دورة 2023 الدورة الأولى: (80 درجة)

ساق شاقولية مهملة الكتلة، طولها $L = 0.12m$ تثبت في منتصفها كتلة نقطية $m_1 = 0.5kg$ وفي طرفها السفلي كتلة نقطية $m_2 = 0.5kg$ لتؤلف الجملة نواساً ثقلياً مركباً يمكن أن ينوس في مستوٍ شاقولي حول محور أفقي مارّ من الطرف العلوي للساق كما في الشكل المجاور.

المطلوب:

1- احسب دور نوساتها صغيرة السعة.

2- نزيح الجملة عن وضع توازنها بزاوية $\theta_{max} > 0.24\text{rad}$ ونتركها دون سرعة ابتدائية، فتكون السرعة الخطية لمركز عطالة جملة النواس لحظة مروره بالشاقول $v_c = 0.9\pi\ m.s^{-1}$

a) احسب السرعة الخطية للكتلة النقطية m_2 لحظة المرور بالشاقول.

b) استنتج قيمة الزاوية θ_{max}. $(\boldsymbol{g = 10m.s^{-2}, \pi^2 = 10})$

معطيات المسألة:

$$m_2 = 5 \times 10^{-1}kg \quad , \quad m_1 = 5 \times 10^{-1}kg \quad , \quad L = 12 \times 10^{-1}m$$

الحل:

.1

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{\overbrace{I_{\Delta_{\text{جملة}}}}^{?}}{\underbrace{m_{\text{جملة}}}_{?}\ g\ \underbrace{d}_{?}}} \quad \dots (*) \qquad , \qquad m_{\text{جملة}} = m_1 + m_2$$

$$I_{\Delta_{\text{جملة}}} = I_{\Delta_{\text{ساق}}} + I_{\Delta/m1} + I_{\Delta/m2}$$

$$I_{\Delta_{\text{جملة}}} = 0 + m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 \qquad ; \quad r_1 = \frac{L}{2} \quad , \quad r_2 = L$$

$$I_{\Delta_{\text{جملة}}} = 5 \times 10^{-1} \left(\frac{12 \times 10^{-1}}{2}\right)^2 + 5 \times 10^{-1} \times (12 \times 10^{-1})^2$$

$$I_{\Delta_{\text{جملة}}} = 5 \times 10^{-1} \times (6 \times 10^{-1})^2 + 5 \times 10^{-1}(12 \times 10^{-1})^2$$

$$I_{\Delta_{\text{جملة}}} = 180 \times 10^{-3} + 720 \times 10^{-3}$$

$$I_{\Delta_{\text{جملة}}} = (180 + 720) \times 10^{-3}$$

$$I_{\Delta_{\text{جملة}}} = 900 \times 10^{-3} = 9 \times 10^{-1}$$

$$\boxed{I_{\Delta_{\text{جملة}}} = 0.9 kgm^2}$$

$$m_{\text{جملة}} = m_1 + m_2$$

$$m_{\text{جملة}} = 5 \times 10^{-1} + 5 \times 10^{-1} = (5 + 5) \times 10^{-1}$$

$$m_{\text{جملة}} = 10 \times 10^{-1}$$

$$\boxed{m_{\text{جملة}} = 1kg}$$

$$d = \frac{\sum m_i r_i}{\sum m_i}$$

$$d = \frac{+m_1 r_1 + m_2 r_2}{m_1 + m_2}$$

$$d = \frac{\overbrace{5\times10^{-1}\times6\times10^{-1}} + \overbrace{5\times10^{-1}\times12\times10^{-1}}}{1} = \frac{30\times10^{-2}+60\times10^{-2}}{1}$$

$$d = (30+60)\times10^{-2} = 90\times10^{-2} = 9\times10^{-1}$$

$$\boxed{d = 0.9\ m}$$

الآن نعوض ماسبق في علاقة الدور (*)

$$\pi^2 = 10 \Longrightarrow \pi = \sqrt{10}$$

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{9\times10^{-1}}{1\times10\times9\times10^{-1}}}$$

$$\boxed{T_0 = 2\ S}$$

.2

$$\theta_{max} > 0.24rad \qquad , \qquad v_c = 9\times10^{-1}\pi\ m.s^{-1}$$

a)

$$v_{m_2} = \overbrace{r_2}^{\checkmark}\ \overbrace{\omega}^{?} \qquad ; \quad r_2 = L$$

r_2: بعد m_2 عن محور الدوران (o)

$$v_c = d.\omega$$

طريقة الاولى

$$\frac{v_{m_2}}{v_c}=\frac{r_2\omega}{d\omega}$$

$$\frac{v_{m_2}}{9\times10^{-1}\pi}=\frac{12\times10^{-1}}{9\times10^{-1}}$$

$$v_{m_2}=\frac{12\pi\times10^{-1}}{1}$$

$$\boxed{v_{m_2}=12\pi\times10^{-1}\ m.s^{-1}}$$

ملاحظة:
إن السرعة الزاوية لكافة نقاط النواس نفسها.

طريقة ثانية

$$\omega=\frac{v_c}{d}=\frac{9\times10^{-1}\pi}{9\times10^{-1}}=\pi\ rad.s^{-1}$$

$$v_{m_2}=L.\omega$$

$$v_{m_2}=12\times10^{-1}\times\pi=12\pi\times10^{-1}\ m.s^{-1}$$

b)

نطبق نظرية الطاقة الحركية بين وضعين:

الوضع الأول: لحظة تركها من دون سرعة ابتدائية $\theta=\theta_{max}$

الوضع الثاني: لحظة المرور بالشاقول $\theta=0$

$$E_{k_1} = 0$$

لأنها تُركت من دون سرعة ابتدائية

$$\bar{W}_{\vec{R}} = 0$$

لأنَّ نقطة تأثيرها لا تنتقل

$$\Delta \bar{E}_{k_{1\to2}} = \sum \bar{W}_{\vec{F}}$$

$$E_{k_2} - E_{k_1} = \bar{W}_{\vec{R}} + \bar{W}_{\vec{W}}$$

$$\frac{1}{2} \mathrm{I}_{\Delta_{\text{جملة}}} w^2 - 0 = 0 + m_{\text{جملة}} gh$$

ولكن $h = d(1 - \cos\theta_{max})$,

$$\frac{1}{2} \mathrm{I}_{\Delta_{\text{جملة}}} w^2 = m_{\text{جملة}} gd(1 - \cos\theta_{max})$$

$$(1 - \cos\theta_{max}) = \frac{\frac{1}{2} \mathrm{I}_{\Delta_{\text{جملة}}} \omega^2}{m_{\text{جملة}} gd}$$

$$(1 - \cos\theta_{max}) = \frac{9 \times 10^{-1} \times \pi^2}{2 \times 1 \times 10 \times 9 \times 10^{-1}}$$

$$(1 - \cos\theta_{max}) = \frac{1}{2}$$

$$\cos\theta_{max} = 1 - \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \cos\theta_{max} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \boxed{\theta_{max} = \frac{\pi}{3} rad}$$

****

دورة 2022 الدورة الأولى: (85 درجة)

يتألف نواس ثقلي مركب من ســاق شــاقولية مهملة الكتلة، طولها $l = 1m$ ، تحمل في نهايتها العلوية كتلة نقطية $m_1 = 0.3kg$ وتحمل في نهايتها الســفلية كتلة نقطية $m_2 = 0.9kg$، ونجعلها تهتز حول محور أفقي مار من منتصفها .

المطلوب:

1- احسب دور النواس في حالة السعات الزاوية الصغيرة.
2- احسب طول النواس البسيط المواقت له النواس.
3- نزيح الساق عن وضع توازنها الشاقولي بزاوية $\theta_{max} = 60°$ ونتركها دون سرعة ابتدائية :
   a) استنتج بالرموز علاقة السرعة الزاوية لجملة النواس لحظة مرورها بشاقول محور التعليق، ثم احسب قيمتها عندئذٍ.
   b) احسب السرعة الخطية للكتلة النقطية m_2 لحظة مرورها بالشاقول.

$(\boldsymbol{g = 10m.s^{-2}, \pi^2 = 10})$

معطيات المسألة:

$$l = 1m \quad , \quad m_1 = 3 \times 10^{-1}kg \quad , \quad m_2 = 9 \times 10^{-1}kg$$

الحل:

.1

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{\overbrace{I_{\Delta_{\text{جملة}}}}^{?}}{\underbrace{m_{\text{جملة}}}_{?}\ g\ \underbrace{d}_{?}}} \quad , \quad m_{\text{جملة}} = m_1 + m_2$$

$$I_{\Delta_{\text{جملة}}} = I_{\Delta/m1} + I_{\Delta/m2}$$

$$I_{\Delta_{\text{جملة}}} = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 \qquad ; \quad r_1 = r_2 = \frac{l}{2}$$

$$I_{\Delta_{\text{جملة}}} = m_1\left(\frac{l}{2}\right)^2 + m_2\left(\frac{l}{2}\right)^2$$

$$I_{\Delta_{\text{جملة}}} = \frac{3\times10^{-1}}{4} + \frac{9\times10^{-1}}{4} = \frac{12\times10^{-1}}{4}$$

$$\boxed{\boldsymbol{I_{\Delta_{\text{جملة}}} = 3\times10^{-1}\ kg.m^2}}$$

$$m_{\text{جملة}} = m_1 + m_2$$

$$m_{\text{جملة}} = 3\times10^{-1} + 9\times10^{-1} = (3+9)\times10^{-1}$$

$$\boxed{\boldsymbol{m_{\text{جملة}} = 12\times10^{-1} kg}}$$

$$d = \frac{\sum m_i r_i}{\sum m_i}$$

$$d = \frac{-m_1 r_1 + m_2 r_2}{m_1 + m_2} \qquad ; \quad r_1 = r_2 = \frac{l}{2}$$

$$d = \frac{-3\times10^{-1}\times\frac{1}{2}+9\times10^{-1}\times\frac{1}{2}}{12\times10^{-1}} = \frac{(-3+9)\times10^{-2}}{2\times12\times10^{-1}}$$

$$d = \frac{6}{2\times12} = \frac{3_{\div3}}{12_{\div3}}$$

$$d = \frac{1}{4} = 0.25$$

$$\boxed{d = 25\times5^{-2}\ m}$$

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{3\times10^{-1}}{12\times10^{-1}\times10\times\frac{1}{4}}}$$

$$\pi^2 = 10 \Rightarrow \pi = \sqrt{10}$$

$$\boxed{T_0 = 2\ s}$$

.2

$$T_{0_{\text{بسيط}}} = T_{0_{\text{مركب}}}$$

$$2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} = 2$$

نربع الطرفين :

$$4\times10\left(\frac{l}{g}\right) = 4$$

$$40\ l = 4\ g$$

$$40\ l = 4\times10$$

$$40\ l = 40$$

$$l = \frac{40}{40}$$

$$\boxed{l = 1\ m}$$

.3

a)

نطبق نظرية الطاقة الحركية بين وضعين:

الوضع الأول: لحظة تركها من دون سرعة ابتدائية $\theta = \theta_{max} = 60° = \frac{\pi}{3} rad$

الوضع الثاني: لحظة المرور بالشاقول $\theta = 0$

$$\Delta \bar{E}_{k_{1\to2}} = \sum \bar{W}_{\vec{F}}$$

$$E_{k_2} - E_{k_1} = \bar{W}_{\vec{R}} + \bar{W}_{\vec{W}}$$

$\boldsymbol{E_{k_1} = 0}$

لأنها تُركت من دون سرعة ابتدائية

$\boldsymbol{\bar{W}_{\vec{R}} = 0}$

لأنَّ نقطة تأثيرها لا تنتقل

$$\frac{1}{2} I_\Delta\, \omega^2 = +m_{\text{جملة}} g h$$

ولكن $h = d(1 - \cos\theta_{max})$

$$\omega^2 = \frac{2m_{\text{جملة}} g d(1 - \cos\theta_{max})}{I_\Delta}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{2m_{\text{جملة}} g d(1 - \cos\theta_{max})}{I_\Delta}}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{2 \times 12 \times 10^{-1} \times 10 \times \frac{1}{4}(1 - \frac{1}{2})}{3 \times 10^{-1}}}$$

$$\omega = \sqrt{2 \times 4 \times 10 \frac{1}{4} \times \frac{1}{2}}$$

$$\boxed{\omega = \sqrt{10} = \pi\, rad.s^{-1}}$$

b)

$$v_{m_2} = r_2\omega \qquad ; \quad r_2 = \frac{l}{2}$$

$$v_{m_2} = \frac{l}{2}\omega = \frac{1}{2}(\pi)$$

$$\boxed{v_{m_2} = \frac{\pi}{2}\, m.s^{-1}}$$

****

دورة 2021 الدورة الثانية: (80 درجة)

يتألف نواس ثقلي مركب من قرص متجانس كتلته m نصـــف قطره $r = \frac{2}{3}m$ يمكن أن يهتز في مستو شاقولي حول محور أفقي ثابت مار بنقطة من محيطه.

المطلوب :

1- انطلاقاً من العلاقة العامة لدور النواس الثقلي المركب في حالة السـعات الزاوية الصـغيرة استنتج العلاقة المحددة لدوره الخاص بدلالة r ، ثم احسب قيمة هذا الدور.

2- احسب طول النواس البسيط المواقت لهذا النواس المركب .

3- نزيح النواس عن الشاقول زاوية $\theta_{max} > 0.24\, rad$, و نتركه دون سرعة ابتدائية فتكون السرعة الخطية لمركز عطالة النواس عند المرور بالشاقول $v = \frac{2\pi}{3} m.s^{-1}$ استنتج قيمة السعة الزاوية θ_{max} , علما أن :

(عزم عطالة ساق حول محور مارّ من مركزها وعمودي على مستويها $I_{\Delta/c} = \frac{1}{12}ml^2$)

$(\pi^2 = 10\,, \qquad g = 10m.s^{-1})$

معطيات المسألة:

$$r = \frac{2}{3} m$$

الحل:

.1

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{I_\Delta}{m \, g \, d}}$$

$$I_\Delta = I_{\Delta/c} + md^2$$

$$I_\Delta = \frac{1}{2} mr^2 + mr^2$$

$$I_\Delta = \frac{1}{2} mr^2 + \frac{1}{2}(2mr^2)$$

$$I_\Delta = \frac{3}{2} mr^2$$

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{3mr^2}{2mgr}} \qquad ; \ d = r$$

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{3}{2}\frac{r}{g}}$$

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{3 \times 2}{2 \times 3 \times 10}}$$

$$\boxed{T_0 = 2\,S}$$

.2

$$T_{0_{\text{بسيط}}} = T_{0_{\text{مركب}}}$$

$$2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} = 2$$

نربع الطرفين :

$$4 \times 10\left(\frac{l}{g}\right) = 4$$

$$4 \times 10\left(\frac{l}{10}\right) = 4$$

$$4l = 4$$

$$\boxed{l = 1\,m}$$

.3

$$v_c = \frac{2\pi}{3} m.s^{-1} \quad , \quad \theta_{max} > 0.24\,rad$$

نطبق نظرية الطاقة الحركية بين وضعين:

الوضع الأول: لحظة تركها من دون سرعة ابتدائية $\theta = \theta_{max}$

الوضع الثاني: لحظة المرور بالشاقول $\theta = 0$

$$E_{k_1} = 0$$

لأنها تُركت من دون سرعة ابتدائية

$$\overline{W}_{\vec{R}} = 0$$

لأنَّ نقطة تأثيرها لا تنتقل

$$\Delta\,\bar{E}_{k_{1\to2}} = \sum \overline{W}_{\vec{F}}$$

$$E_{k_2} - E_{k_1} = \overline{W}_{\vec{R}} + \overline{W}_{\vec{W}}$$

$$\frac{1}{2} I_\Delta\,\omega^2 - 0 = 0 + mgh$$

ولكن $h = d(1-\cos\theta_{max})$ و $d = r$ $\Leftarrow$ $\boldsymbol{h = r(1-\cos\theta_{max})}$

$$\frac{1}{2}I_\Delta\omega^2 = mgr(1-\cos\theta_{max})$$

$$;\ v = d\omega \Rightarrow \omega = \frac{v}{d} \Rightarrow \boldsymbol{\omega^2 = \frac{v^2}{d^2}}$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}mr^2\right)\frac{v^2}{r^2} = mgr(1-\cos\theta_{max})$$

$$\frac{3}{4}mv^2 = mgr(1-\cos\theta_{max})$$

$$(1-\cos\theta_{max}) = \frac{3mv^2}{4mgr}$$

$$(1-\cos\theta_{max}) = \frac{3}{4}\times\frac{40\times 3}{9\times 10\times 2}$$

$$1-\cos\theta_{max} = \frac{1}{2}$$

$$\cos\theta_{max} = 1-\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\boxed{\boldsymbol{\theta_{max} = \frac{\pi}{3}\ rad}}$$

****

دورة 2020 الدورة الأولى: (80 درجة)

يتألف نواس ثقلي بسيط من كرة صغيرة نعُدّها نقطة مادية كتلتها $m = 300g$ معلقة بخيط خفيف لا يمتط طوله $L = 1.44m$.

المطلوب :

1- احسب الدور الخاص لهذا النواس عندما يهتز بسعة زاوية $\theta_{max} = 0.4\ rad$.

2- نزيح النواس عن وضــع التوازن بزاوية $\theta_{max} > 0.24\ rad$ ويترك دون ســرعة ابتدائية، فتكون الســرعة الخطية لكرة النواس لحظة مرورها بالشـاقول $v = \frac{12}{\pi}\ m.s^{-1}$ ، احسـب قيمة θ_{max} .

3- استنتج بالرموز علاقة توتر خيط النواس لحظة مروره بالشاقول، ثم احسب قيمتها .

$$(\ g = 10 m.s^{-2}, \pi = 10)$$

معطيات المسألة:

$$m = 300 \times 10^{-3} = 3 \times 10^{-1} kg \ , \ L = 144 \times 10^{-2} m$$

الحل:

.1

$$\theta_{max} = 4 \times 10^{-1}\ rad \quad \text{ولكن} \quad \theta_{max} > 0.24$$

$$T'_0 = T_0 \left(1 + \frac{\theta_{max}^2}{16}\right) \ \dots \ (*)$$

يجب علينا حساب T_0 ثم التعويض في $(*)$

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} = 2\pi\sqrt{\frac{144 \times 10^{-2}}{10}}$$

$$\boldsymbol{\pi^2 = 10 \Rightarrow \pi = \sqrt{10}}$$

$$T_0 = 2 \times \sqrt{144 \times 10^{-2}} = 2 \times 12 \times 10^{-1}$$

$$\boxed{\boldsymbol{T_0 = 24 \times 10^{-1}\, s}}$$

$$T_0' = 24 \times 10^{-1}(1 + \frac{(4 \times 10^{-1})^2}{16})$$

$$T_0' = 24 \times 10^{-1}\left(1 + \frac{16 \times 10^{-2}}{16}\right)$$

$$T_0' = 24 \times 10^{-1}(1 + 1 \times 10^{-2})$$

$$T_0' = 24 \times 10^{-1}(100 \times 10^{-2} + 1 \times 10^{-2})$$

$$T_0' = 24 \times 10^{-1} \times 101 \times 10^{-2}$$

$$T_0' = 2424 \times 10^{-3} = 2.424\, s$$

$$\begin{array}{r} 0.01 \\ + \\ 1.00 \\ \hline 1.01 \end{array}$$

$$\boxed{\boldsymbol{T_0' = 2.424\, s}}$$

.2

$$\boldsymbol{\theta_{max}} = ?$$

نطبق نظرية الطاقة الحركية بين وضعين:

الوضع الأول: لحظة تركها من دون سرعة ابتدائية $\theta = \theta_{max}$

الوضع الثاني: لحظة المرور بالشاقول $\theta = 0$

$$E_{k_1} = 0$$

لأنها تُركت من دون سرعة ابتدائية

$$\overline{W}_{\vec{T}} = 0$$

لأنَّ حامل $\vec{T}$ عمودي على الانتقال في كل لحظة

$$\Delta \bar{E}_{k_{1\to 2}} = \sum \overline{W}_{\vec{F}}$$

$$E_{k_2} - E_{k_1} = \overline{W}_{\vec{T}} + \overline{W}_{\vec{W}}$$

$$E_{k_2} = \overline{W}_{\vec{W}}$$

$$\frac{1}{2}mv^2 = mgh$$

$$v^2 = 2gh$$

ولكن: $h = l(1 - \cos\theta_{max})$

$$v^2 = 2gl(1 - \cos\theta_{max})$$

$$1 - \cos\theta_{max} = \frac{v^2}{2gl}$$

$$\cos\theta_{max} = 1 - \frac{v^2}{2gl}$$

$$\cos\theta_{max} = 1 - \frac{(\frac{12}{\pi})^2}{2 \times 10 \times 144 \times 10^{-2}} = 1 - \frac{144}{2 \times 100 \times 144 \times 10^{-2}}$$

$$\cos\theta_{max} = 1 - \frac{144}{200 \times 144 \times 10^{-2}}$$

$$\cos\theta_{max} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\boxed{\theta_{max} = \frac{\pi}{3}\ rad}$$

.3

$$\sum \vec{F} = m.\vec{a}$$

$$\vec{W} + \vec{T} = m.\vec{a}$$

بالاسقاط على محور ينطبق على حامل $\vec{T}$ وبجهته (الناظم)

$$-W + T = m.a_c$$

$$-w + T = m.\frac{v^2}{l}$$

$$T = w + m.\frac{v^2}{l}$$

$$T = mg + m\frac{v^2}{l}$$

$$T = m(g + \frac{v^2}{l})$$

$$T = 3 \times 10^{-1}\left(10 + \frac{144}{10 \times 144 \times 10^{-2}}\right)$$

$$T = 3 \times 10^{-1} \times 20$$

$$\boxed{\boldsymbol{T = 6\ N}}$$

$$\boldsymbol{a_c = \frac{v^2}{r}}$$

$$\boldsymbol{r = l}$$

$$\boldsymbol{a_c = \frac{v^2}{l}}$$

****