الاحتمالات.

تذكرة:

التجربة العشوائية: هي كل تجربة مجموعة نتائجها الممكنة هي $a_1, a_2, \dots, a_n$ ندعو مجموعة النتائج بفضاء العينة ونرمز له بالرمز Ω.

- الحدث: هو مجموعة جزئية من فضاء العينة ونرمز له بـ $(A, B, C, \dots)$
- الحدث البسيط: هو حدث مؤلف من عنصر وحيد
- الحدث المستحيل: هو الحدث الذي لا يحوي أي نتيجة، ونرمز له بـ $\emptyset$
- الحدث الأكيد: هو الحدث المؤلف من جميع نتائج التجربة ونرمز له Ω
- الحدث المعاكس (المتمم): هو مجموعة الأحداث المؤلفة لـ Ω ما عدا A ونرمز له بالرمز A'
- احتمال وقوع الحدث A.

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)}$$

حيث $0 \le P \le 1$

العمليات على الأحداث

- تقاطع $\cap$: هي مجموعة العناصر المشتركة بين حدثين ويدل عليه حرف العطف (و).
- اجتماع $\cup$: هي مجموعة العناصر المشتركة والغير مشتركة بين حدثين، ويدل عليه حرف العطف (أو)
- الفرق / : $A \backslash B$ هي مجموعة العناصر التي تنتمي لـ A ولا تنتمي لـ B.
- حدثان متنافيان: هما حدثان تقاطعهما $\emptyset$ أي $A \cap B = \emptyset$
- حدثان متعاكسان: هما حدثان متعاكسان $B = A'$ ، $A \cup B = \Omega$ ، $A \cap B = \emptyset$
- الاحتمال المشروط: ليكن B حدثاً يحقق أن $P(B) \neq 0$ ونفرض أننا نعلم أنه قد وقع، عندئذٍ نعرف الاحتمال المشروط لوقوع الحدث A علماً أن B قد وقع

$$P(A \backslash B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

ويمكن صياغتها $P(A \cap B) = P(A \backslash B) \cdot P(B)$

الاستقلال الاحتمالي لحدثين:

نقول عن A و B أنهما حدثان مستقلان احتمالياً إذا وفقط إذا كان $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$

بعض قوانين الاحتمال:

$P(\emptyset) = 0$ و $P(\Omega) = 1$

$P(A') = 1 - P(A)$

$P(A \cap B') = P(A) - P(A \cap B)$

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$P(A \backslash B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$

$A' \cap B' = (A \cup B)' = 1 - P(A \cup B)$

$A' \cup B' = (A \cap B)' = 1 - P(A \cap B)$

ص٥٥ ج١ ٤

مثال: في فضاء احتمالي إذا كانت

$P(A') = \frac{1}{2}$ ، $P(B') = \frac{1}{3}$ ، $P(A \cap B) = \frac{2}{6}$

احسب كلاً مما يلي:

- $P(A) = 1 - P(A') = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$
- $P(B) = 1 - P(B') = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{1}{2} + \frac{2}{3} - \frac{2}{6} = \frac{5}{6}$
- $P(A' \cap B') = P(A \cup B)' = 1 - P(A \cup B) = 1 - \frac{5}{6} = \frac{1}{6}$
- $P(A' \cup B') = P(A \cap B)' = 1 - P(A \cap B) = 1 - \frac{2}{6} = \frac{2}{3}$
- $P(A \backslash B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{2}{6}}{\frac{2}{3}} = \frac{1}{2}$
- $P(B \backslash A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{\frac{2}{6}}{\frac{1}{2}} = \frac{4}{6}$

مثال: إذا كان $P(A) = \frac{1}{2}$ ، $P(B) = \frac{1}{4}$ ، $P(A \cap B) = \frac{1}{10}$ فاحسب $P(B \backslash A)$ و $P(A \backslash B)$

الحل:

$$P(A \backslash B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{1/10}{1/4} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$$

$$P(B \backslash A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{1/10}{1/2} = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$$

مثال: إذا كانت $P(B\cap A')=\frac{2}{6}$ ، $P(A\cap B)=\frac{1}{6}$ ، $P(A\cap B')=\frac{1}{3}$

احسب كلاً مما يلي:

1) $P(A)$: $P(A\cap B')=\frac{1}{3} \Rightarrow P(A)-P(A\cap B)=\frac{1}{3}$

$\Rightarrow P(A)-\frac{1}{6}=\frac{1}{3} \Rightarrow P(A)=\frac{1}{2}$

2) $P(B)$: $P(B\cap A')=\frac{2}{6} \Rightarrow P(B)-P(A\cap B)=\frac{2}{6}$

$\Rightarrow P(B)=P(A\cap B)+\frac{2}{6}=\frac{1}{6}+\frac{2}{6}=\frac{1}{2}$

3) $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$

$=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{2}{6}=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$

4) $P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{1/6}{1/2}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$

مثال: إذا كانت $P(A)=\frac{1}{3}$ ، $P(B|A)=\frac{1}{4}$

$P(B|A')=\frac{4}{5}$

فاحسب $P(B)$؟

الحل: $P(B)=P(B\cap A)+P(B\cap A')$ (*)

$P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)} \Rightarrow \frac{1}{4}=\frac{P(A\cap B)}{1/3}$

$\Rightarrow P(A\cap B)=\frac{1}{12}$ ، $P(B|A')=\frac{4}{5}$

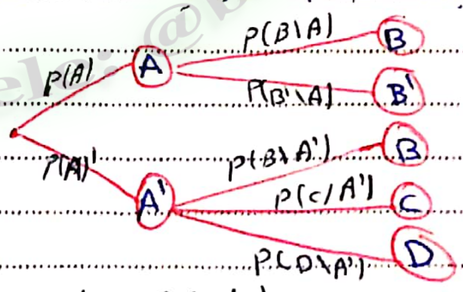
$\Rightarrow \frac{P(B\cap A')}{P(A')}=\frac{4}{5} \Rightarrow P(B\cap A')=\frac{4}{5}\times P(A')$

$\Rightarrow P(B\cap A')=\frac{4}{5}\times\frac{2}{3}=\frac{8}{15}$

بالتعويض في (*): $P(B)=\frac{1}{12}+\frac{8}{15}=\frac{37}{60}$

المخطط الشجري

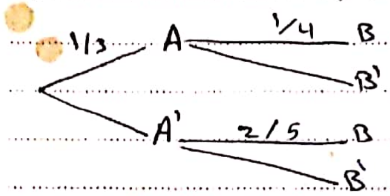
تمثل بعض التجارب العشوائية أحداثها بحسب الشكل التالي:



ملاحظة: لا نستخدم مخطط الشجرة في حالة السحب معاً.

180/3

مثال: استناداً إلى التمثيل الشجري المبين في الشكل المجاور.



عين $P(A')$ و $P(B'|A)$ و $P(B'|A')$ ثم استنتج $P(A\cap B)$, $P(A\cap B')$, $P(A'\cap B)$, $P(A'\cap B')$.

الحل

- $P(A')=1-P(A)=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$
- $P(B'|A)=1-P(B|A)=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$
- $P(B'|A')=1-P(B|A')=1-\frac{2}{5}=\frac{3}{5}$
- $P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B|A)=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{12}$
- $P(A\cap B')=P(A)\cdot P(B'|A)=\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{4}=\frac{3}{12}$
- $P(A'\cap B)=P(A')\cdot P(B|A')=\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{5}=\frac{4}{15}$
- $P(A'\cap B')=P(A')\cdot P(B'|A')=\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{5}=\frac{2}{5}$

مثال: يحوي صندوق على عشرين كرة 7 منها بيضاوات، نسحب منه ثلاث كرات دفعة واحدة، ما احتمال أن تكون الكرات الثلاثة بيضاوات؟

الحل

عدد عناصر فضاء العينة Ω

$n(\Omega)=\binom{20}{3}=\frac{20\times19\times18}{3\times2\times1}=1140$

A الحدث الدال على أن الكرات الثلاثة بيضاء

$n(A)=\binom{7}{3}=\frac{7\times6\times5}{3\times2\times1}=35$

ومنه فإن احتمال A يكون

$P(A)=\frac{n(A)}{n(\Omega)}=\frac{35}{1140}=\frac{7}{228}$

ص 180 س5

مثال: يقوم مصنع ورشتين A و B لتصنيع المصابيح، عند ما ورد طلب لعدد من المصابيح قدره 2000 مصباح، صنعت الورشة A منها 1200 مصباح وصنعت البقية الورشة B، هناك نسبة 4% من مصابيح A معطوبة في حين تكون نسبة 3% من مصابيح B معطوبة. نسحب عشوائياً مصباح من الطلب.

نرمز بـ A للحدث "المصباح مصنوع في A"

نرمز بـ B للحدث "المصباح مصنوع في B"

ونرمز بـ D الحدث أن المصباح معطوب.

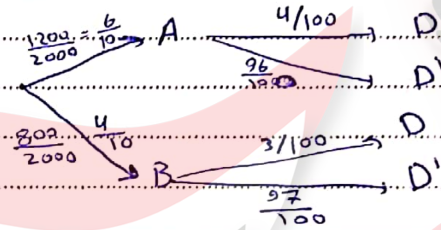
1) أعط تمثيل شجرياً للتجربة؟

2) احسب احتمال أن يكون المصباح معطوب؟

3) إذا كان المصباح معطوب فما احتمال أن يكون مصنوع في A؟

الحل:

1)



2) $P(D) = P(A\cap D) + P(B\cap D)$

$= P(A).P(D|A) + P(B).P(D|B)$

$= \frac{6}{10} . \frac{4}{100} + \frac{4}{10} . \frac{3}{100} = \frac{36}{1000}$

3) $P(A|D) = \frac{P(A\cap D)}{P(D)} = \frac{\frac{6}{10}\times\frac{4}{100}}{\frac{36}{1000}} = \frac{2}{3}$

مثال $\frac{6}{180}$: في مدرسة يمارس 30% من الطلاب لعبة كرة المضرب، ونعلم أن مدرستنا تضم نسبة 60% من الذكور و 55% من هؤلاء لا يلعبون كرة المضرب، ما احتمال أن تكون طالبة مختارة عشوائياً من بين طالبات المدرسة من بين اللاتي لا يمارسن لعبة كرة المضرب؟

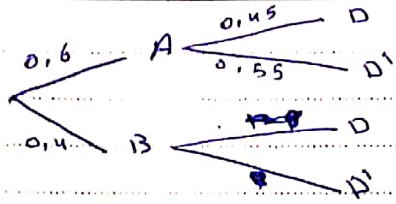
الحل:

A: الحدث أن يكون ذكر $P(A) = 0.6$

B: حدث أن يكون أنثى $P(B) = 0.4$

D: حدث أن يمارس لعبة كرة المضرب $P(D) = 0.3$

ويكون مخطط الشجرة هنا



$P(D') = P(A\cap D') + P(B\cap D')$

$0.7 = P(A).P(D'|A) + \cancel{P(B)} P(B\cap D')$

$0.7 = 0.6\times 0.55 + P(B\cap D')$

$\Rightarrow P(B\cap D') = 0.7 - 0.33 = 0.37$

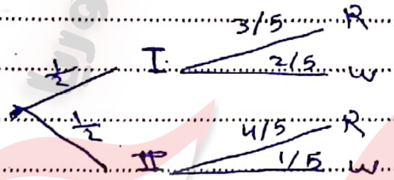
مثال: لدينا صندوقات الصندوق I يحوي 5 كرات (4R, 1W) والثاني II يحوي 5 كرات (3R, 2W). نختار صندوقاً عشوائياً ونسحب منه كرة واحدة والمطلوب احسب احتمال كل مما يلي؟

A: الحدث الدال على أن الكرة المسحوبة هي من I

B: الحدث الدال على أن الكرة المسحوبة هي من II

C: الحدث الدال على أن الكرة المسحوبة بيضاء.

الحل:



$P(A) = \frac{1}{2}\times\frac{3}{5} = \frac{3}{10}$

$P(B) = \frac{1}{2} . \frac{4}{5} = \frac{4}{10}$

$P(C) = \frac{1}{2}\times\frac{2}{5} + \frac{1}{2}\times\frac{1}{5} = \frac{3}{10}$

7/180

مثال: نملأ عشوائياً كل خانة من الخانات ☐☐☐☐ بالعدد 1 أو 0، احسب احتمال أن يكون المجموع مساوياً للصفر، واحتمال أن لا يظهر العدد ذاته في خانتين متجاورتين

الحل: $n(\Omega) = 2^4 = 16$

A: الحدث الدال على أن يكون مجموع مساوياً للصفر

$n(A) = \binom{4}{2} = 6 \Rightarrow P(A) = \frac{6}{16} = \frac{3}{8}$

B: الحدث الدال على أن لا يظهر عدد ذاته في خانتين متجاورتين

$n(B) = 2\times1\times1\times1 = 2 \Rightarrow P(B) = \frac{2}{16} = \frac{1}{8}$

نشاط 2 ص 192 + مسائل الحت 1+5+8+16

المتحولات العشوائية

ليكن Ω فضاء العينة لتجربة عشوائية نسمي متحولاً عشوائياً كل تابع منطلقه Ω ومستقره مجموعة جزئية من R (قاعدة ربطه تمييت بحسب السؤال).

نفرض أن X متحول عشوائي مجموعة قيمه $I = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ فإن قانون احتماله هو التابع المعرف على I ويقرن بكل قيمة x_i من I العدد $p(X = x_i) = p_i$ ويمثل بالجدول:

x	x_1	x_2	......	x_n
$p(X = x_i)$	p_1	p_2	......	p_n

تدرب ص 184

مثال: في تجربة إلقاء حجر نرد مرة واحدة فقط، نفرض أن X متغير عشوائي يأخذ القيمة $(+1)$ إذا ظهر عدد زوجي، والقيمة (-1) إذا ظهر عدد فردي، اكتب مجموعة قيم X؟

الحل: $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$\Rightarrow X = \{+1, -1\}$

مثال: يحوي صندوق 8 كرات 3 حمراء و 2 بيضاء و 3 سوداء، نسحب من الصندوق كرتين معاً، ونفرض أن X المتغير العشوائي الدال على عدد الكرات الحمراء المسحوبة، اكتب مجموعة قيم X؟

الحل: $\Omega = \{(R,R), (R, \_), (\_, \_)\}$

$\Rightarrow X = \{2, 1, 0\}$

مثال: في تجربة رمي قطعة نقود مرتين متتاليتين نفرض أن X متغير عشوائي يدل على عدد النقاط التي سنحصل عليها عند الرمي حيث ينال الرامي $(+1)$ نقطة إذا ظهر شعار، (-2) إذا ظهرت كتابة، اكتب مجموعة قيم X؟

الحل:

$\Omega = \{(H,H), (H,T), (T,H), (T,T)\}$

$\Rightarrow X = \{2, -1, -4\}$

- التوقع الرياضي: يعطى المتحول العشوائي بالعلاقة

$$E(X) = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \dots + x_n p_n = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i$$

- التباين: يعطى المتحول العشوائي بالعلاقة

$$V(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 p_i - (E(X))^2 = E(X^2) - (E(X))^2$$

- الانحراف المعياري: هو الجذر التربيعي للتباين.

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$$

مثال: في تجربة رمي قطعة نقود ثلاث مرات نعرف متحول عشوائي يدل على عدد الشعارات الظاهرة، أوجد قيم المتحول العشوائي والجدول قانونه الاحتمالي والانحراف المعياري وتباينه؟

الحل:

$\Omega = \{(H,H,H), (H,H,T), (H,T,H), (T,H,H), (H,T,T), (T,H,T), (T,T,H), (T,T,T)\}$

$\Rightarrow X = \{0, 1, 2, 3\}$

$P(X=0) = \frac{1}{8}$, $P(X=1) = \frac{3}{8}$

$P(X=2) = \frac{3}{8}$, $P(X=3) = \frac{1}{8}$

X	0	1	2	3
$p(X = x)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

التوقع:

$E(X) = 0\times\frac{1}{8} + 1\times\frac{3}{8} + 2\times\frac{3}{8} + 3\times\frac{1}{8} = \frac{12}{8}$

$E(X) = \frac{3}{2}$

التباين:

$V(X) = 0\times\frac{1}{8} + 1\times\frac{3}{8} + 4\times\frac{3}{8} + 9\times\frac{1}{8} - \frac{9}{4}$

$V(X) = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$

$\Rightarrow \sigma(X) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

أ.محمد البتور 0932325694

1 مثال: نلقي حجر نرد متوازن وجوهه مرقمة من 1 إلى 6 نحصل على درجة إذا ظهر الوجه 1 ، نحصل على 6 درجات إذا ظهر الوجه 6 ، ونخسر درجتين في بقية الحالات ، ليكن X المتحول العشوائي الذي يمثل الدرجة التي نحصل عليها ، اكتب قانون الاحتمالي للمتحول العشوائي X ، واحسب كلاً من $E(X)$ ، $V(X)$ ، $\sigma(X)$

الحل: $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$\Rightarrow X(\Omega) = \{+1, -2, 6\}$

$p(X=1) = \frac{\{1\}}{6}$, $p(X=6) = \frac{1}{6}$, $p(X=-2) = \frac{4}{6}$

x_i	1	-2	6
p_i	$\frac{1}{6}$	$\frac{4}{6}$	$\frac{1}{6}$
$x_i p_i$	$\frac{1}{6}$	$\frac{-8}{6}$	$\frac{6}{6}$

$$\Rightarrow E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i = \frac{1}{6} - \frac{8}{6} + \frac{6}{6} = -\frac{1}{6}$$

$$V(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 p_i - (E(x))^2$$

$$= 1 \cdot \frac{1}{6} + 4 \cdot \frac{4}{6} + 36 \cdot \frac{1}{6} - \left(-\frac{1}{6}\right)^2$$

$$= \frac{1}{6} + \frac{16}{6} + \frac{36}{6} - \frac{1}{36} = \frac{317}{36}$$

$$\sigma(x) = \sqrt{V(x)} = \frac{\sqrt{317}}{6}$$

2 مثال: يحتوي صندوق على 5 كرات ، 3 سوداء و 2 بيضاء ، نسحب من الصندوق عشوائياً وفي آن معاً كرتين من الصندوق ، ونسمي X متحول عشوائي الذي يقرن بكل نتيجة سحب عدد الكرات البيضاء المسحوبة ، عين مجموعة قيم X واكتب قانونه الاحتمالي ، واحسب توقعه وتباينه

الحل: $\Omega = \{(B, B), (B, W), (W, W)\}$

$X(\Omega) = \{0, 1, 2\}$

$P_1 = p(x=0) = \frac{\binom{3}{2}}{\binom{5}{2}} = \frac{3}{10}$, $P_2 = (p=1) = \frac{\binom{3}{1}\binom{2}{1}}{\binom{5}{2}} = \frac{6}{10}$

$P_3 = p(x=2) = \frac{\binom{2}{2}}{\binom{5}{2}} = \frac{1}{10}$

x_i	0	1	2
p_i	$\frac{3}{10}$	$\frac{6}{10}$	$\frac{1}{10}$
$x_i p_i$	0	$\frac{6}{10}$	$\frac{2}{10}$

$$E(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$$

$$V(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 p_i - (E(x))^2 = 1 - \frac{16}{25} = \frac{9}{25}$$

$$\Rightarrow \sigma(x) = \sqrt{V(x)} = \frac{3}{5}$$

3 مثال: يحتوي الصندوق على 5 كرات ، 3 سوداء و 2 بيضاء ، نسحب من الصندوق عشوائياً كرتين على التتالي دون إعادة ، أعد طلب السؤال السابق ؟

الحل: $n(\Omega) = P_5^2 = 4 \times 5 = 20$

$\Omega = \{(B, B), (B, W), (W, B), (W, W)\}$

$X(\Omega) = \{0, 1, 2\}$

$$P_1 = p(X=0) = \frac{P_3^2}{P_5^2} = \frac{6}{20} = \frac{3}{10}$$

$$P_2 = p(x=1) = \frac{P_3^1 \cdot P_2^1 \times 2}{P_5^2} = \frac{12}{20} = \frac{6}{10}$$

$$P_3 = p(x=2) = \frac{P_2^2}{P_5^2} = \frac{2}{20} = \frac{1}{10}$$

x_i	0	1	2
p_i	$\frac{3}{10}$	$\frac{6}{10}$	$\frac{1}{10}$
$x_i p_i$	0	$\frac{6}{10}$	$\frac{2}{10}$

$$E(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i = \frac{8}{10} = \frac{4}{10}$$

$$V(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 p_i - (E(x))^2$$

$$= 1 - \frac{16}{25} = \frac{9}{25}$$

$$\Rightarrow \sigma(x) = \sqrt{V(x)} = \frac{3}{5}$$

أ.محمد البتور 0932325694

مثال 4 / 184: صندوق فيه 5 كرات، اثنتان تحملان الرقم 1، واثنتان تحملان الرقم 2 وواحدة تحمل الرقم 3، نسحب عشوائياً وفي آنٍ معاً كرتين من الصندوق، نسمي X المتغير العشوائي الذي يقرن بكل نتيجة سحب مجموع أرقام الكرتين المسحوبتين. عين مجموعة قيم X، واكتب قانونه الاحتمالي واحسب توقعه وتباينه؟

1 1 2 2 3

$X = \{2, 3, 4, 5\}$

$\Omega = \{(1,1), (1,2), (1,3), (2,2), (2,3)\}$

$P_1 = p(X=2) = \dfrac{\binom{2}{2}}{\binom{5}{2}} = \dfrac{1}{10}$

$P_2 = p(X=3) = \dfrac{\binom{2}{1}\binom{2}{1}}{\binom{5}{2}} = \dfrac{4}{10}$

$P_3 = p(X=4) = \dfrac{\binom{2}{1}\binom{1}{1}}{\binom{5}{2}} + \dfrac{\binom{2}{2}}{\binom{5}{2}} = \dfrac{2}{10} + \dfrac{1}{10} = \dfrac{3}{10}$

$P_4 = p(X=5) = \dfrac{\binom{2}{1}\binom{1}{1}}{\binom{5}{2}} = \dfrac{2}{10}$

x_i	2	3	4	5
p_i	$\frac{1}{10}$	$\frac{4}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{2}{10}$
$x_i p_i$	$\frac{2}{10}$	$\frac{12}{10}$	$\frac{12}{10}$	$\frac{10}{10}$

$E(x) = \sum_{i=1} x_i p_i = \dfrac{36}{10} = \dfrac{18}{5}$

$V(x) = \sum_{i=1} x_i^2 p_i - (E(x))^2$

$= \dfrac{4}{10} + \dfrac{36}{10} + \dfrac{48}{10} + \dfrac{50}{10} - \left(\dfrac{18}{5}\right)^2 = \dfrac{21}{25}$

مثال 5: أعد السؤال السابق بافتراض أن السحب يجري على التتالي دون إعادة؟

$\Omega = \{(1,1), (1,2), (1,3), (2,2), (2,3)\}$

$X(\Omega) = \{2, 3, 4, 5\}$

$P_1 = p(X=2) = \dfrac{P_2^2}{P_5^2} = \dfrac{2}{20} = \dfrac{1}{10}$

$P_2 = p(X=3) = 2 \times \dfrac{P_2^1 \cdot P_2^1}{P_5^2} = \dfrac{8}{20} = \dfrac{4}{10}$

$P_3 = p(X=4) = 2 \times \dfrac{P_2^1 P_1^1}{P_5^2} + \dfrac{P_2^2}{P_5^2} = \dfrac{3}{10}$

$P_4 = p(X=5) = 2 \times \dfrac{P_2^1 \cdot P_1^1}{P_5^2} = \dfrac{2}{10}$

x_i	2	3	4	5
p_i	$\frac{1}{10}$	$\frac{4}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{2}{10}$
$x_i p_i$	$\frac{2}{10}$	$\frac{12}{10}$	$\frac{12}{10}$	$\frac{10}{10}$
$x_i^2 p_i$	$\frac{4}{10}$	$\frac{36}{10}$	$\frac{48}{10}$	$\frac{50}{10}$

$\Rightarrow E(x) = \dfrac{18}{5}$

$V(x) = \dfrac{21}{25}$ ، $\sigma(x) = \dfrac{\sqrt{21}}{5}$

مثال 6: نلقي حجر نرد متوازن مرتين متتاليتين، ونسجل رقمي الوجهين الظاهرين، وليكن X المتحول العشوائي الذي يقرن بكل نتيجة للتجربة مجموع رقمي الوجهين الظاهرين، اكتب القانون الاحتمالي للمتحول العشوائي X، واحسب توقعه الرياضي وتباينه وانحرافه المعياري

$X = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$

x_i	2	3	4	5	6	7
p_i	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$

8	9	10	11	12
$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

$E(x) = \dfrac{252}{36} = 7$

$V(x) = \dfrac{35}{6}$

$\Rightarrow \sigma(x) = \sqrt{\dfrac{35}{6}}$

تدرب ص192 ا + 4 و 9 و 15 تمرينات ومسائل

الاستقلال الاحتمالي لمتحولين عشوائيين

ليكن X , Y متحولين عشوائيين معرفين على فضاء العينة ذاته Ω، يأخذ X القيم $x_1, x_2, ..., x_n$

ويأخذ Y القيم $y_1, y_2, ..., y_n$

إن تعريف قانون الزوج (X,Y) هو إعطاء الاحتمال p_{ij} لكل حدث $X=x_i$ و $Y=y_j$

$$p_{ij} = p((X=x_i)\cap(Y=y_j))$$

ويكون جدول القانون الاحتمالي:

$X \backslash Y$	y_1	y_2	...	y_n	قانون X
x_1	$p(X=1 \cap Y=1)$				$p(X=1)$
x_2					
$\vdots$					
x_n					
قانون Y	$p(Y=1)$				$\sum p = 1$

تعريف: نقول إن المتحولين العشوائيين X , Y مستقلان احتمالياً إذا كان الحدثان $(X=x_i)$ و $(Y=y_j)$ مستقلين احتمالياً أياً كانت i و j وهذا يعني أنه مهما كانت i, j:

$$p((X=x_i)\cap(Y=y_j)) = p(X=x_i) \cdot p(Y=y_j)$$

تمرين 1 ص187

نجد في الجدول التالي القانون الاحتمالي لزوج (X,Y) من المتحولات العشوائية، أكمله وبين إذا كان المتحولان X و Y مستقلين احتمالياً.

$X \backslash Y$	0	1	2	قانون X
0	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	
1	$\frac{17}{60}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{24}$	
قانون Y				

الحل:

$P(X=0) = \frac{1}{20} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{12}{40}$

$P(X=1) = \frac{17}{60} + \frac{3}{8} + \frac{1}{24} = \frac{28}{40}$

$P(Y=0) = \frac{1}{20} + \frac{17}{60} = \frac{1}{3}$

$P(Y=1) = \frac{1}{8} + \frac{3}{8} = \frac{1}{2}$ ، $P(Y=2) = \frac{1}{8} + \frac{1}{24} = \frac{1}{6}$

$X \backslash Y$	0	1	2	قانون X
0	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{12}{40}$
1	$\frac{17}{60}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{28}{40}$
قانون Y	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	1

ولنأخذ $(X=0 , Y=0)$ نجد $p_{11} = \frac{1}{20}$

$p((X=0)\cap(Y=0)) = \frac{1}{20}$

$p(X=0) \times p(Y=0) = \frac{12}{40} \times \frac{1}{3} = \frac{4}{40} = \frac{1}{10}$

ومنه المتحولان X , Y غير مستقلين احتمالياً.

تمرين 2 ص187

أكمل الجدول المجاور الذي يمثل القانون الاحتمالي لزوج من المتحولات العشوائية (X,Y) علماً أن المتحولين مستقلان احتمالياً.

$X \backslash Y$	0	1	2	قانون X
0				0,4
1			0,04	
2				0,4
قانون Y	0,3			

الحل:

$X \backslash Y$	0	1	2	قانون X
0	0,12	0,2	0,08	0,4
1	0,06	0,1	0,04	0,2
2	0,12	0,2	0,08	0,4
قانون Y	0,3	0,5	0,2	

تمرين 3 ص187 +

7 و 11 من تمرينات ومسائل

المتحولات العشوائية الحدانية

نقول إن المتحول العشوائي X يتبع قانوناً حدانياً بوسيطين n و p عندما يحقق الشرطين

X يأخذ قيمة في المجموعة $\{0,1,\dots,n\}$

وأياً كان العدد الطبيعي K حيث $0 \le K \le n$

$$p(X=K) = \binom{n}{K} p^{K} q^{n-K} \quad ; \quad q = 1-p$$

نرمز عادة إلى هذا القانون بالرمز $B(n,p)$

مبرهنة: ليكن X متحولاً عشوائياً يتبع قانوناً حدانياً وسيطاه n و p، عندئذ يعطى توقع X وتباينه بالصيغتين

$$V(X) = n\,q\,p \quad ; \quad q = 1-p$$

$$E(X) = n\,p$$

تدريب ص192

مثال: نلقي خمس قطع نقود متوازنة في آن واحد. ما احتمال الحصول على الوجه H ثلاث مرات فقط؟

الحل: إن هذه التجربة برنولية وسيطها $p = p(H) = \frac{1}{2}$

$K \in \{0,1,2,3,4,5\} \quad ; \quad n=5$

$$p(X=3) = \binom{5}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{5-3}$$

$$= 10 \cdot \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{4} = \frac{5}{16}$$

تدريب: نلقي 6 مرات حجر نرد متوازن، وليكن A الحدث الدال على الحصول مرتين على الأقل على 5 أو 6. ما احتمال وقوع الحدث A؟

الحل: التجربة برنولية وسيطاها

$n = 6 \quad , \quad p = p(5 \text{ أو } 6) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

$\Rightarrow q = 1 - p = \frac{2}{3}$

A: الحدث الدال على الحصول على 5 أو 6 مرتين على الأقل

$$p(A') = p(X=0) + p(X=1)$$

$$= \binom{6}{0}\left(\frac{1}{3}\right)^{0}\left(\frac{2}{3}\right)^{6} + \binom{6}{1}\left(\frac{1}{3}\right)^{1}\left(\frac{2}{3}\right)^{5} = \frac{256}{729}$$

$$\Rightarrow p(A) = 1 - p(A') = 1 - \frac{256}{729} = \frac{473}{729}$$

تمرين: نلقي حجر نرد متوازن 6 مرات متتالية. ما احتمال الحصول على العدد 6 ثلاث مرات فقط؟

الحل: تجربة برنولية وسيطاها

$n = 6 \quad , \quad p = p(6) = \frac{1}{6}$

ولدينا $K = 3$ عدد مرات ظهور 6

$$p(X=3) = \binom{6}{3}\left(\frac{1}{6}\right)^{3}\left(\frac{5}{6}\right)^{3}$$

$$= \frac{6\times5\times4}{3\times2\times1} \times \frac{1}{216} \times \frac{125}{216} = \frac{2500}{46656}$$

تمرين: نلقي حجر نرد متوازن 8 مرات متتالية. ليكن A الحدث «الحصول على عدد زوجي 3 مرات على الأقل». ما احتمال A؟

الحل: لدينا $n = 8 \quad , \quad p = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow q = \frac{1}{2} \quad ; \quad K \ge 3$

$$p(A') = p(X=0) + p(X=1) + p(X=2)$$

$$= \binom{8}{0}\left(\frac{1}{2}\right)^{0}\left(\frac{1}{2}\right)^{8} + \binom{8}{1}\left(\frac{1}{2}\right)^{1}\left(\frac{1}{2}\right)^{7} + \binom{8}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{6}$$

$$= \frac{1}{256} + \frac{8}{256} + \frac{28}{256} = \frac{37}{256}$$

$$\Rightarrow p(A) = 1 - p(A') = \frac{219}{256}$$

تمرين 4: يتواجه لاعبان A و B في لعبة كرة المضرب في مباراة مكونة من 9 أدوار. يكسب A الدور الواحد باحتمال 0.6. يربح المباراة اللاعب الذي يكسب أكبر عدد من الأدوار. ما احتمال أن يربح B المباراة؟

الحل: تجربة برنولية وسيطاها

$n = 9 \quad , \quad p = 0.6 \Rightarrow q = 0.4$

يربح B إذا خسر A خمس مرات أو أكثر

$$p(B) = p(X \le 4) = p(X=0) + p(X=1) + p(X=2) + p(X=3) + p(X=4)$$

$$= \frac{266567680}{1000000000} \approx 0.266$$

14 + 15 من تمرينات ومسائل الاحتمالات والمتتاليات 18 + 13 + 6

تمرين: صندوق يحوي على 3 كرات حمراء و 4 كرات سوداء، نسحب عشوائياً من الصندوق ثلاث كرات في آن معاً، وليكن A الحدث الدال على الحصول على كرة حمراء على الأقل، B الحصول على كرتين سوداوين على الأقل، احسب الاحتمالات التالية

1) A ، B ، $A|B$

2) إذا كان X متحول عشوائي يدل على عدد الكرات الحمراء المسحوبة، اكتب جدول قانونه الاحتمالي.

الحل: $3R$, $4B$

$\Omega = \{(R,R,R),(R,R,B),(R,B,B),(B,B,B)\}$

$n(\Omega) = \binom{7}{3} = 35$

$$p(A) = \frac{\binom{3}{3}}{\binom{7}{3}} + \frac{\binom{3}{2}\binom{4}{1}}{\binom{7}{3}} + \frac{\binom{3}{1}\binom{4}{2}}{\binom{7}{3}} = \frac{31}{35}$$

$B = \{(R,B,B),(B,B,B)\}$

$$p(B) = \frac{\binom{3}{1}\binom{4}{2}}{\binom{7}{3}} + \frac{\binom{4}{3}}{\binom{7}{3}} = \frac{22}{35}$$

$$p(A\cap B) = \frac{\binom{3}{1}\binom{4}{2}}{\binom{7}{3}} = \frac{18}{35}$$

$$P(A|B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)} = \frac{18}{22}$$

2) $X = \{0,1,2,3\}$

$\Rightarrow p_0 = p(x=0) = \frac{\binom{4}{3}}{\binom{7}{3}} = \frac{4}{35}$ ، $P(x=1) = \frac{18}{35}$

$p(x=2) = \frac{12}{35}$ ، $p(x=3) = \frac{1}{35}$

x_i	0	1	2	3
p_i	4/35	18/35	12/35	1/35
$x_i p_i$	0	18/35	24/35	3/35

$\Rightarrow E(x) = \frac{9}{7}$ ، $E(x^2) = \frac{15}{7}$

$$V(x) = E(x^2) - (E(x))^2 = \frac{24}{49}$$

تمرين: يحتوي صندوق على 5 كرات حمراء و 5 كرات خضراء، نسحب عشوائياً وفي آن معاً ثلاث كرات، نتأمل المتحول العشوائي X الذي يأخذ القيمة 5 إذا كانت نتيجة السحب 3 كرات حمراء (الحدث R_3) ويأخذ القيمة 3 إذا كانت نتيجة السحب كرتان حمراوان وكرة خضراء (R_2) ويأخذ القيمة 0 في بقية الحالات.

1) احسب $P(R_3)$ ، $P(R_2)$

2) عين القانون الاحتمالي للمتحول X واحسب توقعه وتباينه؟

الحل: $X = \{0,3,5\}$

$R_3 : (x=5) \Rightarrow P(R_3) = P(X=5) = \frac{\binom{5}{3}}{\binom{10}{3}} = \frac{1}{12}$

$R_2 : (x=3) \Rightarrow P(R_2) = p(X=3) = \frac{\binom{5}{2}\binom{5}{1}}{\binom{10}{3}} = \frac{5}{12}$

$\Rightarrow p(X=0) = 1 - p(X=5) - p(X=3) = \frac{6}{12}$

x_i	0	3	5
p_i	6/12	5/12	1/12

$\Rightarrow E(X) = \frac{5}{3}$ ، $V(X) = \frac{55}{18}$

الحل 1/198

1) A: إما كرتين حمراوين أو كرتين سوداوين

$$\Rightarrow p(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{\binom{2}{2}+\binom{3}{2}}{\binom{5}{2}} = \frac{2}{5}$$

2) $B = \{(1,2),(2,1)\}$

$$\Rightarrow p(B) = \frac{\binom{2}{1}\times\binom{2}{1}}{\binom{5}{2}} = \frac{2}{5}$$

3) $$p(A\cap B) = \frac{\binom{2}{2}+\binom{2}{2}}{\binom{5}{2}} = \frac{2}{10}$$

$$\Rightarrow p(B|A) = \frac{P(A\cap B)}{P(A)} = \frac{2}{10}\times\frac{5}{2} = \frac{1}{2}$$

انتهت