مسألة دورة أولى 2021 (80) درجة :

تهتز كرة معدنية كتلتها m بمرونة نابض شاقولي مهمل الكتلة، حلقاته متباعدة، ثابت صلابته $k = 100\ N.m^{-1}$ بحركة توافقية بسيطة دورها الخاص $T_0 = \frac{\pi}{5}\ s$ وبسعة اهتزازها $X_{max} = 12\ cm$. باعتبار مبدأ الزمن $t = 0$ لحظة مرور الكرة في موضع عطالة $x = \frac{X_{max}}{2}$ وهي تتحرك بالا تجاه السالب .

المطلوب:

1- استنتج التابع الزمني لمطال الحركة انطلاقاً من شكله العام.

2- عين لحظة المرور الأول للكرة في موضع التوازن ثم احسب سرعتها عندئذٍ.

3- احسب كتلة الكرة m.

4- احسب شدة قوة الارجاع في نقطة مطالها $x = 4\ cm$.

5- احسب الاستطالة السكونية للنابض.

6- احسب الطاقة الميكانيكية لهذا النواس.

$$(g = 10 m.s^{-2}\ ,\quad \pi^2 = 10)$$

معطيات المسألة:

$$k = 100\ N.m^{-1}\ ,\quad T_0 = \frac{\pi}{5}\ s$$

$$X_{max} = 12 \times 10^{-2}\ m \quad \text{عند } t = 0 \Rightarrow x = \frac{X_{max}}{2}$$

الحل:

.1

$$\bar{x} = X_{max}\cos(\omega_0 t + \bar{\varphi})$$

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = \frac{2\pi \times 5}{\pi}$$

$$\omega_0 = 10\ rad.s^{-1}$$

$$X_{max} = 12 \times 10^{-2}\ m$$

لايجاد $\bar{\varphi}$ من شروط البدء :

$$t = 0\ s \quad , \quad \bar{x} = +\frac{X_{max}}{2}$$

$$\frac{X_{max}}{2} = X_{max}\cos(\bar{\varphi})$$

$$\frac{1}{2} = \cos(\bar{\varphi})$$

إما $\bar{\varphi} = +\frac{\pi}{3}$ أو $\bar{\varphi} = -\frac{\pi}{3}$

من أجل $\bar{\varphi} = -\frac{\pi}{3}$

$$\bar{v} = -\omega_0 X_{max}\sin(\bar{\varphi}) \quad > 0$$

مرفوض

من أجل $\bar{\varphi} = +\frac{\pi}{3}$

$$\bar{v} = -\omega_0 X_{max}\sin(\bar{\varphi}) \quad < 0$$

مقبول

$$\bar{x} = 12 \times 10^{-2} \cos(10t + \frac{\pi}{3})$$

.2

$$\bar{x} = 12 \times 10^{-2} \cos(10t + \frac{\pi}{3})$$

$$0 = 12 \times 10^{-2} \cos(10t + \frac{\pi}{3})$$

$$\Rightarrow \cos\left(10t + \frac{\pi}{3}\right) = 0$$

$$10t + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2} + \pi\, k$$

$$10t = -\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2} + \pi\, k$$

نوحد المقامات

$$10t = \frac{-2\pi + 3\pi}{6} + \pi\, k$$

$$10t = \frac{\pi}{6} + \pi\, k$$

$$t = \frac{\pi}{6 \times 10} + \frac{\pi}{10}\, k$$

$$t = \frac{\pi}{60}\, s \quad \Leftarrow \quad k = 0 \text{ من أجل المرور الأول}$$

$$\bar{v} = -\omega_0 X_{max} \sin(\omega_0 t + \bar{\varphi})$$

$$\bar{v} = -10 \times (12 \times 10^{-2}) \sin\left[10\left(\frac{\pi}{60}\right) + \frac{\pi}{3}\right]$$

$$\bar{v} = -12 \times 10^{-1} \sin\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3}\right)$$

$$\bar{v} = -12 \times 10^{-1} \sin(\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{6})$$

$$\bar{v} = -12 \times 10^{-1} \sin\left(\frac{3\pi}{6}\right)$$

$$\bar{v} = -12 \times 10^{-1} \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \quad ; \quad \sin\frac{\pi}{2} = +1$$

$$\bar{v} = -12 \times 10^{-1}(+1)$$

$$\boxed{\bar{v} = -12 \times 10^{-1}\ m.s^{-1}}$$

3. حساب كتلة الكرة:

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m} \implies \boldsymbol{m = \frac{k}{\omega_0^2}}$$

$$m = \frac{100}{(10)^2} = \frac{100}{100}$$

$$\boxed{\boldsymbol{m = 1\ kg}}$$

.4

$$\boldsymbol{F = |-kx|} \quad ; \quad x = 4 \times 10^{-2}\ m$$

$$F = |-100 \times 4 \times 10^{-2}|$$

$$\boxed{\boldsymbol{F = 4\ N}}$$

.5

$$mg = kx_0$$

$$\boldsymbol{x_0 = \frac{mg}{k}}$$

$$x_0 = \frac{1 \times 10}{100}$$

$$x_0 = \frac{1}{10}$$

$$\boxed{\boldsymbol{x_0 = 0.1\ m}}$$

.6

$$\boldsymbol{E_{tot} = \frac{1}{2} k X_{max}^2}$$

$$E_{tot} = \frac{1}{2} \times 100 \times (12 \times 10^{-2})^2$$

$$E_{tot} = 50 \times 144 \times 10^{-4}$$

$$E_{tot} = 720 \times 10^{-3}$$

$$\boldsymbol{E_{tot} = 72 \times 10^{-2} J}$$

$$\boxed{\boldsymbol{E_{tot} = 0.72\ J}}$$

****

مسألة دورة 2020 إضافية (80) درجة :

تتألف هزازة توافقية بسيطة غير متخامدة من جسم صلب كتلته $m = 1kg$ معلق إلى طرف نابض مرن شاقولي مهمل الكتلة وحلقاته متباعدة، يهتز بدور خاص $T_0 = 0.4\ s$ ويرسم أثناء حركته قطعة مستقيمة طولها $d = 12\ cm$.

والمطلوب:

1- استنتج التابع الزمني لمطال الحركة انطلاقا من شكله العام باعتبار مبدأ الزمن عندما كان الجسم في مطالة الأعظمي الموجب .

2- احسب ثابت صلابة النابض .

3- احسب قيمة الاستطالة السكونية للنابض.

4- عين لحظة المرور الأول للجسم في مركز الاهتزاز .

5- احسب الطاقة المرونية للنابض عند نقطة مطالها $x = 4\ cm$ ثم احسب الطاقة الحركية للجسم عندئذٍ.

معطيات المسألة:

$$\boldsymbol{m = 1\ kg}\ ,\quad \boldsymbol{T_0 = 0.4 = 4 \times 10^{-1}\ s}\ ,\quad \boldsymbol{X_{max} = \frac{12}{2} = 6\ cm = 6 \times 10^{-2}\ m}$$

الحل:

.1

$$\bar{x} = X_{max}\cos(\omega_0 t + \bar{\varphi})$$

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = \frac{2\pi}{4\times10^{-1}} = \frac{\pi}{2\times10^{-1}} = \frac{10\pi}{2}$$

$$\omega_0 = 5\pi\ rad.s^{-1}$$

$$X_{max} = \frac{\text{طول القطعة المستقيمة}}{2}$$

$$X_{max} = 6\times10^{-2}m$$

لايجاد $\bar{\varphi}$ من شروط البدء :

$$t = 0\ s \quad , \quad \bar{x} = +X_{max}$$

$$\bar{x} = X_{max}\cos(\omega_0 t + \bar{\varphi})$$

$$+X_{max} = X_{max}\cos(\omega_0(0) + \bar{\varphi})$$

$$+1 = \cos\bar{\varphi}$$

$$\Rightarrow \bar{\varphi} = 0\ rad$$

الأن نعوض في الشكل العام:

$$\bar{x} = 6\times10^{-2}\cos(5\pi t)$$

.2

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

نربع الطرفين

$$T_0^2 = \frac{4\pi^2 m}{k}$$

$$k = \frac{4\pi^2 m}{{T_0}^2}$$

$$k = \frac{4 \times 10 \times 1}{(4 \times 10^{-1})^2}$$

$$k = \frac{4 \times 10}{4 \times 4 \times 10^{-2}}$$

$$k = \frac{10 \times 10^2}{4} = \frac{1000}{4}$$

$$\boxed{k = 250\ N.m^{-1}}$$

.3

$W = kx_0$

$mg = kx_0$

$$W = kx_0$$

$$mg = kx_0$$

$$1 \times 10 = 250 \times x_0$$

$$10 = 250x_0 \quad \rightarrow \quad x_0 = \frac{1}{25}$$

$$\boxed{x = 0.04\ m}$$

4-

في مركز الاهتزاز $\bar{x} = 0$

$$\bar{x} = X_{max} \cos(\omega_0 t + \bar{\varphi})$$

$$0 = 6 \times 10^{-2} \cos(5\pi t)$$

$$\rightarrow \cos(5\pi t) = 0$$

$$5\pi t = \frac{\pi}{2} + \pi k$$

$$5t = \frac{1}{2} + k$$

$$\boldsymbol{t = \frac{1}{10} + \frac{k}{5}}$$

المرور الأول $\boldsymbol{k = 0}$

$$\rightarrow \quad t = \frac{1}{10}$$

$$\boldsymbol{t = 0.1\ s}$$

5-

$$\boldsymbol{E_p = \frac{1}{2}kx^2} \qquad ; \ x = 4 \times 10^{-2}\ m$$

$$E_p = \frac{1}{2} \times 250 \times (4 \times 10^{-2})^2$$

$$E_p = 125 \times 16 \times 10^{-4}$$

$$E_p = 2000 \times 10^{-4}$$

$$\boldsymbol{E_p = 2 \times 10^{-1} J}$$

$$\boldsymbol{E_p = 0.2\ J}$$

$$\boldsymbol{E_{tot} = \frac{1}{2}kX_{max}^2}$$

$$E_{tot} = \frac{1}{2} \times 250 \times (6 \times 10^{-2})^2$$

$$E_{tot} = 125 \times 36 \times 10^{-4}$$

$$E_{tot} = 4500 \times 10^{-4}$$

$$\boldsymbol{E_{tot} = 45 \times 10^{-2} J}$$

$$\rightarrow \boldsymbol{E_{tot} = 0.45\ J}$$

$$\boldsymbol{E_k = E_{tot} - E_p}$$

$$E_k = 45 \times 10^{-2} - 2 \times 10^{-1}$$

$$E_k = 45 \times 10^{-2} - 20 \times 10^{-2}$$

$$E_k = (45 - 20) \times 10^{-2}$$

$$E_k = 25 \times 10^{-2}$$

$$\boldsymbol{E_k = 0.25\ J}$$

****

مسألة دورة 2017 الأولى (70) درجة:

هزازة توافقية بسيطة مؤلفة من جسم صلب كتلته $m = 2\ kg$ معلق بنابض مرن شاقولي مهمل الكتلة حلقاته متباعدة ثابت صلابته $k = 20\ N.m^{-1}$ نزيح الجسم عن وضع توازنه شاقولياً نحو الأسفل بالاتجاه الموجب ضمن حدود مرونة النابض مسافة قدرها $x = 8cm$ ونتركه دون سرعة ابتدائية في اللحظة $t = 0$.

والمطلوب:

1- احسب الدور الخاص لهذه الهزازة.

2- استنتج التابع الزمني لمطال الحركة انطلاقا من شكله العام.

3- احسب سرعة الجسم لحظة مروره الأول في وضع التوازن.

4- احسب الطاقة الميكانيكية لهذه الهزازة.

$(\pi^2 = 10)$

معطيات المسألة:

$$m = 2\ kg \quad , \quad k = 20\ N.m^{-1} \quad , \quad \bar{x} = X_{max} = 8 \times 10^{-2} m \quad , \quad t = 0$$

الحل:

1.

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{2}{20}} = 2\pi\sqrt{\frac{1}{10}}$$

$$\boxed{T_0 = 2\ s}$$

2.

$$\bar{x} = X_{max}\cos(\omega_0 t + \bar{\varphi})$$

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = \frac{2\pi}{2}$$

$$\boxed{\omega_0 = \pi\ rad.s^{-1}}$$

لايجاد $\bar{\varphi}$ من شروط البدء:

$$t = 0\ s \quad , \quad \bar{x} = +X_{max}$$

$$\bar{x} = X_{max}\cos(\bar{\varphi})$$

$$X_{max} = X_{max}\cos(\bar{\varphi})$$

$$1 = \cos(\bar{\varphi})$$

$$\Rightarrow \boxed{\bar{\varphi} = 0\ rad}$$

$$x = 8 \times 10^{-2} \cos(\pi t)$$

.3

عند المرور الأول بوضع التوازن $t = \frac{T_0}{4}$

$$t = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}\ s$$

$$\bar{v} = -\omega_0 X_{max} \sin(\omega_0 t + \bar{\varphi})$$

$$\bar{v} = -\pi \times (8 \times 10^{-2}) \sin\left[\pi\left(\frac{1}{2}\right) + 0\right] \quad ; \quad \sin\frac{\pi}{2} = +1$$

$$\bar{v} = -8\pi \times 10^{-2}\ m.s^{-1}$$

.4

$$E_{tot} = \frac{1}{2} k X_{max}^2$$

$$E_{tot} = \frac{1}{2} \times 20 \times (8 \times 10^{-2})^2$$

$$E_{tot} = 10 \times 64 \times 10^{-4}$$

$$E_{tot} = 64 \times 10^{-3}\ J$$

$$E_{tot} = 0.064\ J$$

****

مسألة دورة 2013 الثانية (85) درجة :

هزازة توافقية بسيطة مؤلفة من نقطة مادية $m = 100g$ معلقة بنابض مرن مهمل الكتلة حلقاته متباعدة شاقولي تهتز بدور خاص $1\ s$ وبسعة اهتزاز $16\ cm$ ، بفرض مبدأ الزمن عندما تكون النقطة المادية في مطالها الأعظمي .

والمطلوب:

1- استنتج التابع الزمني لمطال الحركة انطلاقا من شكله العام .
2- عين لحظة المرور الأول للنقطة المادية في مركز الاهتزاز الأعظمي واحسب قيمة السرعة للنقطة المادية (طويلة).
3- احسب ثابت صلابة النابض.
4- احسب تسارع النقطة المادية لحظة مرورها $\bar{x} = 5\ cm$
5- احسب الطاقة الميكانيكية لهذه الهزازة.
6- احسب الطاقة الحركية للنقطة المادية عندما يكون مطالها $\bar{x} = 10\ cm$

$$(g = 10\ m.s^{-2}\ \ , \pi^2 = 10)$$

معطيات المسألة:

$$m = 100 \times 10^{-3} = 10^{-1} kg\ \ ,\ \ T_0 = 1\ s$$

$$\bar{x} = X_{max} = 16 \times 10^{-2} m$$

الحل:

.1

$$\bar{x} = X_{max}\cos(\omega_0 t + \bar{\varphi})$$

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = \frac{2\pi}{1}$$

$$\omega_0 = 2\pi\ rad.s^{-1}$$

لايجاد $\bar{\varphi}$ من شروط البدء :

$$t = 0\ s \quad , \quad \bar{x} = +X_{max}$$

$$X_{max} = X_{max}\cos(\bar{\varphi})$$

$$1 = \cos(\bar{\varphi})$$

$$\Rightarrow \bar{\varphi} = 0\ rad$$

$$x = 16 \times 10^{-2}\ cos(2\pi t)$$

2-

$$\bar{x} = X_{max}\cos(\omega_0 t + \bar{\varphi})$$

$$\cos(2\pi t) = 0$$

$$0 = 16 \times 10^{-2}\cos(2\pi t)$$

$$2\pi t = \frac{\pi}{2} + \pi k$$

$$2t = \frac{1}{2} + k \qquad ; t = \frac{T_0}{4}$$

$$t = \frac{1}{4} + \frac{k}{2}$$

من أجل المرور الأول $k = 0$ $\Leftarrow$ $\boxed{t = \frac{1}{4}\ s}$

$$V_{max} = \omega_0 X_{max}$$

$$V_{max} = 2\pi \times 16 \times 10^{-2}$$

$$\boxed{V_{max} = 32\pi \times 10^{-2} m.s^{-1}}$$

3-

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

نربع الطرفين:

$$T_0^2 = \frac{4\pi^2 m}{k}$$

$$k = \frac{4\pi^2 m}{T_0^2}$$

$$k = \frac{4 \times 10 \times 10^{-1}}{1}$$

$$\boxed{k = 4\ N.m^{-1}}$$

4-

$$\bar{a} = -\omega_0^2 \bar{x}$$

$$\bar{a} = -(2\pi)^2 (5 \times 10^{-2})$$

$$\bar{a} = -4 \times 10 \times 5 \times 10^{-2}$$

$$\bar{a} = -20 \times 10^{-1}$$

$$\boxed{\bar{a} = 2\ m.s^{-2}}$$

5-

$$E_{tot} = \frac{1}{2}kX_{max}^2$$

$$E_{tot} = \frac{1}{2} \times 4 \times (16 \times 10^{-2})^2$$

$$E_{tot} = 2 \times 256 \times 10^{-4}$$

$$\boxed{E_{tot} = 512 \times 10^{-4} J}$$

6-

$$E_k = E_{tot} - E_p$$

$$E_p = \frac{1}{2}kx^2$$

$$E_p = \frac{1}{2} \times 4 \times (10 \times 10^{-2})^2$$

$$E_p = 200 \times 10^{-4} J$$

$$\Rightarrow E_k = 512 \times 10^{-4} - 200 \times 10^{-4}$$

$$\Rightarrow E_k = (512 - 200) \times 10^{-4}$$

$$\boxed{E_k = 312 \times 10^{-4}\ J}$$

****