التمرين الأول: اكتب بالشكل الأسي كلاً من الأعداد العقدية الآتية:

١- Z=(1+I)$\sqrt{3}.\,e^{\frac{\pi}{3}i}$

٢- Z=1+$e^{2\theta i}$;θ ∈ $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$

٣- Z=$\left(\frac{1-\sqrt{3}i}{1+i}\right)^5$

٤- Z=$(\sqrt{2}+\sqrt{2}i)(\cos\frac{\pi}{2}-i\sin\frac{\pi}{3})$

٥- Z=$(1+i\sqrt{3})^4.(\sqrt{3}+i)^5$

التمرين الثاني: لتكن الأعداد العقدية الممثلة بالنقاط:

$$Z_A=3\,,Z_B=1+2i\,,\;Z_C=-1+2i$$

١- مثّل النقاط في معلم متجانس.

٢- أوجد Z_N صورة A وفق دوران مركزه O وزاويته $\frac{\pi}{2}$.

٣- أوجد Z_R ليكون الرباعي OCNR متوازي أضلاع.

٤- أثبت تعامد المستقيمين AB وOR وأثبت أن OR=$\frac{1}{2}AB$.

التمرين الثالث: ليكن $\alpha=e^{\frac{2\pi}{3}i}$، احسب $(\alpha-1)(1+\alpha+\alpha^2)$

ثم استنتج أن $1+\alpha+\alpha^2$=0

التمرين الرابع: ليكن لدينا كثير الحدود: P(Z)=Z^3-3Z^2+3Z+7

١- أثبت أن P(-1)=0.

٢- اكتب P(Z) بالشكل: P(Z)=(Z+1)Q(Z).

٣- حل المعادلة P(Z)=0.

٤- A وB وC ثلاث نقاط تمثل حلول المعادلة، أثبت أن المثلث ABC متساوي الأضلاع.

التمرين الخامس: ليكن لدينا: $Z^3-2(2+i)Z^2+(5+8i)Z-10i=0$.

١- حل في C المعادلة إذا علمت أنها تقبل حلاً تخيلياً بحتاً.

٢- لتكن A،B،C تمثل حلول المعادلة، أثبت أن A,B,C,O تشكل رؤوس متوازي أضلاع بعد تمثيل النقاط في معلم متجانس.

التمرين السادس: لتكن لدينا الأعداد العقدية:

$$Z_1=1+i\,,\;Z_2=2\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right),Z_1=-\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{6}}.$$

١- اكتب Z_1وZ_2وZ_3 بالشكل الأسي.

٢- مستفيداً من الطلب السابق، أثبت أن $\left(\frac{(Z_1)^2}{(Z_2)^3(Z_3)^6}\right)$ تخيلي بحت.

٣- أوجد $Z_1.Z_2$ جبرياً ومثلثياً واستنتج $\sin\frac{11\pi}{12}$.

التمرين السابع: ليكن العدد العقدي $w = \frac{2+\bar{z}}{1+\bar{z}}$ حيث Z≠-1.

١- عيّن مجموعة النقاط $w(Z)$ التي تجعل w حقيقياً.
٢- عيّن مجموعة النقاط $w(Z)$ التي تجعل w تخيلياً بحتاً.

التمرين الثامن: لتكن النقطتان $G(2+3i)$ و $H(1+(2+\sqrt{2}i))$.

١- أوجد العدد العقدي الممثل للنقطة M صورة النقطة G وفق التناظر المحوري الذي محوره OX.
٢- ليكن R الدوران الذي مركزه $\rho(1+2i)$ والمحقق لـ R(G)=H.
احسب قياس الزاوية $\overrightarrow{\rho G}, \overrightarrow{\rho H}$ واستنتج الصيغة العقدية للدوران R.

التمرين التاسع: ليكن لدينا في المستوي العقدي النقاط A,B,C,D التي تمثل الأعداد العقدية.

$a=\sqrt{3}+i$, $b=-a$, $c=\sqrt{3}+3i$, $d=\bar{c}$

١- احسب $\frac{a-d}{a-c}$ وماذا تستنتج.
٢- وضع النقاط A,B,C في شكل ثم احسب النسبة $\frac{c-a}{c+a}$ ثم احسب قياس الزاوية $(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AC})$.
٣- عيّن العدد العقدي n الممثل بالنقطة N التي تجعل ACBN متوازي أضلاع.

التمرين العاشر: نتأمل في معلم متجانس $(o, \vec{u}, \vec{v})$ النقطتين A,B الممثلتين بالعددين العقديين: $a=3+3i$ $b=3-3i$.

١- بيّن أنّ a,b هما جذرا المعادلة: $Z^2-6Z+18=0$ في C.
٢- اكتب a,b بالشكل المثلثي ثم استنتج أن: $a^4+b^4+342=0$.
٣- أوجد الصيغة العقدية للانسحاب T الذي شعاعه $\overrightarrow{OA}$.
٤- بيّن أنّ العدد العقدي الذي يمثل B' صورة B وفق الانسحاب T هو b'=6.
٥- بيّن أنّ النسبة $\frac{b-b'}{a-b'}=i$ ، ثم استنتج طبيعة المثلث (ABB').
٦- بيّن أنّ الرباعي (OAB'B) مربع.

التمرين الحادي عشر:

١- أوجد بالشكل الأسي حلول المعادلة $Z^3=i$.

٢- حل في C المعادلة $2iZ+\bar{z}=3+3i$.

٣- بفرض أنّ u≠1 وأنّ العدد $w=\frac{z-u\bar{z}}{1-u}$ حقيقي، أثبت أنّه إمّا Z حقيقي أو $|u|=1$.

٤- حل في C المعادلة $Z^2+(1+4i)Z-5-i=0$

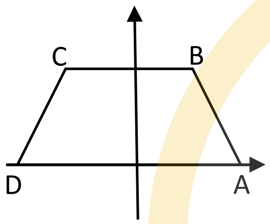
التمرين الثاني عشر: لتكن النقطتان A,B اللتان تمثلهما الأعداد العقدية 3-2i و ٢ على الترتيب.

مثّل في كل من الحالتين الآتيتين مجموعة النقاط M(z) التي تحقق:

١- $\left|\frac{z-3+2i}{\bar{z}-2}\right|=1$

٢- $|z-3+2i|=|3+4i|$

التمرين الثالث عشر: في الشكل المجاور مثلثٌ في معلم متجانس نصف مسدس منتظم ABCD النقاط A,B,C,D تمثلهما الأعداد العقدية a,b,c,d على الترتيب.



١- إذا علمت أنّ a=2، أوجد الأعداد العقدية b,c,d

٢- احسب $\arg\left(\frac{d-c}{a-c}\right)$ ثم استنتج نوع المثلث ACD.

انتهت الأسئلة

Subject: حل تمارين شاملة في الأعداد العقدية وتطبيقاتها

حل التمرين الأول:

[1] $Z = (1+i)\sqrt{3}\, e^{\frac{\pi}{3}i}$

لنكتب $(1+i)$ بالشكل الأسي:

$r = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{2}$

$\cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ، $\sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ $\Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4}$

$\Rightarrow 1+i = \sqrt{2}\, e^{i\frac{\pi}{4}}$

$\Rightarrow Z = \sqrt{2}\, e^{i\frac{\pi}{4}} \cdot \sqrt{3} \cdot e^{\frac{\pi}{3}i}$
$= \sqrt{6}\, e^{i(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{3})} = \boxed{\sqrt{6}\, e^{i\frac{7\pi}{12}}}$

[2] $Z = 1 + e^{2\theta i}$; $\theta \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$

$Z = e^{i\theta}\left(\frac{1}{e^{i\theta}} + e^{\theta i}\right)$

$= e^{\theta i}\underbrace{\left(e^{-\theta i} + e^{\theta i}\right)}_{\text{دستور أولر}}$

الشكل الأسي لـ Z: $\boxed{Z = 2\cos\theta \cdot e^{\theta i}}$

بما أن $\theta \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\Rightarrow \cos\theta > 0$

[3] $Z = \left(\frac{1-\sqrt{3}i}{1+i}\right)^5$

لنكتب $(1-\sqrt{3}i)$ بالشكل الأسي:

$r = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{1+3} = 2$

$\cos\theta = \frac{1}{2}$ ، $\sin\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ $\Rightarrow \theta = -\frac{\pi}{3}$ ربع رابع

ومنه: $1-\sqrt{3}i = 2\, e^{-\frac{\pi}{3}i}$

لنكتب $(1+i)$ بالشكل الأسي:

$r = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$

$\cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ، $\sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ $\Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4}$

ومنه: $1+i = \sqrt{2}\, e^{\frac{\pi}{4}i}$

$\Rightarrow Z = \left(\frac{2\, e^{-\frac{\pi}{3}i}}{\sqrt{2}\, e^{\frac{\pi}{4}i}}\right)^5$

$= \left(\sqrt{2}\, e^{(-\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4})i}\right)^5 = 4\sqrt{2}\left(e^{-\frac{7\pi}{12}}\right)^5$

$= 4\sqrt{2}\, e^{-\frac{35}{12}\pi i}$

التعيين الأساسي: $-\frac{35}{12}\pi + 2\pi = -\frac{11\pi}{12}$

ومنه الشكل الأسي لـ Z:

$\boxed{Z = 4\sqrt{2}\, e^{-\frac{11\pi}{12}i}}$

[4] $Z = (\sqrt{2}+\sqrt{2}i)\left(\cos\frac{\pi}{3} - i\sin\frac{\pi}{3}\right)$

لنكتب $\sqrt{2}+\sqrt{2}i$ بالشكل الأسي:

$r = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{2+2} = 2$

$\cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ، $\sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ $\Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4}$

ومنه: $\sqrt{2}+\sqrt{2}i = 2\, e^{\frac{\pi}{4}i}$

ولنكتب $\cos\frac{\pi}{3} - i\sin\frac{\pi}{3}$ بالشكل الأسي:

$\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) = e^{-\frac{\pi}{3}i}$

$\Rightarrow Z = 2e^{\frac{\pi}{4}i} \cdot e^{-\frac{\pi}{3}i}$

$= 2e^{(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{3})i} = \boxed{2e^{-\frac{\pi}{12}i}}$

5 $Z = (1+i\sqrt{3})^4 \cdot (\sqrt{3}+i)^5$

لنكتب $1+i\sqrt{3}$ بالشكل الأسي:

$r = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{1+3} = 2$

$\left.\begin{array}{l} \cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{1}{2} \\ \sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{3}$

$1+i\sqrt{3} = 2e^{\frac{\pi}{3}i}$

ولنكتب $\sqrt{3}+i$ بالشكل الأسي:

$r = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{3+1} = 2$

$\left.\begin{array}{l} \cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{1}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{6}$

$\sqrt{3}+i = 2e^{\frac{\pi}{6}i}$

$\Rightarrow Z = (2e^{\frac{\pi}{3}i})^4 \cdot (2e^{\frac{\pi}{6}i})^5$

$= 2^4 e^{\frac{4\pi}{3}i} \cdot 2^5 e^{\frac{5\pi}{6}i}$

$= 2^9 e^{(\frac{4\pi}{3}+\frac{5\pi}{6})i}$

$= 2^9 e^{\frac{13}{6}\pi i}$

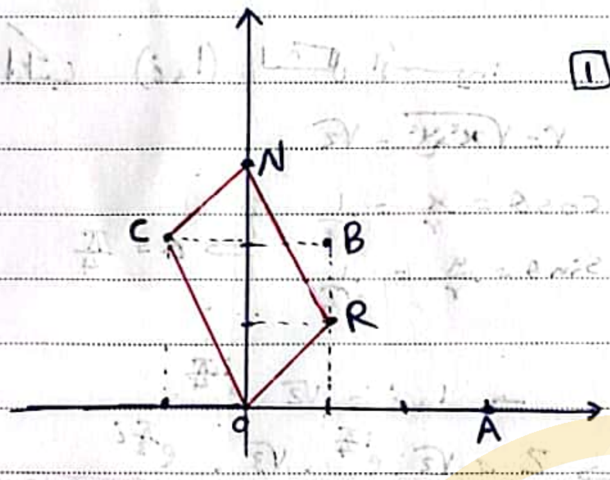
القياس الأساسي: $\frac{13\pi}{6} - 2\pi = \frac{\pi}{6}$

$\Rightarrow Z = \boxed{2^9 e^{\frac{\pi}{6}i}}$

حل التمرين الثالث:

$A(3,0)$, $B(1,2)$, $C(-1,2)$

1



2 $Z_N - Z_O = e^{\frac{\pi}{2}i}(Z_A - Z_O)$

$\boxed{Z_N = 3i}$

3 لتكوين الشكل OCNR متوازي أضلاع:

$Z_{\overrightarrow{OR}} = Z_{\overrightarrow{CN}}$

$\Rightarrow r - o = n - c$

$\Rightarrow r = 3i - (-1+2i) \Rightarrow \boxed{r = 1+i}$

4 $\frac{Z_{\overrightarrow{OR}}}{Z_{\overrightarrow{AB}}} = \frac{r-o}{b-a} = \frac{1+i}{1+2i-3} = \frac{1+i}{-2+2i}$

$= \frac{(1+i)(-2-2i)}{(-2+2i)(-2-2i)} = -\frac{1}{2}i$

* $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{OR}) = \arg\left(\frac{r-o}{b-a}\right) = \arg(-\frac{1}{2}i) = -\frac{\pi}{2}$

$\Rightarrow \boxed{OR \perp AB}$

* $\frac{|Z_{\vec{OR}}|}{|Z_{\vec{AB}}|} = |-\frac{1}{2}i| \Rightarrow \frac{OR}{AB} = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow OR = \frac{1}{2}AB$

حل التمرين الثالث:

لحساب: $(\alpha-1)(1+\alpha+\alpha^2)$

$= \alpha+\alpha^2+\alpha^3-1-\alpha-\alpha^2 = \alpha^3-1$

بما أنه $\alpha = e^{\frac{2\pi}{3}i}$

$\Rightarrow \alpha^3 = e^{2\pi i} = 1$

فإنه: $\alpha^3-1 = 1-1 = 0$

$\Rightarrow (\alpha-1)(1+\alpha+\alpha^2) = 0$

* استنتاج أنه $1+\alpha+\alpha^2 = 0$

لدينا $(\alpha-1)(1+\alpha+\alpha^2) = 0$

$\alpha-1$ ليست صفراً لأنه $\alpha = e^{\frac{2\pi}{3}i}$

$\Rightarrow \boxed{1+\alpha+\alpha^2 = 0}$

طلب إضافي:

حل المعادلة $1+\alpha+\alpha^2 = 0$

ثم تحقق أنه $\alpha^2 = \bar{\alpha}$

$\Delta = b^2-4ac = 1-4 = -3 = 3i^2$

$\alpha_1 = \frac{-1-\sqrt{3}i}{2}$, $\alpha_2 = \frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$

ولنتحقق أنه: $\alpha^2 = \bar{\alpha}$

$\alpha^2 = (e^{\frac{2\pi}{3}i})^2 = e^{\frac{4\pi}{3}i}$

$\frac{4\pi}{3} - 2\pi = -\frac{2\pi}{3}$ التعيين الأساسي

$\Rightarrow \alpha^2 = e^{-\frac{2\pi}{3}i} = \bar{\alpha}$

حل التمرين الرابع:

1) $P(-1) = (-1)^3 - 3(-1)^2 + 3(-1) + 7$

$= -1 - 3 - 3 + 7 = 0$

2)
$$\begin{array}{r|l} Z^3 - 3Z^2 + 3Z + 7 & Z+1 \\ \hline \mp Z^3 \mp Z^2 & Z^2 - 4Z + 7 \\ -4Z^2 + 3Z + 7 & \\ \pm 4Z^2 \pm 4Z & \\ 7Z + 7 & \\ \mp 7Z \mp 7 & \\ 0 & \end{array}$$

$\Rightarrow P(Z) = (Z+1)(Z^2-4Z+7)$

3) $P(Z) = 0$

$\Rightarrow (Z+1)(Z^2-4Z+7) = 0$

إما $Z+1 = 0 \Rightarrow Z = -1$

أو $Z^2-4Z+7 = 0$

$\Delta = b^2-4ac = 16-4(1)(7) = -12 < 0$

لها حلان عقديان مترافقان في C

$\Delta = i^2 12 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = 2\sqrt{3}i$

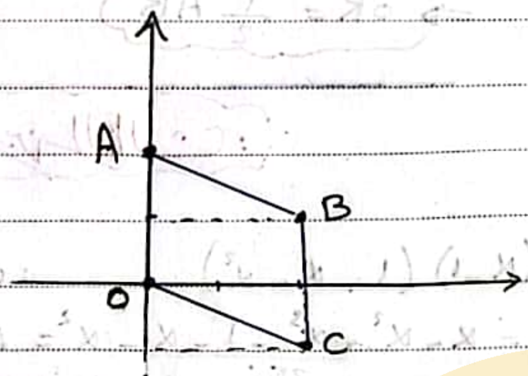
$Z_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{4+2\sqrt{3}i}{2} = 2+\sqrt{3}i$

$Z_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = 2-\sqrt{3}i$

$Z = 2i \Rightarrow A(0,2)$ $\boxed{2}$

$Z_1 = 2+i \Rightarrow B(2,1)$

$Z_2 = 2-i \Rightarrow C(2,-1)$



$Z_{\overrightarrow{AB}} = (2-0)+(1-2)i = 2-i$

$Z_{\overrightarrow{OC}} = (2-0)+(-1-0)i = 2-i$

أي أنه: $\Rightarrow Z_{\overrightarrow{AB}} = Z_{\overrightarrow{OC}}$

ABCO متوازي أضلاع.

4) $Z = -1 \Rightarrow A(-1,0)$

$Z_1 = 2+\sqrt{3}i \Rightarrow B(2,\sqrt{3})$

$Z_2 = 2-\sqrt{3}i \Rightarrow C(2,-\sqrt{3})$

$AB = \sqrt{(2+1)^2+(\sqrt{3}-0)^2} = 2\sqrt{3}$

$AC = \sqrt{(2+1)^2+(-\sqrt{3}-0)^2} = 2\sqrt{3}$

$BC = \sqrt{(2-2)^2+(-\sqrt{3}-\sqrt{3})^2} = 2\sqrt{3}$

$\Rightarrow AB = AC = BC = 2\sqrt{3}$

فالمثلث ABC متساوي الأضلاع

حل التمرين الخامس:

$\boxed{1}$ بما أن المعادلة تقبل حلاً تخيلياً بحتاً ومن الدرجة الثالثة يمكن كتابتها بالشكل:

$(Z-ai)(Z^2+bZ+c)=0$

$Z^3+bZ^2+cZ-aiZ^2-aibZ-aic=0$

$Z^3+(b-ai)Z^2+(c-abi)Z-aci=0$

بالمقارنة مع الفرض:

$b-ai = -4-2i \Rightarrow \begin{cases} \boxed{b=-4} \\ \boxed{a=2} \end{cases}$

$c-abi = 5+8i \Rightarrow \boxed{c=5}$

وبالتالي نجد:

$(Z-2i)(Z^2-4Z+5)=0$

أما $Z-2i=0 \Rightarrow Z=2i$

أو $Z^2-4Z+5=0$

$\Delta = 16-4(1)(5) = -4 = 4i^2$

$\sqrt{\Delta} = 2i$

$Z_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{4+2i}{2} = 2+i$

$Z_2 = 2-i$

حل التمرين السادس:

نكتب $Z=1+i$ بالشكل الأسي:

$r = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$

$\left.\begin{aligned} \cos\theta &= \frac{x}{r} = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \sin\theta &= \frac{y}{r} = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4}$

$\Rightarrow Z_1 = re^{i\theta} = \boxed{\sqrt{2}\,e^{i\frac{\pi}{4}}}$

$Z_2 = 2\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right) = \boxed{2\,e^{i\frac{2\pi}{3}}}$

$Z_3 = -\sqrt{3}\,e^{i\frac{\pi}{6}} = e^{i\pi}\cdot\sqrt{3}\cdot e^{i\frac{\pi}{6}} = \boxed{\sqrt{3}\,e^{\frac{7\pi}{6}i}}$

Subject : .... / /

2)

$$\frac{(Z_1)^2}{(Z_2)^3(Z_3)^6} = \frac{\left(\sqrt{2}\, e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^2}{\left(2e^{i\frac{2\pi}{3}}\right)^3\cdot\left(\sqrt{3}\cdot e^{\frac{7\pi}{6}i}\right)^6}$$

$$= \frac{2e^{i\frac{\pi}{2}}}{8e^{2\pi i}\cdot(27)\cdot e^{i7\pi}}$$

$$= \frac{1}{108}\, e^{i\left(\frac{\pi}{2}-2\pi-7\pi\right)} = \frac{1}{108}\cdot e^{-\frac{\pi}{2}i}$$

$$\boxed{= -\frac{1}{108}i}$$

3)

$$Z_2 = 2\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right)$$

$$= 2\left[-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right] = -1+\sqrt{3}i$$

$$\Rightarrow Z_1\cdot Z_2 = (1+i)(-1+\sqrt{3}i)$$

$$= -1+\sqrt{3}i - i - \sqrt{3}$$

(1) $\Rightarrow \boxed{Z_1 Z_2 = (-1-\sqrt{3}) + i(\sqrt{3}-1)}$ الشكل الجبري

$$Z_1 Z_2 = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}\cdot 2e^{\frac{2\pi}{3}i}$$

$$= 2\sqrt{2}\, e^{\frac{11\pi}{12}i}$$

$\boxed{= 2\sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{11\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{11\pi}{12}\right)\right]}$ الشكل المثلثي

بمقارنة الشكل المثلثي والجبري لـ $Z_1 . Z_2$ نجد:

$$\sqrt{3}-1 = 2\sqrt{2}\sin\left(\frac{11\pi}{12}\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{\sin\left(\frac{11\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}}$$

حل التمرين السابع:

$z\neq -1$ حيث $w = \frac{2+\bar{z}}{1+\bar{z}}$

نفرض $w = \alpha+\beta i$

$z = x+yi$

$$w = \frac{2+x-yi}{1+x-yi} = \frac{(2+x-yi)(1+x+yi)}{(1+x-yi)(1+x+yi)}$$

$$w = \frac{x^2+3x+y^2+2+yi}{(1+x)^2+y^2}$$

$$\Rightarrow \alpha+\beta i = \frac{x^2+3x+y^2+2}{(1+x)^2+y^2} + \frac{y}{(1+x)^2+y^2}i$$

حقيقي = حقيقي

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{x^2+3x+y^2+2}{(1+x)^2+y^2} = \alpha \\ \frac{y}{(1+x)^2+y^2} = \beta \end{cases}$$

تخيلي = تخيلي

(1) متى يكون w حقيقي يجب أن يكون جزئه التخيلي معدوم أي $\beta=0 \Rightarrow$:

$$\boxed{y=0}$$

مجموعة النقاط تمثل مستقيم محذوف منه النقطة $(-1,0)$ التي تعدم المقام

(2) متى يكون w تخيلي يجب أن يكون جزئه الحقيقي معدوم أي $\alpha=0 \Rightarrow$

$$x^2+3x+y^2+2=0$$

$$\Rightarrow x^2+3x+\frac{9}{4}-\frac{9}{4}+y^2+2=0$$

$$\Rightarrow \boxed{\left(x+\frac{3}{2}\right)^2+y^2=\frac{1}{4}}$$

مجموعة النقاط تمثل معادلة دائرة مركزها $(-\frac{3}{2},0)$ ونصف قطرها $\frac{1}{2}$ محذوف منها النقطة $(-1,0)$

AL.SAMRAH

حل التمرين الثامن:

1) M نظيرة G بالنسبة لـ xx':

$$Z_M = \overline{Z_G}$$

$$\Rightarrow Z_M = 2-3i$$

2)

$$Z_H - Z_P = e^{\theta i}(Z_G - Z_P)$$

$$\Rightarrow e^{\theta i} = \frac{Z_H - Z_P}{Z_G - Z_P}$$

$$= \frac{1+(2+\sqrt{2})i - (1+2i)}{2+3i-(1+2i)}$$

$$= \frac{\sqrt{2}\,i}{1+i}\cdot\left(\frac{1-i}{1-i}\right) = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{2}\,i}{2}$$

$$e^{i\theta} = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i = e^{i\frac{\pi}{4}}$$

$$\Rightarrow \boxed{\theta = \frac{\pi}{4}}$$

إذاً الصيغة العقدية للدوران:

$$Z_H - Z_P = e^{\frac{\pi}{4}i}(Z_G - Z_P)$$

حل التمرين التاسع:

1)

$$\frac{a-d}{a-c} = \frac{\sqrt{3}-i-\bar{c}}{\sqrt{3}-i-(\sqrt{3}+3i)}$$

$$= \frac{\sqrt{3}-i-(\sqrt{3}+i)}{-4i} = \frac{-2i}{-4i} = \frac{1}{2}$$

نستنتج أن النقاط A , C , D على استقامة واحدة.

2)

$a = \sqrt{3} - i \Rightarrow A(\sqrt{3}, -1)$

$b = -a = -\sqrt{3} + i \Rightarrow B(-\sqrt{3}, 1)$

$c = \sqrt{3} + 3i \Rightarrow C(\sqrt{3}, 3)$

$$\frac{c-a}{c+a} = \frac{c-a}{c-b}$$

$$= \frac{\sqrt{3}+3i-(\sqrt{3}-i)}{\sqrt{3}+3i+\sqrt{3}-i}$$

$$= \frac{4i}{2\sqrt{3}+2i}$$

$$= \frac{2i}{\sqrt{3}+i}\cdot\left(\frac{\sqrt{3}-i}{\sqrt{3}-i}\right)$$

$$= \frac{2i(\sqrt{3}-i)}{4} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

حل التمرين العاشر:

1] $AZ^2+BZ+C=0 \Leftarrow Z^2-6Z+18=0$

متى يكون a,b جذرين للمعادلة يجب أن تتحقق

$$a+b=-\frac{B}{A}=6$$
$$a.b=\frac{C}{A}=18$$

نلاحظ أن

$$a+b=3+3i+3-3i=6=-\frac{B}{A}$$
$$a.b=(3+3i)(3-3i)=9+9=18=\frac{C}{A}$$

وبالتالي نستنتج أنه: a , b جذرين للمعادلة.

2] من أجل $a=3+3i$ نجد:

$$r=\sqrt{9+9}=3\sqrt{2}$$
$$\left.\begin{array}{l}\cos\theta=\frac{x}{r}=\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \sin\theta=\frac{y}{r}=\frac{1}{\sqrt{2}}\end{array}\right\}\Rightarrow \theta=\frac{\pi}{4}$$

ومنه

$$a=re^{i\theta}=3\sqrt{2}\,e^{\frac{\pi}{4}i}$$
$$=3\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$$

وبما أن b مرافق a نجد:

$$b=3\sqrt{2}\,e^{-\frac{\pi}{4}i}$$
$$=3\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$$

*

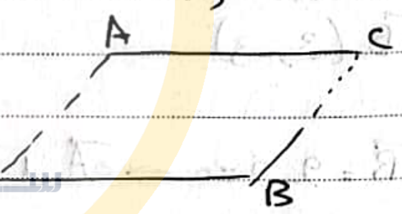
$$l_1=a^4+b^4+648$$
$$=\left(3\sqrt{2}\,e^{\frac{\pi}{4}i}\right)^4+\left(3\sqrt{2}\,e^{-\frac{\pi}{4}i}\right)^4+648$$
$$=81\times4\times e^{i\pi}+81\times4\times e^{-\pi i}+648$$
$$=-324-324+648=0=l_2$$

$$\frac{c-a}{c+a}=e^{\frac{\pi}{3}i}$$

$$\Rightarrow \arg\left(\frac{c-a}{c-b}\right)=\arg\left(e^{\frac{\pi}{3}i}\right)$$
$$\Rightarrow (\vec{BC},\vec{AC})=\frac{\pi}{3}$$
$$\Rightarrow \left|\frac{c-a}{c+a}\right|=\left|e^{\frac{\pi}{3}i}\right|=1$$
$$\Rightarrow \frac{AC}{BC}=1\Rightarrow AC=BC$$

المثلث ABC متساوي الساقين وفيه زاوية $\frac{\pi}{3}$ فهو متساوي الأضلاع

3]



$$Z_{\vec{AC}}=Z_{\vec{NB}}$$
$$c-a=b-n$$
$$\Rightarrow 4i=b-n$$
$$\Rightarrow n=b-4i=-\sqrt{3}+i-4i$$
$$\Rightarrow \boxed{n=-\sqrt{3}-3i}$$

Subject:

3 ليكن w العدد العقدي الممثل للشعاع

$\vec{OA} = 3\vec{u} + 3\vec{v}$

وبالتالي: $w = 3+3i$

ومنه الصيغة العقدية للانسحاب T

الذي شعاعه $\vec{OA}$ هي:

$z' = z + w$

ومنه:

$$\boxed{z' = z + 3 + 3i}$$

4

$b' = b + 3 + 3i$

$= 3 - 3i + 3 + 3i = 6$

$$\frac{b-b'}{a-b'} = \frac{3-3i-6}{3+3i-6}$$

$$= \frac{1+i}{1-i} = \frac{(1+i)^2}{2} = i$$

ومنه:

5 $\arg\left(\frac{b-b'}{a-b'}\right) = \arg(i) = \frac{\pi}{2}$

$\Rightarrow (\vec{B'A}, \vec{B'B}) = \frac{\pi}{2}$

ونستنتج أنه:

المثلث (ABB') قائم في B'

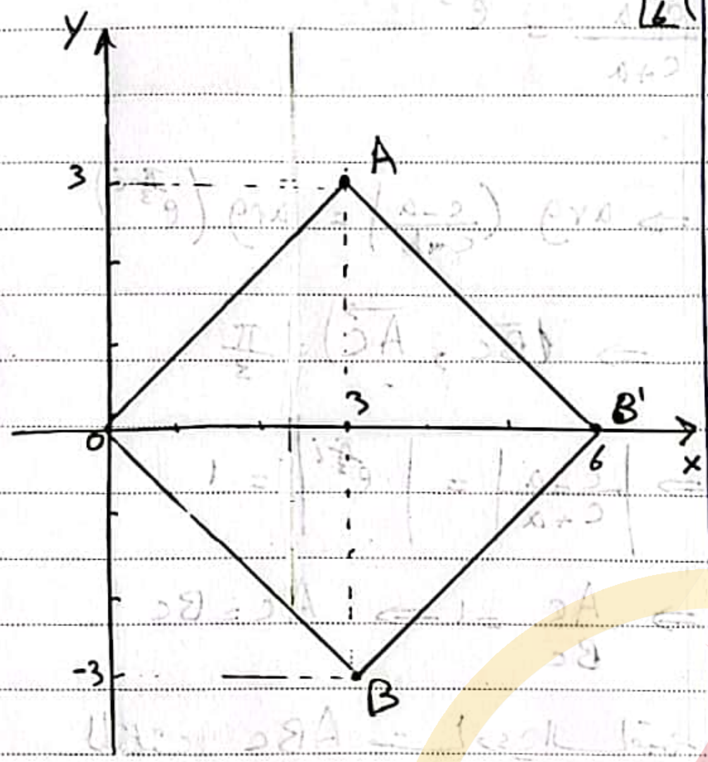
وأنه:

$$\left|\frac{b-b'}{a-b'}\right| = |i| = 1$$

$$\Rightarrow \frac{BB'}{AB'} = 1 \Rightarrow AB' = BB'$$

إذاً المثلث (ABB') قائم في B' ومتساوي الساقين

6



نلاحظ أنه:

$\vec{OA}(3,3)$

$\vec{OB}(3,-3)$

$\vec{OA}\cdot\vec{OB} = 9-9=0 \Rightarrow \vec{OA}\perp\vec{OB}$

$\Rightarrow OA = OB = \sqrt{9+9} = 3\sqrt{2}$

وبالتالي الرباعي $(OAB'B)$ فيه:

$OA \perp OB$

$OA = OB$

مربع $\Leftarrow (OAB'B)$

حل التمرين الحادي عشر:

$\boxed{2}$ حل في $\mathbb{C}$:

$$2iZ + \bar{Z} = 3+3i$$

نفرض $Z = x+yi$

$$\Rightarrow \bar{Z} = x - yi$$

نعوض:

$$2i(x+yi) + x - yi = 3+3i$$

$$\Rightarrow (x-2y) + i(2x-y) = 3+3i$$

بالمطابقة $\Rightarrow$

$$\begin{cases} x-2y=3 & ① \\ 2x-y=3 & ② \end{cases}$$

نحل المشترك نجد:

$$\begin{cases} 2x-4y=6 \\ 2x-y=3 \end{cases}$$ بطرح

$$\Rightarrow \boxed{y=-1}$$

نعوض بـ ②

$$\boxed{x=1}$$

ومنه حل المعادلة:

$$\boxed{Z = x+yi = 1-i}$$

$\boxed{3}$ بما أن w عدد حقيقي فهو يساوي مرافقه أي:

$$\frac{Z-u\bar{Z}}{1-u} = \frac{\bar{Z}-\bar{u}Z}{1-\bar{u}}$$

$$\Rightarrow (Z-u\bar{Z})(1-\bar{u}) = (\bar{Z}-\bar{u}Z)(1-u)$$

$$\Rightarrow Z - Z\bar{u} - u\bar{Z} + u\bar{u}\bar{Z} = \bar{Z} - \bar{u}Z - u\bar{Z} + u\bar{u}Z$$

ننقل جميع الحدود إلى طرف واحد:

$$Z - \bar{Z} + u\bar{u}\bar{Z} - u\bar{u}Z = 0$$

$$Z - \bar{Z} - u\bar{u}(Z-\bar{Z}) = 0$$

$$\Rightarrow (Z-\bar{Z})(1-u\bar{u}) = 0$$

$\Rightarrow$ إما $Z - \bar{Z} = 0 \Rightarrow Z = \bar{Z} \Rightarrow$ Z حقيقي

أو $1 - u\bar{u} = 0 \Rightarrow u\bar{u} = 1 \Rightarrow |u| = 1$

$\boxed{4}$ $a=1$, $b=1+4i$, $c=-5-i$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$= (1+4i)^2 - 4(1)(-5-i)$$

$$\Delta = 5+12i$$

نوجد الجذرين التربيعيين لـ Δ.

نفرض $x+yi$ هو جذر تربيعي لـ Δ:

① $x^2+y^2 = \sqrt{25+144} = 13$

② $x^2-y^2 = 5$

③ $2xy = 12 > 0$

بجمع ①، ②:

$$2x^2 = 18 \Rightarrow x^2 = 9 \Rightarrow \begin{cases} x=3 \\ x=-3 \end{cases}$$

نعوض بـ ③ نجد: $\begin{cases} y=2 \\ y=-2 \end{cases}$

$$Z_1 = \frac{-(1+4i)-3-2i}{2} = -2-3i$$

$$Z_2 = \frac{-(1+4i)+3+2i}{2} = 1-i$$

Subject :

1

$Z^3 = i$

بفرض $Z = re^{i\theta}$

عندئذٍ:

$(re^{i\theta})^3 = e^{i\frac{\pi}{2}}$

$\Rightarrow r^3 . e^{3\theta i} = e^{i\frac{\pi}{2}}$

$\Rightarrow \begin{cases} r^3 = 1 \Rightarrow r = 1 \\ 3\theta = \frac{\pi}{2} + 2\pi K \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3}K \end{cases}$

حيث K عدد صحيح

$K = 0 \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{6}$

$\Rightarrow \boxed{Z_1 = e^{i\frac{\pi}{6}}}$

$K = 1 \Rightarrow \theta = \frac{5\pi}{6}$

$\Rightarrow Z_2 = e^{i\frac{5\pi}{6}}$

$K = 2 \Rightarrow \theta = \frac{3\pi}{2}$

$\Rightarrow Z_3 = e^{i\frac{3\pi}{2}}$

وأن النقاط التي تمثل الحلول تشكل رؤوس مثلث متساوي الأضلاع.

حل التمرين الثاني عشر:

1

$\left| \frac{Z - 3 + 2i}{\overline{Z} - 2} \right| = 1$

$\Rightarrow \frac{|Z - 3 + 2i|}{|\overline{Z} - 2|} = 1$

$\Rightarrow |Z - (3 - 2i)| = |\overline{Z} - 2|$

$\Rightarrow |Z - Z_A| = |Z - 2|$

$\Rightarrow |Z - Z_A| = |Z - Z_B|$

$\Rightarrow MA = MB$

ومنه $M(Z)$ تمثل محور القطعة المستقيمة $[AB]$

2

$|Z - 3 + 2i| = |3 + 4i|$

$\Rightarrow |Z - (3 - 2i)| = |3 + 4i|$

$\Rightarrow |Z - Z_A| = \sqrt{9 + 16} = 5$

$\Rightarrow |Z - Z_A| = 5$

$\Rightarrow \boxed{MA = 5}$

ومنه $M(Z)$ تمثل دائرة مركزها A ونصف قطرها 5

Subject :

حل التمرين الثالث ع :

1

D نظيرة A بالنسبة لـ O ⟸

$\boxed{d = -2}$

B صورة A وفق دوران مركزه O

وزاويته $\frac{\pi}{3}$

$\Rightarrow b = e^{i\frac{\pi}{3}} a$

$\Rightarrow b = (\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3})(2)$

$\Rightarrow \boxed{b = 1 + \sqrt{3}i}$

c صورة A وفق دوران مركزه O

وزاويته $\frac{2\pi}{3}$

$\Rightarrow c = e^{\frac{2\pi}{3}i} a$

$\Rightarrow \boxed{c = -1 + \sqrt{3}i}$

2

$\frac{d-c}{a-c} = \frac{-2+1-\sqrt{3}i}{2+1-\sqrt{3}i}$

$= \frac{-1-\sqrt{3}i}{3-\sqrt{3}i}$

$\frac{-1-\sqrt{3}i}{3-\sqrt{3}i} \cdot \left(\frac{3+\sqrt{3}i}{3+\sqrt{3}i}\right) = \frac{+1}{\sqrt{3}} i$

$\Rightarrow \arg\left(\frac{d-c}{a-c}\right) = +\frac{\pi}{2}$

⟸ ACD قائم في C

أ. معتز شحادة