+\infty$ ثم ادرس الوضع النسبي بين C و Δ.

الحل:

$f(1)=0$

$a+b=0$

$f'(x)=a-\frac{1-\ln(x)}{x^2}$

الميل هو أمثال x بعد عزل y

$f'(1)=3$

$a-1=3$

$a=4$, $b=-4$

$f(x)=4x-4-\frac{\ln(x)}{x}$

$\lim_{x\to+\infty}(f(x)-y_\Delta)=0$

$\lim_{x\to+\infty}\left(4x-4-\frac{\ln(x)}{x}-4x+4\right)$

$\lim_{x\to+\infty}\left(-\frac{\ln(x)}{x}\right)=0$

بما ان نهاية الفرق تساوي الصفر فإن $y=4x-4$ مقارب مائل في جوار $+\infty$

دراسة الوضع النسبي:

$f(x)-y_\Delta=-\frac{\ln(x)}{x}$

$-\ln(x)=0\Rightarrow x=1$

x	0		1		$+\infty$
$-\ln x$	‖	$-$	0	$+$	
x	‖		$+$		
$\frac{-\ln x}{x}$	‖	$-$	0	$+$	
الوضع النسبي	‖	تحت C		فوق C	

المسألة الثانية:

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $\mathbb{R}$ وفق $f(x)=\frac{2x}{e^x}$ والمطلوب:

① جد نهايات التابع f عند أطراف مجموعة تعريفه واكتب معادلة المقارب الأفقي.

② ادرس تغيرات التابع f ونظم جدولاً بها.

③ في معلم متجانس، ارسم الخط C.

④ احسب مساحة السطح المحصور بين الخط C ومحوري الإحداثيات والمستقيم $x=1$.

⑤ استنتج رسم الخط C_1 للتابع g المعرف وفق $g(x)=2xe^x$.

⑥ أثبت أن $f(x)$ هو حل للمعادلة التفاضلية $y'+y=2e^{-x}$

الحل:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$$

$y=0$ مقارب أفقي للخط C في جوار $+\infty$

f معرف ومستمر واشتقاقي على $]-\infty,+\infty[$

$$f'(x)=\frac{2e^x-2xe^x}{e^{2x}}$$

$$f'(x)=\frac{2-2x}{e^x}$$

$$f'(x)=0$$

$$2-2x=0\Rightarrow x=1$$

$$f(1)=\frac{2}{e}$$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
f'		$+$	0	$-$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{2}{e}$	$\searrow$	
		0			

الرسم:

مقاربات:

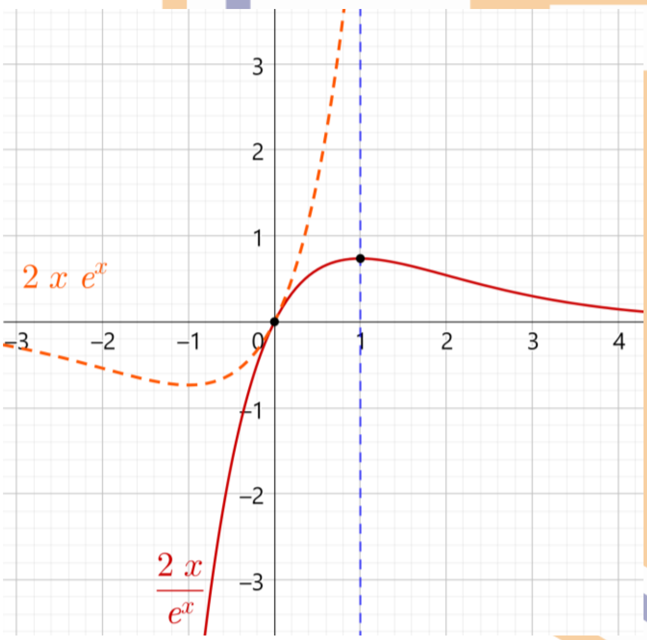
$y=0$ مقارب أفقي

نقاط الجدول:

$$(-\infty,-\infty)\ \left(1,\frac{2}{e}\right)\ (+\infty,0)$$

نقاط مساعدة:

$$x=0\Rightarrow f(0)=0\Rightarrow(0,0)$$



$$S=\int_0^1 f(x)\,dx$$

$$S=\int_0^1 2x.e^{-x}\,dx$$

تحتاج تجزئة

$u = 2x \Rightarrow u' = 2$

$v' = e^{-x} \Rightarrow v = -e^{-x}$

$S = [-2x.e^{-x}]_0^1 + \int_0^1 2e^{-x}\,dx$

$S = [-2x.e^{-x}]_0^1 - [2e^{-x}]_0^1$

$S = \dfrac{2e-4}{e}$

$f(x) = 2x.e^{-x}$

$\Rightarrow f(-x) = -2xe^{x}$

$\Rightarrow= f(-x) = 2x.e^{x}$

ومنه $g(x) = -f(-x)$

C' نظير C بالنسبة لمبدأ الإحداثيات

$y = f(x) = \dfrac{2x}{e^x}$

$y' = f'(x) = \dfrac{2-2x}{e^x}$

$y' + y = \dfrac{2x}{e^x} + \dfrac{2-2x}{e^x} = \dfrac{2}{e^x}$

$y + y' = 2e^{-x}$

دورة 2020 الأولى:

السؤال الرابع:

أثبت أن $\ln(x+1) < \sqrt{x+1}$

أياً كان $x > -1$

الحل:

$\ln(x+1) - \sqrt{x+1} < 0$

نفرض $f(x) = \ln(x+1) - \sqrt{x+1}$

$f(x) < 0$

ندرس اطراد f على المجال $]-1,+\infty[$

$f'(x) = \dfrac{2-\sqrt{x+1}}{2(x+1)}$

$f'(x) = 0$

$2 - \sqrt{x+1} = 0$

$2 = \sqrt{(x+1)}$

$4 = x + 1 \Rightarrow x = 1$

$f(3) = \ln(4) - 2 < 0$

x	-1	3	$+\infty$
f'	$+$	0	$-$
f	$\nearrow$	$\ln(4)-2$	$\searrow$

من جدول التغيرات نجد

$f(x) \le \ln(4) - 2 < 0$

$f(x) < 0$

منه

$\ln(x+1) - \sqrt{x+1} < 0$

محققة $x > -1$

الرياضيات - الجزء الأول

المسألة الثانية:

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على المجال $]-2,2[$ وفق $f(x)=\ln\left(\frac{x+2}{2-x}\right)$

والمطلوب:

① أثبت أن f تابع فردي.

② ادرس تغيرات التابع f على المجال $[0,2[$.

③ اكتب معادلة المماس T عند النقطة التي فاصلتها $x=0$ ، واحسب القيمة التقريبية للتابع f عند النقطة التي فاصلتها $x=0.1$

④ في معلم متجانس ارسم الخط البياني C.

⑤ استنتج رسم الخط البياني C' للتابع $g(x)=\ln(2-x)-\ln(x+2)$ على المجال $]-2,2[$

الحل:

$\forall x\in]-2,2[\Rightarrow -x\in]-2,2[$

الشرط الأول محقق

$$f(-x)=\ln\left(\frac{-x+2}{2+x}\right)$$

$$\ln\left(\frac{a}{b}\right)=-\ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

$$=-\ln\left(\frac{x+2}{2-x}\right)$$

$$=-f(x)$$

f تابع فردي

f معرف ومستمر واشتقاقي على $[0,2[$

$$f(0)=0$$

$$\lim_{x\to2^-}f(x)=+\infty$$

$x=2$ مقارب شاقولي للخط C و C على يسار المقارب.

$$f'(x)=\frac{4}{4-x^2}>0$$

متزايد تماماً

معادلة المماس:

$$f(0)=0=y_0$$
$$f'(0)=1=m$$
$$y-y_0=m(x-x_0)$$
$$T:y=x$$

القيمة التقريبية:

$$f(a+h)\simeq f(a)+f'(a).h$$
$$f(0.1)\simeq f(0)+(0.1)(1)$$
$$=0+0.1=0.1$$

الرسم:

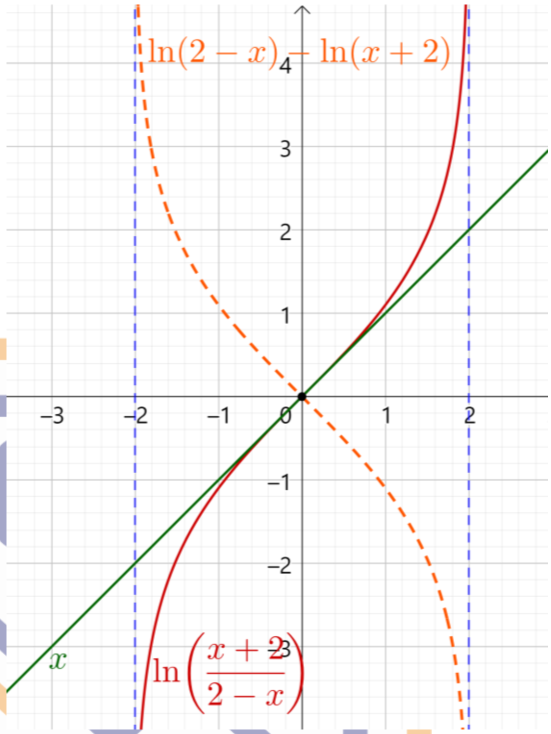
مقاربات:

$x=2$ مقارب شاقولي

$y=x$ معادلة المماس

نقاط الجدول:

$(0,0)$ $(2,+\infty)$



$g(x) = \ln(2-x) - \ln(x+2)$
$f(x) = \ln(x+2) - \ln(2-x)$
$g(x) = -f(x)$

C' نظير C بالنسبة لمحور الفواصل

دورة 2020 الثانية:

المسألة الثانية:

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $I =]0,+\infty[$ وفق

$$f(x) = \frac{1}{x} + \frac{\ln x}{x}$$

والمطلوب:

① احسب نهايات التابع f عند أطراف مجموعة تعريفه واكتب معادلة كل مقارب أفقي أو شاقولي.

② ادرس تغيرات التابع f ونظم جدولاً بها.

③ أثبت أن للمعادلة $f(x) = 0$ حلاً وحيداً في المجال $]\frac{1}{3},\frac{1}{2}[$

④ في معلم متجانس ارسم الخط C.

⑤ استنتج رسم C_1 الخط البياني للتابع:

$$g(x) = \frac{1-x+\ln x}{x}$$

الحل:

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = -\frac{\infty}{0} = -\infty$$

$x = 0$ مقارب شاقولي للخط C و يكون C على يمين المقارب.

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = 0$$

$$\lim_{x\to +\infty}\left(\frac{\ln(x)}{x}\right) = 0$$ حسب المبرهنة

$y = 0$ مقارب أفقي للخط C في جوار $+\infty$

f معرف ومستمر واشتقاقي على $]0,+\infty[$

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2} + \frac{1-\ln(x)}{x^2}$$
$$f'(x) = -\frac{\ln(x)}{x^2}$$
$$f'(x) = 0$$
$$-\ln(x) = 0 \Rightarrow \ln(x) \Rightarrow x = 1$$
$$f(1) = 1$$

x	0		1		$+\infty$
f'		$+$	0	$-$	
f	$-\infty$	↗	1	↘	0

f معرف ومستمر ومتزايد على المجال $]0,1[$

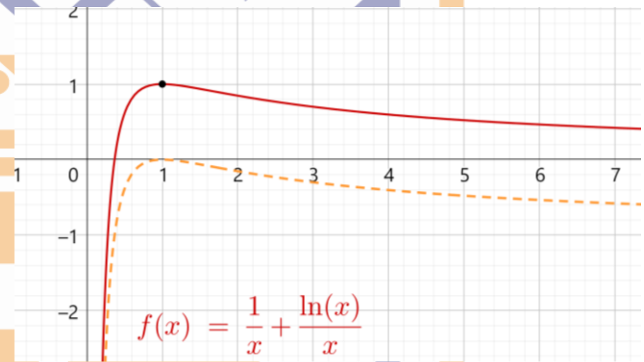
فهو متزايد تماماً على $]\frac{1}{3},\frac{1}{2}[$

$$f\left(\frac{1}{3}\right) = 3 + \frac{\ln\left(\frac{1}{3}\right)}{\frac{1}{3}} = 3 - 3\ln(3) < 0$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = 2 - 2\ln(2) > 0$$

$$f\left(\frac{1}{3}\right).f\left(\frac{1}{2}\right) < 0$$

بالتالي $f(x) = 0$ لها حل وحيد على المجال $\left]\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right[$



$$g(x) = \frac{1}{x} + \frac{\ln(x)}{x} - 1 = f(x) - 1$$

C' ينتج عن C وفق انسحاب الشعاع $\vec{u}(0, -1)$

دورة 2021 الأولى:

التمرين الثالث:

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $I =]0, +\infty[$ وفق

$$f(x) = x - 4 + \ln\left(\frac{x}{x+1}\right)$$

① أثبت أن f تابع متزايد تماماً على I ، واستنتج $f(I)$

② أثبت أن المستقيم d الذي معادلته $y = x - 4$ مقارب مائل للخط C في جوار $+\infty$.

③ ادرس الوضع النسبي بين الخط البياني C والمستقيم d.

الحل:

$$f(x) = x - 4 + \ln(x) - \ln(x+2)$$

$$f'(x) = 1 + \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}$$

$$f'(x) = 1 + \frac{1}{x(x+1)} > 0$$

ومنه f متزايد تماماً على I

$$\lim_{x\to 0} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$$

ومنه

$$f(]0, +\infty[) =]-\infty, +\infty[$$

$$\lim_{x\to +\infty} (f(x) - y_{\Delta}) = 0$$

$$\lim_{x\to +\infty} \left(x - 4 + \ln\left(\frac{x}{x-4}\right) - (x-4)\right)$$

$$\lim_{x\to +\infty} \left(\ln\left(\frac{x}{x-4}\right)\right) = \ln(1) = 0$$

بما أن نهاية الفرق تساوي الصفر فإن $y = x - 4$ مقارب في جوار $+\infty$

دراسة الوضع النسبي:

$$\ln\left(\frac{x}{x+1}\right) < 0$$

لأن $x < x + 1$

المسألة الثانية:

ليكن C الخط البياني للتابع f العرف على $\mathbb{R}$ وفق $f(x)=\frac{(x+1)^2}{e^x}$ والمطلوب:

① احسب نهايات التابع عند أطراف مجموعة تعريفه واكتب معادلة المستقيم المقارب الأفقي.

② أثبت أن $f'(x)=(1-x^2)e^{-x}$.

③ ادرس تغيرات التابع f ونظم جدولاً بها ودلّ على القيم الحدية مبيناً نوعها.

④ ارسم C في معلم متجانس.

⑤ استنتج رسم الخط البياني C_1 للتابع g المعرف وفق: $g(x)=(x-1)^2e^x$.

⑥ جد مجموعة تعريف التابع $h(x)=\ln\big(f(x)\big)$

الحل:

$$f(x)=(x^2+2x+1)e^{-x}$$
$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$$
$$f(x)=\frac{x^2}{e^x}+\frac{2x}{e^x}+\frac{1}{e^x}$$
$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$$

$y=0$ مقارب أفقي للخط C في جوار $+\infty$

$$f(x)=(x^2+2x=1)e^{-x}$$
$$f'(x)=(2x+2)e^{-x}-e^{-x}(x^2+2x+1)$$
$$f'(x)=e^{-x}(1-x^2)$$

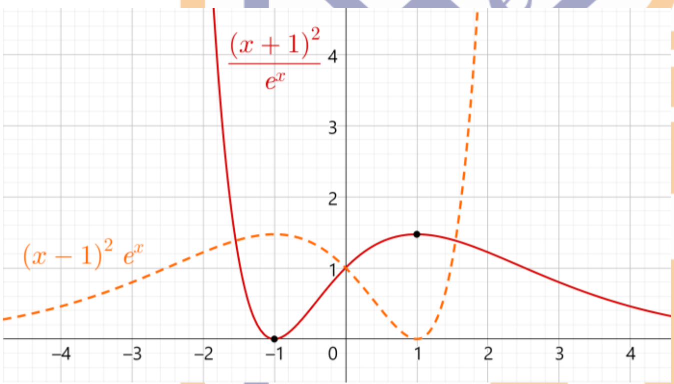
f معرف ومستمر واشتقاقي على $]-\infty,+\infty[$

$$f'(x)=0 \;,e^{-x}>0$$
$$1-x^2=0$$
$$x^2=1$$
$$x=\pm 1$$
$$f(1)=\frac{4}{e}$$
$$f(-1)=0$$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
f'		$-$	0	$+$	0	$-$	
f	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$\frac{4}{e}$	$\searrow$	0

$f(-1)=0$ قيمة حدية صغرى

$f(1)=\frac{4}{e}$ قيمة حدية كبرى



$$g(x)=(x-1)^2e^x=(-x+1)e^x$$
$$=(-x+1)^2e^x=f(-x)$$
$$g(x)=f(-x)$$

وبالتالي C' هو نظير C بالنسبة لمحور التراتيب.

من خلال جدول تغيرات $f(x)$ نلاحظ أن $f(x)>0$ أياً كانت $x\in\mathbb{R}\backslash\{-1\}$

ومنه:

$$h(x)=\ln\big(f(x)\big)$$

معرف على $\mathbb{R}\backslash\{-1\}$

دورة 2021 الثانية:

التمرين الثالث:

ليكن التابع f المعرف على $\mathbb{R}$ وفق

$$f(x) = (ax + b)e^{-x}$$

المطلوب:

① احسب قيمة كل من b, a إذا علمت أن $f(-1) = e$ قيمة حدية للتابع.

② لتكن المعادلة التفاضلية $y' + y = \lambda e^{-x}$، عين قيمة λ إذا علمت أن $f(x) = (x+2)e^{-x}$ حلاً لها.

الحل:

لدينا $f(-1) = e$ قيمة حدية

$$x_0 = -1 \,, y_0 = e \,, m = 0$$

لأنها قيمة حدية

$$f(-1) = e \,, f'(-1) = 0$$
$$-a + b = 1 \; \dots (1)$$
$$f'(x) = ae^{-x} - (ax+b)e^{-x}$$
$$f'(x) = e^{-x}(a - ax - b)$$
$$f'(-1) = 0$$
$$2a - b = 0 \dots (2)$$

بجمع (1) و (2):

$$a = 1 \,, b = 2$$
$$f(x) = (x+2)e^{-x}$$

$$f'(x) + f(x) = \lambda e^{-x}$$
$$e^{-x}(-1 - x) + (x+2)e^{-x}$$
$$= e^{-x}(-1 - x + x + 2) = e^{-x}$$

$$\Rightarrow \lambda = 1$$

المسألة الثانية:

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $I =]0, +\infty[$ وفق

$$f(x) = e^{-x}(1 + \ln x)$$

والمطلوب:

① ادرس تغيرات التابع g ونظم جدولاً بها.

② بين أن للمعادلة $g(x) = 0$ حلاً وحيداً α ثم تحقق أن $\alpha = 1$.

③ جد نهايات التابع f عند أطراف مجموعة تعريفه.

④ أثبت أن $f'(x) = \frac{g(x)}{e^x}$

⑤ مستفيداً من تغيرات التابع g ادرس تغيرات التابع f ونظم جدولاً بها.

⑤ في معلم متجانس ارسم الخط C_f.

الحل:

$$\lim_{x\to 0} g(x) = \frac{1}{0^+} - (-\infty) = +\infty$$

$x = 0$ مقارب شاقولي للخط C و يكون C على يمين المقارب

$$\lim_{x\to +\infty} g(x) = 0 - 1 - (+\infty) = -\infty$$

$$g'(x) = -\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} = \frac{-1-x}{x^2} < 0$$

x	0		1		$+\infty$
g'		$-$	$-$	$-$	
g	$+\infty$	↘	0	↘	0

g معرف ومستمر ومتناقص تماماً على المجال $]0,+\infty[$

$g(\,]0,+\infty[\,) =]-\infty,+\infty[$

$0 \in]-\infty,+\infty[$

$g(x) = 0$ حل وحيد هو $x = 1$

$\lim_{x\to 0^+} f(x) = 1(1-\infty) = -\infty$

$\lim_{x\to +\infty} f(x) = 0(\infty)$ عدم تعيين

نغير شكل التابع

$$f(x) = e^{-x} + \frac{\ln(x)}{e^x}$$
$$= e^{-x} + \ln(x)\,.\,e^{-x}$$

نضرب بـ x ونقسم على x

$$f(x) = e^{-x} + \left(\frac{\ln(x)}{x} \times \frac{x^x}{e}\right)$$

$\lim_{x\to +\infty} f(x) = 0 + (0\times 0) = 0$

$y = 0$ مقارب أفقي للخط C في جوار $+\infty$

المشتق:

$$f'(x) = e^{-x}(1+\ln(x)) + \left(\frac{1}{x}e^{-x}\right)$$
$$f'(x) = e^{-x}\left(\frac{1}{x} - 1 - \ln(x)\right)$$
$$f'(x) = e^{-x}.\,g(x)$$
$$f'(x) = \frac{g(x)}{e^x}$$

إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$

باعتبار $\forall x \in \mathbb{R} \;\; e^x > 0$

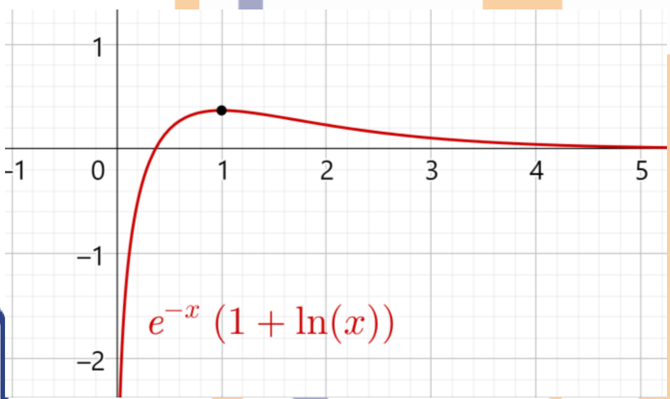
$f'(x) > 0$ عندما $g(x) > 0$
عندما $x \in]0,1[$

$f'(x) < 0$ عندما $g(x) < 0$
عندما $x \in]1,+\infty[$

$f'(x) = 0$ عندما $g(x) = 0$
عندما $x = 1$

ومنه $f(1) = \frac{1}{e}$

x	0		1		$+\infty$
f'	‖	$+$	0	$-$	
f	‖ $-\infty$	$\nearrow$	$\frac{1}{e}$	$\searrow$	0



الرياضيات ـ الجزء الاول

دورة 2022 الأولى:

التمرين الثاني:

ليكن f تابعاً معرفاً على $[0,+\infty[$ وفق:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{x-\ln x} & ; \quad x>0 \\ 0 & ; \quad x=0\end{cases}$$

المطلوب:

① أثبت أن f مستمر عند الصفر.

② ادرس قابلية اشتقاق التابع عند الصفر وفسر النتيجة التي حصلت عليها هندسياً.

③ بين أن الخط البياني C للتابع f يقبل مقارباً أفقياً عند $+\infty$ جد معادلته.

④ اكتب معادلة المماس للخط C في نقطة منه فاصلتها 1 واستعمل التقريب التآلفي المحلي لحساب قيمة تقريبية للعدد $f(1.1)$

الحل:

حتى يكون f مستمر عند الصفر يجب أن نبرهن:

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=f(0)$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=0$$

$$f(0)=0$$

$$0=0$$

f مستمر عند الصفر

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{x}{x(x-\ln(x))}$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x-x.\ln(x)}=0$$

f قابل للاشتقاق عند الصفر

حيث $f'(0)=0$

C يقبل مماساً أفقياً في النقطة $(0,0)$

معادلته $y=0$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x\left(1-\dfrac{\ln(x)}{x}\right)}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=1$$

$y=1$ مقارب أفقي في جوار $+\infty$

$$f(1)=1$$

$$f'(x)=\frac{-\ln(x)+1}{(x-\ln(x))^2}$$

$$f'(1)=1$$

$$T: y=x$$

نعوض في معادلة المماس $f(1.1)\simeq 1.1$

المسألة الثانية:

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $\mathbb{R}$ وفق: $f(x) = e^{-2x} + 2x - 2$

المطلوب:

① احسب نهايات التابع f عند أطراف مجموعة تعريفه.

② بين أن المستقيم Δ الذي معادلته $y = 2x - 2$ مقارب مائل للخط C عند $+\infty$ وادرس الوضع النسبي للخط C, Δ

③ ادرس تغيرات التابع f ونظم جدولاً بها ، ثم بين أن للمعادلة $f(x) = 0$ جذرين في $\mathbb{R}$ أحدهما ينتمي إلى المجال $[-1, 0]$.

④ ارسم C, Δ ثم احسب مساحة السطح المحصور بين محور التراتيب و C و Δ والمستقيم $x = 1$.

⑤ استنتج الخط البياني C' للتابع g المعرف على $\mathbb{R}$ وفق: $g(x) = -e^{2x} + 2x + 2$

الحل:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)$$
$$= \lim_{x\to-\infty} \left(e^{-2x}(1 + 2x.e^{2x}) - 2\right)$$
$$= +\infty$$
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$
$$\lim_{x\to+\infty} (f(x) - y_\Delta) = 0$$
$$\lim_{x\to+\infty} \left(e^{-2x} + 2x - 2 - (2x - 2)\right)$$
$$= 0$$

بما أن نهاية الفرق تساوي الصفر

فإن $y = 2x - 2$ مقارب مائل في جوار $+\infty$

دراسة الوضع النسبي:

$$f(x) - y_\Delta = e^{-2x} > 0$$

C يقع فوق Δ

f معرف ومستمر واشتقاقي على $]-\infty, +\infty[$

$$f'(x) = -2e^{-2x} + 2$$
$$f'(x) = 0$$
$$-2e^{-2x} + 2 = 0$$
$$e^{-2x} = 1 \Rightarrow x = 0$$
$$f(0) = -1$$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
f'		$-$	0	$+$	
f	$+\infty$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

f معرف ومستمر ومتناقص على المجال $]-\infty, 0[$

$$f(\,]-\infty, 0[\,) =]1, +\infty[$$
$$0 \in]1, +\infty[$$

يوجد حل وحيد للمعادلة $f(x) = 0$ في المجال $]-\infty, 0[$

f معرف ومستمر ومتزايد تماماً على المجال $[0, +\infty[$

$$f(\,[0, +\infty[\,) = [-1, +\infty[$$
$$0 \in [-1\,, +\infty[$$

وبالتالي $f(x) = 0$ لها حلان مختلفان في $\mathbb{R}$

$$f(0) = -1 < 0$$
$$f(-1) = e^2 - 4 > 0$$
$$f(0).f(-1) < 0$$

الرياضيات ـ الجزء الاول

وبالتالي أحد حلول المعادلة $f(x)=0$ يقع ضمن $]-1,0[$

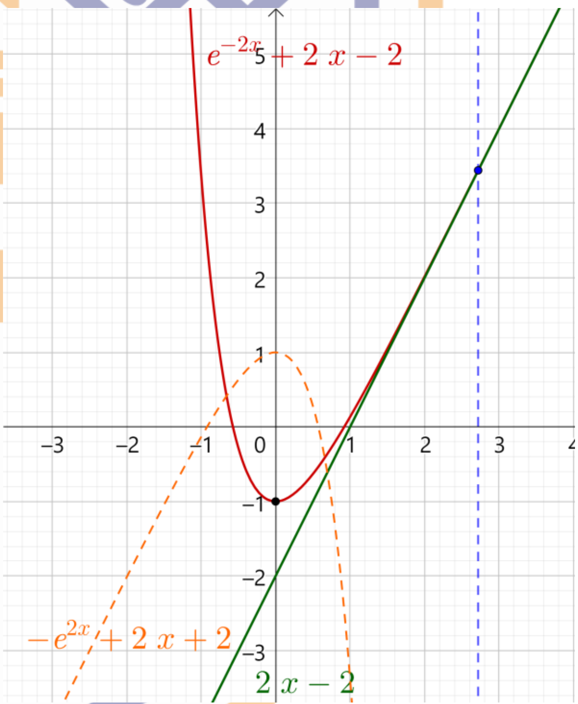
الرسم:

مقاربات: $y=2x-2$

$$x=0 \Rightarrow y=-2 \Rightarrow (0,-2)$$
$$y=0 \Rightarrow x=1 \Rightarrow (1,0)$$

نقاط الجدول:

$$(-\infty,+\infty)\ (0,-1)\ (+\infty,+\infty)$$



مساحة السطح المحصور

$$S=\int_0^1 (f(x)-y_\Delta)\,dx$$
$$S=\int_0^1 e^{-2x}dx$$
$$S=\left[-\frac{1}{2}e^{-2x}\right]_0^1$$

$$S=-\frac{e^{-2}}{2}+\frac{1}{2}=\frac{e^2-1}{2e^2}$$
$$g(x)=-\left[e^{-2(-x)}+2(-x)-2\right]$$
$$g(x)=f\big(f(-x)\big)$$

C' نظير C بالنسبة لمبدأ الإحداثيات.

دورة 20222 الثانية:

السؤال الثالث:

ليكن التابع g المعرف على $\mathbb{R}$ وفق
$$g(x)=\ln(2+\sin x)$$

المطلوب:

① احسب $g'(0), g'(x)$

② استنتج $\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(2+\sin x)-\ln(2)}{x}$

الحل:

g اشتقاقي على $\mathbb{R}$

$$g'(x)=\frac{\cos x}{2+\sin x}$$
$$g'(0)=\frac{1}{2}$$
$$\lim_{x\to0}\frac{\ln(2+\sin x)-\ln 2}{x}=\lim_{x\to0}\frac{g(x)-g(0)}{x-0}$$

حسب تعريف العدد المشتق

$$\lim_{x\to0}\frac{\ln(2+\sin x)-\ln(2)}{x}=g'(0)$$
$$=\frac{1}{2}$$

السؤال الرابع: جد الحل المشترك لجملة المعادلتين :

$$\begin{cases} \ln(x)+\ln(y)=\ln(6) \\ \ln(x+y)=\ln(5) \end{cases}$$

$x>0\,,y>0$

من (1) نجد

$\ln(x.y)=\ln(6)$

$x.y=6 \Rightarrow x=\frac{6}{y}$

$x+y=5 \Rightarrow x=5-y$

$(5-y)y=6$

$5y-y^2=6$

$y^2-5y+6=0$

$(y-3)(y-2)=0$

إما $y=2$ أو $y=3$

$y=2 \Rightarrow x=3$

$y=3 \Rightarrow x=2$

الحلان مقبولان

المسألة الثانية:

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $]-\infty,1[$ وفق: $f(x)=e^x+\ln(1-x)$ وليكن g التابع المعرف على $\mathbb{R}$ وفق: $g(x)=(1-x)e^x-1$ والمطلوب:

① ادرس اطراد التابع g واستنتج أن $g(x)\le 0$ مهما تكن $x\in\mathbb{R}$.

② تحقق أن $f'(x)=\frac{g(x)}{1-x}$ على المجال $]-\infty,1[$ ثم ادرس تغيرات التابع f ونظم جدولاً بها.

③ اكتب معادلة للمستقيم المماس T في نقطة منه فاصلتها $x=0$.

④ في معلم متجانس، ارسم المستقيم T، ثم ارسم C الخط البياني للتابع f.

الحل:

g معرف واشتقاقي على $\mathbb{R}$

$g'(x)=-e^x+e^x(1-x)=-x.e^x$

$g'(x)=0$

$e^x\neq 0$

$-x=0 \Rightarrow x=0$

$g(0)=0$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
g'		$+$	0	$-$	
g		$\nearrow$	0	$\searrow$	

من جدول اطراد $g(x)$ نجد $g(x)\le 0$

f معرف واشتقاقي على مجموعة تعريفه

$$f'(x) = e^x - 1(1-x)$$
$$= \frac{e^x(1-x)-1}{1-x}$$
$$f'(x) = \frac{g(x)}{1-x}$$

باعتبار $1 - x > 0$ على المجال $]-\infty, 1[$

فإن إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$

منه $f'(x) \leq 0$

تكافئ عندما $x = 0$ يعطي $f(0) = 1$

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = -\infty$$

$x = 1$ مقارب شاقولي للخط C و C على يسار المقارب.

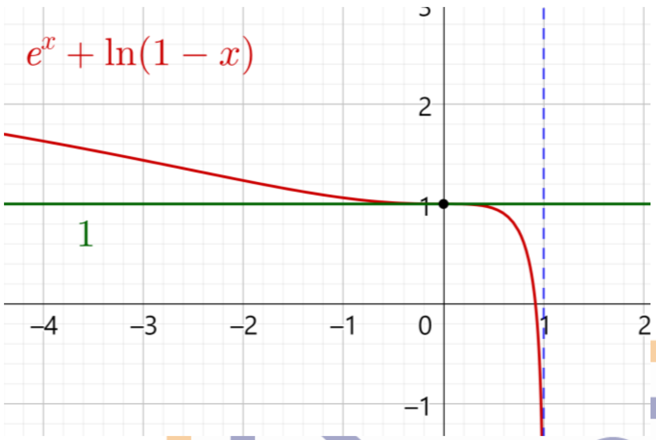
$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

x	$-\infty$		0		1
f'		$-$	0	$-$	‖
f	$+\infty$	$\searrow$	1	$\searrow$	‖

معادلة المماس

$$f(0) = 1 \,, f'(0) = 0$$

مماس أفقي: $T: y = 1$



حل دورة 2023 الأولى:

السؤال الرابع:

f معرف على $D =]-1, +\infty[$ وفق ما يأتي:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{\ln(x+1)} & ; x \in D \setminus \{0\} \\ 0 & ; x = 0 \end{cases}$$

ادرس قابلية f للاشتقاق عند الصفر، ثم احسب $f'(x)$ على $]0, +\infty[$

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{x^2}{\ln(x+1)}}{x}$$
$$= \lim_{x \to 0} \frac{x}{\ln(x+1)} = 1$$

التابع اشتقاقي عند الصفر.

$$f'(x) = \frac{2x.\ln(x+1) - \frac{1}{x+1}.x^2}{\ln^2(x+1)}$$
$$= \frac{\frac{2x(x+1)\ln(x+1)}{x+1} - \frac{x^2}{x+1}}{\ln^2(x+1)}$$
$$= \frac{(2x^2+2x)\ln(x+1) - x^2}{(x+1)\ln^2(x+1)}$$

التمرين الأول:

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $]0,+\infty[$ وفق: $f(x) = ax + b - \frac{\ln x}{x}$،

المطلوب:

① عين a, b ليمر التابع بالنقطة $A(1,6)$ ويقبل مماساً في النقطة A وميله يساوي 3.

② من أجل $a = 4$, $b = 2$ أثبت أن المستقيم الذي معادلته $y = 4x + 2$ مقارب مائل للخط C عند $+\infty$ ثم ادرس الوضع النسبي للخط C مع المقارب.

③ احسب $\int_1^2 f(x)\,dx$

❶ لتعيين a, b لدينا:

$$f(1) = 6\,, \qquad f'(1) = 3$$

$$f(1) = 6 \Rightarrow a + b = 6 \qquad \dots(1)$$

$$f'(x) = 1 - \frac{\frac{1}{x}x - \ln x}{x^2}$$

$$= a - \frac{1 - 1\ln x}{x^2}$$

$$f'(1) = 3 \Rightarrow a - 1 = 3 \qquad (2)$$

من (2) نجد: $\boxed{a = 4}$ نعوض في (1)

$$4 + b = 6 \Rightarrow \boxed{b = 2}$$

$$f(x) = 4x + 2 - \frac{\ln x}{x}$$

❷ لإثبات أن $y = 4x = 2$ مقارب مائل في جوار $+\infty$ يجب أن نبرهن:

$$\lim_{x\to+\infty} (f(x) - y_\Delta) = 0$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(4x + 2 - \frac{\ln x}{x} - (4x+2)\right)$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left(-\frac{\ln x}{x}\right) = 0$$

بما أن نهاية الفرق تساوي الصفر

فإن $y = 4x + 2$ مقارب مائل في جوار $+\infty$

دراسة الوضع النسبي:

$$f(x) - y_\Delta = -\frac{\ln x}{x}$$

x	0		1		$+\infty$
$-\ln x$	‖	$+$	0	$-$	
x		$+$		$+$	
$-\frac{\ln x}{x}$	‖	$+$	0	$-$	
الوضع النسبي	‖	y فوق C		y تحت C	

❸ $\int_1^2 f(x)\,dx = \int_1^2 \left(4x + 2 - \frac{1}{x}\ln x\right)\,dx$

$$= \left[2x^2 + 2x - \frac{1}{2}\ln^2 x\right]_1^2$$

$$= \left[2(4) + 2(2) - \frac{1}{2}\ln^2 2\right]$$

$$- \left[2(1) + 2(1) - \frac{1}{2}\ln^2 1\right]$$

$$= 8 + 4 - \frac{1}{2}\ln^2 2 - 4$$

$$= 8 - \frac{1}{2}\ln^2 2$$

المسألة الثانية:

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $\mathbb{R}$ وفق: $f(x)=\frac{4e^x-2}{e^x+1}$، المطلوب:

① جد نهاية f عند أطراف مجموعة تعريفه، وعيّن ما للخط البياني C من مقاربات.

② ادرس تغيرات التابع f ونظم جدولاً بها.

③ اكتب معادلة المماس T للخط البياني C في النقطة التي فاصلتها $x=0$.

④ ليكن التابع g المعرف على $\mathbb{R}$ وفق: $g(x)=f(x)-y_T$، ادرس اطراد التابع g، ثم استنتج الوضع النسبي للخط C مع المماس T

⑤ ارسم في معلم واحد المماس T، ومقاربات C، ثم ارسم C.

⑥ استنتج رسم الخط البياني للتابع h المعرف على $\mathbb{R}$ وفق: $h(x)=\frac{6e^x}{e^x+1}$

❶ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\frac{2}{1}=-2$

لأن $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x=0$

$y=-2$ مقارب أفقي للخط C في جوار $-\infty$

❷ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{4e^x-2}{e^x+1}=$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x\left[4-\frac{2}{e^x}\right]}{e^x\left[1+\frac{1}{e^x}\right]}=\lim_{x\to+\infty}\frac{4-\frac{2}{e^x}}{1+\frac{1}{e^x}}=\frac{4}{1}=4$$

$y=4$ مقارب أفقي للخط C في جوار $+\infty$

التابع f معرف ومستمر واشتقاقي على المجال $]-\infty,+\infty[$

نشتق التابع:

$$f'(x)=\frac{4e^x(e^x+1)-e^x(4e^x-2)}{(e^x+1)^2}$$
$$=\frac{6e^x}{(e^x+1)^2}>0$$

f متزايد تماماً.

جدول التغيرات:

x	$-\infty$		$+\infty$
f'		$+$	
f	-2	$\nearrow$	4

❸ لدينا $x_0=0$

$$f(0)=\frac{4e^0-2}{e^0+1}=\frac{4-2}{1+1}=1=y_0$$

ميل المماس $f'(0)=\frac{6e^0}{(e^0+1)^2}=\frac{6}{4}=\frac{3}{2}$

معادلة المماس:

$$y-y_0=m(x-x_0)$$
$$y-1=\frac{3}{2}(x-0)$$
$$T: y=\frac{3}{2}x+1$$

❹ دراسة الوضع النسبي بين f, y_T:

$$g(x)=f(x)-y_T$$
$$=\frac{4e^x-2}{e^x+1}-\frac{3}{2}x-1$$
$$g'(x)=\frac{6e^x}{(e^x+1)^2}-\frac{3}{2}$$

$$g'(x) = 0 \Rightarrow \frac{6e^x}{e^{2x}+2e^x+1} - \frac{3}{2} = 0$$

$$\frac{6e^x}{e^{2x}+2e^x+1} = \frac{3}{2}$$

$$4e^x = 2e^{2x} + 2e^x + 1$$

$$e^{2x} - 2e^x + 1 = 0$$

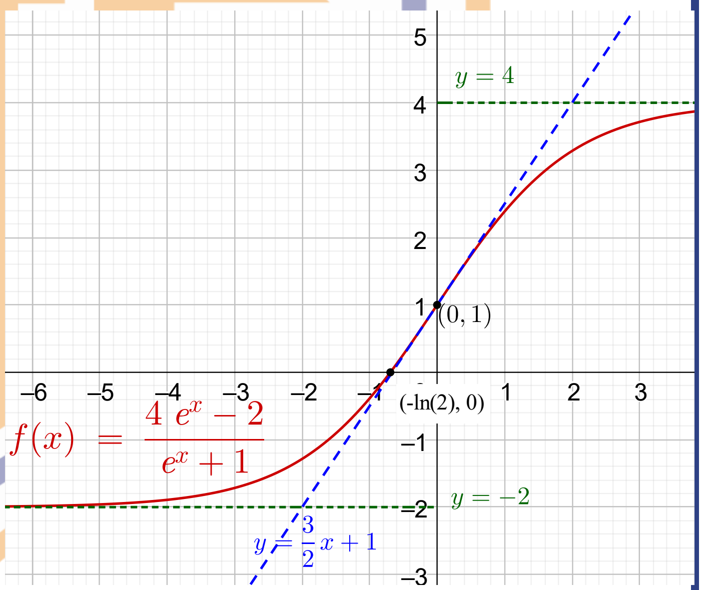
$$(e^x - 1)^2 = 0$$

$$e^x = 1 \xRightarrow{\ln} x = 0$$

$$g(0) = 0$$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
g'		$-$	0	$-$	
g		$+$	0	$-$	
الوضع النسبي		y فوق C		y تحت C	

5 الرسم:



6 استنتاج الخط البياني:

$$h(x) = \frac{6e^x}{e^x+1} = \frac{4e^x + 2e^x - 2 + 2}{e^x+1}$$

$$= \frac{4e^x - 2 + 2e^x + 2}{e^x+1} = f(x) + 2$$

أي أن الخط البياني C للتابع h ينتج عن الخط البياني C للتابع f بانسحاب شعاعه $\vec{v}(0,2)$

دورة 2023 الثانية:

السؤال الثاني:

حل المعادلة $e^{2x} + 2e^x - 3 = 0$، ثم استنتج حلول المتراجحة $e^{2x} + 2e^x - 3 \le 0$

$$e^{2x} + 2e^x - 3 = 0$$

$$(e^x + 3)(e^x - 1) = 0$$

إما $e^x + 3 = 0 \Rightarrow e^x = -3$ مرفوض

أو $e^x - 1 = 0 \Rightarrow e^x = 1 \Rightarrow x = 0$

المتراجحة:

$$e^{2x} + 2e^x - 3 \le 0$$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$e^{2x}+2e^x-3$		$-$	0	$+$	
المتراجحة		محقق		غير محقق	

$$x \in]-\infty, 0]$$

الرياضيات ـ الجزء الأول

السؤال الرابع:

① بسط كتابة كل من العددين $A = 5^{\frac{1}{\ln 5}}$ و $B = 3^{\frac{1}{\ln 3}}$، ثم احسب الجداء $A.B$

② اكتب العدد $a = \ln(15) + \ln\sqrt[3]{27} - \ln\frac{1}{125}$ بأبسط صيغة ممكنة بدلالة $\ln 5$, $\ln 3$

❶ $A = 5^{\frac{1}{\ln 5}} = e^{\frac{1}{\ln 5}.\ln 5} = e$

$B = 3^{-\frac{1}{\ln 3}} = e^{-\frac{1}{\ln 3}.\ln 3} = e^{-1}$

$A.B = e.e^{-1} = 1$

❷ $a = \ln(15) + \ln\sqrt[3]{27} - \ln\frac{1}{125}$

$a = \ln(5\times 3) + \ln(3^3)^{\frac{1}{3}} + \ln 5^3$

$= \ln(5) + \ln(3) + \ln(3) + 3\ln(5)$

$= 4\ln(5) + 2\ln(3)$

المسألة الثانية:

ليكن C_f الخط البياني للتابع f المعرف على المجال $I =]-2,+\infty[$ وفق: $f(x) = (x+1)\ln(x+2)$، وليكن g التابع المعرف على $I =]-2,+\infty[$ وفق: $g(x) = \frac{x+1}{x+2} + \ln(x+2)$، المطلوب:

① جد $\lim_{x\to-2} f(x)$, $\lim_{x\to+\infty} f(x)$

② أثبت أن $f'(x) = g(x)$ واكتب معادلة المماس Δ للخط C_f في نقطة منه فاصلتها $x = -1$

③ ادرس اطراد $g(x)$ واستنتج إشارته (مستفيداً من نقطة التماس)

④ نظم جدولاً بتغيرات التابع f وارسم خطه البياني ومقاربه الشاقولي.

⑤ استنتج اطراد المتتالية أياً كان عدد طبيعي.

❶ $\lim_{x\to-2^+} f(x) = -1.\ln(0^+) = +\infty$

$x = -2$ مقارب شاقولي للخط C، و C على يمين المقارب.

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty\ln(+\infty) = +\infty$

❷ $f'(x) = \ln(x+2) + \frac{1}{x+2}(x+1)$

$= \frac{x+1}{x+2} + \ln(x+2) = g(x)$

$x = -1$

$f(-1) = 0 \,\&\, f'(-1) = 0$

$\Delta : y = 0$

❸ g معرف ومستمر واشتقاقي على المجال $]-2,+\infty[$

$$g'(x) = \frac{x+2-x-1}{(x+2)^2} + \frac{1}{x+2}$$

$$g'(x) = \frac{1+x+2}{(x+2)^2} = \frac{x+3}{(x+2)^2} > 0$$

g متزايد تماماً

x	-2	$+\infty$
g'	‖	$+$
g	‖	$\nearrow$

$$g(-1) = 0$$

$$g(x) < 0 \Rightarrow x \in]-2, -1[$$

$$g(x) > 0 \Rightarrow x \in]-1, +\infty[$$

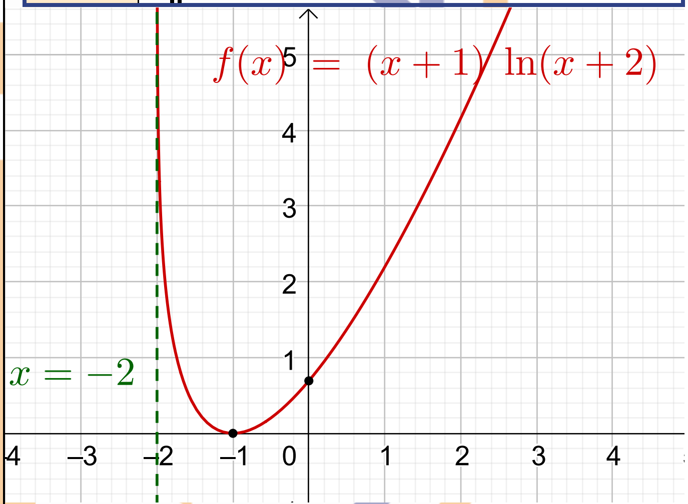
④ $f'(x) = g(x) = 0 \Rightarrow x = -1$

وللمعادلة $f'(x) = 0$ حل وحيد لأن g معرف ومستمر ومتزايد تماماً على المجال

$]-2, +\infty[$

$$f(-1) = 0$$

x	-2		1		$+\infty$
f'	‖	$-$	0	$+$	
f	‖ $+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$



$$x = 0 \Rightarrow f(0) = \ln 2$$

نقطة مساعد

⑤ $u_n = \ln(n+2)^{n+1}$

$$u_n = (n+1)\ln(n+2) \Rightarrow u_n = f(n)$$

$$f(x) = (x+1)\ln(x+2)$$

$$f'(x) > 0$$

$\forall x \in]-1, +\infty[$ فهو متزايد تماماً ومنه

وهو متزايد تماماً على المجال $[0, +\infty[$

ومنه u_n متزايدة تماماً $\forall n \in \mathbb{N}$

نسالكم صالح الدعاء لي و لوالدي وجميع معلمي